第 1 問

[解] ABとy軸の交点Cとすると、対称性から

$$(\triangle PAB) = 2(\triangle PAC) \quad \cdots ①$$

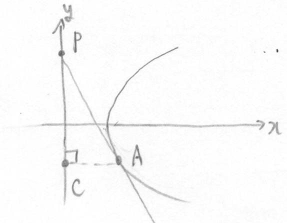
である。双曲線上の点(X, Y)

$(0<X)$での接線は

$$Xx - Yy = 1 \quad \cdots ②$$

これがPを通る時

$$-Yp = 1 \quad \cdots ③$$



△PACの面積$S(p)$とおくと

$$S(p) = \frac{1}{2}X\cdot(p-Y) \quad \cdots ④$$

③と$p>0$から$Y=\frac{-1}{p}$だから、$X^2-Y^2=1$に代入 $(X>0)$

$$X = \sqrt{1+Y^2} = \sqrt{1+\frac{1}{p^2}}$$

以上を④に代入

$$S(p) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}\left(p+\frac{1}{p}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(p^2+1)^3}{p^4}}$$

√の内を$f(p)$とおくと、$f(p)$がminの時$S(p)$がminで、①から

△PABの面積もminとなる。

$$f(p) = \frac{t^3}{(t-1)^2} \quad (t = p^2+1,\ t>1)$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}_{g(\alpha)}} \quad \left(\alpha = \frac{1}{t},\ 0<\alpha<1\right)$$

$$g'(\alpha) = 3\alpha^2-4\alpha+1 = (\alpha-1)(3\alpha-1)$$

より下表をえる

α	0		$\frac{1}{3}$		1
g'		+	0	−	
g		↗		↘	

よって $\alpha = \frac{1}{3}$ の時 $f(p)$はminである。この時 $\alpha = \frac{1}{p^2+1}$、$p>0$

から $p = \sqrt{2}$

#

[本時のミス]

次数をまちがえ

/20

第　　問

/20

第 2 問

[解] C_1, C_2 の中心 O_1, O_2 とする。以下 $c=\cos\theta,\ s=\sin\theta$ とする。

$$\begin{cases} |PO_1|^2 = (c+(1-a))^2+s^2 = (a-1)^2+1+2(1-a)c \\ |PO_2|^2 = (c-(1-b))^2+s^2 = (b-1)^2+1-2(1-b)c \end{cases}$$

だから $\triangle PQO_1$, $\triangle PRO_2$ にピタゴラスの定理を用いて.

$$|PQ|^2 = |PO_1|^2 - a^2 = 2(1-a)(1+c)$$

$$|PR|^2 = |PO_2|^2 - b^2 = 2(1-b)(1-c)$$

だから. $|PQ|, |PR| \geq 0$ より.

$$|PQ| = \sqrt{2(1-a)(1+\cos\theta)} \quad |PR| = \sqrt{2(1-b)(1-c)}$$

である。コーシー・シュワルツより

$$|PQ|+|PR| \leq \sqrt{(1+1)\{2(1-a)(1+c)+2(1-b)(1-c)\}}$$

$$= 2\sqrt{2-a-b} \quad \cdots ☆$$

で. 等号成立は, $0 \leq a, b \leq 1$ より. ($\because C_1, C_2$ が C に含まれる)

$$\sqrt{2(1-a)(1+c)} = \sqrt{2(1-b)(1-c)}$$

$$\Leftrightarrow (1-a)(1+c) = (1-b)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow (2-a-b)c = a-b \quad \cdots ①$$

であり. $2-a-b \geq a-b \Leftrightarrow 1 \geq a$ より. ①をみたす c $(-1 \leq c \leq 1)$ が必ず存在する。以上から. ☆より.

$$\max\{|PQ|+|PR|\} = 2\sqrt{2-a-b}$$

第 3 問

[解] $f(x)$が1次以上だと仮定する。この時、$f(x)$の原始関数の1つを$F(x)$として、

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

とおける。ただし、$a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ である。

$$(\text{左辺}) = F(x+1)-F(x) = a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} - a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

$$= n\cdot a_n x^{n-1} + \{(n-1)a_{n-1} + {}_nC_2 \cdot a_n\}x^{n-2} + \cdots$$

$$(\text{右辺}) = cF'(x) = cna_n x^{n-1} + (n-1)\cdot c a_{n-1} x^{n-2} + \cdots$$

だから、$n-1$, $n-2$次の項を比較して、($\because n \geq 2$)

$$\begin{cases} na_n = cna_n & \cdots ① \\ (n-1)a_{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)a_n = c(n-1)a_{n-1} & \cdots ② \end{cases}$$

