

Formes et Maillage 3D

HAI605I

Définition

Modélisation

- Décrire un objet ou un phénomène par un ensemble de nombres et une structure entre ces nombres.
- Thème transverse : biologie, physique, chimie, sociologie, économie.
- Au cœur de la « science » informatique : les ordinateurs ne savent manipuler qu'un ensemble fini de nombres.

Définition

Modélisation Géométrique

- Décrire la forme d'un objet par un ensemble de valeurs.
- En pratique dans un espace de dimension 2, **3** ou 4 (3D+t)
- Cas 3D: **Surfaces** et volumes

Principe

1. Choix d'une **représentation**
2. Spécification des valeurs caractéristiques de cette représentation pour un objet donné
 - Conception virtuelle à l'aide de modeleurs 3D
 - Numérisation 3D
3. Manipulation de ces valeurs
 - Traitement automatique
 - Manipulation interactive

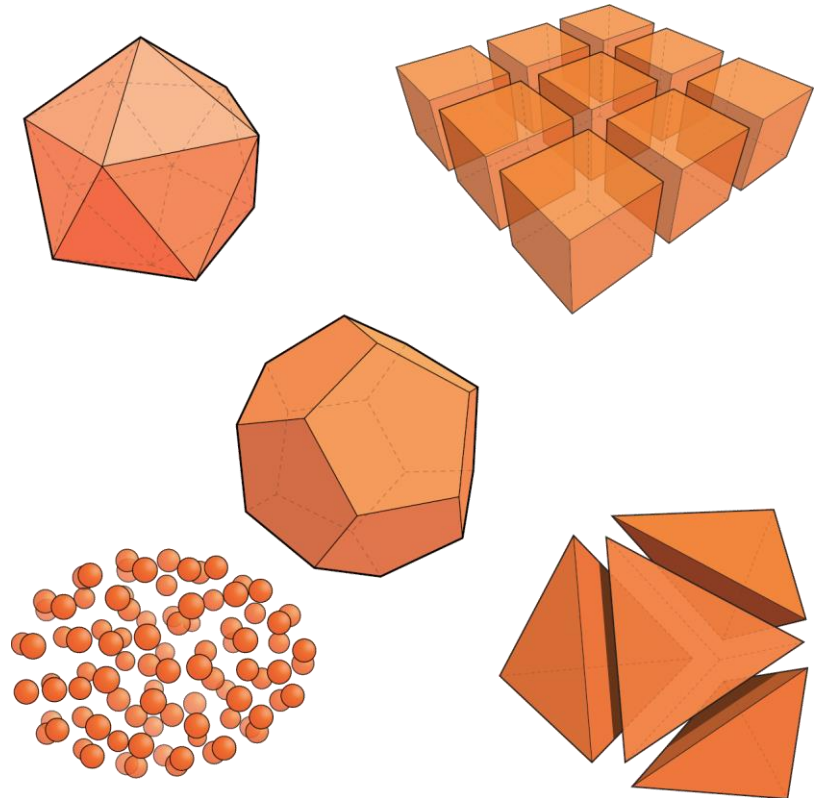
Beaucoup de représentations

Explicites

- Nuages de points
- Maillages polygonaux
- Surface de subdivision, NURBS,
- Grilles de voxels,...

Implicites

- Ensembles de niveaux (level set)
- Surface algébrique
- Fonctions de distance,...



Choix fixé en fonction de la tâche et/ou du type de géométrie

Focus

- **Les surfaces 3D** : représentation, génération et traitement
 - Interfaces *volume - volume*
 - «Ce que l'on voit d'un objet» > **informatique graphique**
- Objectif du cours :
 1. Acquérir une vision globale de la modélisation géométrique
 2. En comprendre les principes mathématiques et informatiques de base

SURFACES 3D

Définition

- Une surface 3D :
 - Un objet bidimensionnelle dans une espace tridimensionnel
 - Interface entre deux volumes
- Caractéristiques :
 - Topologie : définit la notion de voisinage entre points sur une surface
 - Géométrie : le « plongement » de la topologie dans un espace

Surface paramétrique

Définit par une fonction de paramétrisation d'un domaine du plan vers l'espace 3D

$$f : \Omega \rightarrow S, \Omega \subset \mathbb{R}^2, S = f(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$$

Surface Implicite

Iso-surface 0 d'une fonction F :

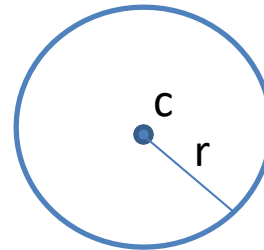
$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = 0\}$$

Exemple 2D

Un cercle de centre c et de rayon r

Forme **paramétrique**

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, u \mapsto c + r \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix}$$



Valeurs caractéristique: $\{c, r\}$

Forme **implicite**

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} - r$$

Comparaison

Selon les opérations de bases

- Itération sur la surface (évaluation, échantillonnage)
- Intersection : définir si un point est à l'intérieur ou à l'extérieur du solide contenu par la surfaces
- Modifications géométriques et topologiques

	Paramétrique	Implicite
<i>Itération</i>	+	-
<i>Intersection</i>	-	+
<i>Mod. Géométrie</i>	+	-
<i>Mod. Topologie</i>	-	+

Surfaces complexes

- Pas de forme analytique simple pour les surfaces complexes
- Composition (implicite ou paramétrique)
- Définition de surface par morceaux à l'aide d'une collection de primitives (implicites ou paramétriques) simples
- **Modèle de Représentation** : structure d'un grand ensemble de valeur modélisant une forme.

Représentation des Surfaces

Familles principales :

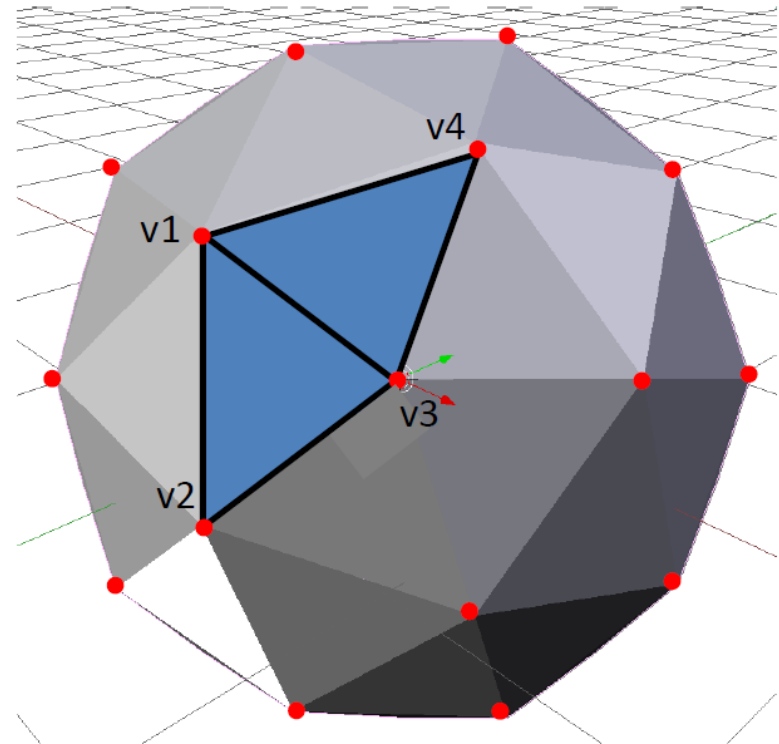
- Surfaces discrètes
 - **Maillages Polygonaux**
 - Surfaces de Points
- Surfaces continues
 - Surfaces Spline
 - Surfaces de Subdivision
 - Surfaces Implicites

Définition

- Approximation de la surface d'un objet à l'aide d'un ensemble de polygones
- **Soupe de Polygones:** suites de n-uplets de coordonnées 3D correspondants aux polygones
- **Maillages indexés:** graphe avec géométrie et topologie séparés
 - Une liste de sommets (V)
 - Une liste de relation topologique:
 - Arêtes (Edge, E)
 - Faces (F)
- En pratique, {V,F} (exemple: OpenGL)

Exemple

- Ensemble de sommets (géométrie)
 - $v1 (x, y, z)$
 - $v2 (x, y, z)$
 - $v3 (x, y, z)$
 - $v4 (x, y, z)$
- Ensemble de faces (topologie)
 - $(v1, v2, v3)$
 - $(v1, v3, v4)$



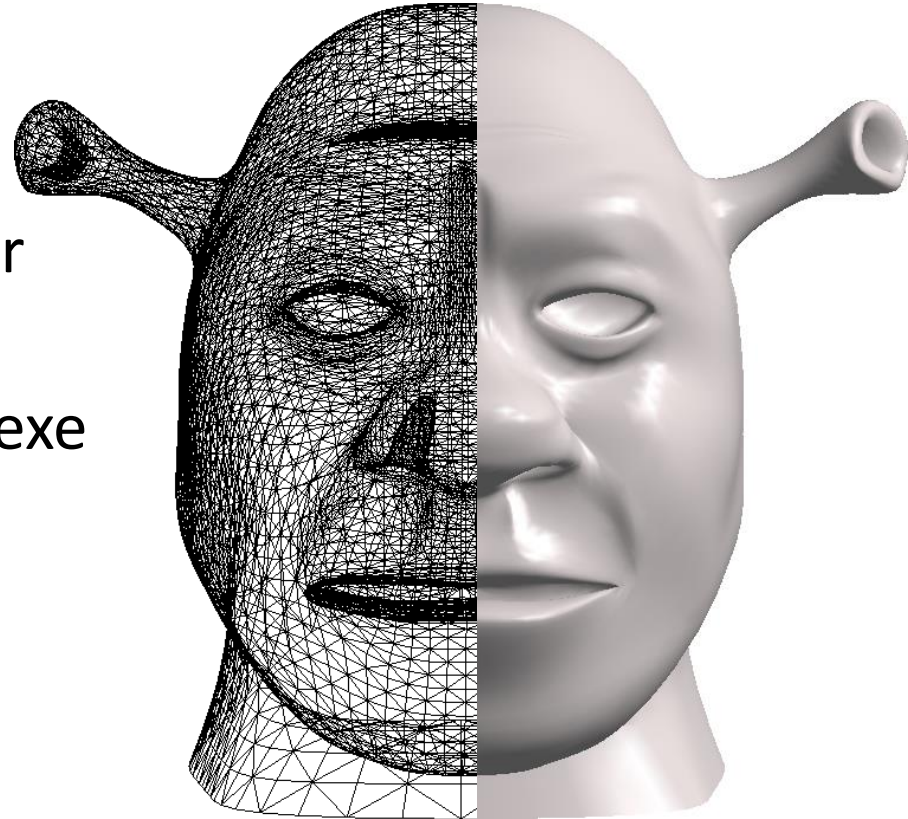
Maillage 3D

- Une structure standard d'affichage de scènes complexes 3D.



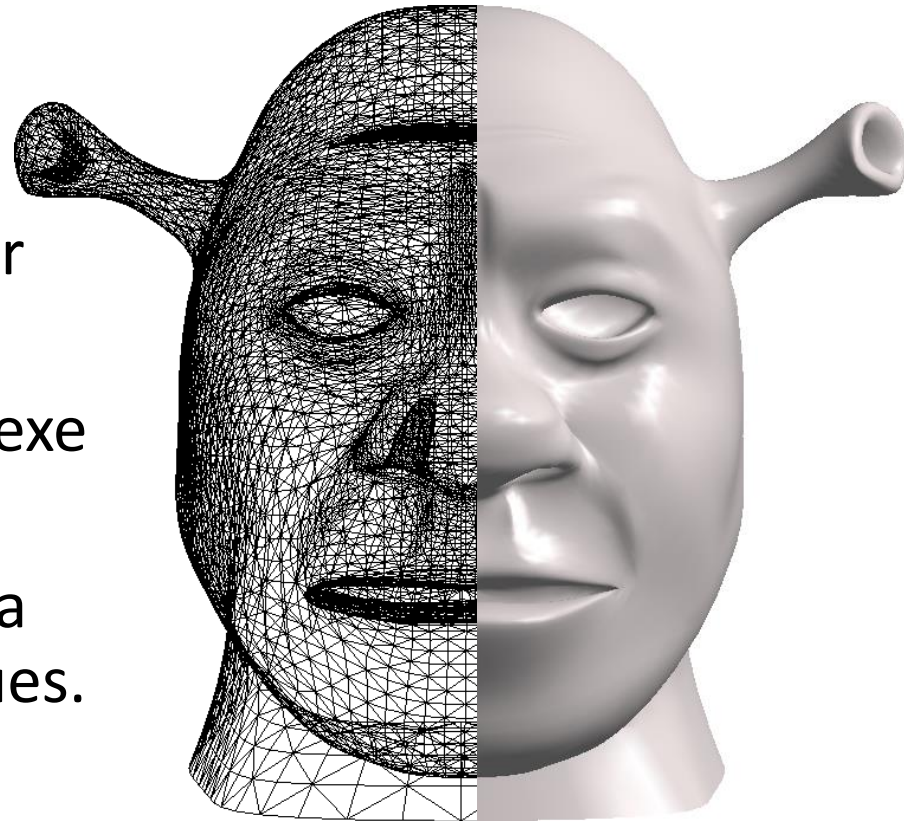
Maillage 3D

- Une structure standard d'affichage de scènes complexes 3D.
- Représentation de la face par un ensemble de polygone.
- Souvent des triangles (simplexe pour une face).



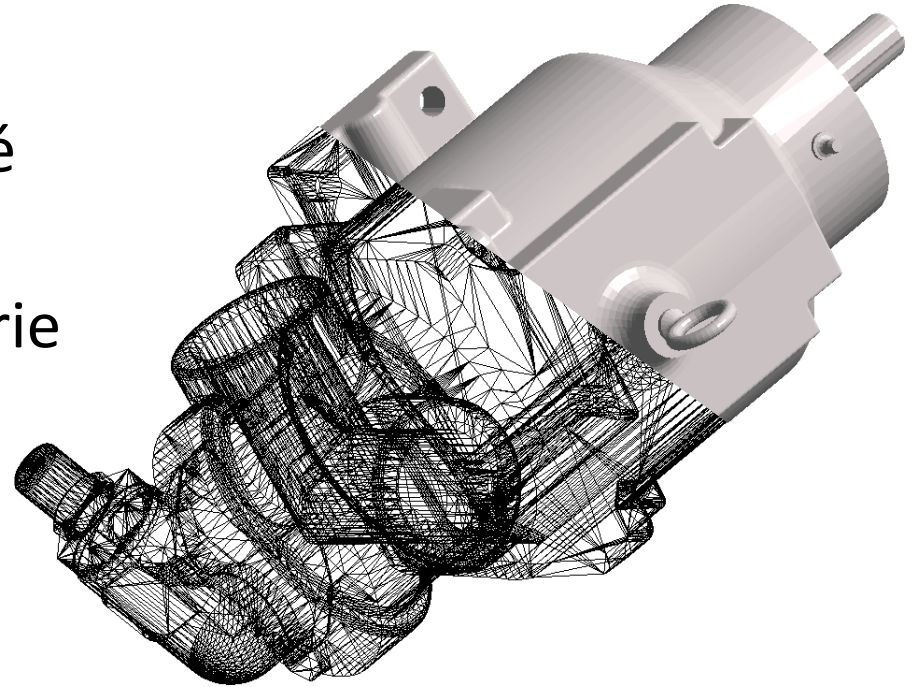
Maillage 3D

- Une structure standard d'affichage de scènes complexes 3D.
- Représentation de la face par un ensemble de polygone.
- Souvent des triangles (simplexe pour une face).
- Visualisation optimisée par la majorité des cartes graphiques.



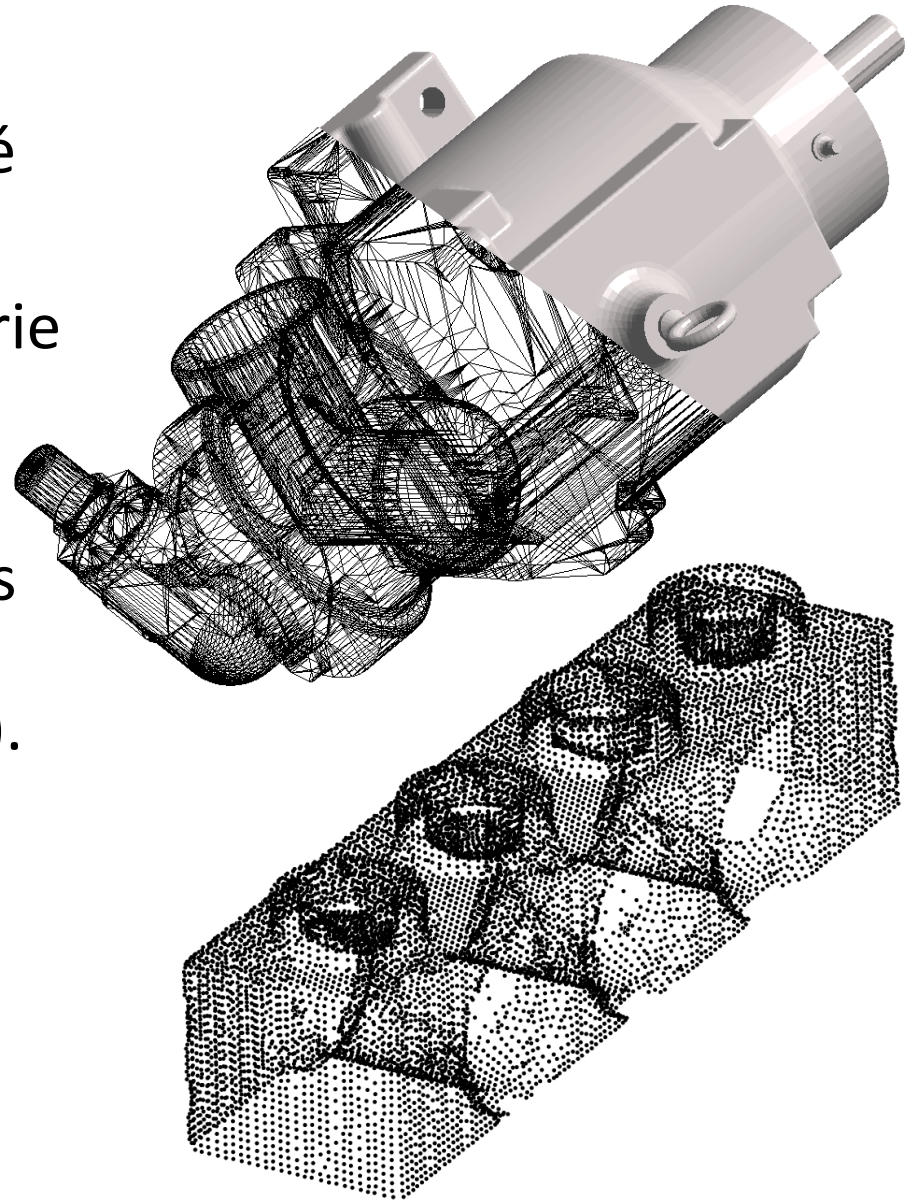
Maillage 3D

- Continuité C^0 (discontinuité aux arêtes).
- Informations sur la géométrie et sur la topologie de la surface.



