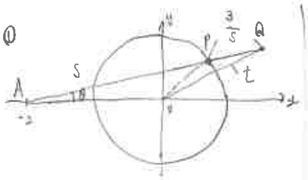
京大理科数学 1997

第 1 問

[解] (1) $\angle APO=\theta$ とおく。$\theta=0$ の時、$s=3,\ t=2$ …①
である。$\theta\neq0$ の時、$\triangle OAP$, $\triangle OAQ$ に余弦定理を用いて、



$$\begin{cases} 1 = 2^2+s^2-2\cdot2\cdot s\cos\theta \\ t^2 = 2^2+\left(s+\frac{3}{s}\right)^2-2\cdot2\cdot\left(s+\frac{3}{s}\right)\cos\theta \end{cases}$$

第1式から、$\cos\theta = \dfrac{3+s^2}{4s}$ $(\because s\neq0)$ だから、第2式に代入して、

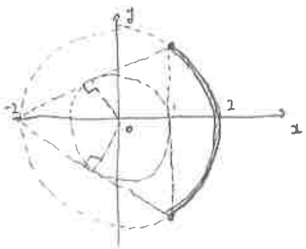
$$t^2 = 4+\left(s+\frac{3}{s}\right)^2-4\left(s+\frac{3}{s}\right)\frac{3+s^2}{4s}$$

$$= 4+\left(s+\frac{3}{s}\right)^2-\left(s+\frac{3}{s}\right)^2$$

$$=4$$

$t>0$ から $t=2$ //

(2) (1)から、Qは $x^2+y^2=4$ 上にある。さらに直線APの通過領域内にあれば良いから、
下図太線部



//

第 2 問

[解] $_nC_k$ $(k=1,2\cdots,n-1)$ の最大公約数 d とする。まず，d は $_nC_1=pq$ をわり切ることが必要で，$d=1,p,q,pq$ である。ここで，$q<n$ から，

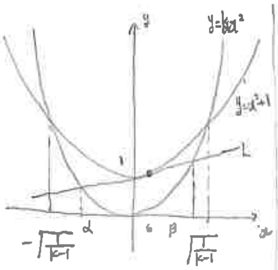
$$_nC_q=\frac{n!}{q!(n-q)!}=\frac{pq\cdot(pq-1)\cdots\{(p-1)q+1\}}{q(q-1)\cdots 2\cdot 1}$$

で，この分母，分子共に q で1回しかわり切れないから，$_nC_q$ は q でわり切れない。同様に $_nC_p$ も p でわり切れない。

以上から $d=1$ が必要で，この時 $_nC_k\in\mathbb{Z}$ から十分である。∎

第 3 問

[解] (1) 対称性から $a \geq 0$ で考える。$C_1 : y = x^2+1$, $C_2 : y = kx^2$ とする。C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S_1, L と C_2 で囲まれた面積 S_2 とする。題意から,



$$S_1 = 2S_2 \qquad \cdots ①$$

である。ここで, $p = \sqrt{\frac{1}{k-1}}$ とすると

$$S_1 = \int_{-p}^{p} \{x^2+1-kx^2\}\,dx$$

$$= \frac{k-1}{6}(2p)^3$$

$$= \frac{4}{3}(k-1)\left(\frac{1}{k-1}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \cdots ②$$

で, 又, $L : y = f(x) = 2ax - a^2+1$ から, $f(x) = kx^2$ の 2 解 α, β $(\alpha \leq \beta)$ として,

$$S_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - kx^2\}\,dx = \frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3 \qquad \cdots ③$$

となる。$\alpha \leq \beta$ から

$$\beta - \alpha = \frac{2}{k}\sqrt{(1-k)a^2+k}$$

だから ③ に代入して

$$S_2 = \frac{k}{6}\left(\frac{2}{k}\right)^3 \{(1-k)a^2+k\}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{1}{k^2}\{(1-k)a^2+k\}^{\frac{3}{2}} \qquad \cdots ④$$

① ② ④ から

$$(k-1)\left(\frac{1}{k-1}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{k^2}\{(1-k)a^2+k\}^{\frac{3}{2}}$$

