京大理科数学 2004

第 1 問

[解] $\sin\theta = s,\ \cos\theta = c$ と書く.

$$f'(\theta) = -4\sin 4\theta - 8s\cdot c$$
$$= -8\sin 2\theta \cos 2\theta - 8c\cdot s$$
$$= -8c\cdot s\,(2\cos 2\theta + 1)$$
$$= -8c\cdot s\,(4c^2 - 1)$$

より下表を得る

θ	0		$\pi/3$		$\pi/2$		$2\pi/3$		$3\pi/4$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	-3

したがって max … 1, min … $-\frac{7}{2}$

第 2 問

[解] $\begin{cases} a>0 \quad \cdots ① \\ f(x)=\left(\dfrac{e}{x^a}-1\right)\dfrac{\log x}{x} \quad \cdots ② \end{cases}$

$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq e^{\frac{1}{a}}$ だから, 面積Sとして

$$S=\int_1^{e^{\frac{1}{a}}} f(x)\,dx \quad \cdots ③$$

ここで

$$\int_1^{e^{\frac{1}{a}}} \frac{\log x}{x^{a+1}}\,dx = \left[-\frac{1}{a}\frac{\log x}{x^a}\right]_1^{e^{\frac{1}{a}}} + \int_1^{e^{\frac{1}{a}}} \frac{1}{a x^{a+1}}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{a}\frac{\log x}{x^a}-\frac{1}{a^2}\frac{1}{x^a}\right]_1^{e^{\frac{1}{a}}}$$

$$=\left(-\frac{1}{a}\frac{\frac{1}{a}}{e}-\frac{1}{a^2}\frac{1}{e}\right)-\left(-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

$$\int_1^{e^{\frac{1}{a}}} \frac{\log x}{x}\,dx=\left[\frac{1}{2}\log^2 x\right]_1^{e^{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{2}\frac{1}{a^2}$$

だから③に代入

$$S=\frac{e}{a^2}\left(1-\frac{2}{e}\right)-\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{a^2}\left(e-\frac{5}{2}\right) \quad //$$

n^2-n

第 3 問

[解] $f(x)=x^2-x+\frac{n-1}{n^2}$ とおくと、$f(x)=\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{n-1}{n}\right)$ である。したがって、$x=\frac{1}{n},\ \frac{n-1}{n}$ として

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}=a_n\left(\frac{1}{n}\right)+b_n\\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}=a_n\left(\frac{n-1}{n}\right)+b_n\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}\frac{2-n}{n}a_n=\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}\right\}\\ (n-2)b_n=(n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}\end{cases}\cdots①$$

である。$n\to\infty$の時を考えるので、$n\neq 2$として良く、①から $n\to\infty$の時

$$a_n=\frac{1}{\frac{2}{n}-1}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n\cdot(-2)}\right\}\longrightarrow e^{-2}$$

$$b_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}-\frac{1}{n}\cdot a_n\longrightarrow 0\quad(\because a_n\to e^{-2})$$

第4問

[解]

第5問

[解] Cが±1を通るので、Cの中心はβとおける(βは純虚数).

$$|1-\beta|^2 = |-1-\beta|^2 = |\alpha-\beta|^2 = A \quad \cdots ①$$

さらに、$\alpha = kz$ ($k \in \mathbb{R}$)とおける。ただし$|z|=1$.

①から

$$|\beta|^2 - \beta - \bar{\beta} + 1 = |\beta|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + |\alpha|^2$$

βは純虚数で、$\beta + \bar{\beta} = 0$より

$$1 = k^2 - k\bar{z}\beta - kz\bar{\beta} \quad \cdots ②$$

又、

$$\left|-\frac{1}{\bar{\alpha}} - \beta\right|^2 = \left|\frac{z}{k} + \beta\right|^2$$

$$= |\beta|^2 + \frac{1}{k}\beta\bar{z} + \frac{1}{k}\bar{\beta}z + \frac{1}{k^2} \quad \cdots ③$$

一方、②の両辺をk^2でわって

$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}\bar{z}\beta + \frac{1}{k}z\bar{\beta} = 1$$

だから③に代入して

$$\left|-\frac{1}{\bar{\alpha}} - \beta\right|^2 = |\beta|^2 + 1 = A$$

したがって示された ■

第 6 問

[解] 全ての操作の後、N+1に赤が入っているのは、N回目の操作後に赤の入っている箱iとして、N+1回目でiをえらぶ時である。$(i \neq N+1)$ $i \neq N+1$となる確率は、排反を考えて、

$$1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^N$$

だから もとめるのは

$$\frac{1}{N}\left\{1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right\}$$ //