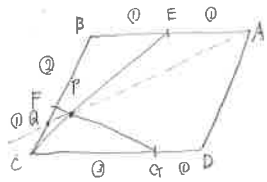
京大理系数学 2013

第 1 問

[解] 点Xに対し $\overrightarrow{AX}=\vec{x}$ とする。

$\vec{b},\vec{d}$ は互いに一次独立である。



$$\begin{cases} \vec{e}=\frac{1}{2}\vec{b},\ \vec{f}=\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d} \\ \vec{g}=\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d} \end{cases}$$

から，$s,t\in\mathbb{R}$ として

$$\vec{p}=s\vec{e}+(1-s)\vec{c}$$
$$=\frac{1}{2}s\vec{b}+(1-s)(\vec{b}+\vec{d})=\left(1-\frac{1}{2}s\right)\vec{b}+(1-s)\vec{d}$$

$$\vec{p}=t\vec{f}+(1-t)\vec{g}$$
$$=t\left(\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)+(1-t)\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d}\right)=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}t\right)\vec{b}+\left(1-\frac{1}{3}t\right)\vec{d}$$

とかける．係数比較して

$$\begin{cases} 1-\frac{1}{2}s=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}t \\ 1-s=1-\frac{1}{3}t \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} t=\frac{9}{11} \\ s=\frac{3}{11} \end{cases}$$

だから

$$\vec{p}=\frac{19}{22}\vec{b}+\frac{8}{11}\vec{d}$$

となり，$k,l\in\mathbb{R}$ として

$$\vec{q}=k\vec{d}+\vec{b} \quad l\left(\frac{19}{22}\vec{b}+\frac{8}{11}\vec{d}\right)$$

とかける。係数比較して $l=\frac{22}{19}$ だから，$\overline{AP}:\overline{PQ}=19:3$ //

第 2 問

[解] $N\in\mathbb{N}_{\geq 2}$とする。$A_M=\sum_{n=1}^{M}a_n$とする. $N=2$の時. $a_1=1$, $a_k=0$ $(k\geq 2)$から.

$$\max A_M = 1 \leq 2^3-2-5=1$$

となり成立する。以下$N\geq 3$とする。帰納的に、

$$a_1=2^N-3,\ a_2=2^{N-1}-2,\ a_k=2^{N+1-k}-1\ (k=3\cdots N),\ a_k=0\ (N+1\leq k)$$

となるから. $M=N$の時に題意が成立すれば良い ($a_n\geq 0$から. $A_M\leq A_N$)

$$A_N=(2^N-3)+(2^{N-1}-2)+\sum_{k=3}^{N}(2^{N+1-k}-1)$$

$$=3\cdot 2^{N-1}-5+\sum_{k=1}^{N-2}2^k-(N-2)$$

$$=3\cdot 2^{N-1}-N-3+2\frac{2^{N-2}-1}{2-1}$$

$$=2^{N+1}-N-5$$

だから. 成立。

以上から題意は示された団

第 3 問

[解] nの時のa, bをa_n, b_nとする。$x^n = P(x)(x^2-2x-1) + a_n x + b_n$と書ける。両辺に$x$をかけて、

$$x^{n+1} = \{xP(x) + a_n\}(x^2-2x-1) + (2a_n+b_n)x + a_n \quad \cdots ①$$

となる。

以下「$a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ かつ $a_n \perp b_n$」$=: ◇$を帰納的に示す。$n=1$の時、$(a_1, b_1) = (1, 0)$となり◇は成立。以下$n=k$での成立を仮定する。①から

$$\begin{cases} a_{k+1} = 2a_k + b_k \in \mathbb{Z} \\ b_{k+1} = a_k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \cdots ②$$

だから、a_{k+1}, b_{k+1}が共通因数dを持つとすると、a_k, b_kもdで割り切れ仮定に反する。よって $a_{k+1} \perp b_{k+1}$ $\cdots ③$

②③から$n=k+1$でも◇は成立する。以上から示された。□

第 4 問

[解] $f(x)=C+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ $(C=\cos x,\ S=\sin x)$ とおく。$f'(x)=-S+\frac{\sqrt{3}}{2}x$ であり,

$f''(x)=-C+\frac{\sqrt{3}}{2}$ から下表をうる。(fは偶関数)

x	0		$\frac{\pi}{6}$		α		$\pi/2$
f''	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$-1+\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$
f		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