両辺 0 以上から $\frac{2}{3}$ 乗して,

$$\left(\frac{1}{k-1}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{k^2}\right)^{\frac{2}{3}}\{(1-k)a^2+k\}$$

$$\therefore\ a^2 = -\frac{\left(\frac{k^4}{4(k-1)}\right)^{\frac{1}{3}} - k}{k-1}$$

//

(2) $$a^2 = -\left(\frac{k^4}{4(k-1)^4}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{k}{k-1}$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{1-1/k}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-1/k}$$

$$\longrightarrow 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (k \to +\infty)$$

//

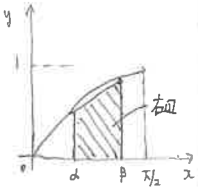
第 4 問

[解] (1) $f(x)=\sin x$ とおく。$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$ から、$0\leq x\leq \pi/2$ では $f(x)$ は上に凸である。

ここで、左辺第2項は、$t=\pi-x$ により、$\left(\frac{dt}{dx}=-1\right)$

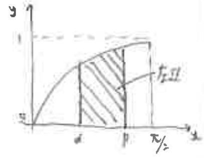
$$\int_{\beta}^{\alpha}\sin(\pi-t)\,dt(-1)$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sin t\,dt$$



となるから、$\sin(\pi-\beta)=\sin\beta$ とあわせて、

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sin t\,dt>\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\sin\alpha+\sin\beta) \quad \cdots ①$$



を示せば良いが、$0\leq\alpha<\beta\leq\pi/2$ 及び右図の面積を比較して、

示すべきことは明らかである。□

(2) (1)で $(\alpha,\beta)=\left(\frac{k\pi}{8},\ \frac{k+1}{8}\pi\right)$ $(k=0,1,2,3)$ とすると、これは $0\leq\alpha<\beta\leq\frac{\pi}{2}$ をみたすので、

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sin t\,dt>\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{k\pi}{8}+\sin\frac{k+1}{8}\pi\right)$$

k について和して、$\sin 0=0$ から、

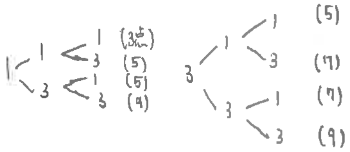
$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\sin t\,dt>\frac{\pi}{16}\sum_{k=1}^{7}\sin\frac{k\pi}{8} \qquad (\because \sin(\pi-k)=\sin k)$$

$$\frac{16}{\pi}>\sum_{k=1}^{7}\sin\frac{k\pi}{8}$$ □

第 5 問

①. (1)から、言えない$_{\#}$ $\left(2-\sqrt{2}<\frac{4}{5}\right)$

[解] 3回で引くカードは以下の通りである。



(1) A, Bがk点得る確率は以下の通り

	A	B
3	p^3	p^3
4	$2p(1-p)$	0
5	$p^2(1-p)$	$3p^2(1-p)$
6	$(1-p)^2$	$(1-p)^2$
0	0	$2p(1-p)^2$
計	1	1

したがって、

$$E_A = 3p^3+4\cdot 2p(1-p)+5\cdot p^2(1-p)+6\cdot(1-p)^2$$

$$= -2p^3+3p^2-4p+6_{\#}$$

$$E_B = 3p^3+5\cdot 3p^2(1-p)+6(1-p)^2$$

$$= -12p^3+21p^2-12p+6_{\#}$$

である。又、

$$E_A > E_B \Leftrightarrow 3p^2-4p > -10p^3+21p^2-12p \Leftrightarrow (5p-4)<0 \quad (\because 0<p<1)$$

から、$0<p<\frac{4}{5}{}_{\#}$ である。

(2) (1)の表から、Bが何点か(これは排反)で場合分けして、

$$P_A = \underbrace{2p(1-p)^2}_{\text{Bが0点}} + \underbrace{p^3(1-p^3)}_{\text{Bが3点}} + \underbrace{(1-p)^2\cdot 3p^2(1-p)}_{\text{Bが5点}}$$

