京大理科数学 1991

120/120分

		計	[illegible]	[illegible]
1	多変数	B	A	A
2	行列	/	/	/
3	ベクトル	B	B	B
4	不等式	B	C	B
5	確立	D	B	C
6	関数	C	D	D

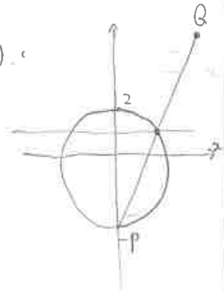
第 1 問

[解] $C: x^2+(y-\frac{2-p}{2})^2=(\frac{2+p}{2})^2$

だから、これと $y=1$ の交点の x 座標は

$x=\pm\sqrt{p+1}$ である。従って、$Q(s, t)$

に対し $s\geq 0$ から



$$\begin{cases} \frac{s}{2}=\sqrt{p+1} \\ \frac{t-p}{2}=1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{s=2\sqrt{p+1},\ t=2+p}$ (1)

である。よって

$s^2=4(p+1)$ $\therefore p=\frac{s^2}{4}-1$ ($p>0$ から $s>2$)

だから代入して

$t=2+\frac{s^2}{4}-1=\frac{1}{4}s^2+1$

より、求めるキセキは

$\underline{y=\frac{1}{4}x^2+1\ (x>2)}$

であり、$x=2\sqrt{p+1}$ での接線は

$l: y=\sqrt{p+1}\ x+p$

であり

$PQ: y=\frac{2(p+1)}{2\sqrt{p+1}}x-p$

$=\sqrt{p+1}\ x-p$

と一致するから題意は示された。

第 2 問

/20

第 3 問

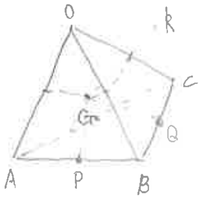
[解] 4頂点 O,A,B,C とし、点Xに対し $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ とすると

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立…① である. 題意から

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0 \quad \cdots②$$

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0 \quad \cdots③$$

$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0 \quad \cdots④$$



OXの中点X', 四面体OABCの重心G, AB,BC,CAの中点P,Q,Rとして

$$\overrightarrow{GA'}=\frac{1}{4}(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

$$\overrightarrow{GB'}=\frac{1}{4}(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$$

$$\overrightarrow{GC'}=\frac{1}{4}(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{GP}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$$

$$\overrightarrow{GQ}=\frac{1}{4}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{GR}=\frac{1}{4}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

である. ②〜④から

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}=A$$

だから $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=B$ とおけば

$$|\overrightarrow{GX'}|^2=|\overrightarrow{GP}|^2=|\overrightarrow{GQ}|^2=|\overrightarrow{GR}|=\frac{1}{16}(B-2A) \quad (X'=A',B',C')$$

となり、たしかに これらは Gを中心とする円周上にある □

/20

第 4 問

[解] $0 \leq a < \pi/4,\ 0 \leq b < \pi/4$ …①

[補題1] $0 \leq x < \pi/4$ において，$f(x) = \tan x$ は下に凸

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$, $f''(x) = 2\dfrac{\tan x}{\cos^2 x} > 0$ から示された □

[補題2] $0 < x < \pi/4$ において $g(x) = \log(\tan x)$ は上に凸

$g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x \cdot \tan x} > 0$, $g''(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2\sin^2 x - 1}{\sin^2 x \cos^2 x} < 0$

から示された □

[補題1] から凸不等式より右側の不等式は示された □

次に左側について

1° $a > 0, b > 0$ の時

両辺 log をとることができて [補題2] から凸不等式から示せた．

2° $ab = 0$ の時

$\sqrt{\tan a \cdot \tan b} = 0$

$\tan\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq 0$

から明らかに成立

より，左側も示された □

第 5 問

[解] n回目の試行前後共に赤玉が1コ入っている確立 $Q_{i,n}$ とおく.

