サイコロを n 回投げて，xy 平面上の点 P_0，P_1，…，P_n を次の規則 (a)，(b) によって定める．

(a) $P_0=(0,0)$

(b) $1\leq k\leq n$ のとき，k 回目に出た目の数が $1,2,3,4$ のときには，P_{k-1} をそれぞれ東，北，西，南に $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ だけ動かした点を P_k とする．また k 回目に出た目の数が $5,6$ のときには $P_k=P_{k-1}$ とする．ただし y 軸の正の向きを北と定める．

このとき以下の問いに答えよ．

(1) P_n が x 軸上にあれば P_0，P_1，…，P_{n-1} もすべて x 軸上にあることを示せ．

(2) P_n が第一象限 $\{(x,y)|x>0,y>0\}$ にある確率を n で示せ．

[解]

(1) l 回目 $(a\leq l\leq n-1, l\in\mathbb{N})$ にはじめて南北方向に動いたとすると，移動量は $\left(\frac{1}{2}\right)^l$ である．ここで $l+1$ 回目から n 回目まで全て l 回目と逆向きに動いたとしても，その合計の移動量は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^l-\left(\frac{1}{2}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^l$$

だから，P_n は x 軸上には存在しない．以上から題意の対偶が示された．□

(2) P_n が x 軸上にあるという事象を X，y 軸上にあるという事象を Y とする．求める確率 a_n とすると，対称性から他の象限にある確率も a_n であるから，

$$4a_n+P(X\cup Y)=1 \qquad (1)$$

が成立する．前問の結果から P_n が軸上に有るとき，$P_k(1\leq k\leq n)$ も軸上にある x 軸上にあるのは常にサイコロが $2,4,5,6$ のとき，y 軸上にあるのは常にサイコロが $1,3,5,6$ のときである．したがって

$$P(X)=P(Y)=\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad (2)$$

また，原点にあるのは，(1) と同様に考えれば常にサイコロが $5,6$ であるときだから，

$$P(X\cap Y)=\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad (3)$$

である．

$$P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)$$

に注意して (2)，(3) を (1) に代入すれば

$$a_n=\frac{1}{4}\left(1-2\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\cdots(\text{答})$$

となる．