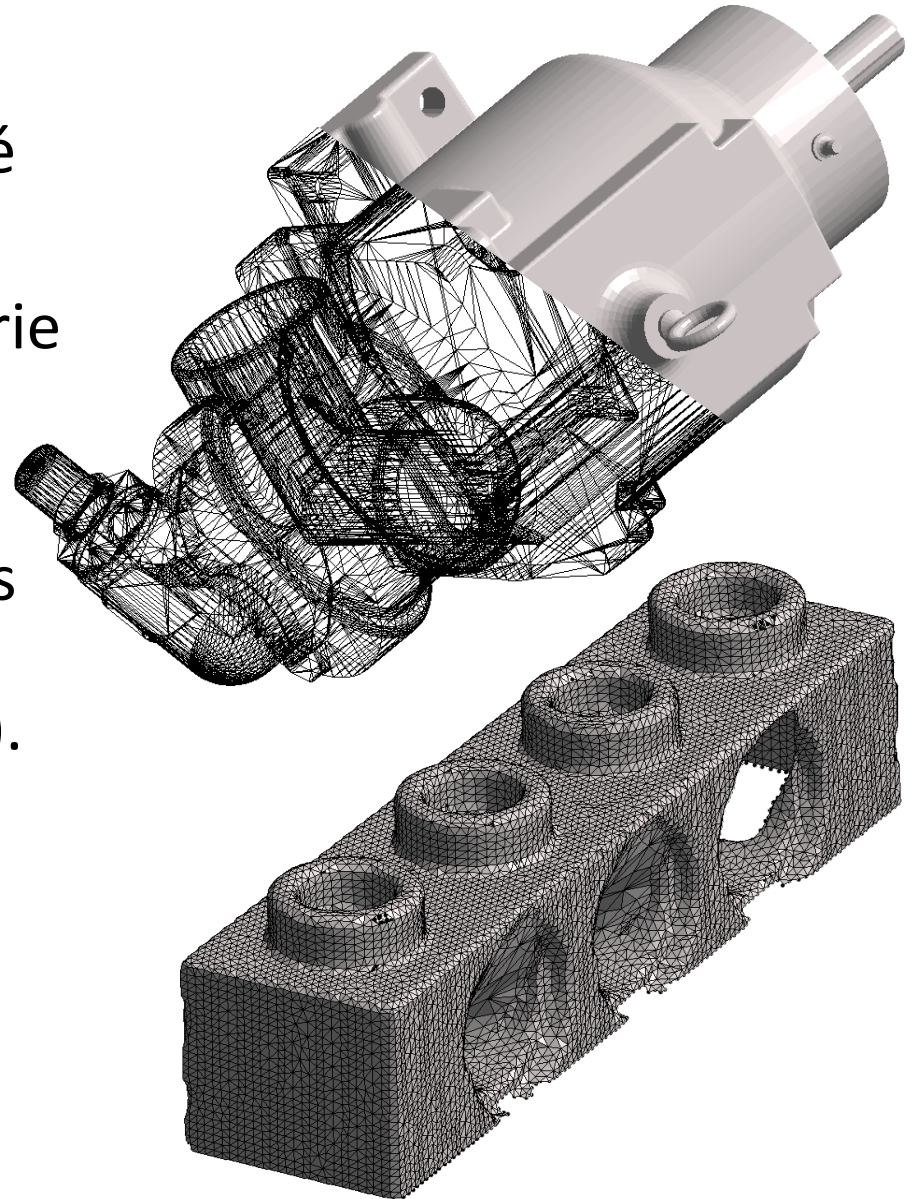
Maillage 3D

- Continuité C^0 (discontinuité aux arêtes).
- Informations sur la géométrie et sur la topologie de la surface.
- Les équations géométriques des surfaces ne sont pas toujours disponibles (scans).



Maillage 3D

- Continuité C^0 (discontinuité aux arêtes).
- Informations sur la géométrie et sur la topologie de la surface.
- Les équations géométriques des surfaces ne sont pas toujours disponibles (scans).



Propriétés

- Entités d'un maillage :

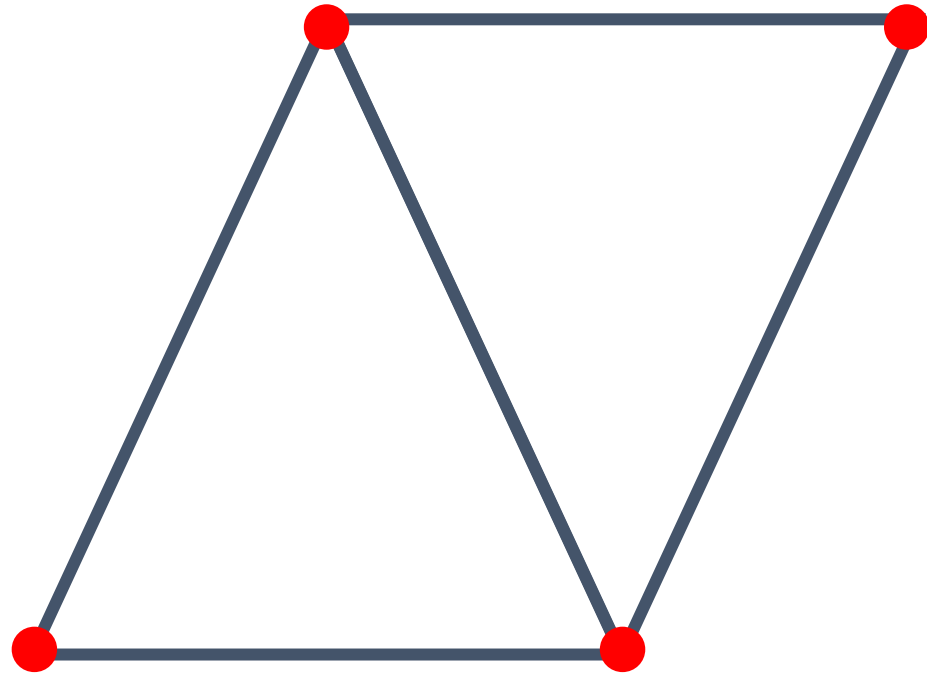
Propriétés

- Entités d'un maillage :
 - sommets (x, y, z)



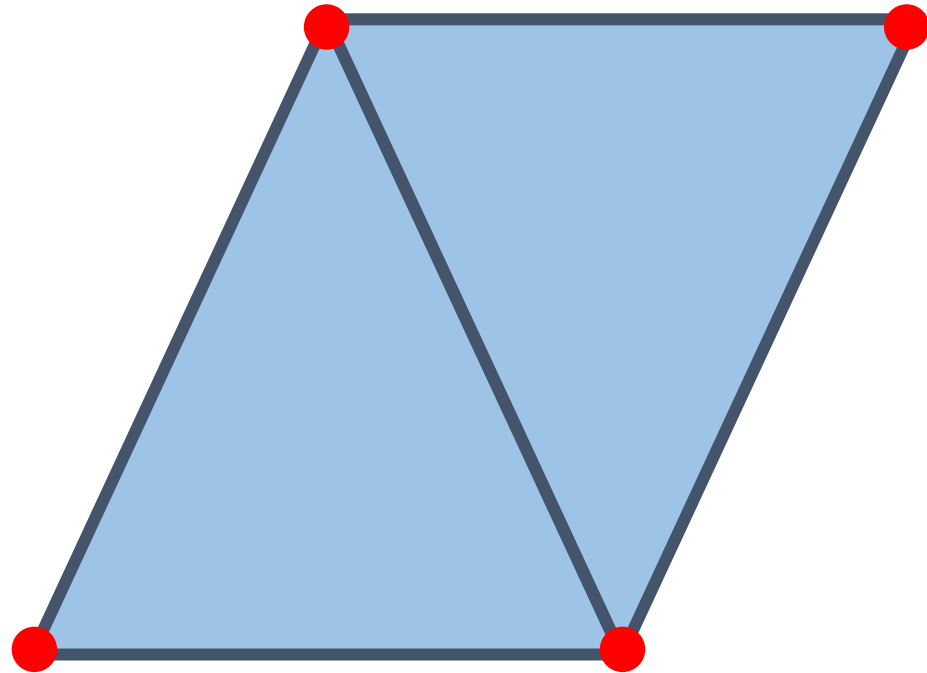
Propriétés

- Entités d'un maillage :
 - sommets (x, y, z)
 - arêtes :
 - définies par 2 sommets



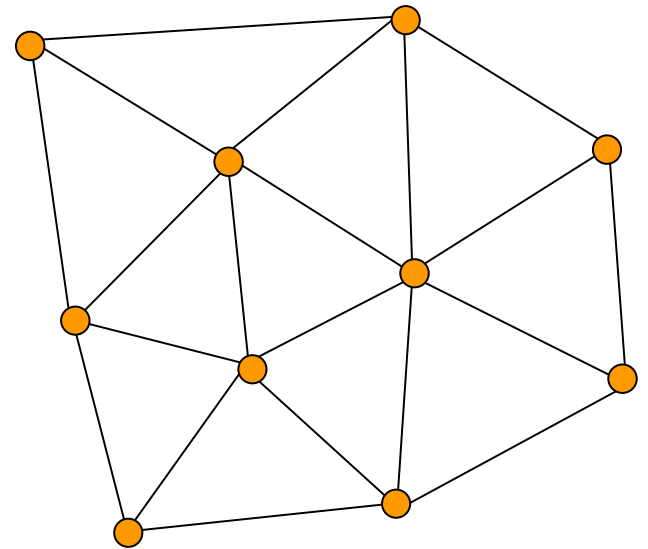
Propriétés

- Entités d'un maillage :
 - sommets (x, y, z)
 - arêtes :
 - définies par 2 sommets
 - faces :
 - définies par n sommets
ou
 - définies par n arêtes
- en générale des triangles ($n = 3$)



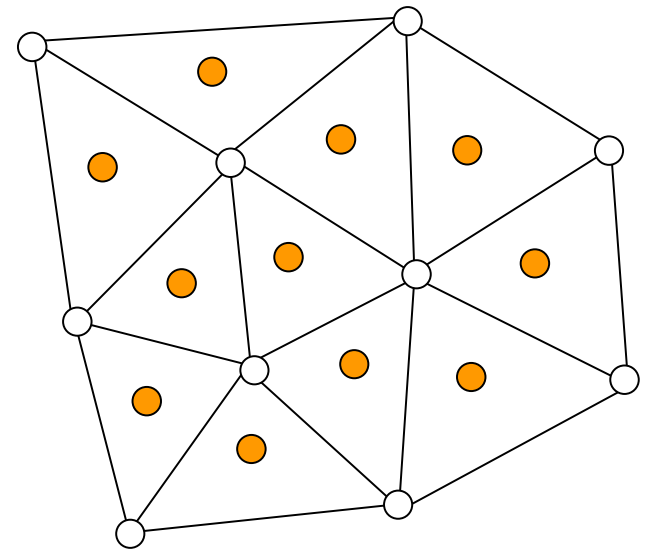
Propriétés : dualité

- Maillage dual



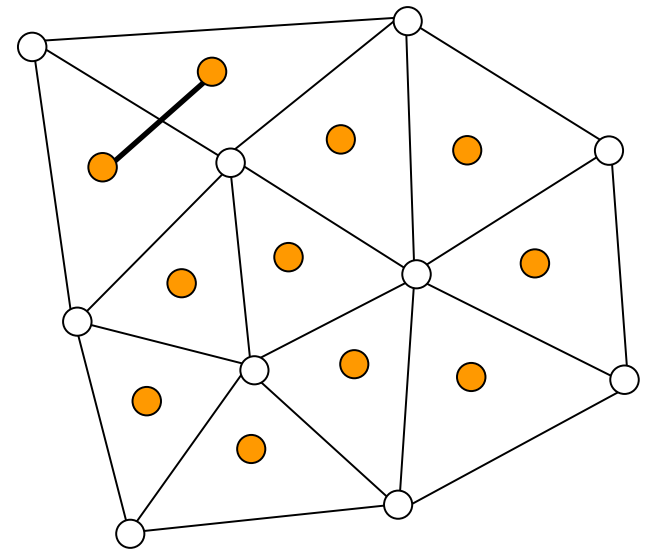
Propriétés : dualité

- Maillage dual :
 - chaque face est remplacée par un sommet \rightarrow barycentre de la face,



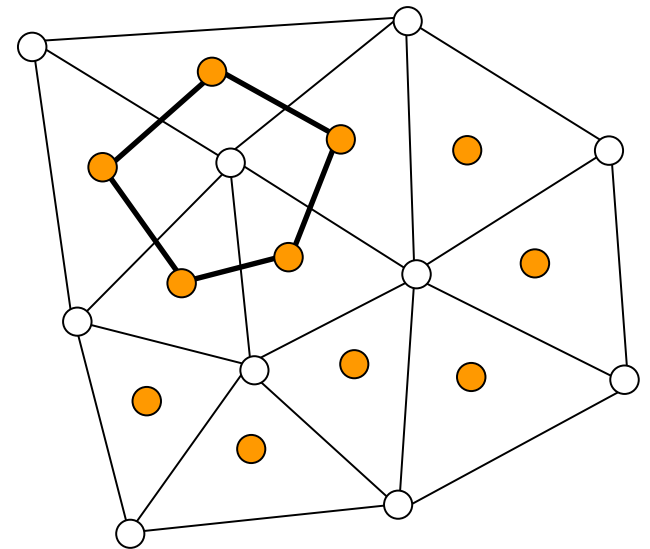
Propriétés : dualité

- Maillage dual :
 - chaque face est remplacée par un sommet \rightarrow barycentre de la face,
 - une arête du dual relie deux sommets si les faces correspondantes sont voisines dans le maillage d'origine,



Propriétés : dualité

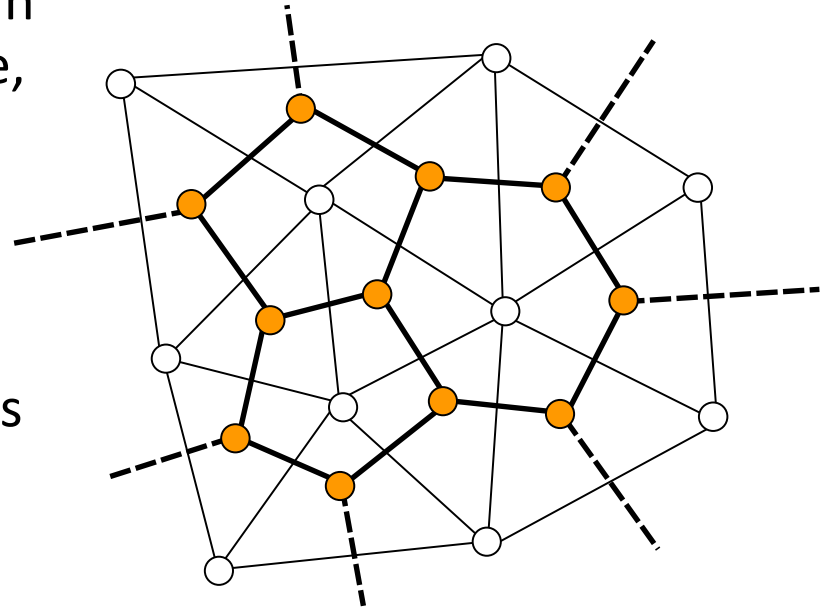
- Maillage dual :
 - chaque face est remplacée par un sommet \rightarrow barycentre de la face,
 - une arête du dual relie deux sommets si les faces correspondantes sont voisines dans le maillage d'origine,
 - les points sont remplacés par des faces,



Propriétés : dualité

- Maillage dual :
 - chaque face est remplacée par un sommet \rightarrow barycentre de la face,
 - une arête du dual relie deux sommets si les faces correspondantes sont voisines dans le maillage d'origine,
 - les points sont remplacés par des faces,

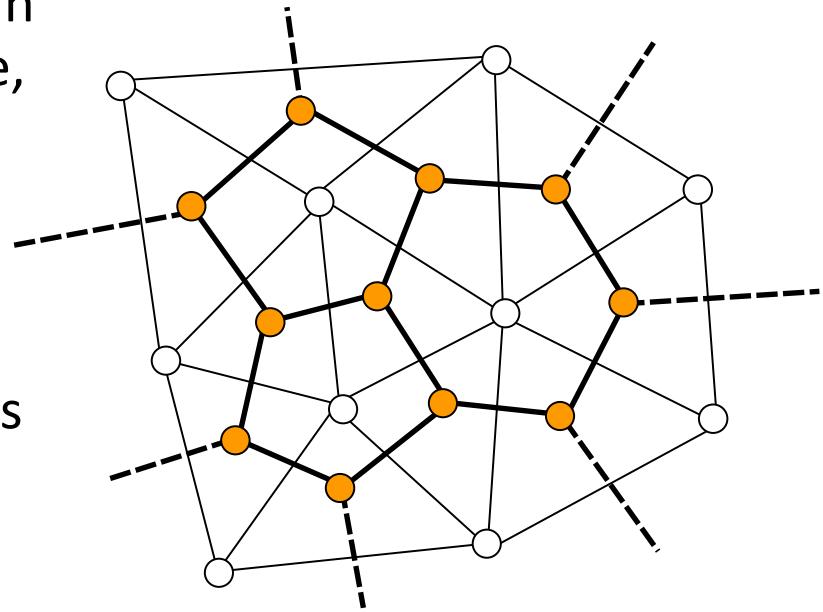
\rightarrow les objets de dimension k du maillage original sont remplacés par des objets de dimension $(2-k)$ dans le dual.



