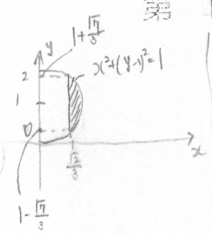
東大理科数学 2012

[解] $D=\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\leq 1 \wedge x\geq \frac{\sqrt{2}}{3}\}$ は右図斜線部(境界含む)。又、$A(\frac{\sqrt{2}}{3}, 1-\frac{\sqrt{7}}{3})$, $B(\frac{\sqrt{2}}{3}, 1+\frac{\sqrt{7}}{3})$ とおく。題意をみたす l は明らかに傾き正だから、

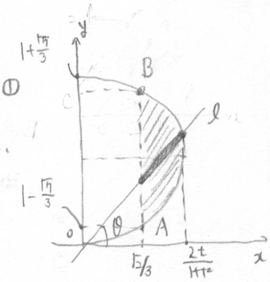


$l: y=\tan\theta\, x$

とかける。以下 $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$, $t=\tan\theta$ と表す。すると

x軸と OA, OB とのなす角 α, β として、

$\alpha<\theta<\beta$ …①



であり、l と $x^2+(y-1)^2=1$ との交点は、

$(1+t^2)x^2-2tx=0$

$x=0,\ \frac{2t}{1+t^2}$

だから、

$$L=\left(\frac{2t}{1+t^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)/c = 2s-\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{c} \quad \cdots ②$$

$$\frac{d}{d\theta}L = 2c-\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{s}{c^2}$$

①の内で $s,c>0$ から

$$\frac{dL}{d\theta}\geq 0 \Leftrightarrow 2c^3\geq \frac{\sqrt{2}}{3}s \Leftrightarrow 4c^6\geq \frac{2}{9}s^2$$
$$\Leftrightarrow 18c^6\geq 1-c^2$$
$$\Leftrightarrow \left(c^2-\frac{1}{3}\right)(18c^4+6c^2+3)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (c^2-1/3)\left\{6\left(c^2+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{6}\right\}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow c^2\geq \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow c\geq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because c>0)$$

から下表をうる。ただし、θ_0 は $0<\theta_0<\pi/2 \wedge \cos\theta_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$ をみたす。

θ	α		θ_0		β
c			$\sqrt{3}/3$		
L'		$+$	0	$-$	
L		$\nearrow$		$\searrow$	

($\tan\alpha=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}$, $\tan\beta=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$, $\tan\theta_0=\sqrt{2}$ から

$\alpha<\theta_0<\beta$ ($\tan\theta$ は単調))

したがって、$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ の時、$\max L=\frac{\sqrt{6}}{3}$ //

$y=\tan\theta\, x$

$x^2+(tx-1)^2=1$

$(tx-1)^2$

$x^2 \quad t^2x^2-2tx+1=1$

c^2

$1+t^2=\frac{1}{c^2}$

$\frac{1}{1+\frac{(1+s)^2}{c^2}}$

$1-\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\cos^2\theta=\frac{1}{1+t^2}$ $\qquad \frac{c^2}{c^2+s^2+2s+1}$

$=\frac{1}{1+\frac{(1+s)^2}{c^2}}$ $\qquad \sqrt{\frac{1-s^2}{2(1+s)}}$ $\qquad \sqrt{\frac{1-s}{2}}$

$\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\frac{c^2}{c^2+(1+s)^2}$

$\frac{2t}{1-t^2}$

$=\frac{1-s^2}{2+2s}$

$\frac{18}{8} \qquad \frac{5}{27}+\frac{1}{3}$

$\frac{(1+s)(1-s)}{2(1+s)}$

$2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

$\frac{\sqrt{2}}{3}<\frac{2t}{1+t^2}$

$1+t^2<3\sqrt{2}t$

$t^2-3\sqrt{2}t+1<0$

$t=3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-4}$

$\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\qquad 2\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3}$

$1-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt{1-\frac{1}{3}}$ $\qquad 2-\frac{1}{3}$ $\qquad 3\sqrt{2}\pm\sqrt{14}$

$2\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \frac{5}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\frac{5}{9}\sqrt{6}$

▷ 場合の数のこの手のヤツでは、

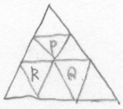
① 対称性

② mod で場合分け

ができないかまずチェックせよ。

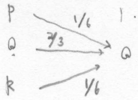
第12問

[解] $k \in \mathbb{N}$とする。球は$2k$[s]にのみP, Qにある。右のようにRを定める。対称性から、$2k$[s]後に球がP, Q, Rにある確率は、a_k, b_k, b_kとおける。



又、題意から、以下の漸化式をうる。

$$b_{k+1} = \frac{2}{3}b_k + \frac{1}{6}b_k + \frac{1}{6}a_k \quad \cdots ①$$



又、$a_n + 2b_n = 1$から、①でa_nをけして、

$$b_{k+1} = \frac{1}{2}b_k + \frac{1}{6}$$

$$b_{k+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(b_k - \frac{1}{3}\right)$$

$b_0 = 0$だから、これをくり返し用いて、

$$b_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

だから、もとめるカクリツは

$$\begin{cases} 0 & (n \in \text{odd}) \\ \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right) & (n \in \text{even}) \end{cases}$$