①及び $a_n n \neq 0$ から、$c=1$ であるが、②に代入すると $n(n-1)a_n=0$ となり、$n \geq 2$, $a_n \neq 0$ に矛盾。

よって $F(x)$は1次以下、つまり $f(x)$は定数である。∎

第 4 問

[解]

(1) $[0,1]$では $0<(1+x)^{-n}$, $xe^{x^2}\leq e$ だから

(xe^{x^2}は単調, $x=1$とすればe)

$$0\leq(1+x)^{-n}\cdot xe^{x^2}\leq e(1+x)^{-n}$$

同じ区間で積分して

$$0\leq b_n\leq e\int_0^1(1+x)^{-n}dx$$

右辺を計算する.

$$0\leq b_n\leq e\left[\frac{1}{1-n}(1+x)^{-n+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{e}{1-n}\left[2^{1-n}-1\right]\to 0\ (n\to\infty)$$

はさみうちから $b_n\to 0\ (n\to\infty)$

(2) $$a_n=\left[-\frac{1}{n}(1+x)^{-n}e^{x^2}\right]_0^1+\frac{1}{n}\int(1+x)^{-n}\cdot 2x\cdot e^{x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{n}\left[e\cdot 2^{-n}-1\right]+\frac{2}{n}b_n$$

だから

$$na_n=\left(1-\frac{e}{2^n}\right)+2b_n\to 1\ (n\to\infty)\ (\because (1))$$

より

$na_n\to 1\ (n\to\infty)$

/20

第 5 問

▷ $\dfrac{{}_{2n}C_n}{2\cdot 4^n} \geqq \dfrac{1}{4n} \iff \dfrac{{}_{2n}C_n \cdot n}{4^n} \geqq \dfrac{1}{2}$ を示せば良い

① 帰納法 ⇒ ${}_{2n}C_n$ をうまく変形, n と $n-1$ をつなぐ.

② 直接示す ⇒ 積形だから $\log$ をとるか, とりあえず階差をとるか.

①は思いの他楽に示せてしまったので, ②について

② $\log$ をとると..

$$\sum_{k=1}^{2n} \log k + \log n - 2\sum_{k=1}^{n} \log k \geqq (2n-1)\log 2$$

ここで, 例の概算を実行すると

◦ 左辺からは $2n(\log 2n - 1) + \log n - 2n(\log n - 1) - 2\log n$ 補正分

$= 2n\log 2 - \log n$

となって, 粗すぎるから $\log n$ をフヤス

⇒ 端点補正ではどうしようもないので, 台形近似で $\log n$ を水増し

⇒ おそろしい..

① カイサ

$$\frac{{}_{2n+2}C_{n+1}(n+1)}{4^{n+1}} - \frac{{}_{2n}C_n \cdot n}{4^n}$$

$$= \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\underbrace{\frac{(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(n+1)^2} - 4n}_{\vee 0}\right]$$

⇒ あら単調増加ですね！となって終了。

/20

第 5 問

「解」対称性から，$n+1$回以上偶数が出る確率をα，n回偶数が出る確率をβとすると，

$$2\alpha+\beta=1 \qquad \cdots ①$$

で $P_n=\alpha+\beta$である。$\beta=\dfrac{{}_{2n}C_n}{2^{2n}}$だから，①とあわせて，

$$P_n=\frac{1}{2}(1+\beta)=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{{}_{2n}C_n}{4^n}\right\} \qquad \cdots ②$$

となる。以下“$\dfrac{{}_{2n}C_n}{4^n}\geq\dfrac{1}{2n}$ …③が全てのnで成立すること”…④を帰納法で示す。

$n=1$の時は成立。以下$n=k\in\mathbb{N}$での成立を仮定する。

$$\frac{{}_{2k+2}C_{k+1}}{4^{k+1}}=\frac{1}{4}\frac{1}{4^k}\frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!}=\frac{1}{4}\frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}\frac{{}_{2k}C_k}{4^k}$$

$$\geq\frac{1}{2}\frac{2k+1}{k+1}\frac{1}{2k}\geq\frac{1}{2(k+1)}$$

から，$n=k+1$でも③は成立。以上から，④は示されたから，②より，

$$P_n\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{4n} \quad \text{図}$$