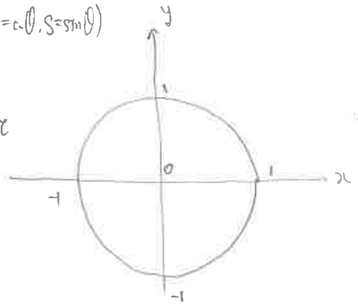
京大理科数学 1996

第　問

[解] $A(1,0)$, $X(c,s)$ $(c=\cos\theta, s=\sin\theta)$
$(0\leqq\theta<2\pi)$ とおいて良い.
点Xの位置ベクトルをwと表す.



(1) $\vec{y} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 2c\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}$

だから
$|\vec{y}|^2 = (1-2c^2)^2+4c^2s^2 = 1$ 　∴ $|\vec{y}|=1$ $(\because |\vec{y}|\geqq 0)$
より. $|\overrightarrow{OY}|=1$ □

(2) $\vec{y}=-\vec{a}$ の時.

$\begin{pmatrix}1-2c^2\\-2cs\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

∴ $c=\pm1$, $cs=0$
∴ $(c,s)=(\pm1,0)$
だから. $X=A$ 又は Aと中心を結ぶ直線と円の交点のうち, Aでない方

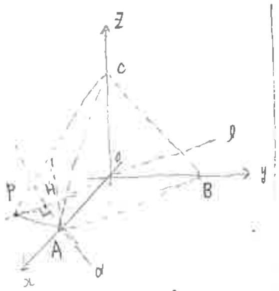
(3) $Y(X,Y)$とおく.
$X=1-2c^2=\cos2\theta$
$Y=\sin2\theta$
だから. θが$0\leqq\theta<2\pi$でうごくとき. YはCを2回まわる □

第 2 問

[解] αとlの交点Hとすると、Hは$z=0$上で

$y=-x$と$y=x-1$の交点で、$H\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)$となる。

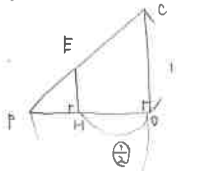
したがって、$t>\frac{1}{2}$の時、PとB、PとCは互いにαに関して反対側にあり、PB、PCはαと交点D、Eを持つ。ここで、$\alpha \parallel z$軸だから、右下図で



相似から、

$$\overline{EH} = \frac{t-\frac{1}{2}}{t} \qquad \cdots ①$$

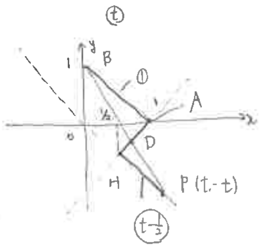
である。



次にDにも同様に

$$\overline{AD} = \frac{1}{1+(t-\frac{1}{2})}\overline{AH}$$

$$= \frac{1}{t+1/2}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cdots ②$$



したがって

$$S(t) = (\triangle ADE\text{の面積})$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{EH}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{t+1/2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t-1/2}{t} \quad (\because ①②)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{p}{(p+1)(p+\frac{1}{2})} \quad (p=t-1/2>0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{p+\frac{1}{2}\frac{1}{p}+\frac{3}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}} \quad (\because \text{AM-GM}, p>0)$$

$$= \frac{1}{2}(-4+3\sqrt{2})$$

//

等号成立は $p=\frac{1}{2p}$ ∴ $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (>0)の時である。

第 3 問

第 4 問

[解] (1) $\begin{cases} k=8 \text{ の時. } a_1=0,\ a_2=2,\ a_n=3\ (n\geq 3) \\ k=9 \text{ 〃 } \quad a_1=0,\ a_2=3,\ a_n=4\ (n\geq 3) \end{cases}$

//

(2) 題意を帰納的に示す。まず. $n=1$ の時. $a_1=0$, $a_2=\left[\frac{k}{3}\right]\geq 0$. $k\geq 0$ から成立する。以下 $n=k\in\mathbb{N}$ での成立を仮定する。$[x]$ は単調増加だから.

$$a_{k+1}=\left[\frac{a_k+k}{3}\right]\leq\left[\frac{a_{k+1}+k}{3}\right]=a_{k+2} \qquad \cdots ①$$