//

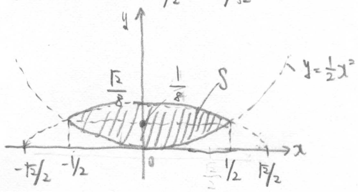
$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} +$

$\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{6}$

第 3 問

[解] $y \ge \frac{1}{2}x^2$, $\frac{x^2}{1/2}+\frac{y^2}{1/32}\le 1$ を図示すると下図斜線部。



(1) 対称性から

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{2}V_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}\right)-\frac{1}{4}x^4\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{32}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{11}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$\frac{1}{\pi}V_2=\int_0^{\frac{1}{8}}(2y)\,dy+\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{2}}{8}}\left(\frac{1}{2}-16y^2\right)dy$$
$$=\left[y^2\right]_0^{1/8}+\left[\frac{1}{2}y-\frac{16}{3}y^3\right]_{1/8}^{\sqrt{2}/8}$$
$$=\frac{1}{64}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{8}-\frac{16}{3}\frac{2\sqrt{2}-1}{8^3}$$
$$=\frac{1}{64}+\frac{\sqrt{2}-1}{16}-\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{2}-1}{32}$$
$$=\frac{1}{3}\frac{1}{64}\left[-7+8\sqrt{2}\right]$$

だから

$$V_1=\frac{11}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^5\pi \quad V_2=\frac{\pi}{192}\left(-7+8\sqrt{2}\right)$$ //

(2) (1)から

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(-7+8\sqrt{2}\right)}{\frac{11}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\frac{\frac{1}{2}\left(-7+8\sqrt{2}\right)}{\frac{11}{5}}$$
$$=\frac{5}{22}\left(-7+8\sqrt{2}\right)<1$$
$$\iff -7+8\sqrt{2}<\frac{22}{5}\iff 8\sqrt{2}<\frac{57}{5} \quad \cdots①$$

だが、①は $64\cdot 2\cdot 25=3200<3249=(57)^2$ の平方根をとって $8\sqrt{2}<\frac{57}{5}$ だから成立。よって

$$\frac{V_2}{V_1}<1$$ //

$\frac{\pi}{2x^2}+\frac{1}{2}=1$ $2x^2=\frac{1}{2}$

x^2

$x^2=2y$

$\frac{1}{2}y+4y^2=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4\sqrt{2}}$ $4y^2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}=0$

$\frac{\sqrt{2}}{8}$ $32y^2-4y-1$

$x^2+16y^2=\frac{1}{2}$ $(4y-1)(8y+1)$

$x^2=2y$

$x^2=2y$

$2\sqrt{2}-1$ $\frac{1}{2}y+4y^2=\frac{1}{8}$

$\frac{8\cdot 2}{8\cdot 8\cdot 8}$ $32y^2+4y-1=0$

16 2^5 $4\cdot 4\cdot 2$

$\cancel{A}^2\,\cancel{\frac{1}{A}}\left[-\frac{1}{5}A^7-\frac{1}{3}A^7+A^6\right.$

$1-\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$

$1-\frac{8}{30}$

$\frac{22}{30}A^6$

$\frac{11}{15}A^5$ 次元

第 4 問

[解] $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ …①

(1) 連続2自然数の積がn乗数になるものがあるとカテイし、それを$m(m+1)$ ($m \in \mathbb{N}$) とおくと、$k \in \mathbb{N}$として

$$m(m+1) = k^n$$

とかける。$m \perp m+1$から、$m, m+1$が共にn乗数であることが必要で、$t, s \in \mathbb{N}$として

$$m = t^n,\ m+1 = s^n$$

とかける。mを消して

$$t^n = s^n - 1 \qquad \therefore 1 = s^n - t^n = (s-t)(s^{n-1} + \cdots t^{n-1})$$

①から、$s-t \in \mathbb{Z}$, $s^{n-1} + \cdots + t^{n-1} \geq 1+1 = 2$となって矛盾。よって示された。図

(2) $n=2$での成立は示されたので、$n \geq 3$とする。

(1)と同様にして $A_m = \prod_{k=m+1}^{m+n} k$ がn乗数だと仮定する。($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) $p \in \mathbb{N}$として

$$A_m = p^n$$

とかける。$(m+1)^n < A_m < (m+n)^n$から、($\because m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

$$(m+1)^n < p^n < (m+n)^n$$

$$m+1 < p < m+n$$

したがって $p = m+k$ ($k = 2, \cdots n-1$) とかけるが、A_mはpと互いに素な$m+k+1$を因数に持ち不適。よって矛盾し題意は示された。図

$0, 1, \cdots n-1$

mod $n+1$

$$\underset{\sim}{n! \equiv t^n}$$

$0 \leq t \leq n$

$$\overbrace{m(m+1) \cdots (m+n)}^{n+1\text{こ}} = p^n$$

$(m+1)^n < p^n < (m+n)^n$

$m+1 < p < m+n$

$m!$

$\dfrac{(m+n-1)!}{(m}$

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!} = p^n$$

第　　問