

## Лабораторная работа XVI: The end

### Задание №1: Движение по эллипсоиду

Определите множители Лагранжа и уравнение движения точки, двигающейся по гладкому эллипсоиду с полуосями  $a, b, c$  под действием силы тяжести  $mg$ , направленной вдоль оси  $Oz$ .

Уравнение эллипсоида имеет вид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Указания:

1. Запишите систему уравнений для второго закона Ньютона, с учетом сил реакции связей;
2. Определите функцию связей  $f(x, y, z)$ ;
3. Определите первые производные функции связей  $f(x, y, z)$  по  $x, y$  и  $z$ ;
4. Определите первую и вторую производную функции связей  $f(x, y, z)$  по  $t$ ;
5. Используя закон сохранения полной механической энергии определите компоненты  $v_x, v_y$  и  $v_z$  скорости точки;
6. Подставьте все необходимые неизвестные переменные во вторую производную функции связи по  $t$  и определите множитель Лагранжа;
7. Окончательно запишите систему уравнений, описывающую динамику точки.

Замечание: для расчета производных параметры  $a, b, c$  можно либо определить численно либо при помощи команды *Symbol*, например  $a = \text{Symbol}('a')$  и т. д.

### Задание №2: Crazy pendulum

Плоский маятник длины  $l$  и массы  $m$ , точка подвеса которого движется по вертикальной окружности радиуса  $R$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 1), описывается функцией Лагранжа:

$$L = \frac{ml^2}{2} v_\phi^2 + mRl\omega^2 \cos(\phi - \omega t) + mgl \cos(\phi)$$

где  $\phi$  - обобщенная координата, описывающая угол отклонения маятника в точке подвеса (рис. 1), а  $v_\phi = \frac{d\phi}{dt}$  - первая производная координаты  $\phi$  по времени  $t$  или скорость изменения координаты  $\phi$ .

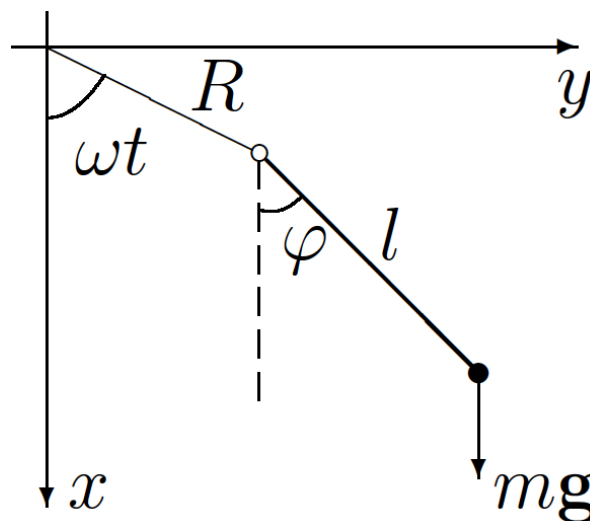


Рис. 1: Изображение условий задачи

Определите дифференциальное уравнение движения такого маятника в обобщенных координатах, исходя из следующих указаний:

1. Определите производную функции Лагранжа  $L$  по  $\phi$ ;
2. Определите производную функции Лагранжа  $L$  по  $v_\phi$ , после чего от полученного результата определите производную по  $t$ ;
3. Подставьте полученные результаты в уравнение Лагранжа 2-го рода:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{dv_\phi} \right) - \frac{dL}{d\phi} = 0$
4. Выведите дифференциальное уравнение движения маятника.

### ***Задание №3: Моделирование***

Решите дифференциальное уравнение, полученное в предыдущей задаче, после чего выполните преобразование из обобщенных координат к декартовым и сделайте анимацию движения. Необходимые параметры задать произвольным образом.