(1) n+1回目の試行前に赤玉が1コ … $Q_{1,n}+P_{2,n}$

〃 2コ … $Q_{2,n}+P_{3,n}$

〃 3コ … $Q_{3,n}$

又

$$Q_{1,n}=(N+2)P_{1,n} \quad Q_{2,n}=\frac{N+1}{2}P_{2,n} \quad Q_{3,n}=\frac{N}{3}P_{3,n}$$

だから.

$$\begin{cases} P_{1,n+1}=\frac{1}{N+3}\left((N+2)P_{1,n}+P_{2,n}\right) \\ P_{2,n+1}=\frac{2}{N+3}\left(\frac{N+1}{2}P_{2,n}+P_{3,n}\right) \\ P_{3,n+1}=\frac{3}{N+3}\cdot\frac{N}{3}P_{3,n}=\frac{N}{N+3}P_{3} \end{cases}$$

//

(2) $P_n=P_{1,n}+P_{2,n}+P_{3,n}$ だから (1)より

$$P_{n+1}=\frac{N+2}{N+3}P_n \quad \cdots ①$$

又. $P_1=\frac{3}{N+3}$ だから. ①と等比数列の公式から

$$P_n=\left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1}\cdot\frac{3}{N+3}$$

//

第6問

[解]

(1) ②の両辺xで微分し、y=f(x)を代入して

$$y^a=\left(e^{-\frac{y^2}{2}}+y^{-a}\right)\cdot\frac{dy}{dx}$$ //

又、②にx=0を代入して

$$0=\int_a^{f(0)}\underbrace{\left(e^{-\frac{t^2}{2}}+t^{-a}\right)}dt \quad \cdots③$$

〜〜はt>0で正だから③が成り立つのは$f(0)=a$の時 である //

(∵f(x)>0)

(2) (イ) (1)から

$$y'=\frac{1}{y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+1} \quad (∵y>0) \quad \cdots④$$

である。$g(y)=y^a\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$ とおくと $g'(y)=e^{-\frac{y^2}{2}}y^{a-1}(a-y^2)$ から下表を得る。

y	0		$\sqrt a$	
g'		+	0	−
g	0	↗	$a^{\frac a2}\cdot e^{-\frac a2}$	↘

(y→∞の時 g(y)→0)

従って④から、0<yの時

$$0<\frac{1}{a^{\frac a2}\cdot e^{-\frac a2}+1}\le y'\le 1$$

だから $b=\frac{1}{a^{\frac a2}\cdot e^{-\frac a2}+1}$ とおけば (b>0) $b\le y'<1$ なるbが存在する //

(ロ) ④から

$$y\left(\frac{1}{y'}-1\right)=y^{a+1}e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \cdots⑤$$

この右辺は、g(y)においてaをa+1におきかえたものだから、y>0の時

$$0<y\left(\frac{1}{y'}-1\right)\le(a+1)^{\frac{a+1}{2}}e^{-\frac{a+1}{2}}$$

だから $C=(a+1)^{\frac{a+1}{2}}e^{-\frac{a+1}{2}}$ とおけば、$0\le y\left(\frac{1}{y'}-1\right)\le C$ なるCが存在する //

(3) (2)(イ)の両辺を積分して

$$[bt]_0^x\le[f(t)]_0^x\le[t]_0^x$$

$$bx\le f(x)-f(0)\le x$$

$$bx+a\le f(x)\le x+a$$

b>0から、はさみうちの定理から $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$。従って(イ)の増減表から

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+1}=1$$ //

(もしくは (ロ)から

$$0\le\frac{1}{f'(x)}-1\le\frac{c}{f(x)}\to 0$$

⇒はさみうち)。

f'(x)>0から、f(x)は単調増加。これとf(0)=aから、a≤f(x)である。
これとf(x)→∞ (x→∞) に注意して、(イ)の増減表から

1° $a\le\sqrt a \Leftrightarrow 0<a\le 1$の時

$$\min y'=\frac{1}{g(\sqrt a)+1}=\frac{1}{a^{\frac a2}\cdot e^{-\frac a2}+1}$$

2° $\sqrt a\le a \Leftrightarrow 1\le a$の時

$$\min y'=\frac{1}{g(a)+1}=\frac{1}{a^a\cdot e^{-\frac{a^2}{2}}+1}$$

以上まとめて

0<a≤1の時 $\dfrac{e^{\frac a2}}{a^{\frac a2}+e^{\frac a2}}$

1≤aの時 $\dfrac{e^{\frac{a^2}{2}}}{a^a+e^{\frac{a^2}{2}}}$ //

/20