京大理科数学　1979

60/120分

第 1 問

[解] (i) $p_1(x)=x+a$ とおける. (i) に代入して

$$\int_{-1}^{1} c(x+a)\,dx=0 \quad \therefore\ a=0$$

より $p_1(x)=x$ //

(ii) $p_2(x)=x^2+ax+b$, $f(x)=\alpha x+\beta$ とおく.

$$\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)(\alpha x+\beta)\,dx$$

$$=2\alpha\int_0^1 ax^2\,dx+2\beta\int_0^1(x^2+b)\,dx$$

$$=\frac{2}{3}a\alpha+2\left(\frac{1}{3}+b\right)\beta=0$$

が任意の α, β で成立するので, $a=0$, $b=-\frac{1}{3}$ となり

$$p_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$$ //

(iii) $p_3(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ とおく.

$$\int_{-1}^{1}p_3(x)f(x)\,dx$$

$$=2\alpha\int_0^1(ax^4+cx^2)\,dx+2\beta\int_0^1(x^4+bx^2)\,dx+2\gamma\int_0^1(ax^2+c)\,dx$$

$$=2\left(\frac{1}{5}a+\frac{1}{3}c\right)\alpha+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}b\right)\beta+2\left(\frac{1}{3}a+c\right)\gamma$$

$$=0$$

これが全ての α, β, γ で成立するので

$$\begin{cases}\frac{1}{5}a+\frac{1}{3}c=0\\ \frac{1}{5}+\frac{1}{3}b=0\\ \frac{1}{3}a+c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=c=0\\ b=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

だから

$$p_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x$$ //

/20

第 2 問

[解] $x=0, \pi, \frac{\pi}{2}$ での成立が必要。又 $0 \leqq C < 2\pi$ とする.

$$\begin{cases} 3a+b(1+2\cos C-3\sin C)=1 & \cdots ① \\ -a+b(1-2\cos C+3\sin C)=1 & \cdots ② \\ 4a+b(1+2\sin C+3\cos C)=1 & \cdots ③ \end{cases}$$

以下 $\sin C=\alpha$, $\cos C=\beta$ とおく. ①+②から

$$a+b=1 \quad \cdots ④$$

④を①, ③に代入

$$\begin{cases} b(-2+2\beta-3\alpha)+2=0 & \cdots ⑤ \\ b(-3+3\beta+2\alpha)+3=0 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤×3 − ⑥×2から

$$b[-6+6\beta-9\alpha+6-6\beta-4\alpha]=0$$

$$\alpha b=0$$

したがって, $b=0$ 又は $\alpha=0 \Leftrightarrow C=0, \pi$ ($\because 0 \leqq C < 2\pi$) である.

1° $b=0$の時

$af(x)=1$ が任意のxで成立するようなaは存在せず不適.

2° $C=0$の時 (この時 $\alpha=0, \beta=1$)

⑤から $2=0$ となり不適

3° $C=\pi$の時 ($\alpha=0, \beta=-1$)

⑤から $b=\frac{1}{2}$, ④から $a=\frac{1}{2}$ である. 逆にこの時

$$\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(x-\pi)=1$$

は任意のxについて成立し, 十分

以上を, Cを一般角に直して

$$(a, b, C)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi+2n\pi\right) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad //$$

/20

第 3 問

[解]

(i) $t>0$ から. AM-GM

$$f(t) \geq 2\sqrt{\sqrt{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}} + \sqrt{2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}+1} = 2+\sqrt{3}$$

(等号成立は $t=1$)

$$f(t)g(t) = \left(t+\frac{1}{t}+2\right) - \left(t+\frac{1}{t}+1\right) = 1$$

$$\therefore g(t) = \frac{1}{f(t)} \quad (\because f(t) \geq 2+\sqrt{3})$$

だから. (i) から. $g(t)$ は $f(t)=2+\sqrt{3}$ の時. max $\underline{2-\sqrt{3}}$ をとる.

(ii) $x, y>0$ から

「a, b, c を3辺とする三角形が常に存在」

$\Leftrightarrow$「$\frac{a}{\sqrt{xy}}, \frac{b}{\sqrt{xy}}, \frac{c}{\sqrt{xy}}$ 〃 」

である. ここで. $\frac{a}{\sqrt{xy}} = A$ などとおき. $t=\frac{x}{y}$ $(t>0)$ とおくと

$$A = \sqrt{t+\frac{1}{t}+1},\ B = p,\ C = \sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}$$

まず. (i) から

$$\max(C-A) = 2-\sqrt{3},\ \min(A+C) = 2+\sqrt{3} \quad \cdots ①$$

だから. もとめる条件は ① が成立するような (A, C) の時での成立が必要で.

$$2-\sqrt{3} < p < 2+\sqrt{3}$$

逆にこの時, $A+C \geq 2+\sqrt{3}$, $C-A \leq 2-\sqrt{3}$ だから $0<C-A<p<A+C$

となり. たしかに A, B, C を3辺とする三角形をつくることが出来.

($\because$ 三角不等式) 十分である.

以上から

$$2-\sqrt{3} < p < 2+\sqrt{3}$$

/20

第 4 問

[解]

(i) $p = \sum_{k=1}^{6} p_k^2$

(ii) $\begin{cases} p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 & \cdots ① \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 & \cdots ② \end{cases}$

コーシー・シュワルツの不等式から

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6)^2 \leq 6p$$

$$\therefore \ p \geq \frac{1}{6} \quad (\because ②)$$ 図

等号成立は $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$ の時で、②からこの時

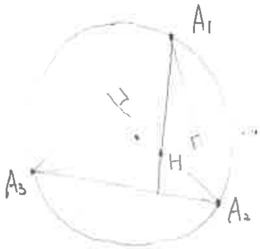
$$p_k = \frac{1}{6}$$

である 図

/20

第 5 問

[解] 点Xに対し, $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ と定めると, $|\vec{a_k}|=\text{const}$ $(k=1\sim6)$



(i) $\overrightarrow{A_2H}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$

$=(\vec{a_1}+\vec{a_3})\cdot(\vec{a_3}-\vec{a_1})$

$=|\vec{a_3}|^2-|\vec{a_1}|=0$

より $A_2H \perp A_1A_3$ ①

同様にして, 各頂点とHを通る直線と, その対辺が直交するから

Hは垂心である □

(ii) 選んだ3点 A_a, A_b, A_c, のこりの3点 A_D, A_E, A_F とする

(集合 $\{A,B,\ldots,F\}=\{1,2,3,\ldots,6\}$). (i)から $\triangle A_aA_bA_c$ の垂心Hは

$$\vec{h}=\vec{a_a}+\vec{a_b}+\vec{a_c} \quad \cdots ①$$

又, $\triangle A_DA_EA_F$ の重心Gとして

$$\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a_D}+\vec{a_E}+\vec{a_F}) \quad \cdots ②$$

①, ②からG, Hを通る直線上の点Xは, $t\in\mathbb{R}$ として

$$\vec{x}=\frac{1}{3}(\vec{a_D}+\vec{a_E}+\vec{a_F})+\frac{t}{3}(3\vec{a_a}+3\vec{a_b}+3\vec{a_c}-\vec{a_D}-\vec{a_E}-\vec{a_F})$$

と表せる. $t=\frac{1}{4}$ として

$$\vec{x}=\frac{1}{4}(\vec{a_a}+\cdots+\vec{a_F})=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{6}\vec{a_k}$$

これは3点のえらび方によらないから, 題意は示された □

(iii

/20

行列

第 6 問

/20