$$= p(1-p)\{2(1-p)+p^2(1+p+p^2)+3p(1-p)^2\}$$

$$= p(1-p)(p^4+4p^3-5p^2+p+2)$$

又、全ての事象は"Aが勝つ""Bが勝つ""引き分け"の3つの排反事象で全てだから、

$$P_B = 1-P_A-\{p^3\cdot p^3+p^2(1-p)\cdot 3p^2(1-p)+(1-p)^4\}$$

$$= 1-P_A-\{p^6+3p^4(1-p)^2+(1-p)^4\}$$

である。よって

$$P_A>P_B \Leftrightarrow 2P_A > 1-p^6-3p^4(1-p)^2-(1-p)^4$$

$$\Leftrightarrow 2p(1-p)(p^4+4p^3-5p^2+p+2) > 2p(1-p)(2-p+p^2-p^3+2p^4)$$

$$\Leftrightarrow p^4+4p^3-5p^2+p+2 > 2p^4-p^3+p^2-p+2 \quad (\because 0<p<1)$$

$$\Leftrightarrow 0 > p(p^3-5p^2+6p-2)$$

$$\Leftrightarrow 0 > p(p-1)(p^2-4p+2)$$

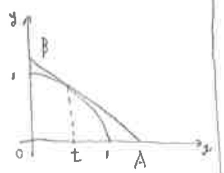
$\Leftrightarrow p^2$ [illegible]

第 6 問

[解] $c=\cos t$, $s=\sin t$ とする。題意の接線は $(\cos x)'=-\sin x$ より、$y=-s(x-t)+c$ だから、これと x, y 軸との交点 A, B として

$A\left(t+\frac{c}{s}, 0\right)$ $B(0, c+st)$

である。(∵ 接線は y 軸平行でない)



(1) $S(t)=(\triangle OAB\text{の面積})=\frac{1}{2}\left(t+\frac{c}{s}\right)(c+st)=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\cos t}{\sin t}\right)(\cos t+\sin t\cdot t)$ //

(2) $2S'(t)=c\left(1+t^2-\frac{1}{s^2}\right)$ であり、区間内では t^2 は単調増加、$\frac{1}{s^2}$ は単調減少だから、$c>0$ とあわせて、$S'(t)$ は単調増加である。これと $S'(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi^2}{16}-1\right)<0$ (∵ $\pi=3.14\ldots$)

$S'(1)=\cos 1\left(2-\frac{1}{\sin^2 1}\right)>\cos 1(2-2)=0$ (∵ $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$ から、$\sin 1>\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos 1>0$),

及び $S'(t)$ が連続であることから、中間値の定理より、$S'(t_0)=0$ ($\frac{\pi}{4}<t_0<1$) なる t_0 が存在し、下表をうる。

t	0		t_0		$\pi/2$
S'		$-$		$+$	
S		↘		↗	

したがって、$S(t)$ は $t=t_0$ で min をとる。以上から示された 囲

(3) $S(t_0)=0$ 及び $\cos t_0\neq 0$ から

$$1+t_0^2=\frac{1}{\sin^2 t_0}=1+\frac{1}{\tan^2 t_0} \quad \cdots ①$$

である。(1) から

$$S(t)=ct+\frac{1}{2}\left(st^2+\frac{c^2}{s}\right)$$

だから、$c_0=\cos t_0$, $s_0=\sin t_0$ として、

$$S(t_0)=c_0t_0+\frac{1}{2}\left(s_0(t_0^2-1)+\frac{1}{s_0}\right)$$

$$=c_0t_0+\left(\frac{1}{s_0}-s_0\right) \quad (∵①) \quad \cdots ②$$

となる。ここで

$$\frac{1}{s_0}-s_0=\frac{c_0^2}{s_0}=c_0\cdot\frac{c_0}{s_0}=c_0\cdot\frac{1}{\tan t_0}=c_0\cdot t_0 \quad (∵ ①, t_0, \tan t_0>0)$$

だから②に代入して

$$S(t_0)=2\cos t_0\cdot t_0$$ 囲

となる。ここで $f(t)=2c\cdot t$ とおくと、$f'(t)=2(c-st)=2c(1-t\cdot\tan t)$ から下表をうる。

t	0		$\pi/4$		t_0		1		$\pi/2$
f'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f		↗	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$	↗		↘		↘	

(①から、$t_0=\frac{1}{\tan t_0}$ であり、又、$1-t\cdot\tan t$ は区間内で単調増加)

したがって、$f\left(\frac{\pi}{4}\right)<f(t_0) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}\pi<S(t_0)$ である。囲