Propriétés : dualité

- Maillage dual :
 - chaque face est remplacée par un sommet \rightarrow barycentre de la face,
 - une arête du dual relie deux sommets si les faces correspondantes sont voisines dans le maillage d'origine,
 - les points sont remplacés par des faces,

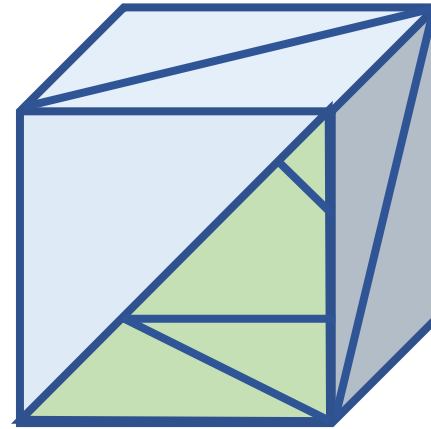
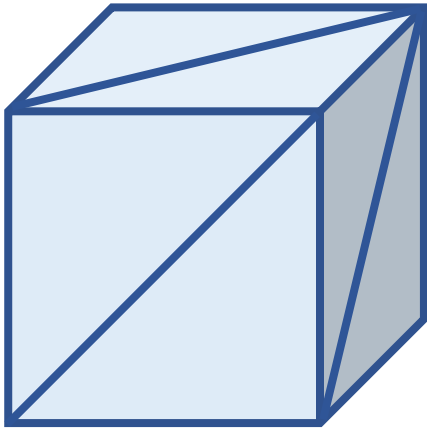
\rightarrow les objets de dimension k du maillage original sont remplacés par des objets de dimension $(2-k)$ dans le dual.



Le maillage dual d'un maillage dual est égal au maillage original si celui-ci est fermé.

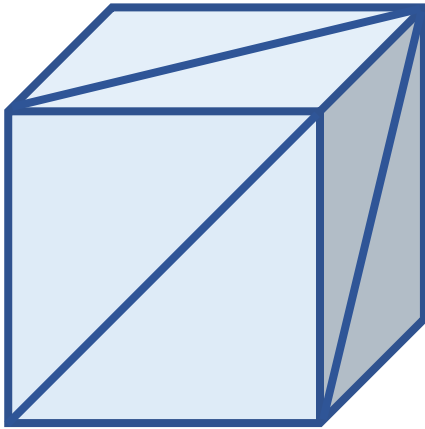
Propriétés : fermeture

- Un maillage est dit **fermé** si :
 - il n'a pas de bord,
→ toutes les arêtes du maillage sont au moins partagées par deux triangles

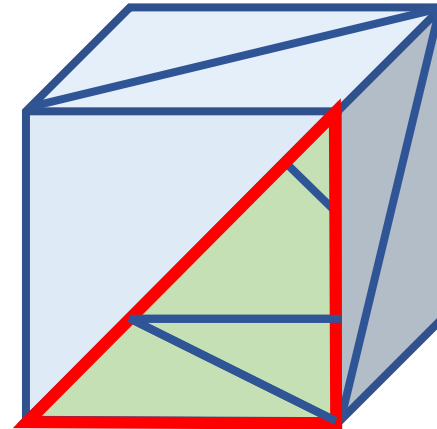


Propriétés : fermeture

- Un maillage est dit **fermé** si :
 - il n'a pas de bord,
→ toutes les arêtes du maillage sont au moins partagées par deux triangles



Fermé



Non-fermé

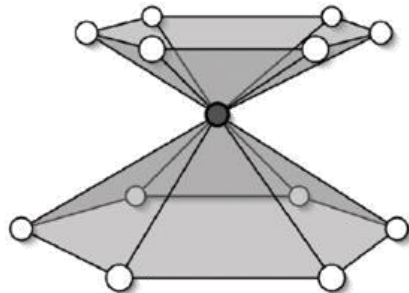
2-variétés (manifold)

- Un maillage est 2-variété si :
 - une sphère (rayon > 0) placée en n'importe quel point à une intersection avec le maillage correspondante à une unique surface,

2-variétés (manifold)

- Un maillage est 2-variété si :
 - une sphère (rayon > 0) placée en n'importe quel point à une intersection avec le maillage correspondante à une unique surface,

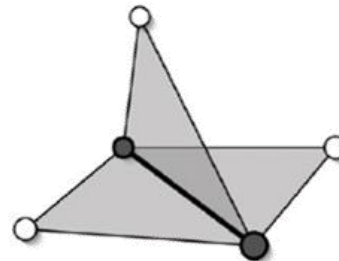
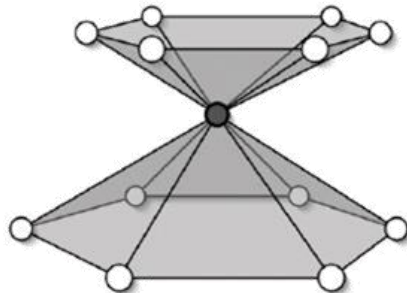
Exemples
non
2-manifold



2-variétés (manifold)

- Un maillage est 2-variété si :
 - une sphère (rayon > 0) placée en n'importe quel point à une intersection avec le maillage correspondante à une unique surface,
 - il ne contient que des arêtes partagées par au plus deux triangles,

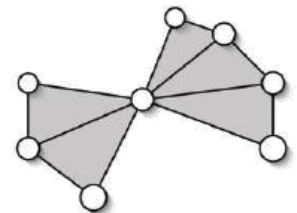
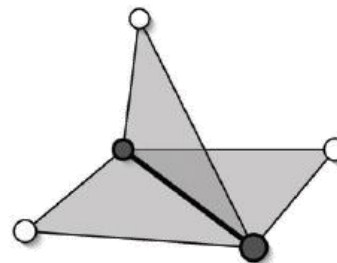
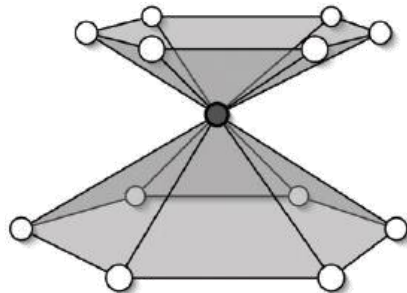
Exemples
non
2-manifold



2-variétés (manifold)

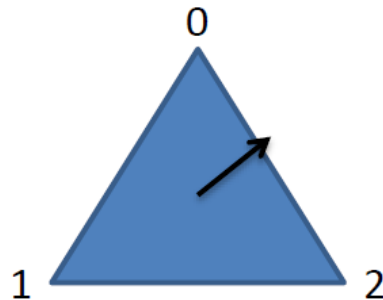
- Un maillage est 2-variété si :
 - une sphère (rayon > 0) placée en n'importe quel point à une intersection avec le maillage correspondante à une unique surface,
 - il ne contient que des arêtes partagées par au plus deux triangles,
 - il ne contient aucun sommet correspondant à au plus 2 arêtes du bord,
 - il ne contient pas d'auto-intersection.

Exemples
non
2-manifold

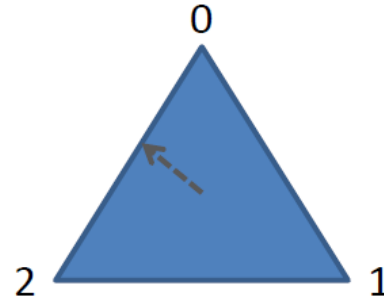


Orientation

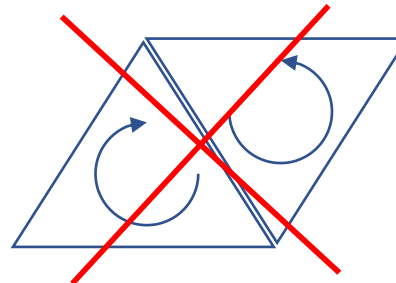
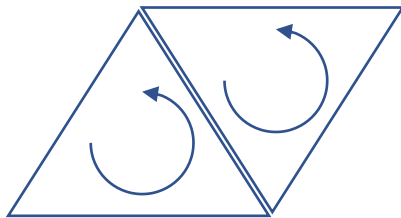
- Lorsque le maillage est une variété
- Basé sur l'ordre d'énumération des sommets pour une faces



Sens trigonométrique (CCW)



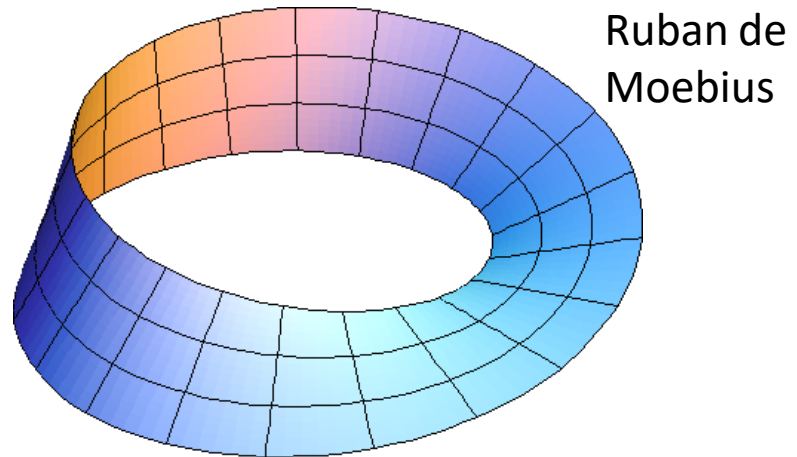
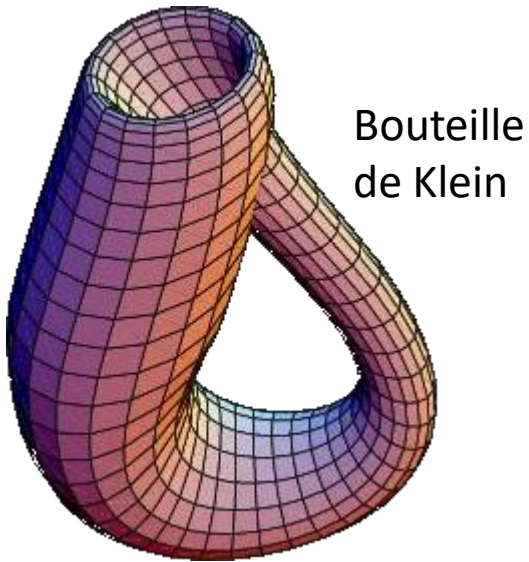
Sens inverse (CW)



Orientabilité

Variété **orientable**

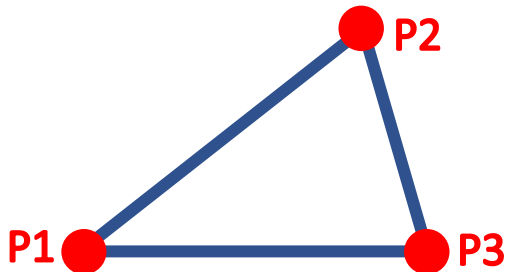
- Il n'existe aucun sous-ensemble de la surface qui soit homéomorphe au Ruban de Moebius



Normales

- On peut définir une normale par face :
 - elle permet de définir l'orientation de la face
 - elle est égale au produit vectoriel des deux premières arêtes

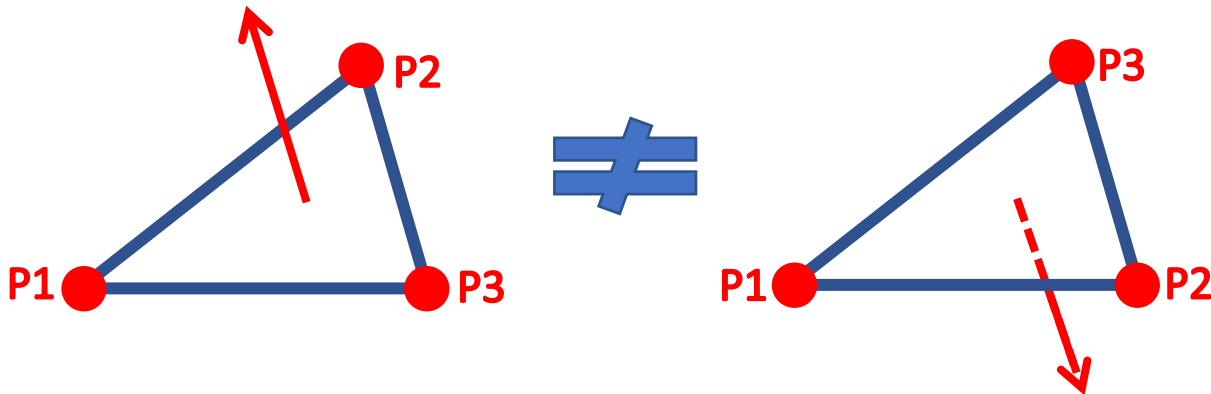
$$N_i = \frac{(P2 - P1) \wedge (P3 - P1)}{\|(P2 - P1) \wedge (P3 - P1)\|}$$



Normales

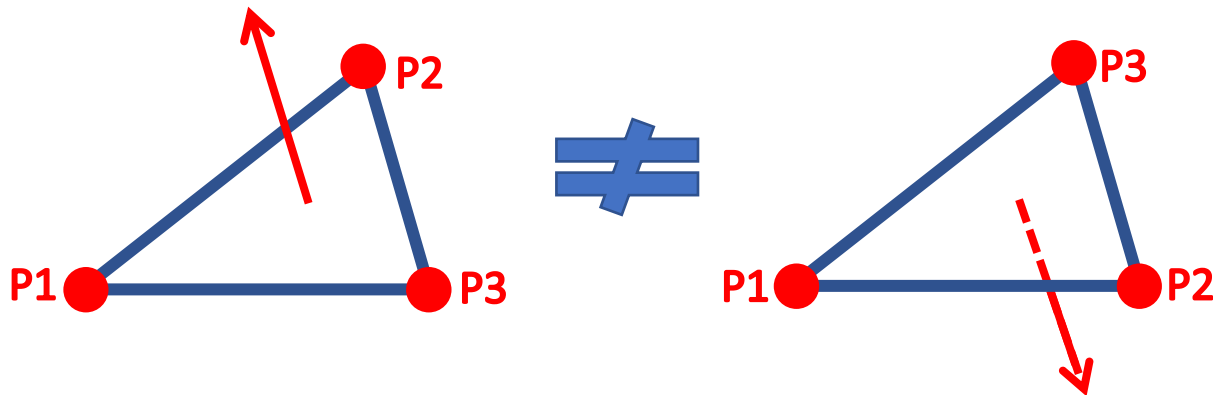
- On peut définir une normale par face :
 - elle permet de définir l'orientation de la face
 - elle est égale au produit vectoriel des deux premières arêtes
 - l'ordre des sommets dans une face est donc important

$$N_i = \frac{(P2 - P1) \wedge (P3 - P1)}{\|(P2 - P1) \wedge (P3 - P1)\|}$$



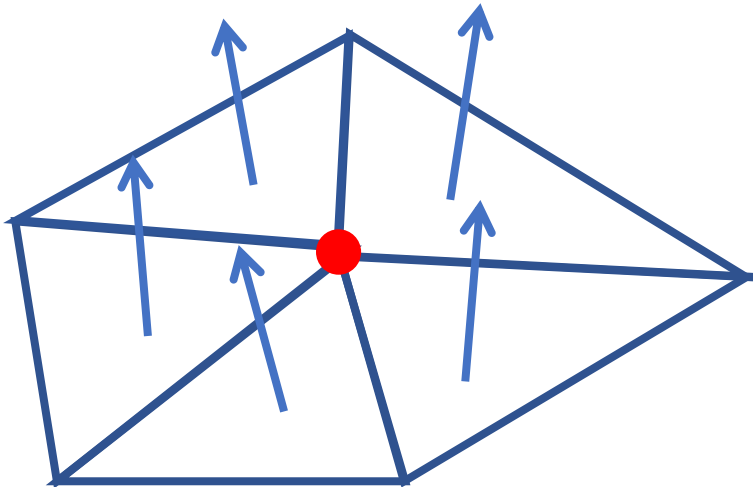
Normales

- On peut définir une normale par face :
 - elle permet de définir l'orientation de la face
 - elle est égale au produit vectoriel des deux premières arêtes
 - l'ordre des sommets dans une face est donc important
 - elle est utilisée pour définir l'extérieur ou l'intérieur ou pour l'éclairage à l'affichage.



