京大理科数学 1970

40/150分

		計	思	総
1	関数	A	A	A
2	不等式	B	B	B
3	空間	A	A	A
4	図形-多変数*	C	C	C
5	関数	A	A	A
6	数列	A	A	A

第 1 問

[解] 題意から $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ が $(c,0)$ を通る.

$$0=f'(a)(c-a)+f(a) \quad \cdots ①$$

又, $g(x)$ の定義から

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-c)-f(x)}{(x-c)^2}$$

だから

$$g'(a)=\frac{f'(a)(a-c)-f(a)}{(a-c)^2}=0 \quad (\because ①)$$

/20

第 2 問

[解] $n=2$の時 $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$ から成立. $n=k$での成立をカテイする. このとき $f_n(x)=n\log\frac{n+1}{2}-\sum_{i=1}^{n}\log i$ とした時

$f_k(x)>0$である (∵与式の両辺ln)

$$f_{k+1}(x)=(k+1)\log\frac{k+2}{2}-\sum_{i=1}^{k+1}\log i$$

$$=f_k(x)+\underbrace{(k+1)\log\frac{k+2}{2}-k\log\frac{k+1}{2}-\log(k+1)}_{g(k)}\quad\cdots①$$

ここで. $g(k)>0$を示す. $(k\in\mathbb{R})$

$$g'(k)=\log\frac{k+2}{2}+\frac{k+1}{k+2}-\left[\log\frac{k+1}{2}+\frac{k}{k+1}\right]-\frac{1}{k+1}$$

$$=\log\frac{k+2}{2}-\log\frac{k+1}{2}-\frac{1}{k+2}$$

$$g''(k)=\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+2)^2}$$

$$=\frac{-1}{(k+1)(k+2)^2}<0$$

より $g'(k)$は単調減少. これと $g'(k)=\log\frac{k+2}{k+1}-\frac{1}{k+2}\to 0$ $(k\to\infty)$ から $g'(k)>0$ だから. $g(k)$は単調増加であり. $k\geq 1$の時

$g(1)=2\log\frac{3}{2}-\log 2=2\log 3-3\log 2=\log\frac{9}{8}>0$ だから $g(k)>0$ …②

②と仮定から. ①より. $f_{k+1}(x)>0$となり$n=k+1$でも成立。

以上より示された■

[別 - もっと直接的に示す]

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}-(k+1)!=\frac{k+2}{2}\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k\left(\frac{k+1}{2}\right)^k-(k+1)\cdot k!$$

$$\geq\left[\frac{k+2}{2}\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k-(k+1)\right]k!\ (\text{カテイ})$$

ここで. $k\geq 2$のとき. 2項定理から

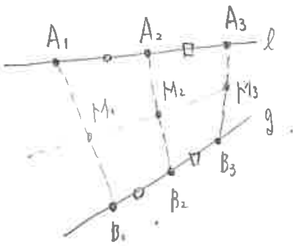
$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^k\geq 1+\frac{k}{k+1}=\frac{k+2}{k+1}$$

これから ～ >0 がわかるので. OK!!

/20

第 3 問

［解］l, g の単位方向ベクトル
$\vec{l}, \vec{g}$ とする.又,点 X の位置
ベクトルをその小文字で表す.



α, β を実数として $(0<\alpha<\beta)$

$$\vec{a_2} = \vec{a_1} + \alpha\vec{l}$$

$$\vec{a_3} = \vec{a_1} + \beta\vec{l}$$

$$\vec{b_2} = \vec{b_1} + \alpha\vec{g}$$

$$\vec{b_3} = \vec{b_1} + \beta\vec{g}$$

とかけるから

$$\vec{m_2} = \frac{\vec{a_1}+\vec{b_1}}{2} + \frac{\alpha}{2}(\vec{l}+\vec{g})$$

$$\vec{m_1} = \frac{\vec{a_1}+\vec{b_1}}{2}$$

$$\vec{m_3} = \frac{\vec{a_1}+\vec{b_1}}{2} + \frac{\beta}{2}(\vec{l}+\vec{g})$$

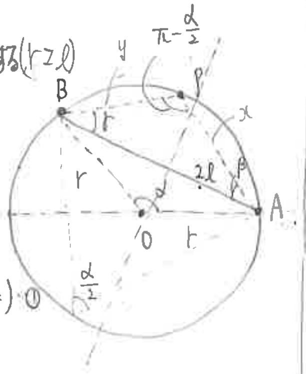
となる.つまり M_1, M_2, M_3 は方向ベクトル $\vec{l}+\vec{g}$ とし,M_1 を通る直線上に
ある 圏

/20

第4問

[解] $\angle AOB=\alpha$, $AP=x$, $BP=y$ とする $(r\geq l)$

又 $\angle PAB=\beta$, $\angle PBA=\gamma$ とおく



1° Pが劣弧AB上

$\triangle ABP$に余弦定理を用いて

$$4l^2=x^2+y^2-2xy\cos\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right) \quad ①$$

