xy 平面において，不等式 $x^2 \leq y$ の表す領域を D とし，不等式 $(x-4)^2 \leq y$ の表す領域を E とする．

このとき，次の条件 (＊) を満たす点 $\mathrm{P}(a, b)$ 全体の集合を求め，これを図示せよ．

(＊) $\mathrm{P}(a, b)$ に関して D と対称な領域を U とするとき，

$$D \cap U \neq \emptyset,\ E \cap U \neq \emptyset,\ D \cap E \cap U = \emptyset$$

が同時に成り立つ．ただし $\emptyset$ は空集合を表すものとする．

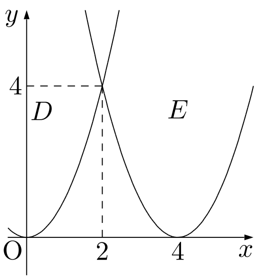
[解] $g(x) = (x-4)^2$ とおく．$y = x^2$ を P に関して対称移動すると，

$$(2b - y) = (2a - x)^2$$

であるから，

$$U : y \leq -(x - 2a)^2 + 2b (\equiv f(x))$$

である．D と E のグラフは下図のようになる．



さて，簡単のため題意の条件を

$$\begin{aligned} &A : D \cap U \neq \emptyset \\ &B : E \cap U \neq \emptyset \\ &C : D \cap E \cap U = \emptyset \end{aligned}$$

とおく．

不等号の向きから

$A \wedge C \Longleftrightarrow$
$f(x) = x^2$が $x < 2$ のみに実解を持つ．$\cdots$①
$B \wedge C \Longleftrightarrow$
$f(x) = g(x)$ が $2 < x$ のみに実解を持つ．
$\cdots$②

である．故に

$$A \wedge B \wedge C \Longleftrightarrow ① \cap ② \qquad \cdots ③$$

である．以下順番に考える．

(i) ①について

①の方程式

$$(x-a)^2 + a^2 - b = 0$$

の左辺 $h(x)$ とおく．判別式を D_1 とおく．$h(x) = 0$ が $x < 2$ にのみ実解をもつ条件は,

$$\begin{cases} D_1/4 \geq 0 \\ h(2) > 0 \\ a < 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - b \leq 0 \\ 2(a-1)^2 + 2 > b \\ a < 2 \end{cases}$$

である．

(ii) ②について

②の方程式

$$\{x - (2+a)\}^2 + (a-2)^2 - b = 0$$

の左辺 $t(x)$ とおく．判別式を D_2 とおく．$t(x) = 0$ が $2 < x$ にのみ実解をもつ条件は,

$$\begin{cases} D_2/4 \geq 0 \\ t(2) > 0 \\ 2 < 2 + a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 - b \leq 0 \\ 2(a-1)^2 + 2 > b \\ 0 < a \end{cases}$$

である.

以上をまとめて

$$
③ \iff \begin{cases} 0 < a < 2 \\ 2(a-1)^2 + 2 > b \\ a^2 \leq b \\ (a-2)^2 \leq b \end{cases}
$$

が求める条件である. $\cdots$(答)

図示すると下図斜線部. (境界は実線のみ含む.)