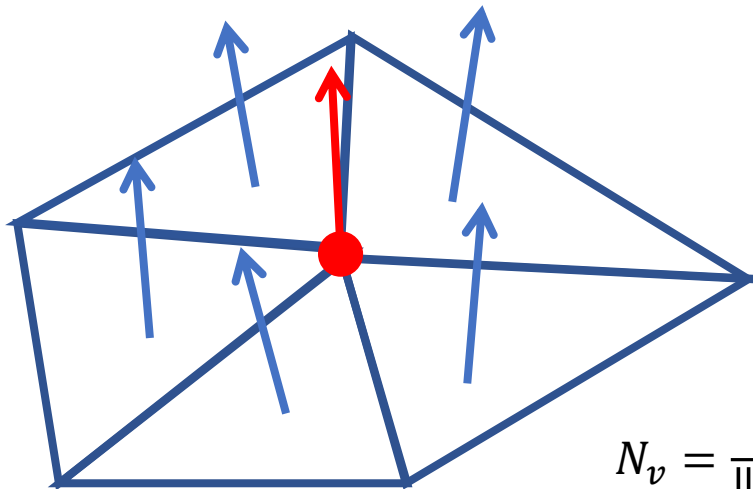
Normales

- On peut définir une normale par sommet :
 - à partir des normales aux faces,



Normales

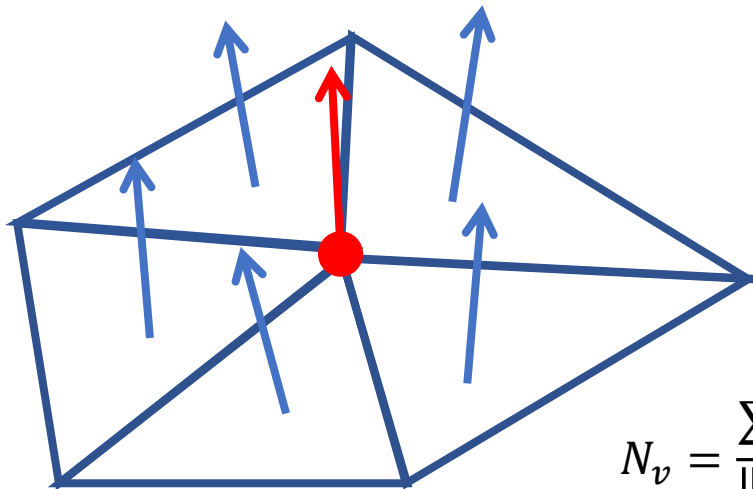
- On peut définir une normale par sommet :
 - à partir des normales aux faces,
 - normale au sommet = moyenne des normales des faces contenant le sommet,



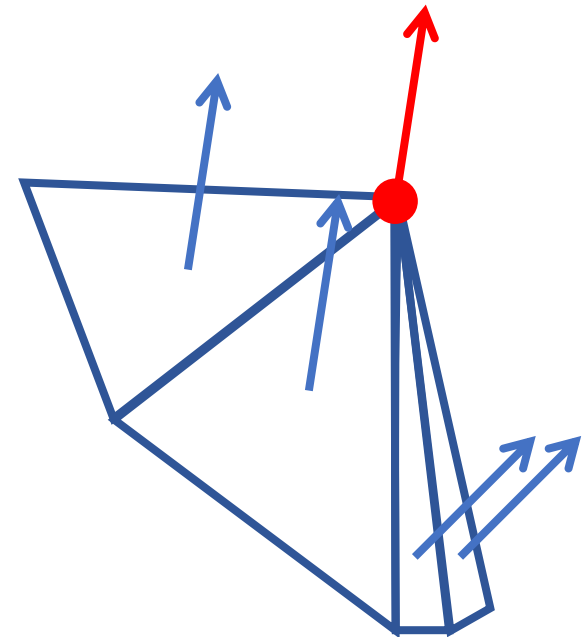
$$N_v = \frac{\sum_i N_i}{\|\sum_i N_i\|}$$

Normales

- On peut définir une normale par sommet :
 - à partir des normales aux faces,
 - normale au sommet = moyenne des normales des faces contenant le sommet,
 - mieux si on pondère par une propriété du triangle (ex : aire).



$$N_v = \frac{\sum_i w_i N_i}{\|\sum_i w_i\|}$$



Structure de données

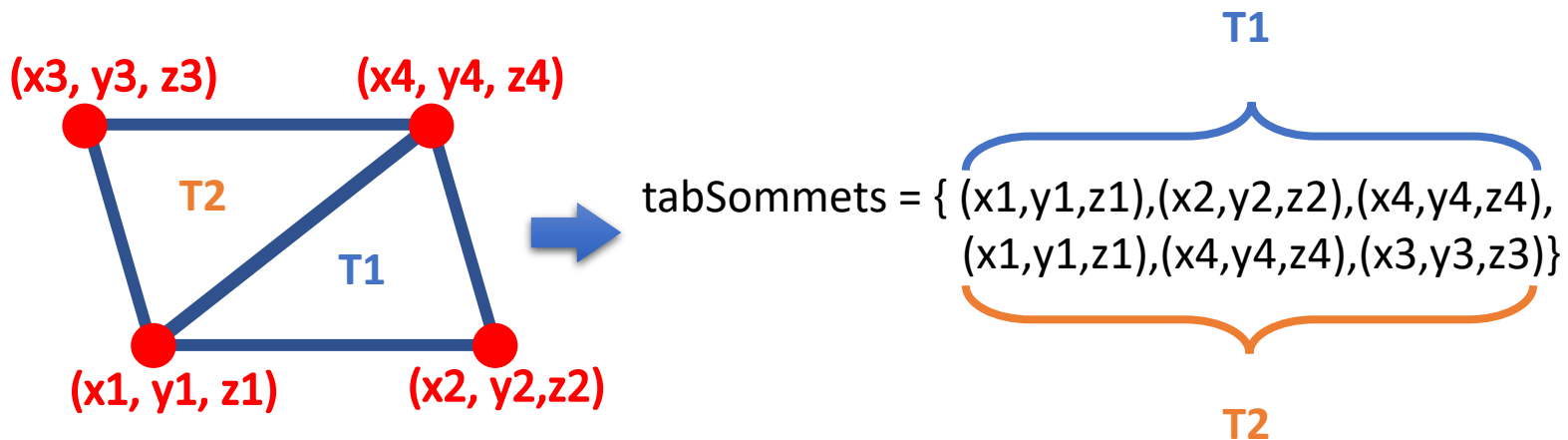
- Ce qu'il y a à stocker :
 - les entités : sommets, arêtes, faces;
 - les normales (par sommet ou face);
 - les couleurs (par sommet ou face), ou les textures ...
 - ...

Structure de données


- Ce qu'il y a à stocker :
 - les entités : sommets, arêtes, faces;
 - les normales (par sommet ou face);
 - les couleurs (par sommet ou face), ou les textures ...
 - ...
- Pour stocker un maillage il faut choisir entre :
 - minimiser la taille mémoire,
 - répéter le moins possible les coordonnées des points, ...
 - faciliter le parcours dans le maillage,
 - pour passer d'un sommet à l'autre, ...
 - permettre d'extraire les informations de topologie.
 - pour connaître les sommets liés à un autre sommet , les arêtes liées à un sommet, ...

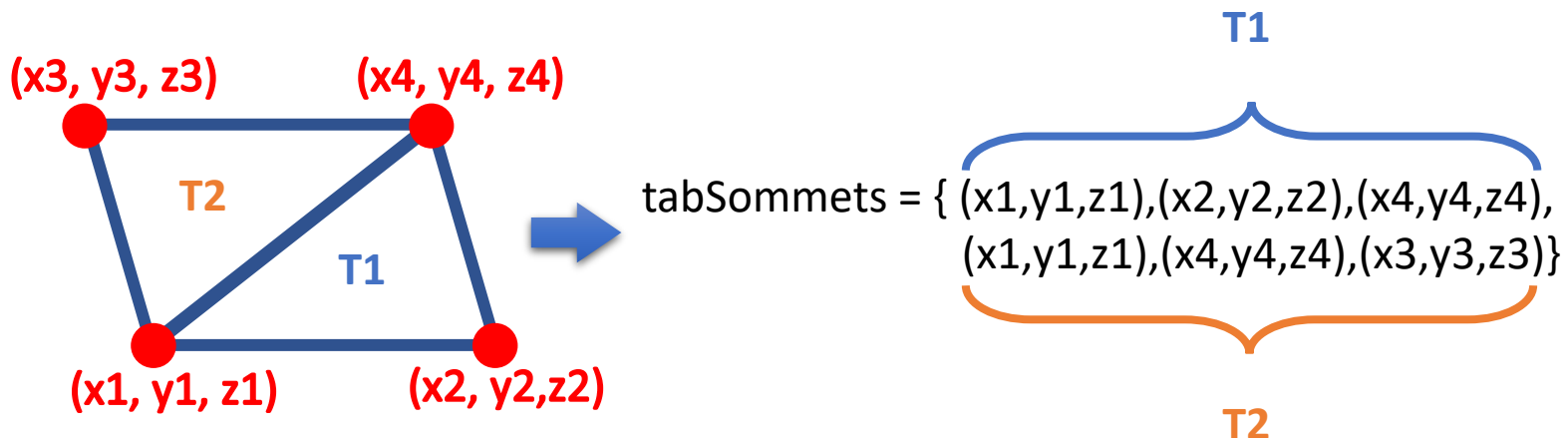
Structure de données

- Approche naïve :
 - maillage représenté par un unique tableau de sommet
→ maillage non indexé,
 - les coordonnées des sommets sont répétées autant de fois qu'il y a de faces qui les contiennent.



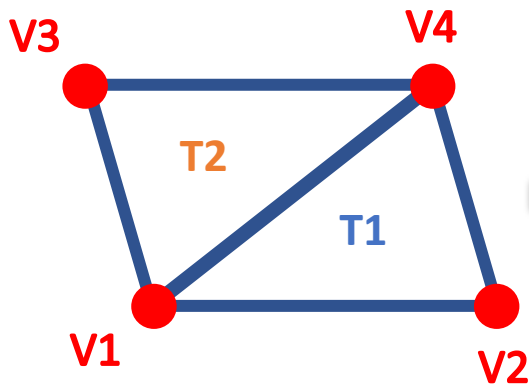
Structure de données

- Approche naïve :  **Prend beaucoup de place**
 - maillage représenté par un unique tableau de sommet
→ maillage non indexé,
 - les coordonnées des sommets sont répétées autant de fois qu'il y a de faces qui les contiennent.



Structure de données

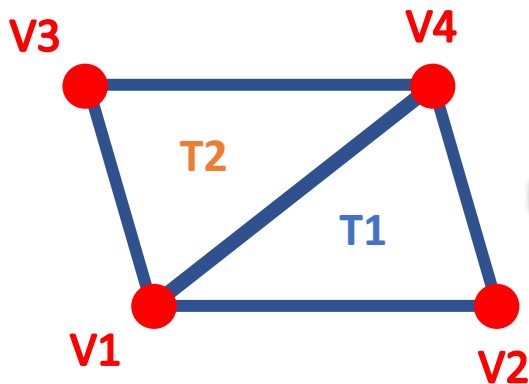
- Approche classique :
 - maillage représenté par un ensemble de tableaux : un pour les sommets, un pour les faces, un pour les couleurs ... → maillage indexé,
 - les coordonnées des sommets ne sont plus répétées.



$\text{tabSommets} = \{ \overbrace{(x_1, y_1, z_1)}^{V1}, \overbrace{(x_2, y_2, z_2)}^{V2}, \overbrace{(x_3, y_3, z_3)}^{V3}, \overbrace{(x_4, y_4, z_4)}^{V4} \}$
 $\text{tabTriangles} = \{ \underbrace{1, 2, 4}_{T1}, \underbrace{1, 4, 3}_{T2} \}$
 $\text{tabColors} = \{ \underbrace{(r_1, g_1, b_1)}_{\text{Couleur V1}}, (r_2, g_2, b_2), (r_3, g_3, b_3), (r_4, g_4, b_4) \}$

Structure de données

- Approche classique : ➡ **Pas pratique pour la topologie**
 - maillage représenté par un ensemble de tableaux : un pour les sommets, un pour les faces, un pour les couleurs ... ➔ maillage indexé,
 - les coordonnées des sommets ne sont plus répétées.



V1 **V2** **V3** **V4**

tabSommets = { (x1,y1,z1), (x2,y2,z2), (x3,y3,z3), (x4,y4,z4) }

tabTriangles = { 1, 2, 4, 1, 4, 3 }

T1 **T2**

tabColors = { (r1,g1,b1), (r2,g2,b2), (r3,g3,b3), (r4,g4,b4) }

Couleur V1

Structure de données

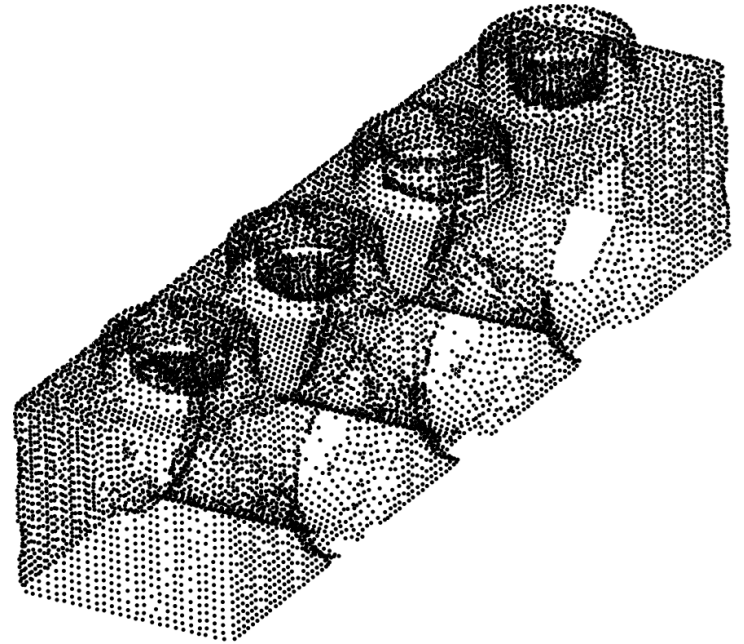
- Formats de fichier :
 - Soit indexé
 - OFF
 - OBJ
 - Soit non indexé
 - STL

Maillage 3D

- Création d'un maillage :
 - à partir d'un nuage de point en utilisant une triangulation,

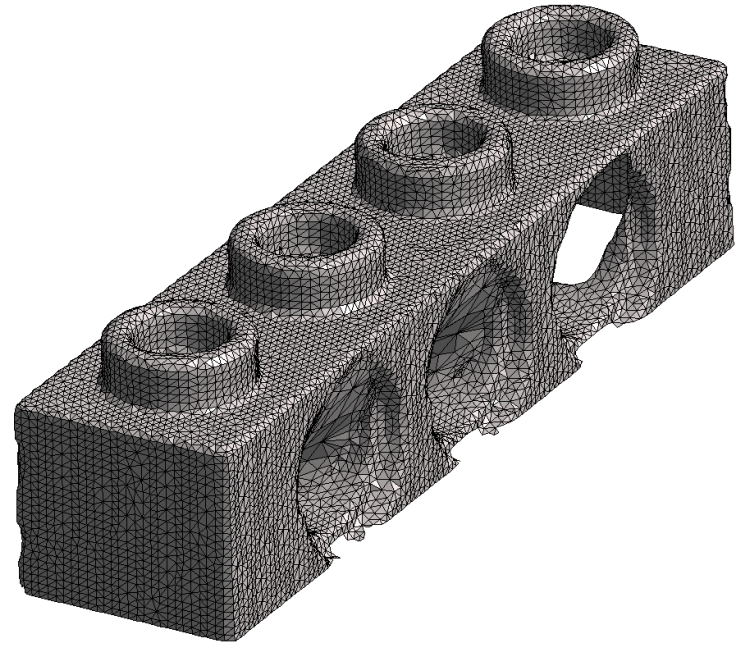
Maillage 3D

- Création d'un maillage :
 - à partir d'un nuage de point en utilisant une triangulation,



