xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある．C を底面，$(0,0,\sqrt{3})$ を頂点とする直円すい S を考える．点 $P(1,0,0)$ および $Q(-2,0,0)$ をとる．さらに，動点 $M(\cos\theta,\sin\theta,0)$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を線分 MQ が M 以外に C と交わらないように動かす．

1. θ のとりうる値の範囲を求めよ．
2. 点 P から動点 M までは直円すい S の側面を通り，M からは直線にそって点 Q へ向かう道を考える．このような P から Q までの全ての道の長さの最小値を求 めよ．

[解]

xyz 空間の原点 $O(0,0,0)$, 円錐の頂点を $R(0,0,\sqrt{3})$ とする．円錐の概形は fig. 1 となる．

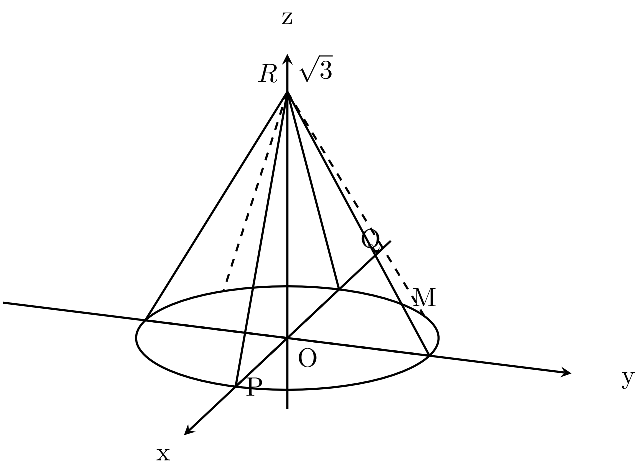

図 1: 円錐の様子

(1) xy 平面で考える．線分 MQ が M 以外に C と交わらないということは，θ の境界の値では，MQ と C が接するので，まずはこの場合を考える．この様子を fig. 2 に示す．

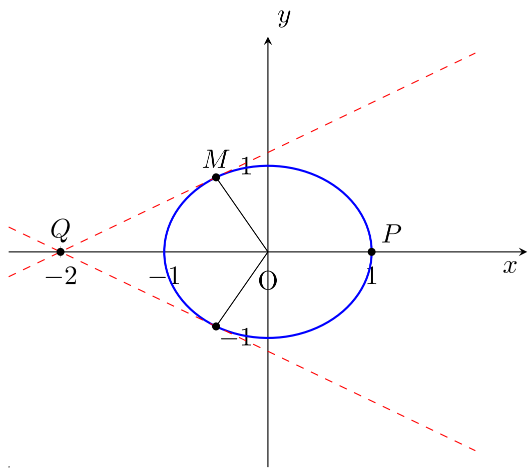

図 2: xy 平面での P,Q,M の様子

M での C の接線の方程式は

$$\cos\theta x + \sin\theta y = 1$$

であり，これが $Q(-2,0)$ を通るので，

$$-2\cos\theta = 1$$
$$\therefore \theta = \pm\frac{4\pi}{3}$$

である．従って θ の取り得る範囲はこれらの θ の時より点 M が Q 側になる場合で，

$$\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3}$$

である．$\cdots$(答)

(2) S の展開図上で線分 PM となる曲線を D とする．P から M までの最短経路は, P から M まで D 上通り, M から Q まで直線 MQ を通る経路である．$\cdots$(*)

最短経路の長さ $f(\theta)$ とすると

$$f(\theta) = |PM| + |QM| \tag{1}$$

である．

まず線分 PM の長さを求める．S の側面の展開図は fig. 3 である．

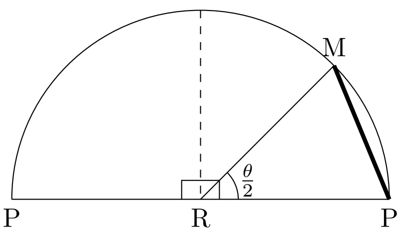

図 3: 円錐側面の展開図

対称性から

$$0 \leq \theta \leq \pi \tag{2}$$

として考える．

まず，PM の劣弧の長さは，$\angle POQ = \theta$ より

$$\text{劣弧 PM} = \theta$$

だから，円錐の側面の長さが $PR = 2$ であることにも留意すると

$$\angle \mathrm{MRP} = \frac{\theta}{2}$$

となるので，展開図上の PM の長さ $l(\theta)$ は

$$l(\theta) = 4 \sin \frac{\theta}{2} \tag{3}$$

となる．

次に，線分 QM の長さを求める．これは各点の座標から，

$$|\mathrm{QM}| = \sqrt{(\cos\theta + 2)^2 + \sin^2\theta} \tag{4}$$
$$= \sqrt{5 + 4\cos\theta} \tag{5}$$

となる．

以上 eqs. (3) and (5) を eq. (1) に代入すると，θ を与えた時の最短経路の長さ $f(\theta)$ は

$$f(\theta) = l(\theta) + |\mathrm{QM}| \tag{6}$$
$$= 4 \sin \frac{\theta}{2} + \sqrt{5 + 4\cos\theta} \tag{7}$$

