

Лабораторная работа XII: Уравнения Лагранжа первого рода

Задание №1: Движение по эллипсоиду

Материальная точка массы m скатывается по гладкому неподвижному эллипсоиду с полуосями a, b, c под действием центральной силы тяжести mg без начальной скорости. Уравнения связей в этом случае имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x}{a^2} \cdot \lambda \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{b^2} \cdot \lambda \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -g + \frac{x}{a^2} \cdot \lambda \end{cases} \quad (1)$$

множитель Лагранжа равен:

$$\lambda = \frac{g - \frac{v_x^2}{a^2} - \frac{v_y^2}{b^2} - \frac{v_z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \quad (2)$$

смоделируйте движение точки и изобразите поверхность, по которой она движется.

Задание №2: Движение в цилиндре

Материальная точка массы m движется по внутренней поверхности цилиндра радиуса под действием центральной силы тяжести.

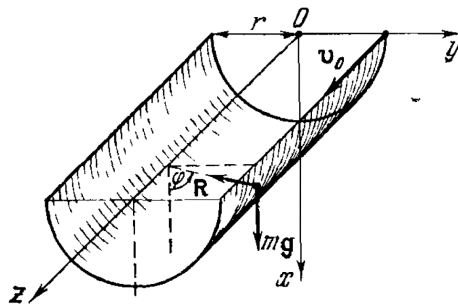


Рис. 1: Схематический рисунок движение точки по внутренности цилиндра

Уравнения связей в этом случае имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -g - \lambda x \end{cases} \quad (3)$$

множитель Лагранжа равен:

$$\lambda = -\frac{3gz}{z^2 + x^2} \quad (4)$$

смоделируйте движение точки и изобразите поверхность, если уравнения, определяющие цилиндр имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos(\theta) \\ y = R \cdot \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad (5)$$

где $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 3]$