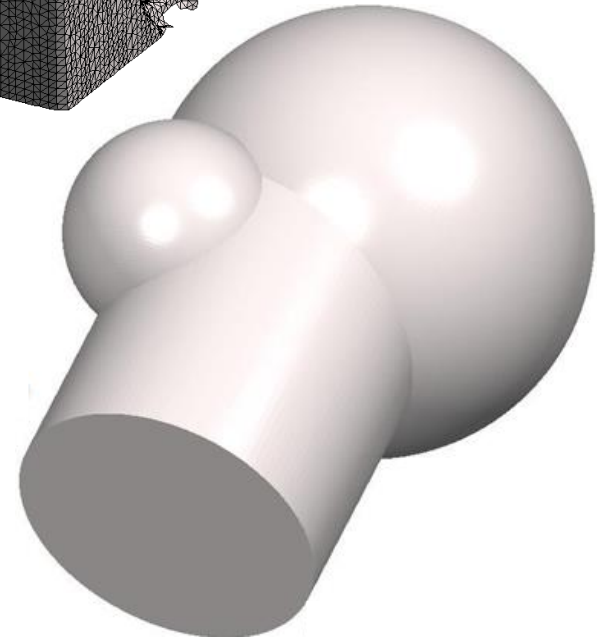
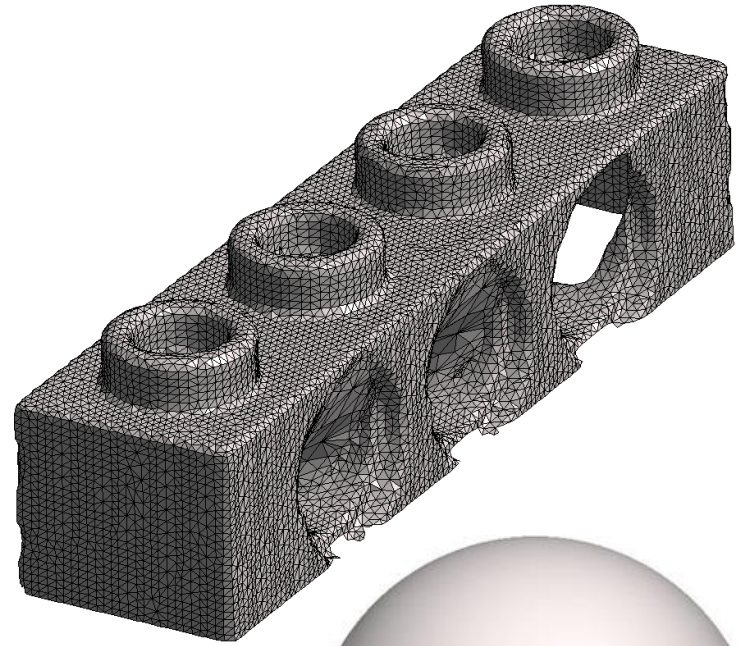
Maillage 3D

- Création d'un maillage :
 - à partir d'un nuage de point en utilisant une triangulation,



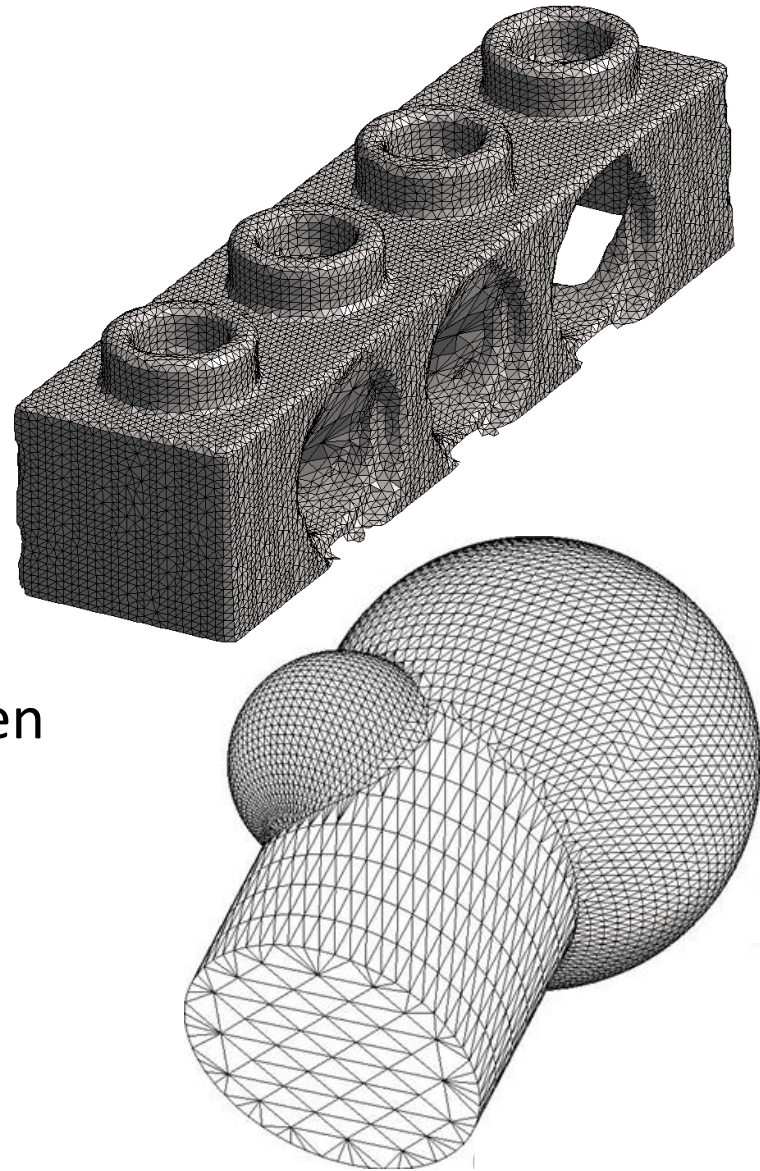
Maillage 3D

- Création d'un maillage :
 - à partir d'un nuage de point en utilisant une triangulation,
 - à partir d'une surface continue en utilisant une discrétisation.



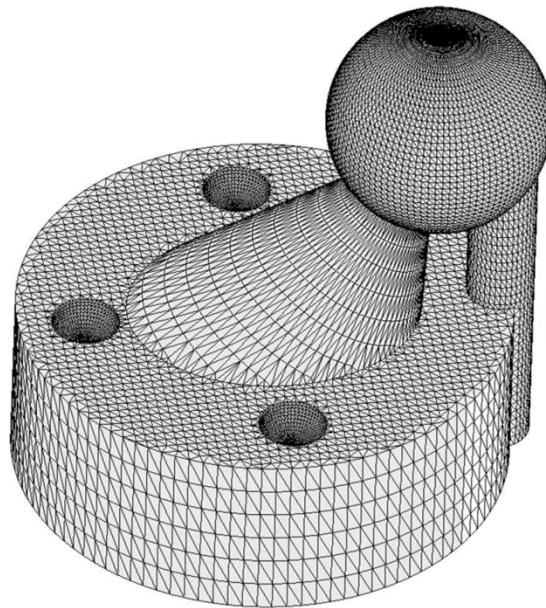
Maillage 3D

- Création d'un maillage :
 - à partir d'un nuage de point en utilisant une triangulation,
 - à partir d'une surface continue en utilisant une discrétisation.



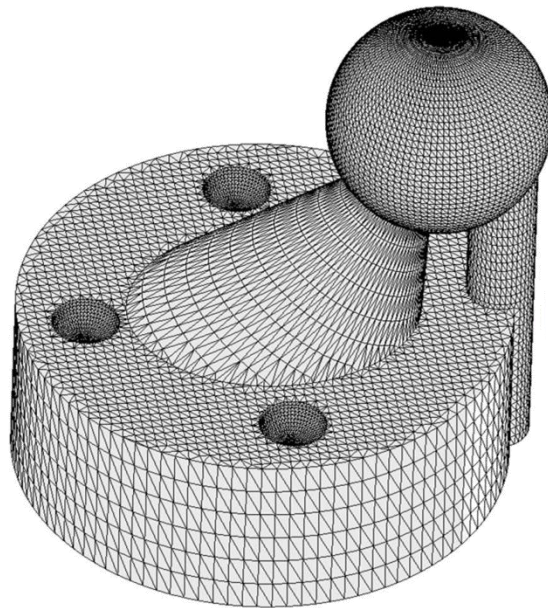
Maillage 3D

- Selon l'utilisation que l'on souhaite faire des maillages il peut être primordial **d'étudier la forme** d'un maillage.



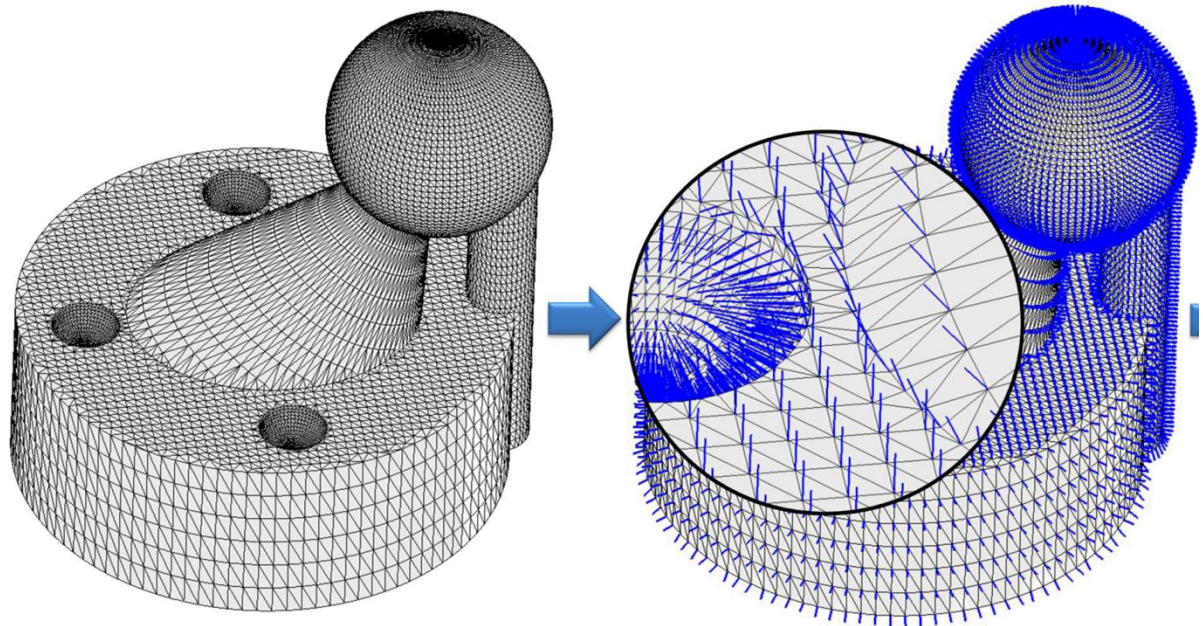
Maillage 3D

- Selon l'utilisation que l'on souhaite faire des maillages il peut être primordial **d'étudier la forme** d'un maillage.
- Les informations de forme sont extraites le plus souvent d'une étude des **variations des normales** voisines.



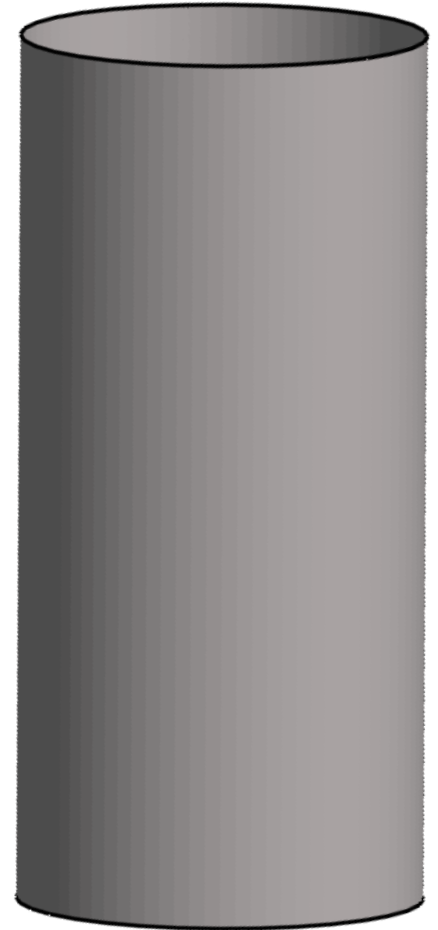
Maillage 3D

- Selon l'utilisation que l'on souhaite faire des maillages il peut être primordial **d'étudier la forme** d'un maillage.
- Les informations de forme sont extraites le plus souvent d'une étude des **variations des normales** voisines.



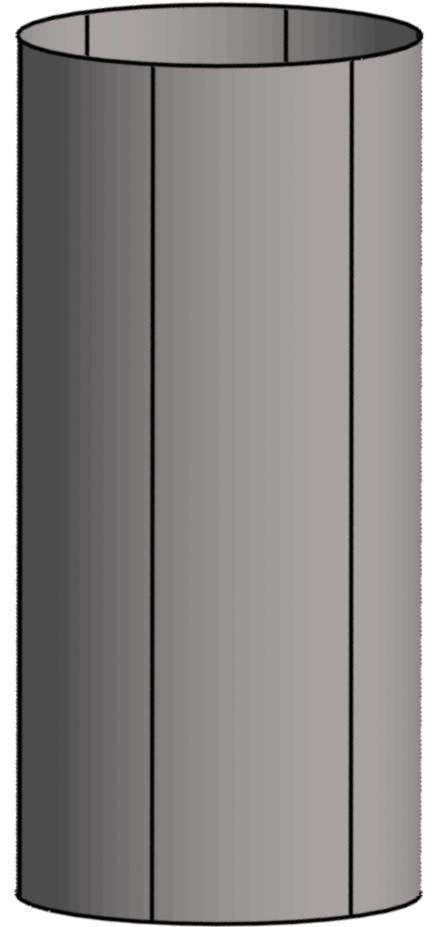
Discrétisation

- A partir d'objet simple, exemple du cas du cylindre



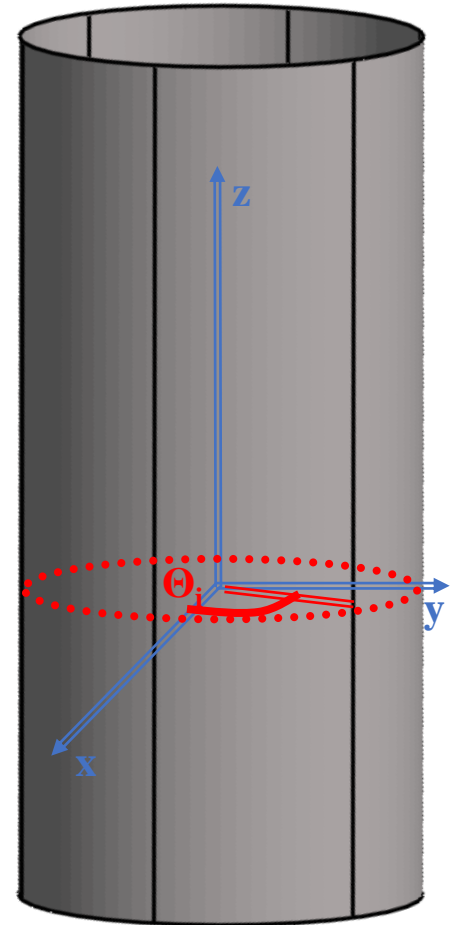
Discrétisation

- A partir d'objet simple, exemple du cas du cylindre :
 - des méridiens sont extraits



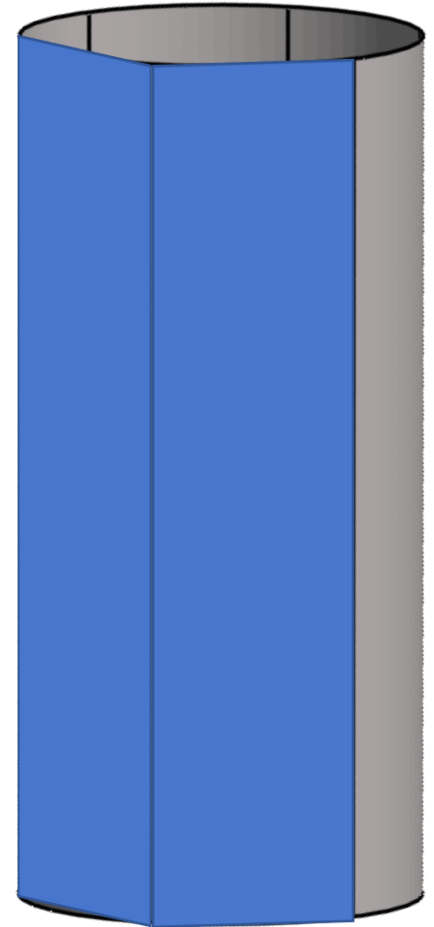
Discrétisation

- A partir d'objet simple, exemple du cas du cylindre :
 - des méridiens sont extraits,
 - à partir des méridiens on calcule des facettes



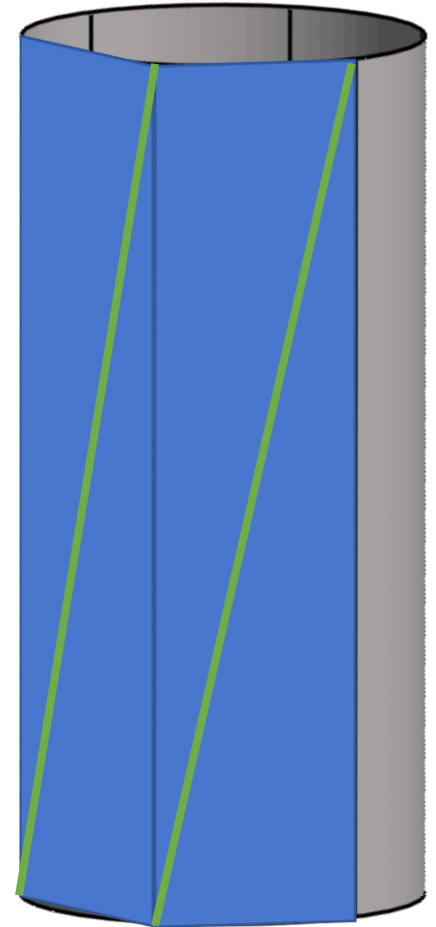
Discrétisation

- A partir d'objet simple, exemple du cas du cylindre :
 - des méridiens sont extraits,
 - à partir des méridiens on calcule des facettes



Discrétisation

- A partir d'objet simple, exemple du cas du cylindre :
 - des méridiens sont extraits,
 - à partir des méridiens on calcule des facettes,
 - chaque facette est découpée en triangle en ajoutant une diagonale.