又 正弦定理を用いて

$$\frac{2l}{\sin\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{y}{\sin\beta}=\frac{x}{\sin\gamma}=2r \quad ②$$

①に $xy=2r\left(r-\sqrt{r^2-l^2}\right)$ を代入

$$(x+y)^2=4l^2-2xy\cos\frac{\alpha}{2}+2xy$$

$$=4l^2+4r\left(r-\sqrt{r^2-l^2}\right)\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) \quad ③$$

又 ②と $0<\frac{\alpha}{2}\leq\frac{\pi}{2}$ から $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{l}{r}\right)^2}$ だから③に代入

$$(x+y)^2=4l^2+4\left(r-\sqrt{r^2-l^2}\right)^2$$

$$=4\left[l^2+r^2+r^2-l^2-2r\sqrt{r^2-l^2}\right]$$

$$=8\left(r^2-r\sqrt{r^2-l^2}\right)$$

$$x+y=\sqrt{8r\left(r-\sqrt{r^2-l^2}\right)} \quad ④$$

④と題意から $t=r-\sqrt{r^2-l^2}$ とおくと x,y は p の2次式

$$t^2-2\sqrt{2rt}\quad+2rt=0$$

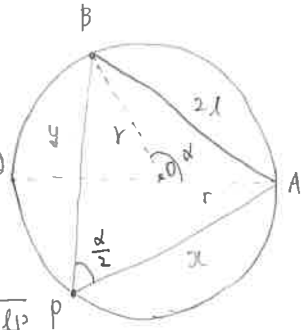
の2解で

$$x=y=\sqrt{2rt}$$

より、Pは弧ABの中点である

2° Pが優弧AB上

$\triangle ABP$に正弦,余弦定理を用いて



$$4l^2=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\alpha}{2} \quad ⑤$$

$$\frac{2l}{\sin\frac{\alpha}{2}}=2r \quad ⑥$$

⑥と $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ から $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{l}{r}\right)^2}$

だから⑤に代入

$$(x+y)^2=4l^2+2xy\cos\frac{\alpha}{2}+2xy$$

$$=4l^2+4r\left(r-\sqrt{r^2-l^2}\right)\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{l}{r}\right)^2}\right)$$

$$=4l^2+4\left(r^2-(r^2-l^2)\right)$$

$$=8l^2$$

$\therefore x+y=2\sqrt{2}\,l$

従って x,y は p の2次式

$$p^2-2\sqrt{2}\,lp+2rt=0$$

の2解で

$$p=\sqrt{2}\,l\pm\sqrt{2l^2-2r\left(r-\sqrt{r^2-l^2}\right)}$$

だから A,Bからのキョリが各々$\sqrt{2}\left(l\pm\sqrt{l^2-r^2+r\sqrt{r^2-l^2}}\right)$なる2点

P=A又はP=Bの時は $AP\cdot BP=0$ となるが この時 $l=0$ となり不適.

以上1°, 2°から 求めるのは

劣弧ABの中点, A,Bからのキョリが各々$\sqrt{2}\left(l\pm\sqrt{l^2-r^2+r(r^2-l^2)}\right)$なる優弧AB上の2点(又は1点) //

である

第 4 問

第 5 問

[解] $F'(x)=x\sin^3 x$，$0<x$ から，$\sin x$ の正負をかんがえて，
$F'(x)$ は $x=(2n-1)\pi$ $(n\in N)$ の前後で正から負へと符号がかわり，
他の値でこのように変化することはないので，$F(x)$ は $x=(2n-1)\pi$ で
極大である

$$F(x)=\frac{1}{4}\int_0^x t(3\sin t-\sin 3t)\,dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(-3t\cos t+3\sin t\right)-\left(-\frac{1}{3}t\cos 3t+\frac{\sin 3t}{9}\right)\right]_0^x$$

$$=\frac{1}{4}\left[-3x\cos x+3\sin x+\frac{1}{3}t\cos 3x-\frac{1}{9}\sin 3x\right]$$

より

$$F((2n-1)\pi)=\frac{1}{4}\left[+3(2n-1)\pi+\frac{1}{3}(2n-1)\pi(-1)\right]$$

$$=\frac{2}{3}(2n-1)\pi\quad(n\in N)$$

/20

第 6 問

[解] (イ) 帰納法で示す. $n=2$の時.成立。$n=k$での成立を仮定すると

$$x_{k+1}=\frac{x_k^2+2}{3}>\frac{1+2}{3}=1$$

$$x_{k+1}<\frac{a^2+2}{3}<a\ (\because a^2-3a+2=(a-2)(a-1)<0)$$

より$n=k+1$でも成立。以上から示された □

(ロ) $x_{n+1}-1=\frac{1}{3}(x_n^2+2)-1=\frac{1}{3}(x_n+1)(x_n-1)$

$<\frac{1}{3}(a+1)(x_n-1)\ (\because (イ))$ □

(ハ) くり返し用いて

$$0<x_n-1\leq\left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1}(a-1)$$

よってはさみうちから $x_n\to1\ (n\to\infty)$ //

/20