となる．(1) および eq. (2) から，この関数の

$$\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi \tag{8}$$

での最小値をもとめにば良い．新しく

$$t = \cos \frac{\theta}{2}$$

とおくと，半角および倍角の公式から

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{4} &= \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\theta}{2}}{2}} \quad \left(\sin\frac{\theta}{4} \geq 0\right) \\ &= \sqrt{\frac{1-t}{2}} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \cos\theta &= 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \\ &= 2t^2 - 1 \end{aligned}$$

から，f の変数を θ から t に移して

$$f(t) = 4\sqrt{\frac{1-t}{2}} + \sqrt{5 + 4(2t^2 - 1)}$$
$$= 2\sqrt{2(1-t)} + \sqrt{8t^2 + 1} \tag{9}$$

となる．eq. (8) から

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2} \tag{10}$$

である．f の一階微分は

$$f'(t) = \frac{-2}{\sqrt{2(1-t)}} + \frac{16t}{2\sqrt{8t^2+1}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-2\sqrt{8t^2+1} + 8t\sqrt{2(1-t)}}{\sqrt{2(1-t)}\sqrt{8t^2+1}} \\ &= \frac{-4(8t^2+1) + 2\cdot 8^2 t^2 (1-t)}{2\sqrt{2(1-t)}\sqrt{8t^2+1}\left(2\sqrt{8t^2+1} + 8t\sqrt{2(1-t)}\right)} \\ &= \frac{4(-32t^3 + 24t^2 - 1)}{\sqrt{2(1-t)}\sqrt{8t^2+1}\left(\sqrt{8t^2+1} + 8t\sqrt{2(1-t)}\right)} \end{aligned}$$

である．この分母は常に正だから，$f'(t)$ の正負は分子の正負と等しい．そこで分子を因数分解すると

$$\begin{aligned} -32t^3 + 24t^2 - 1 &= -32\left(t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{32}\right) \\ &= -32\left(t - \frac{1}{4}\right)\left(t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\right) \\ &= -32\left(t - \frac{1}{4}\right)\left(t - \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{3}{16}}\right)\left(t - \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{3}{16}}\right) \end{aligned}$$

である．eq. (10) の t の区間に注意して，

$$\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{3}{16}} < 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{3}{16}}$$

だから，$f(t)$ の増減表は table 1 となる．

表 1: $f(t)$ の増減表

t	0		1/4		1/2
f'		$-$	0	$+$	
f	$1+2\sqrt{2}$	$\searrow$		$\nearrow$	$2+\sqrt{3}$

従って，求める最小値は $t = 1/4$ の時で

$$\begin{aligned}\min f(t) &= f\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= 2\sqrt{2\left(1-\frac{1}{4}\right)} + \sqrt{8\left(\frac{1}{4}\right)^2+1}\\ &= \sqrt{6}+\sqrt{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{3\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

である．$\cdots$(答)

[解説] 最後の $f(\theta)$ の最小値を求める部分はいくつかやり方がある．いずれもこの形のまま計算するのは厳しく，なんらか新しい変数を置いてやることになるだろう．今回の解答のように，$\theta/2$ を利用する方が $\theta/4$ と θ を対称に扱っていて計算は早い．

それを見るために，$t = \sin\frac{\theta}{4}$ として求めてみよう．θ の動く範囲が eq. (2) だから，

$$\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{11}$$

である．eq. (9) に倍角公式を利用して t で表すと

$$f(t) = 4t + \sqrt{9-32t^2(1-t^2)}$$

だから，一階微分は

$$\begin{aligned}f'(t) &= 4 + \frac{128t^3-64t}{2\sqrt{9-32t^2(1-t^2)}}\\ &= 4\frac{\sqrt{32t^4-32t^2+9}+16t^3-8t}{\sqrt{32t^4-32t^2+9}}\end{aligned}$$

となり，分母は常に正だから f' の符号は分子の符号に等しい．

$$\begin{aligned}&f'(t) \geq 0\\ \Leftrightarrow&\sqrt{32t^4-32t^2+9} \geq 8t(1-2t^2) \quad (\geq 0) \quad (\because \text{eq. (11)})\\ \Leftrightarrow&32t^4-32t^2+9 \geq 64t^2(1-2t^2)^2\\ \Leftrightarrow&256s^3-288s^2+96s-9 \leq 0 \quad (s=t^2, \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2})\\ \Leftrightarrow&(s-\frac{3}{8})(256s^2-192s+24) \leq 0\\ \Leftrightarrow&(s-\frac{3}{8})(s-\frac{3+\sqrt{3}}{16})(s-\frac{3-\sqrt{3}}{16}) \leq 0\end{aligned}$$

だから．f の増減表は table 2 となる．

表 2: f の増減表

t	$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{6}}{4}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$s=t^2$	$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{2}$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって，$f(t)$ は

$$t = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

で最小値

$$\begin{aligned}\min f(\theta) &= \sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{2}\\ &= \frac{3\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

をとる．