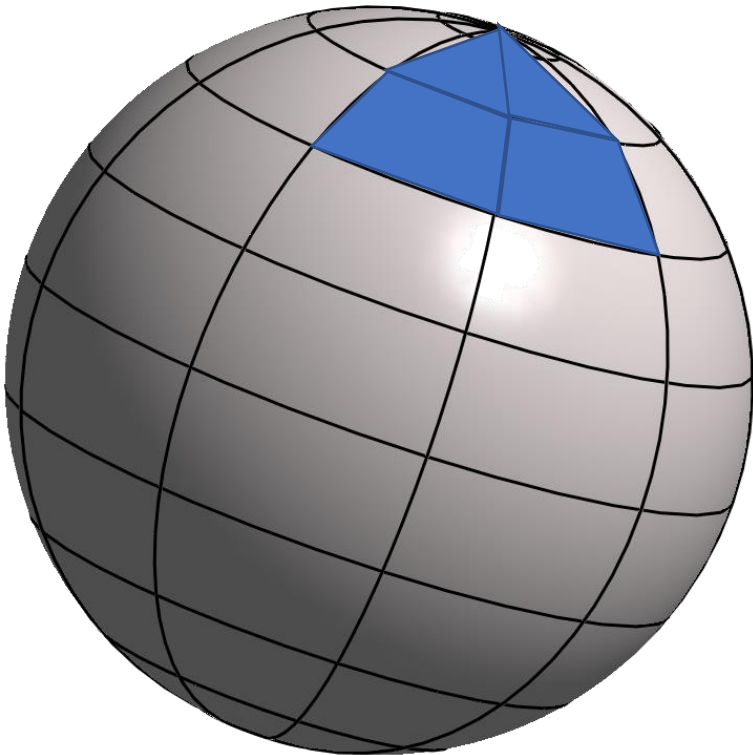
Discrétisation

- Idem pour le cône.
- Pour la sphère certaines facettes sont déjà des triangles.



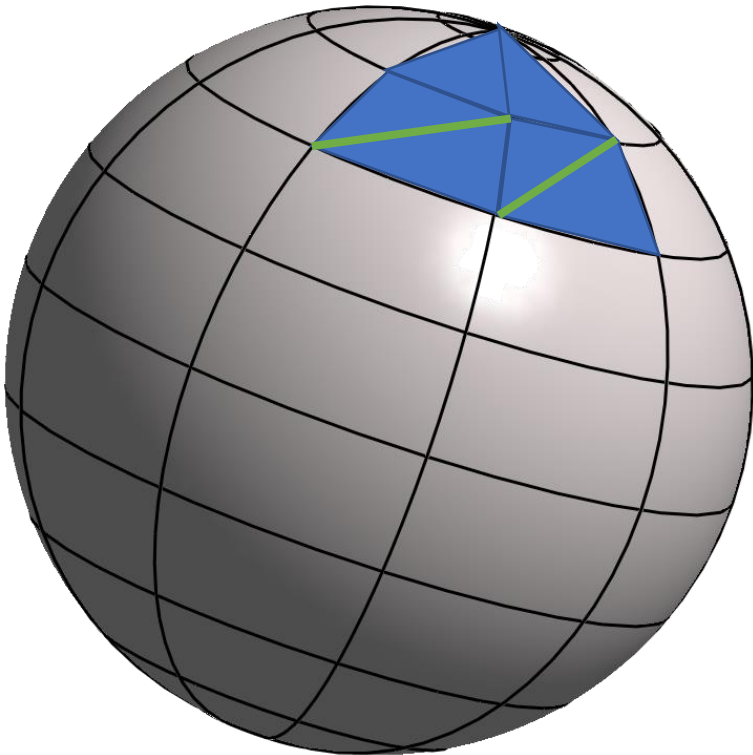
Discrétisation

- Idem pour le cône.
- Pour la sphère certaines facettes sont déjà des triangles.



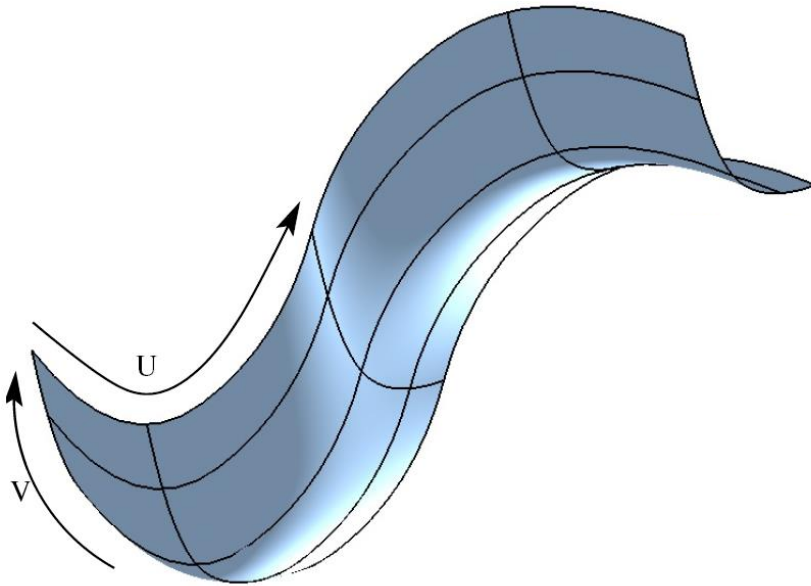
Discrétisation

- Idem pour le cône.
- Pour la sphère certaines facettes sont déjà des triangles.



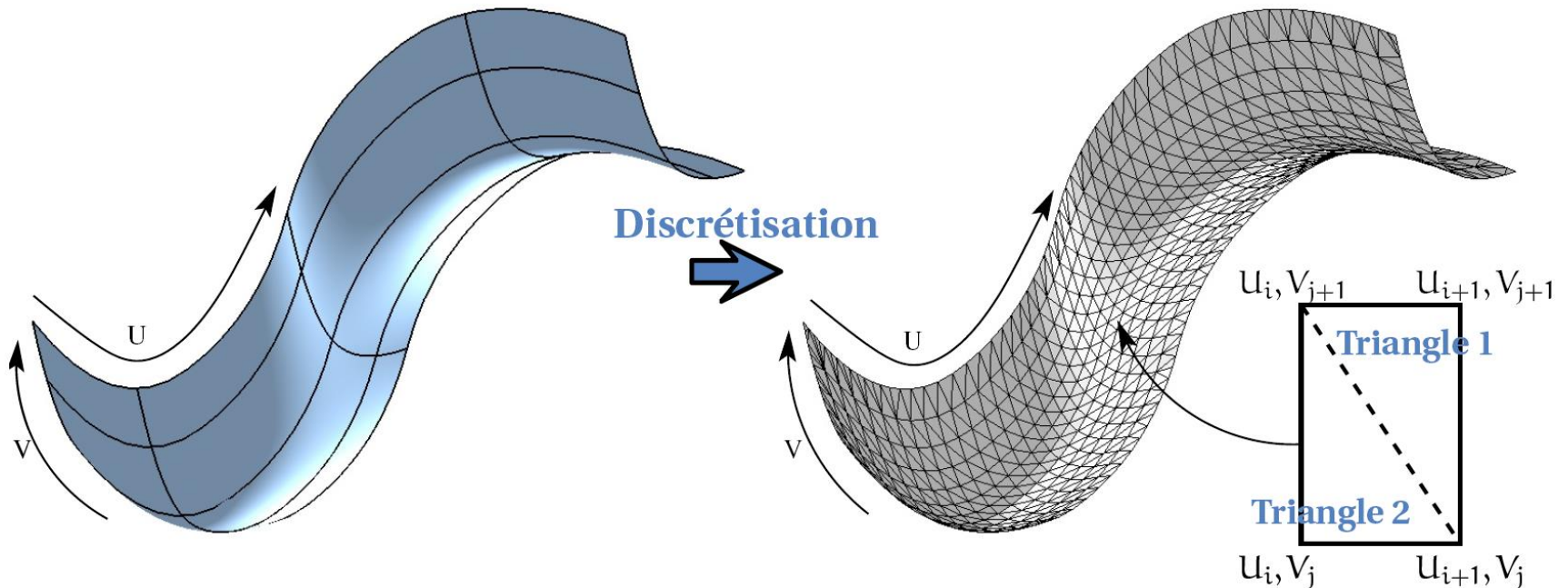
Discrétisation

- Surfaces libres en utilisant les iso-paramétriques :
 - courbes de contrôle en U et V,
 - construction de facettes qui sont ensuite triangulées.



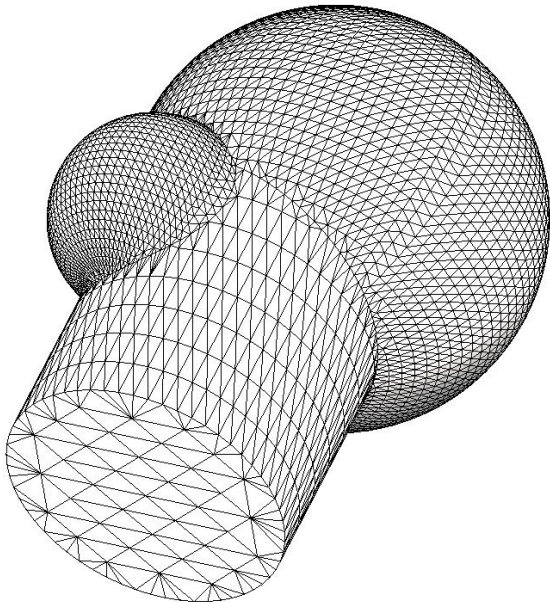
Discrétisation

- Surfaces libres en utilisant les iso-paramétriques :
 - courbes de contrôle en U et V,
 - construction de facettes qui sont ensuite triangulées.



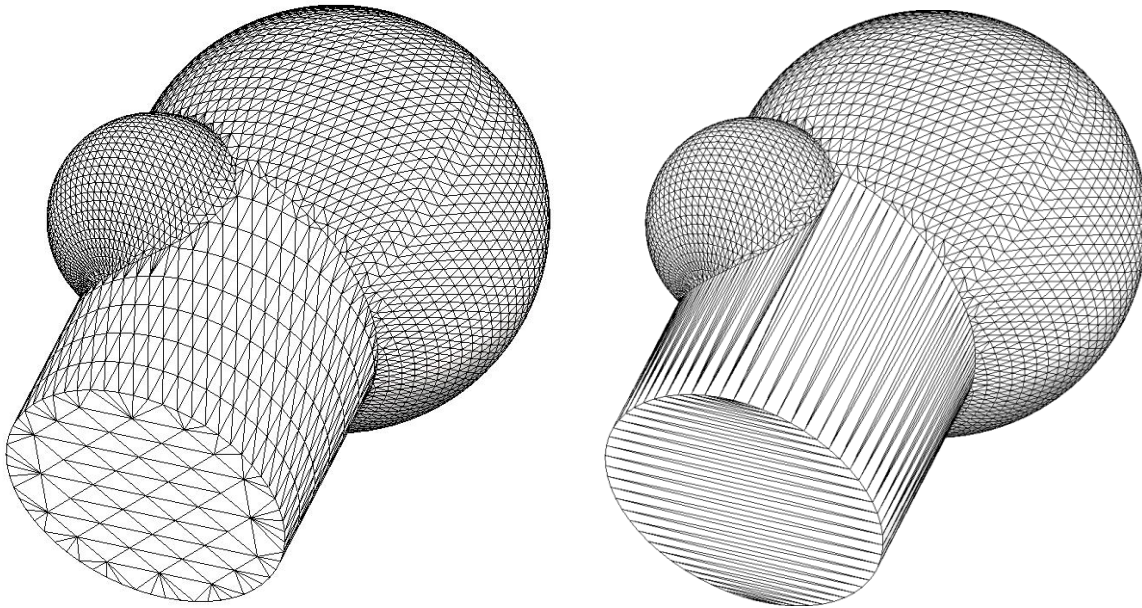
Discrétisation

- La résolution du maillage est induite par le nombre d'iso-paramétriques calculées en U ou en V



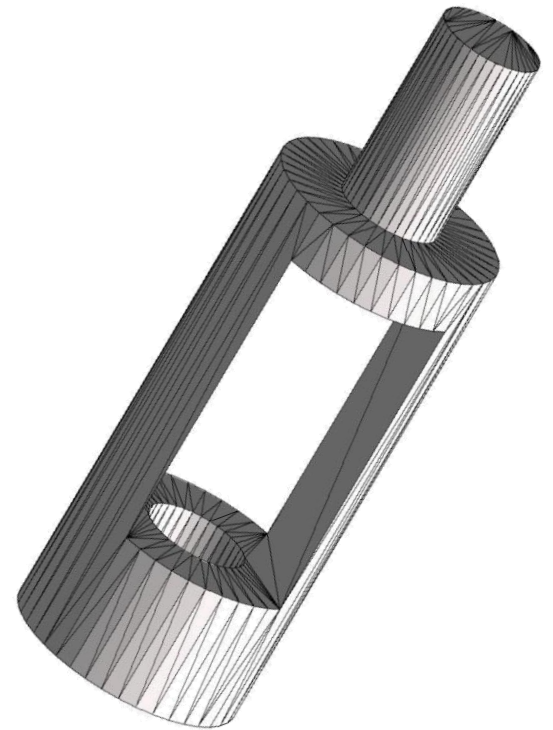
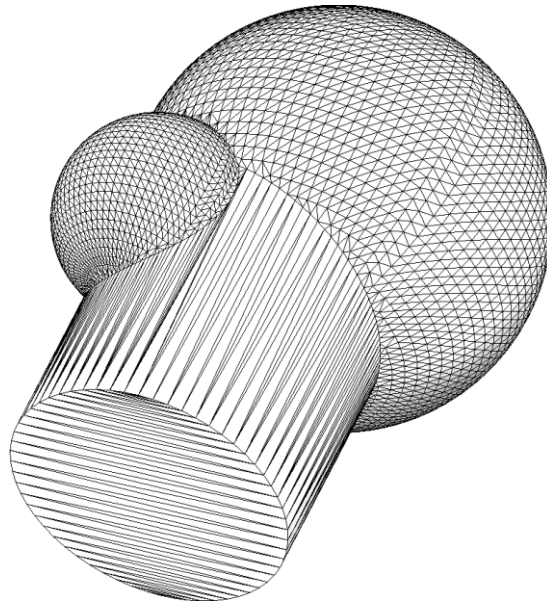
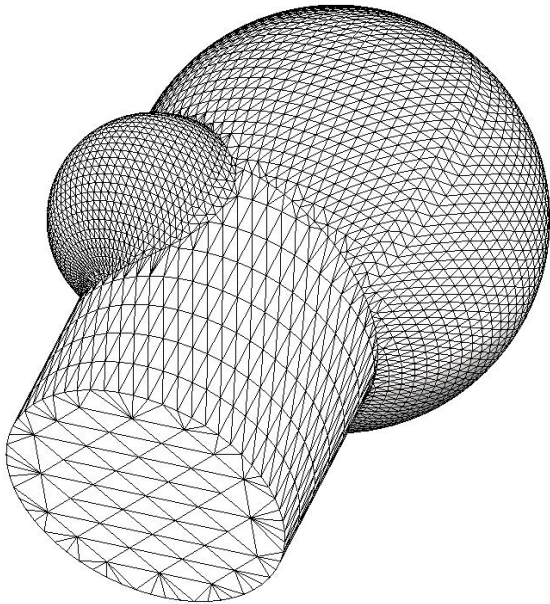
Discrétisation

- La résolution du maillage est induite par le nombre d'iso-paramétriques calculées en U ou en V :
 - le nombre d'iso-paramétriques en U ou en V , peut être différent en fonction de l'objet.



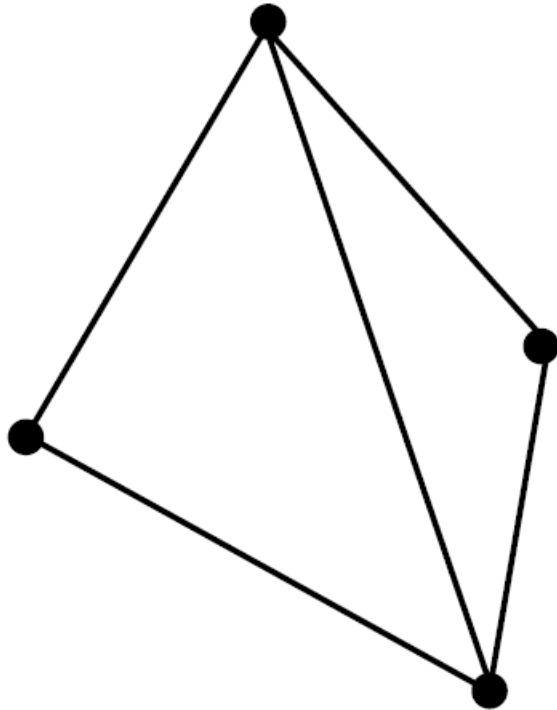
Discrétisation

- La résolution du maillage est induite par le nombre d'iso-paramétriques calculées en U ou en V :
 - le nombre d'iso-paramétriques en U ou en V , peut être différent en fonction de l'objet.



