曲線 $xy=1$ の第 1 象限の部分に定点 $P(a,b)$ があり，同じ曲線の第 3 象限の部分に動点 Q がある．

(1) 線分 QP の長さの最小値を a で表せ．

(2) 線分 QP の長さが最小になるとき，QP が x 軸の正の方向と 30° の角をなすような a の値を求めよ．

[解] まず，題意から

$$a>0b=\frac{1}{a} \tag{1}$$

である．また $c>0$ として $\left(-c,\dfrac{-1}{c}\right)$ とおける．

(1) $|QP|^2=(c+a)^2+\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)^2$ であるからこれを $f(c)$ として

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f'(c)&=(c+a)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{-1}{c^2}\right)\\&=(a+c)\left(1-\frac{1}{ac^3}\right)\\&=\frac{a+c}{ac^3}(pc-1)\left(1+pc+(pc)^2\right)\end{aligned}$$

となる．ただし $p=\sqrt[3]{a}$ である．故に下表を得る．

c		$1/p$	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

従って

$$\begin{aligned}\min f(c)&=f\left(\frac{1}{p}\right)\\&=\left(\frac{1}{p}+p^3\right)^2+\left(p+\frac{1}{p^3}\right)^2\\&=\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)^3\end{aligned}$$

だから，もとめる最小値は ($|QP|\geq 0$ より)

$$\min|QP|=(a^{2/3}+a^{-2/3})^{3/2} \qquad \text{(答)}$$

となる．

(2) このとき，前問の結果から，

$$\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}p^3+1/p\\1/p^3+p\end{pmatrix}\ \parallel\ \begin{pmatrix}p^2\\1\end{pmatrix}$$

となる．従ってこれが x 軸の正の方向と 30° の角を成す，つまり $(\sqrt{3},1)$ と平行なとき

$$\begin{aligned}p^2&=\sqrt{3}\\p&=\sqrt[4]{3}\\a&=3^{3/4}\end{aligned} \qquad \text{(答)}$$

となる．