次に.

$$a_{k+1}=\left[\frac{a_k+k}{3}\right]\leq\left[\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right]$$

であり. $\begin{cases} k\in \text{odd} \text{ の時 } \left[\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right]=\left[\frac{k-1}{2}+\frac{1}{3}\right]=\frac{k-1}{2} \\ k\in \text{even} \text{ の時 } \left[\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right]=\frac{k}{2}-1<\frac{k-1}{2} \end{cases}$

から.

$$a_{k+1}\leq\frac{k-1}{2} \qquad \cdots ②$$

となる。以上①②から. $n=k+1$ でも成立。よって示された ∎

(3) 題意を帰納的に示す。$n=n$ の時は成立するので. 以下 $n=N\in\mathbb{N}\geq n$ での成立を仮定する。

$$a_{N+1}=\left[\frac{a_N+k}{3}\right]=\left[\frac{a_n+k}{3}\right]=a_{n+1}=a_n \quad (\because \text{仮定})$$

から. $n=N+1$ でも成立。よって示された ∎

(2) から. $0\leq a_n\leq\frac{k-1}{2}$ で. $a_n\in\mathbb{Z}$ かつ $a_n\leq a_{n+1}$ から. $a_n=a_{n+1}$ となる n がある。この時.

$$a_{n+1}=\left[\frac{a_n+k}{3}\right]=a_n$$

から.

$$a_n\leq\frac{a_n+k}{3}<a_n+1$$

$$\frac{k-3}{2}<a_n\leq\frac{k}{2} \qquad \cdots ③$$

である。

1° $k\in$ odd

$a_n\in\mathbb{Z}$ と③から. $a_n=\frac{k-1}{2}$ である.

2° $k\in$ even

$a_n\in\mathbb{Z}$ と③, $a_n\leq\frac{k-1}{2}$ から. $a_n=\frac{k-2}{2}$ である。

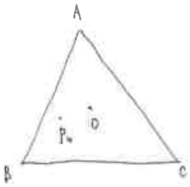
以上まとめて.

$$a_n=\begin{cases}\frac{k-1}{2} & (k\in \text{odd}) \\ \frac{k}{2}-1 & (k\in \text{even})\end{cases}$$

//

第 5 問

[解] (1) 選んだ頂点 X_1 とする。



$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OX_1})$$

$$|\overrightarrow{OP_1}|^2 = \frac{1}{4}\{|\overrightarrow{OP_0}|^2 + |\overrightarrow{OX_1}|^2 + 2\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OX_1}\}$$

$$= \frac{1}{4}\{|\overrightarrow{OP_0}|^2 + 1 + 2\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OX_1}\} \quad (\because |\overrightarrow{OX_1}| = 1)$$

より、

$$E_1 = \sum_{X_1 = A,B,C} |\overrightarrow{OP_1}|^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1+|\overrightarrow{OP_0}|^2}{4} + \frac{2}{3}\{\overrightarrow{OP_0}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\} = \frac{1+|\overrightarrow{OP_0}|^2}{4} \quad (\because \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \vec{0})$$

//

(2) 点 X に対し、$\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ とする。題意から、

$$\overrightarrow{P_{n+1}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_n} + \overrightarrow{x_{n+1}})$$

だから、くり返し用いて、

$$\overrightarrow{P_n} = \frac{1}{2}\vec{x_n} + \frac{1}{4}\overrightarrow{x_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n}\vec{x_1} + \frac{1}{2^n}\overrightarrow{OP_0}$$

$$= \frac{1}{2^n}\overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{n+1-i}}\overrightarrow{OX_i}$$

//

(3) $P_0 = O$ の時、

$$\overrightarrow{OP_n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{n+1-i}}\overrightarrow{OX_i}$$

だから、Y_i を、$\vec{y_i} = \frac{1}{2^{n+1-i}}\vec{x_i}$ となるよう定めると、

$$|\overrightarrow{P_n}|^2 = |\vec{y_1} + \vec{y_2} + \cdots + \vec{y_n}|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|y_i|^2 + 2\sum_{i<j}\vec{y_i}\cdot\vec{y_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4^{n+1-i}} + 2\sum_{i<j}\vec{y_i}\cdot\vec{y_j} \quad (\because |\vec{x_i}| = 1)$$

$$= \frac{1}{3}\{1-(1/4)^n\} + 2\sum_{i<j}\vec{y_i}\cdot\vec{y_j} \qquad \cdots ①$$

