東大理科数学　1995

60/150分

		思	計	総
1	不等式	A	A	A
2	不等式	B	A	B
3	確立	A	A	A
4	セイスウ	B	B	B
5	確立	C	B	B
6	多変数	A	B	A

▷

▷

第 1 問

[解] コーシー・シュワルツより

$$\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2}}+\sqrt{y} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)(2x+y)}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{2x+y}$$

等号成立は $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{y} \end{pmatrix}$ つまり $x=\frac{1}{4}y$ の時だから、もとめるのは

$$k=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$ //

第 2 問

[解] 対称性から，$y \geq 0$ として良い．$y=0$ の時は等号が成立する。以下 $y>0$ とする。

$$g(x) = \int_0^x (x-t)(1-\sin t)\,dt$$

$$= x\int_0^x (1-\sin t)\,dt - \int_0^x t(1-\sin t)\,dt$$

$$g'(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$g''(x) = f(x) \geq 0$$

より，$g(x)$ は下に凸だから，凸不等式より

$$g(x+y) + g(x-y) \geq 2g(x)$$

である。■

第 3 問

[解]

(1) A_nのうち.右端がどのタイルかで場合分けして

$$A_n = A_{n-2} + (A_{n-1} + A_{n-2}) = 2A_{n-2} + A_{n-1}$$

(2) $A_1 = 1$, $A_2 = 3$及び(1)から

$$A_n = \frac{1}{3}\{(-1)^n + 2^{n+1}\}$$

$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$

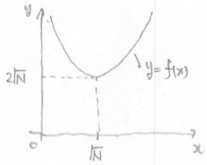
$x^2 - x - 2 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+}}{2}$

$(x-2)(x+1)$

第 4 問

[解] 正の実数 x に対し $f(x)=x+\frac{N}{x}$ とおくと、グラフの概形は右図。



したがって、$\sqrt{N}$ が N の約数の時、$f(n)$ の min は $f(\sqrt{N})$、$\sqrt{N}$ が N の約数でない時、N の正約数で $\sqrt{N}$ より小さいものの max、$\sqrt{N}$ より大きいものの min を各々 n_s, n_l とすると、$\min f(n)$ は $f(n_s), f(n_l)$ のうち大きくない方である。

(1) $N=2^k$ の時、$\sqrt{N}=2^{\frac{k}{2}}$ で、N の正約数は $2^0, 2^1, \cdots, 2^k$ である。

1° $k\in$ even

$\frac{k}{2}\in\mathbb{Z}$ から、$\sqrt{N}$ は N の約数で、$\min f(n)=f(\sqrt{N})=2\sqrt{N}$

2° $k\in$ odd

$\frac{k}{2}\notin\mathbb{Z}$ から、$\sqrt{N}$ は N の約数ではない。$\frac{k\pm1}{2}\in\mathbb{Z}$ と、2^l が l について単調増加することから、

$$n_s=2^{\frac{k-1}{2}},\ n_l=2^{\frac{k+1}{2}}$$

となり、

$$f(n_s)=n_s+\frac{N}{n_s}=n_s+n_l$$

$$f(n_l)=n_l+\frac{N}{n_l}=n_s+n_l$$

から

$$\min f(n)=n_s+n_l=\frac{3}{2}\sqrt{2N}$$

以上から

$$\begin{cases} 2\sqrt{N} & (k\in \text{even}) \\ \frac{3}{2}\sqrt{2N} & (k\in \text{odd}) \end{cases}$$ //

(2) $N=7!=70\cdot72$ だから、

$$70^2<N<72^2 \quad \therefore 70<\sqrt{N}<72$$

71 は N の約数でないので、$\sqrt{N}$ は N の約数でなく、70, 72 は共に N の約数だから、

$$n_s=70,\ n_l=72$$

となる。この時

$$f(n_s)=f(n_l)=142$$

だから

$$\min f(n)=142$$ //

第 5 問

[解] (1) l回目に $(1 \leq l \leq n-1,\ l \in \mathbb{N})$ はじめて南北方向に動いたとすると、移動量は $\left(\frac{1}{2}\right)^l$ である。ここで、$l+1$回目からn回目まで全てl回目と逆向きに動いたとしても、移動量は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^l-\left(\frac{1}{2}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^l$$

だから、P_nがx軸上にはない。以上から題意の対偶が示された。よって題意は示された■

(2) P_nがx, y軸上にある事象をX, Yとする。(1)から、$P(X)$は、$1 \sim n$回目に、2, 4以外の目が出る時で、

$$P(X)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

同様に

$$P(Y)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

又、$X \cap Y$は5, 6の目のみが出る時で、

$$P(X \cap Y)=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって

$$P(X \cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X \cap Y)=2\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

対称性及び余事象から、もとめるカクリツa_nとして、

$$a_n=\frac{1}{4}\left\{1-P(X \cup Y)\right\}=\frac{1}{4}\left\{1-2\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

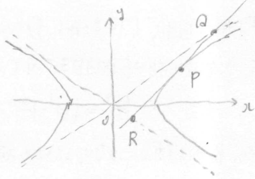
//

第 6 問

[解] 2つの漸近線は、$y=\pm\frac{b}{a}x$

である。$P(X,Y)$とすると、Pでの接線は

$$l: \frac{X}{a^2}x-\frac{Y}{b^2}y=1$$



で、これと $y=\pm\frac{b}{a}x$ の交点は

$$A=\frac{X}{a}+\frac{Y}{b},\quad B=\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}$$

として

$$\left(\frac{a}{A}, \frac{-b}{A}\right)\ \left(\frac{a}{B}, \frac{b}{B}\right)$$

である。したがって、サラスの公式から

$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{ab}{AB}+\frac{ab}{AB}\right|=ab \quad \left(\because \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1\right) \quad \cdots ①$$

となり、これは Pによらない。■ (以上(1))

以下 $x=e^t$とする。①に $(a,b)=\left(5x^2+\frac{1}{x}, x^2+\frac{1}{x}\right)$ を代入して

$$S=\left(5x^2+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$$

$$=5x^4+6x+\frac{1}{x^2} \quad \cdots ②$$

$$\therefore S'=20x^3+6-\frac{2}{x^3}$$

$$=\frac{2}{x^3}(5x^3-1)(2x^3+1)$$

となる。$0<x$より、下表をうる。

x	0		$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$	
S'		$-$	0	$+$
S		↘		↗

したがって、②とあわせて、

$$\min S=5\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{4}{3}}+6\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}$$

$$=7\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}$$ //