Triangulation

- A partir d'un nuage de points, plusieurs méthodes :
 - par triangulation de Delaunay et diagramme de Voronoï



Connectivité

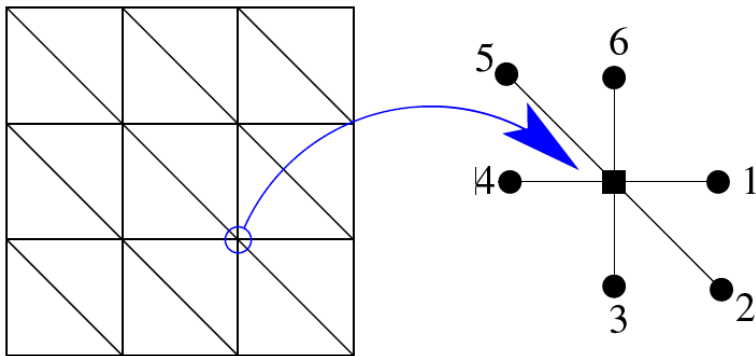
- 1-anneau voisinage (**1- voisinage**) d'un sommet v : ensemble des sommets reliés par une arête à v
- Valence d'un sommet : taille de 1-voisinage
- Maillage régulier :
 - Tous les sommets ont une valence régulière
 - Exemple :
 - valence 6 pour les maillages triangulaires
 - valence 4 pour les maillages quadrangulaires
- Maillage semi-régulier :
 - La plupart des sommets ont une valence régulière – Peu de sommets *extraordinaires* (valence irrégulière)
- Maillage arbitraire :
 - La plupart des sommets sont extraordinaires

Maillage régulier

- Lors d'une discrétisation il y a deux façons de rajouter les diagonales :
 - toutes les diagonales dans le même sens (valence 6)

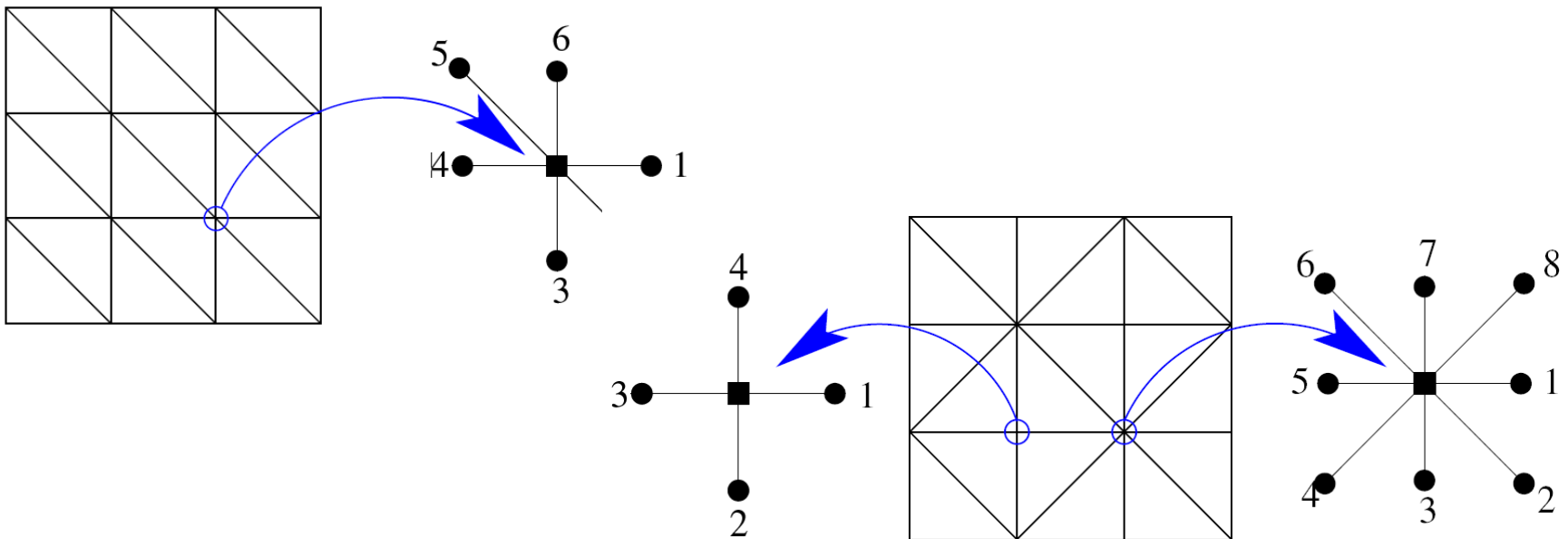
Maillage régulier

- Lors d'une discrétisation il y a deux façons de rajouter les diagonales :
 - toutes les diagonales dans le même sens (valence 6) ,
 - un coup d'un côté, un coup de l'autre (valence 4/8).



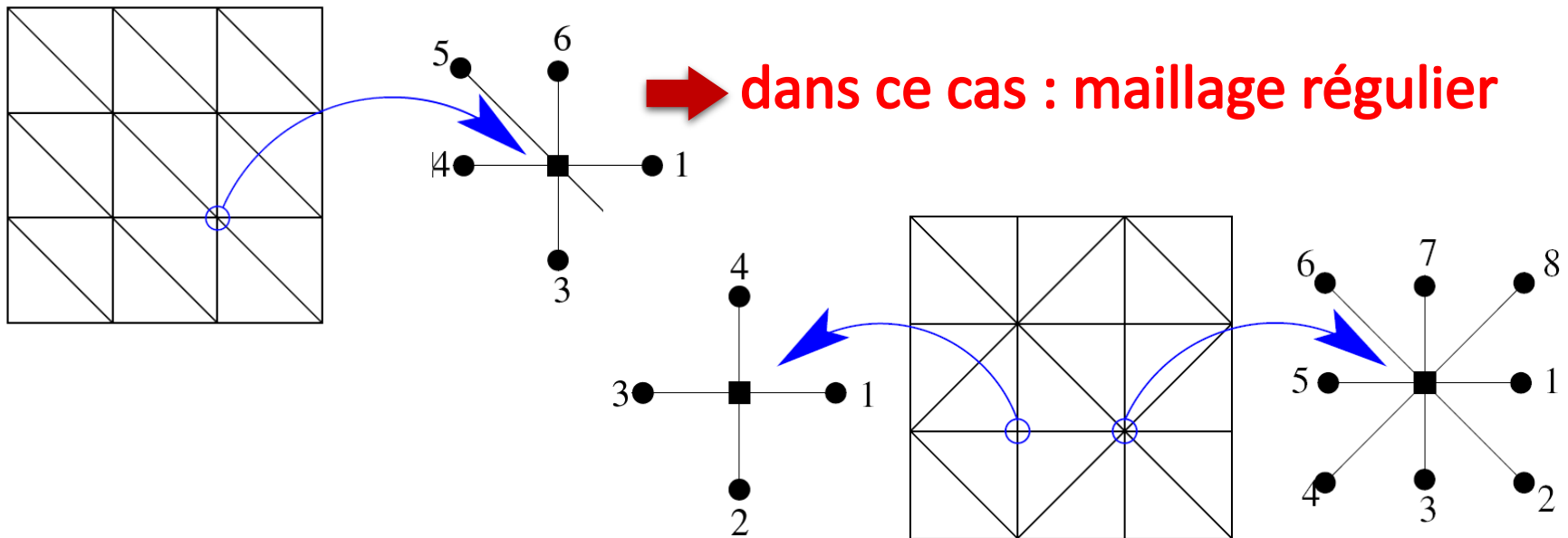
Maillage régulier

- Lors d'une discrétisation il y a deux façons de rajouter les diagonales :
 - toutes les diagonales dans le même sens (valence 6) ,
 - un coup d'un côté, un coup de l'autre (valence 4/8).



Maillage régulier

- Lors d'une discrétisation il y a deux façons de rajouter les diagonales :
 - toutes les diagonales dans le même sens (valence 6) ,
 - un coup d'un côté, un coup de l'autre (valence 4/8).



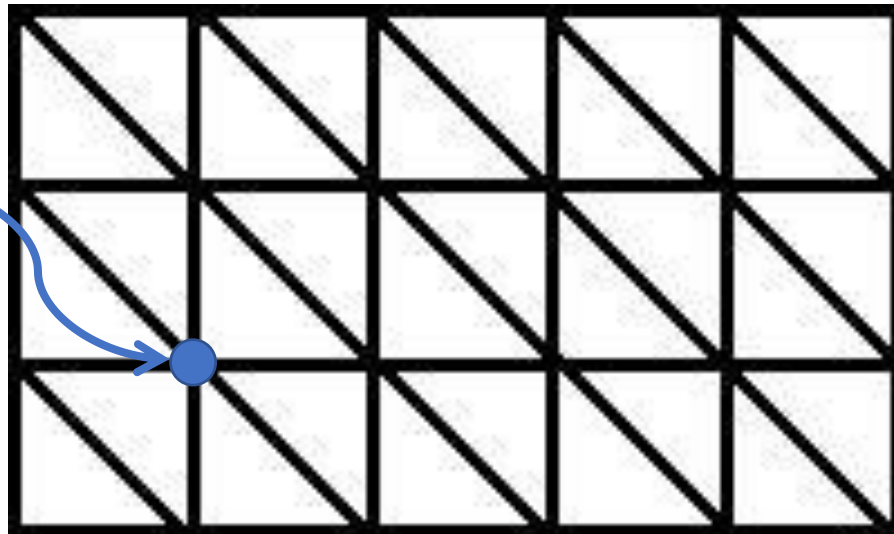
Maillage régulier

- Un maillage est régulier si :

Maillage régulier

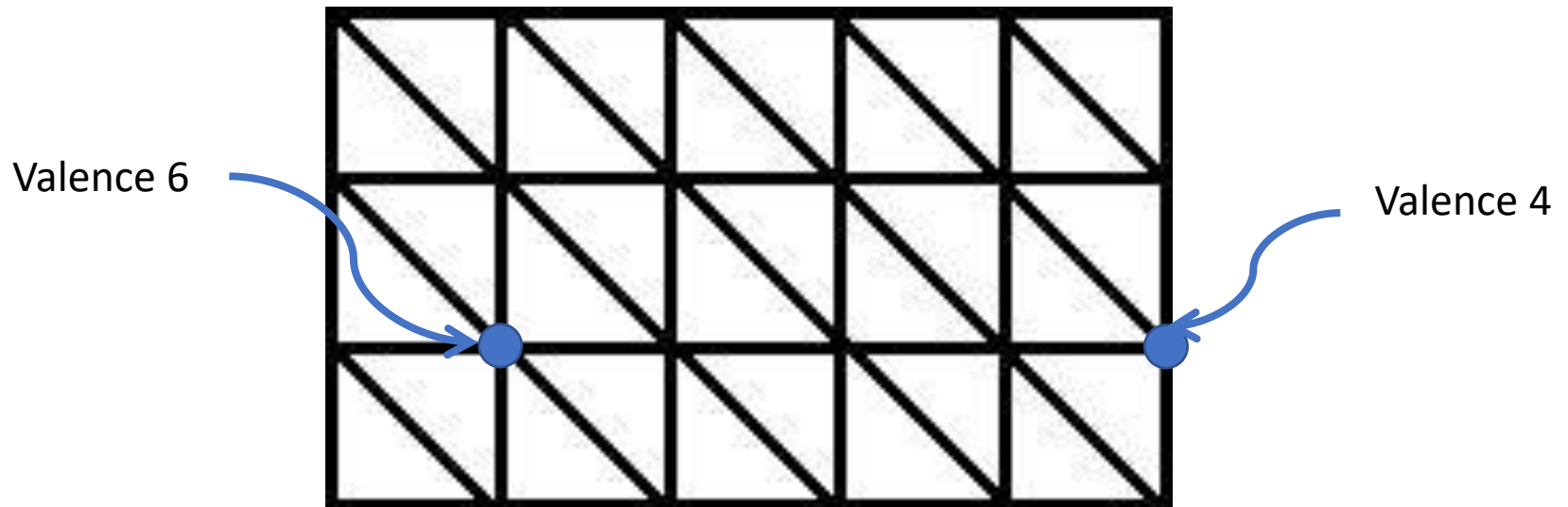
- Un maillage est régulier si :
 - tous ses sommets internes sont de valence 6,

Valence 6



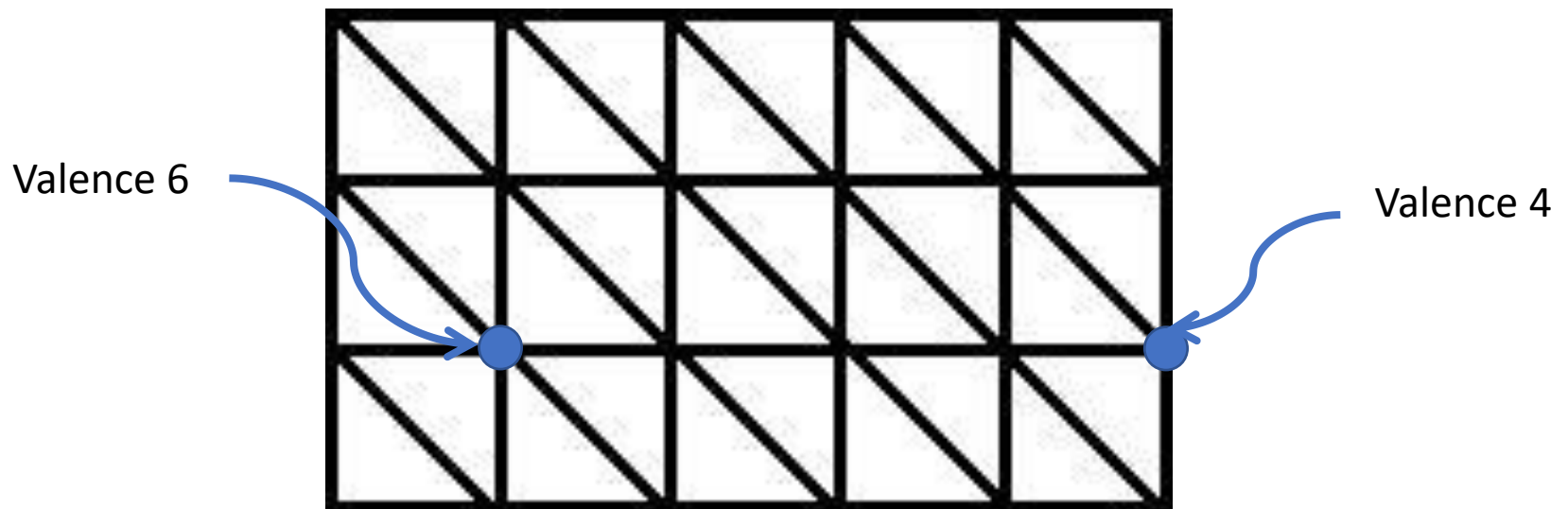
Maillage régulier

- Un maillage est régulier si :
 - tous ses sommets internes sont de valence 6,
 - tous ses sommets du bord sont de valence 4.



Maillage régulier

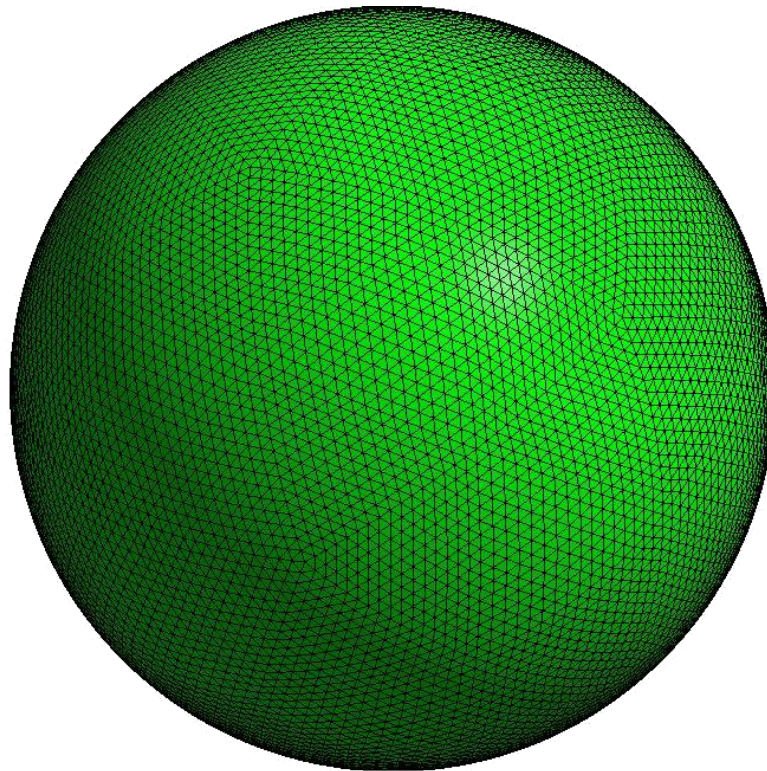
- Un maillage est régulier si :
 - tous ses sommets internes sont de valence 6,
 - tous ses sommets du bord sont de valence 4.



→ utile pour certaines opérations : subdivision, topologie...

