京大理科数学 2003

第 1 問

[解] $\begin{cases} a_1 = 1 & \cdots ① \\ \log a_{n+1} - \log a_n = \log n - \log(n+2) & \cdots ② \end{cases}$

②から $\log \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \log \dfrac{n}{n+2}$ $\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{n+2}$ （∵ $\log x$ は単調）

だから

$$(n+2) a_{n+1} = n a_n$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+1} = (n+1) n a_n$$

くり返し用いて

$$(n+1) n a_n = 2 \cdot 1 \cdot a_1 = 2 \quad (∵①)$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

より

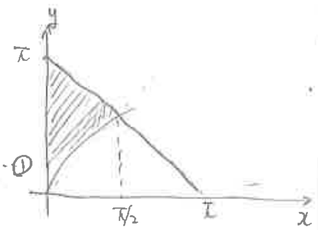
$$\sum_{k=1}^{n} a_n = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$$

第2問

[解] $f(x)=x\sin x\ (x\geqq 0)$ 　$f'(x)=\sin x+x\cos x$ より、

$f'(\pi/2)=1$ だから、$x=\pi/2$ での法線は $y=-x+\pi$ だから求めるのは

右図斜線部をx軸まわりに回転してできる立体の体積.



$$V=\int_0^{\pi/2}\pi\left[(-x+\pi)^2-x^2\sin^2 x\right]dx \cdots ①$$

ここで

$$\int_0^{\pi/2} x^2\sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}x^2(1-\cos 2x)\,dx \cdots ②$$

であり、

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos 2x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{2x}{4}\cos 2x-\frac{2}{8}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

から、②に代入して

$$\int_0^{\pi/2} x^2\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi/2}+\frac{\pi}{8}=\frac{1}{48}\pi^3+\frac{1}{8}\pi \cdots ③$$

又

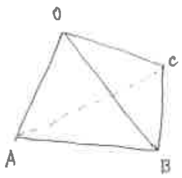
$$\int_0^{\pi/2}(x-\pi)^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3-\pi x^2+\pi^2 x\right]_0^{\pi/2}=\frac{7}{24}\pi^3 \cdots ④$$

③④を①に代入して

$$V=\pi\left\{\frac{7}{24}\pi^3-\frac{\pi^3}{48}-\frac{1}{8}\pi\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{13}{48}\pi^3-\frac{1}{8}\pi\right) \quad //$$

第 3 問



[解] 点Xにそれぞれ $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ と定める。(i)から

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0 \\ \vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0 \\ \vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

又、(ii)から、△OABの面積Tとして、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{c})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}-\vec{a}|^2|\vec{c}-\vec{a}|^2-\{(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\}^2} \end{aligned} \quad \cdots ②$$

である。①から、$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ ($\equiv q$ とする) …③ だから、$y=\sqrt{x}$ が単調増加であることより②から

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2 \quad \cdots ④$$

となる。$|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|>0$ から、

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}| \ (\equiv p とする) \quad \cdots ⑤$$

である。さらに②から

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sqrt{4(p^2-q)^2-(p^2-q)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{p^4-q^2} \end{aligned}$$

$y=\sqrt{x}$ は単調増加だから、$\sqrt{\ }$ の中を比較して

$$\begin{aligned} &4(p^2-q)^2-(p^2-q)^2=p^4-q^2 \\ &3(p^2-q)^2=p^4-q^2 \\ &2p^4-6p^2q+4q^2=0 \\ &(p^2-2q)(2p^2-2q)=0 \\ &\therefore q=\frac{1}{2}p^2,\ p^2. \end{aligned} \quad \cdots ⑥$$

ところで、$\angle AOB=\alpha$ とすれば、$q=p^2\cos\alpha$ であり、$0<\alpha<\pi$ より、$|q|<p^2$ だから⑥で $q=\frac{1}{2}p^2$ が正しい。この時

$$|\vec{b}-\vec{a}|=|\vec{c}-\vec{b}|=|\vec{c}-\vec{a}|=\sqrt{2p^2-p^2}=p \quad (\because 各項0以上) \quad \cdots ⑦$$

である⑤⑦から、四面体OABCは各辺の長さが等しく、正四面体である。図

[解2] (⑤以下)

同様に、支点をOからA, B, Cに取り直すことによって、

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{OA}| \quad \cdots ⑧$$

を得る。⑤⑧から、示された。回

第 4 問

[解] $x^2+x+1=0$ の 2解 $\omega, \overline{\omega}$ とおくと. $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ より $\overline{\omega}=\omega^2$ である. 又. $\omega^3=1$ である $F(x)=(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ とおく.

$$
\begin{aligned}
F(\omega)&=(\omega+1)^{100}+(-\omega)^{100}+1\\
&=(-\omega^2)^{100}+\omega+1\\
&=\omega^2+\omega+1=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(\omega^2)&=(\omega^2+1)^{100}+(\omega+1)^{100}+1\\
&=(-\omega)^{100}+(-\omega^2)^{100}+1\\
&=\omega^2+\omega+1=0
\end{aligned}
$$

より、因数定理から $F(x)$ は x^2+x+1 で割り切れる ☒

第 5 問

第6問

[解] nチームをa_k ($k=1,2,\cdots,n$)とおく。$n-2$勝1負の2チームのえらび方は${}_nC_2 = n(n-1)/2$通りである。以下、この2チームがa_1, a_2の時をかんがえる。対称性から、a_1がa_2に勝つ時をかんがえる ——①

	a_1	a_2	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_n
a_1		○	○ … ○	×	○ …	○
a_2	×		○ … ○	○	○ …	○
	× ⋮ ×	× ⋮				
a_k	○	×				
	× ⋮ ×	⋮				
a_n	×	×				

この時、a_1はa_kにのみまける ($3 \le k \le n$)。a_2は$a_3 \sim a_n$に全て勝つ。したがって、$a_3 \sim a_n$の中で、a_k以外は必ず2敗する。a_kが2敗以上する確率は$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ (∵排反) だから、①となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}$$

したがって、a_1, a_2が$(n-2)$勝1敗となる確率Pは

$$P = (n-2)\,2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}$$
$$= (n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}$$

だから、全ての場合について足して、

$$n(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}$$ //