a が正の定数，n が正の整数ならば，$x \geq 0$ において不等式 $ax^{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} > x$ が成り立つことを証明せよ．

[解]$a, n, x > 0$ だから，AM-GM より

$$\begin{aligned} ax^{n+1} + \frac{1}{\sqrt[n]{a}} &= ax^{n+1} + n\frac{1}{n\sqrt[n]{a}} \\ &\geq (n+1)\sqrt[n+1]{\frac{x^{n+1}}{n^n}} \\ &= \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n+1}}}x \\ &> \frac{n+1}{n}x \\ &> x \end{aligned}$$

となって題意の不等式が示された．□