である。ここで、$i \neq j$ に対して

$$\vec{x_i}\cdot\vec{x_j} = \begin{cases} 1 & (X_i = X_j) \\ -\frac{1}{2} & (X_i \neq X_j) \end{cases} \qquad \cdots ②$$

だから、$\vec{x_i}\cdot\vec{x_j}$ の期待値 $P_{i,j}$ は

$$P = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

なので、$\sum_{i<j}\vec{y_i}\cdot\vec{y_j}$ の期待値 Q は、

$$Q = \sum_{i<j}\frac{1}{2^{n+1-i}\,2^{n+1-j}}\cdot P_{i,j} = 0$$

だから①より

$$E_n = \frac{1}{3}(1-(1/4)^n) + Q = \frac{1}{3}\{1-(\tfrac{1}{4})^n\}$$

//

[解2]

(3) $E_1 = \frac{1}{4}$ ($\because$ (1)) $\cdots ③$ である。ここで、$n \geq 2$ の時、

$$\overrightarrow{P_n} = \frac{1}{2}\{\overrightarrow{P_{n-1}} + \vec{x_n}\}$$

$$|\overrightarrow{P_n}|^2 = \frac{1}{4}\{|\overrightarrow{P_{n-1}}|^2 + |\vec{x_n}|^2\} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_{n-1}}\cdot\vec{x_n} \qquad \cdots ④$$

であり、

$$E(|\overrightarrow{P_{n-1}}|) = E_{n-1}$$

$$E(|\vec{x_n}|^2) = 1$$

$$E(\vec{x_n}\cdot\overrightarrow{P_{n-1}}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{P_{n-1}}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

を④に代入して

$$E_n = \frac{1}{4}(E_{n-1} + 1)$$

③とあわせて

$$E_n = \frac{1}{3}\{1-(\tfrac{1}{4})^n\}$$

//

第6問

[解] $v=\mathrm{const}$ とする。100 km 走るのに要する時間は $\frac{100}{v}$ [h] である。…①

はじめにガソリンが x_0 [kg] あったとして、題意から

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{100+x}{100}e^{kv}$$

$$\frac{1}{100+x}dx = -\frac{e^{kv}}{100}dt$$

積分して、初期条件から、

$$x+100 = (x_0+100)e^{-\frac{e^{kv}}{100}t} \quad \cdots②$$

したがって、①から、総ガソリン消費量 T は、①より

$$T = x_0 - x\big|_{t=\frac{100}{v}}$$

$$= x_0 - \left\{(x_0+100)e^{-\frac{e^{kv}}{v}} - 100\right\} \qquad \left(A=\frac{e^{kv}}{v} とおく\right)$$

$$= (1-e^{-A})x_0 - 100(-1+e^{-A})$$

$-\frac{e^{kv}}{v}<0$ から $X(v)$ は1次係数正の x_0 の1次式 …④

又、$t=\frac{100}{v}$ で $x\geq 0$ だから、②より

$$(x_0+100)e^{-\frac{e^{kv}}{v}} \geq 100$$

$$x_0 \geq 100\left(e^{+\frac{e^{kv}}{v}}-1\right) \equiv p \quad \cdots⑤$$

④⑤より、$X(v)$ を min にする x_0 は p である。

$$\min X(v) = (1-e^{-A})100(e^{A}-1) - 100(-1+e^{-A})$$

$$= 100\left[e^{A}-1\right] \quad \cdots⑥$$

e^x は単調増加だから A が min の時 X も min である

$$\frac{dA}{dv} = \frac{ke^{kv}v - e^{kv}}{v^2} = \frac{kv-1}{v^2}e^{kv}$$

から、$v=\frac{1}{k}\,(>0)$ で、A は max である。⑤からこの時

$$p = 100\left(e^{ek}-1\right)$$