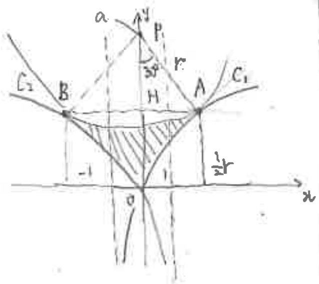
$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\pi-1>\frac{1.7}{4}\cdot 3.1-1=\frac{1.27}{4}>0\right.$ から. $\frac{\pi}{6}<\alpha<\pi/2$ かつ $f'(\alpha)=0$ をみたすαが1個ある$\left.\right)$

よって. 最大値の候補は. $f(0)=1$, $f(\pi/2)=\frac{\sqrt{3}\pi^2}{16}$ であり.

$$f(\pi/2)>\frac{1.7\cdot(3.1)^2}{16}=\frac{16.337}{16}>1=f(0)$$

から. もとめるのは $f(\pi/2)=\frac{\sqrt{3}\pi^2}{16}$ //

第 5 問



[解] $\begin{cases} C_1 : y = \sqrt{3}\log(x+1) \\ C_2 : y = \sqrt{3}\log(1-x) \end{cases}$

円Cの半径r (>0)とすると、$\triangle ABP$が正三角形であるから、A, Bのx座標は順に$\frac{1}{2}r$, $-\frac{1}{2}r$である。さらに、$P(0, a)$とおくと、AでのC_1の接線l_1は

$$l_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{1+\frac{1}{2}r}\left(x-\frac{1}{2}r\right) + \sqrt{3}\log\left(1+\frac{1}{2}r\right)$$

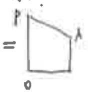
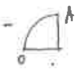
であり、$AP \perp l_1$ から この傾きが $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ だから、

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\frac{1}{2}r} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore\ r = 4 \quad \cdots ①$$

この時、aを2通りで表して

$$a = \sqrt{3}\log\left(1+\frac{1}{2}r\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}r = \sqrt{3}\log 3 + 2\sqrt{3} \quad \cdots ②$$

である。求める面積Sとする。対称性から

$\frac{1}{2}S =$  $-$  $-$  $\cdots ③$

であり、

 $= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{3}\log 3 + a\right\}\cdot 2 = \sqrt{3}\log 3 + a$

 $= \int_0^2 \sqrt{3}\log(x+1)\,dx = \sqrt{3}\left[(x+1)\left\{\log(x+1) - 1\right\}\right]_0^2 = \sqrt{3}(3\log 3 - 2)$

 $= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot r^2 = \frac{4}{3}\pi$

を③に代入して②から

$$\frac{1}{2}S = 2\sqrt{3}\log 3 + 2\sqrt{3} - \left(3\sqrt{3}\log 3 - 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$= 4\sqrt{3} - \sqrt{3}\log 3 - \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore S = 2\left(4\sqrt{3} - \sqrt{3}\log 3 - \frac{4}{3}\pi\right)$$

//

[解] xにある石に対し、試行を行った後の座標$f(x)$とすると

$$f(x)=\begin{cases}-x & (確率\tfrac{1}{2})\\ 2-x & (\ 〃\ )\end{cases}$$

である。

(1) 2回試行をくり返すと、以下のようになる。

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & -x \arrow[r, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & x \\
 & 2-x \arrow[r, "1/2"] \arrow[dr, "1/2"'] & 2+x \\
 & & x-2 \\
 & & x
\end{tikzcd}$$

…☆

よって、もとめる確率$P=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $_{//}$

(2) 2k回目の試行の後 $(k\in\mathbb{N})$の石の位置a_kとすると、☆から、

$$a_{k+1}=\begin{cases}a_k & (確率\ \tfrac{1}{2})\\ a_k+2 & (\ 〃\ \ \tfrac{1}{4})\\ a_k-2 & (\ 〃\ \ \tfrac{1}{4})\end{cases}$$

となる。$a_{k+1}=a_k-2$となる試行が行われた場合、max $a_{2n}=2(n-1)-2=2n-4$となるから不適である。同様に考えて$a_n=2n-2$となるのは、$a_{k+1}=a_k$を1回、$a_{k+1}=a_k+2$を$n-1$回行った時で、もとめる確率は

$$P={}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$ $_{//}$