a，b を正の実数とする．座標空間の 4 点 $P(0,0,0)$，$Q(a,0,0)$，$R(0,1,0)$，$S(0,1,b)$ が半径 1 の同一球面上にあるとき，P，Q，R，S を頂点とする四面体に内接する球の半径を r とすれば，次の二つの不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{20}{3} \qquad\qquad \frac{1}{r} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

[解] 半径 1 の円 C の中心 $T(X,Y,Z)$ とする．T は PQ，RS，PR の垂直二等分面上にあるので，$(X,Y,Z)=(a/2,1/2,b/2)$ である．

$|PT|=1$ であるから，

$$\begin{aligned}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}&=1\\ \sqrt{1+a^2+b^2}&=2\\ a^2+b^2&=3 \qquad (1)\end{aligned}$$

である．

また，四面体 $PQRS$ の体積 V を 2 通りで表して，

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}(\triangle PQR)\times b\\ &=\frac{r}{3}(\triangle PQR+\triangle PQS+\triangle PRS+\triangle QRS)\\ \Longleftrightarrow & \frac{1}{2}ab=\frac{r}{2}(a+a\sqrt{b^2+1}+b+b\sqrt{a^2+1})\\ \Longleftrightarrow & ab=r(a+b+a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}) \qquad (2)\end{aligned}$$

である．(1)，(2) のもとで題意の不等式を示す．

まず，AM-GM および (1) より，

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}=\frac{3}{2} \qquad (3)$$

である．次いでコーシーシュワルツの不等式から，

$$A=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq \frac{(1+1)^2}{a^2+b^2}=\frac{4}{3} \qquad (4)$$

である．以上に注意する．

(2) の両辺 $abr_{\neq 0}$ で割って整理して，

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}+\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2&=\left(\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}+\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\right)^2\\ &=\frac{1+b^2}{b^2}+\frac{1+a^2}{a^2}+2\frac{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}{ab}\\ &=2+A+2\sqrt{1+A+\frac{1}{(ab)^2}}\\ &\geq 1+\frac{4}{3}+2\sqrt{1+\frac{4}{3}+\frac{4}{9}} \qquad (\because (1),(2))\\ &=\frac{20}{3}\end{aligned}$$

より一つ目の不等式が示された．□

次の不等式を示す．一つ目の不等式の両辺平方根をとって，(5) より左辺の中身が非負であることから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}&\geq 2\sqrt{\frac{5}{3}} \qquad (5)\\ \frac{1}{r}&\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}+2\sqrt{\frac{5}{3}} \qquad (\because \text{AM-GM})\\ \frac{1}{r}&\geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}} \qquad (\because (1))\end{aligned}$$

となる．故に示された．□