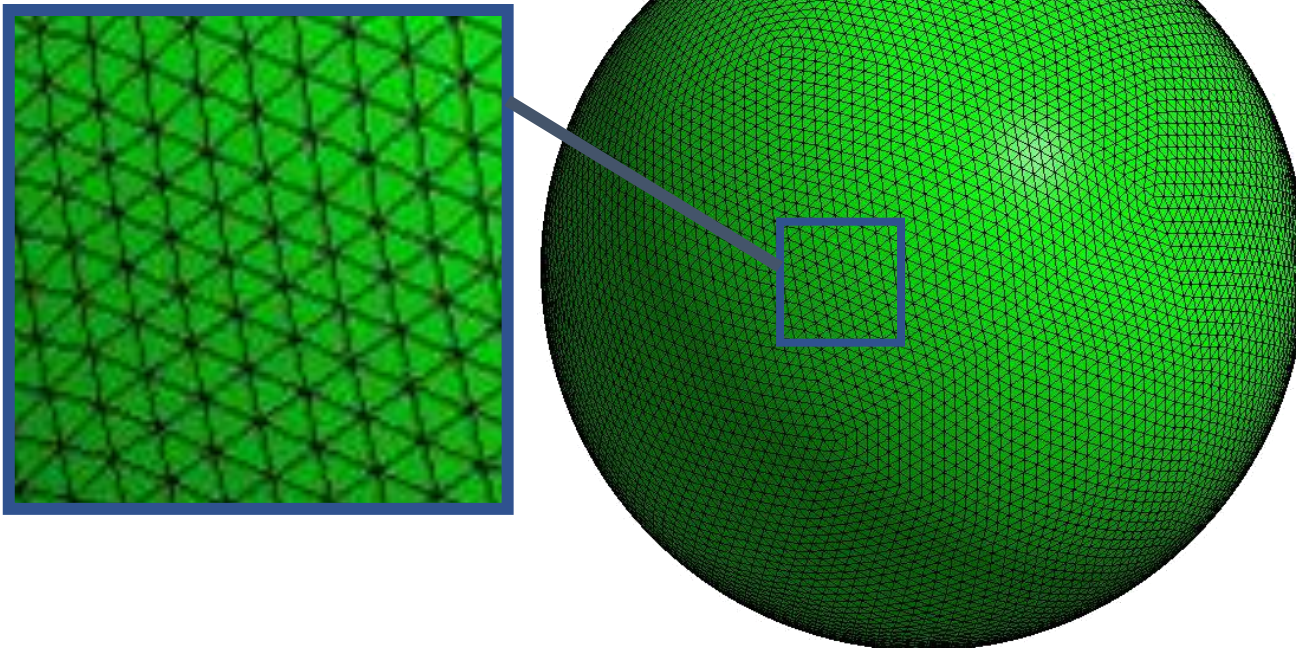
Maillage régulier

- Un maillage est semi-régulier si :



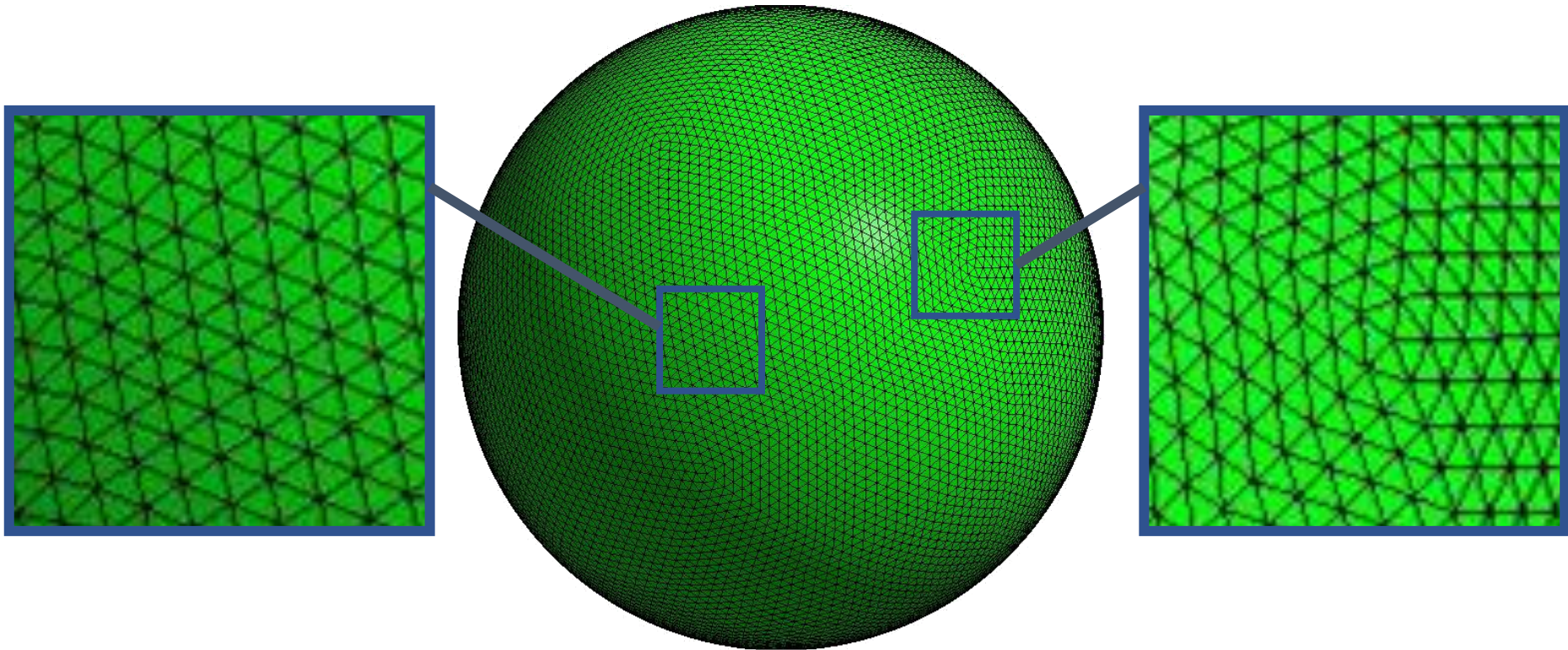
Maillage régulier

- Un maillage est semi-régulier si :
 - la majeure partie de ses sommets sont de valence 6,



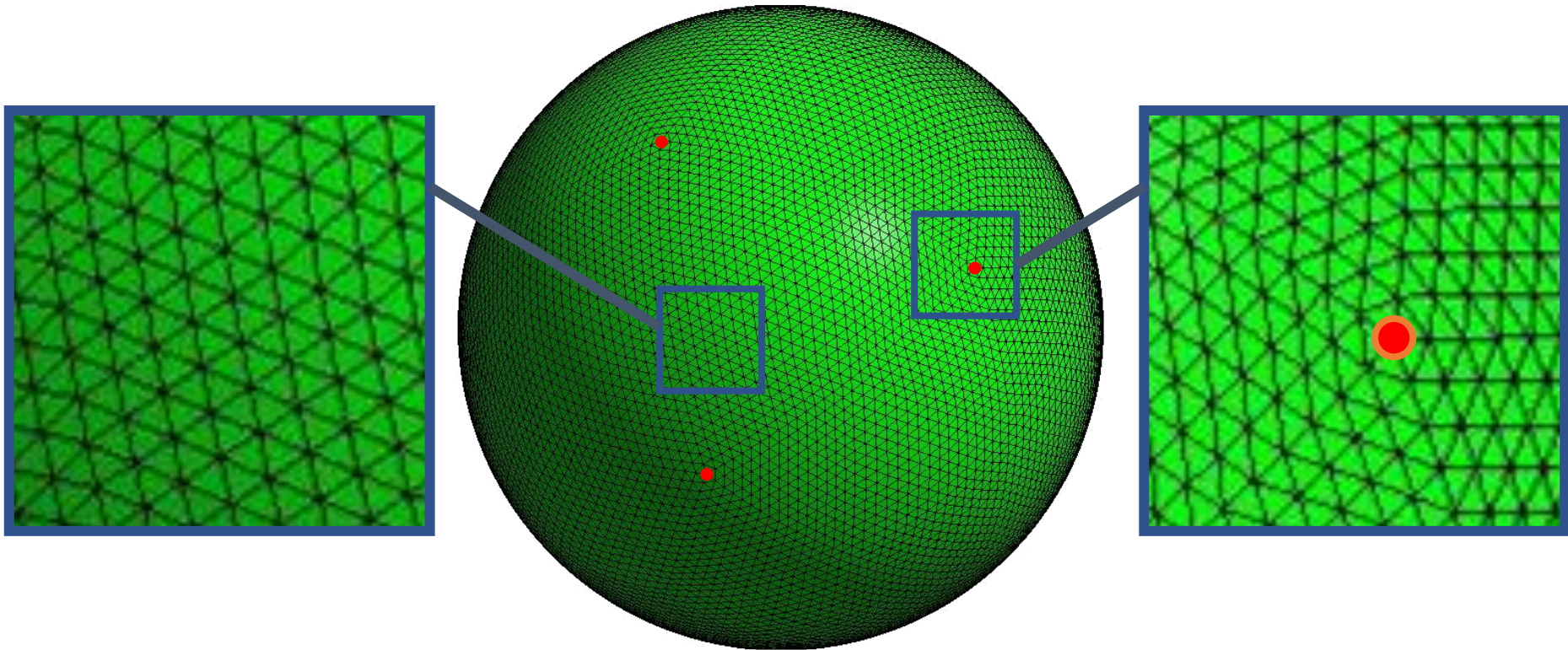
Maillage régulier

- Un maillage est semi-régulier si :
 - la majeure partie de ses sommets sont de valence 6,
 - seulement quelques sommets sont de valence $\neq 6$.



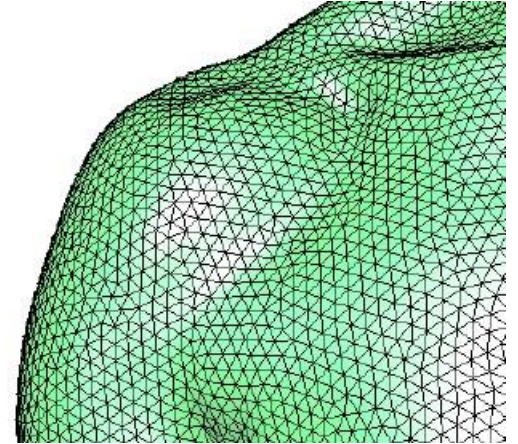
Maillage régulier

- Un maillage est semi-régulier si :
 - la majeure partie de ses sommets sont de valence 6,
 - seulement quelques sommets sont de valence $\neq 6$.

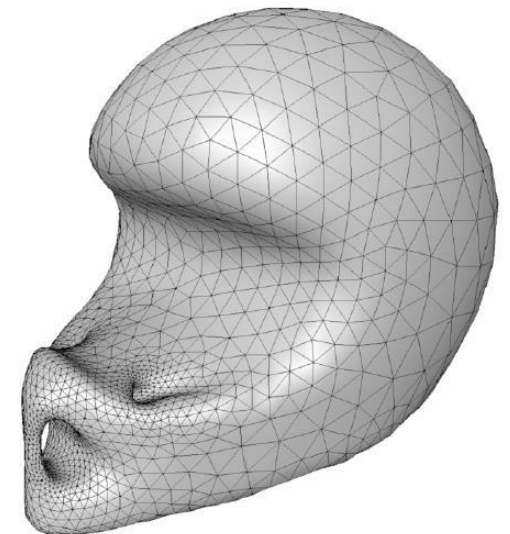


Isotropie et Anisotropie

- Isotropie : les polygones ont une forme similaire sur tout le maillage
 - Triangles quasi-équilatéraux
 - Traitement géométrique numériquement plus stables
 - «Neutralité» pour la déformation
 - aucune restriction sur la taille
 - Basée courbure
 - e.g, courbure moyenne



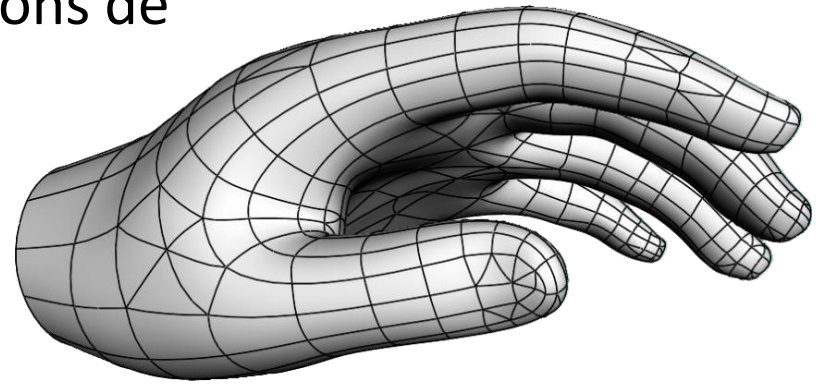
Maillage triangulaire isotrope



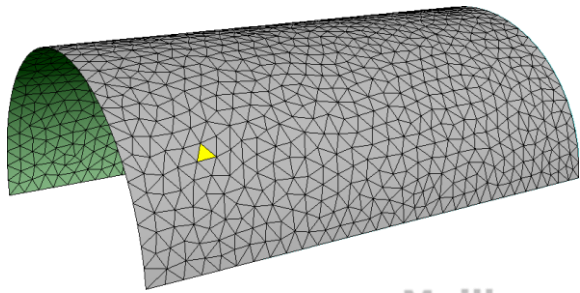
Maillage triangulaire basé courbure

Isotropie et anisotropie

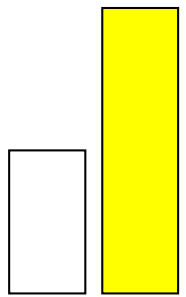
- Anisotropie : la forme des polygones suit la géométrie de la surface
 - Arêtes alignées sur les directions de courbures principales
 - Lignes de flots
 - Distances géodésiques
- Notion d'**optimalité** du maillage



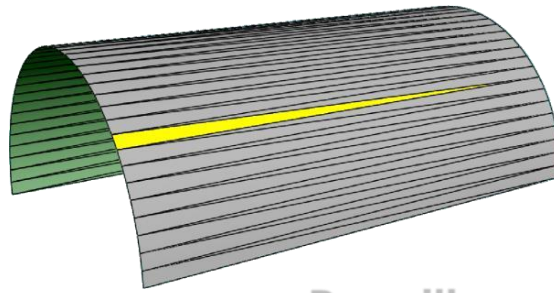
Isotropie et anisotropie



**Maillage
Isotrope**



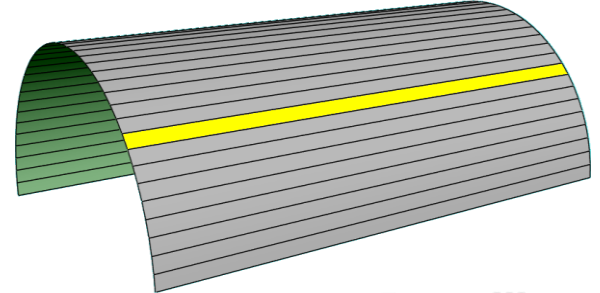
#V #F



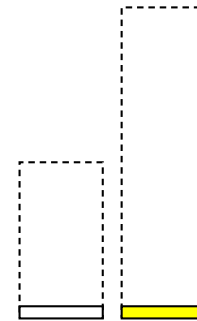
**Remaillage
Anisotrope**



#V #F



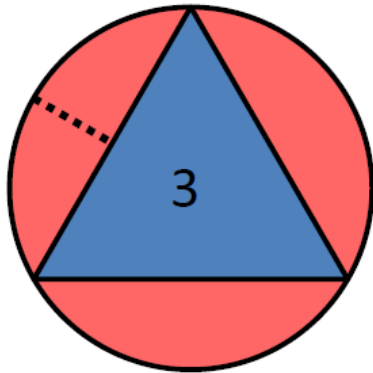
**Remaillage
Quad
Anisotrope**



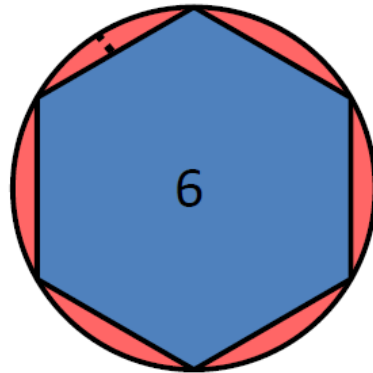
#V #F

Maillages polygonaux

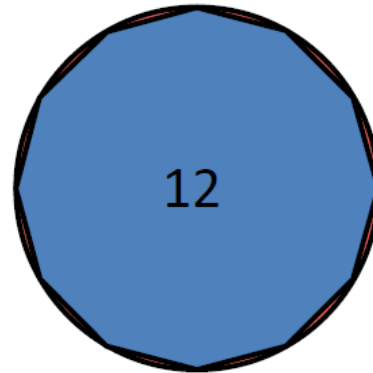
- Approximation linéaire par morceau
 - erreur en $O(h^2)$



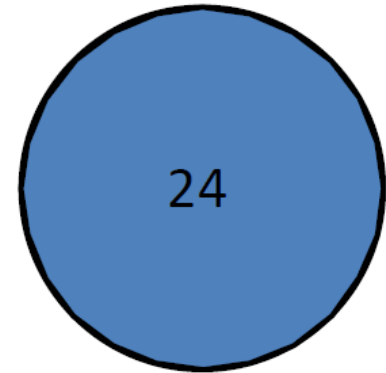
25%



6.5%



1.7%



0.4%

Applications

- Maillages très bien adaptés au rendu 3D
 - Format natif des cartes 3D (GPU)
 - Format natif des moteurs de rendu haute qualité
- (Renderman, MentalRay)
- Représentation naturelle pour le traitement géométrique
 - Reconstruction à partir de nuages de points, filtrage, simplification, optimisation, raffinement, subdivision, etc...
 - Topologie arbitraire
 - Outils de géométrie discrète

Conclusion

- **Représentation par maillage :**
 - un ensemble de sommets, un d'arêtes et un de faces,
 - plus les autres propriétés : normales, couleurs...
- **Plusieurs représentations possibles :**
 - les arêtes ou les faces ne sont pas forcément stockées de manière explicite,
 - selon la représentation les liaisons : sommets/faces, sommets/sommets, arêtes/faces ... ne sont pas toujours les mêmes,
 - il faut choisir entre taille en mémoire, parcours dans le maillage et extraction de la topologie.

Sources

- Cours utilisés pour ce support :
 - Gilles Gesquière (Gamagora Lyon)
 - Loïc Barthe (IRIT-UPS Toulouse)
 - Nicolas Roussel (Inria Lille)
 - Sylvain Brandel (Liris, Lyon)
 - Roseline Bénière