学コン, 問題入力が終わった or ないことを確認した号

年	月号
99	04, 05, 08, 09, 12
00	
01	
02	
03	
04	
05	
06	
07	
08	
09	
10	05, 07, 08, 09, 10, 11, 12
11	01, 03, 04, 05, 07, 09, 10, 11
12	01, 02, 03

$\boxed{\mathbf{1}}$ 前田姉妹, 深田姉妹, 野村姉妹, 田中姉妹の計８人がトーナメント方式で, シングルスのテニスの試合をすることになった．１回戦４試合, ２回戦２試合の試合の順序は考えないものとするとき,

(1) トーナメントの組み合わせは全部で何通りあるか.

(2) １回戦では姉妹どうしは大戦しないような組み合わせは何通りあるか.

（学コン 99/04）

$\boxed{\mathbf{2}}$ ２次方程式 $x^2+ax+b=0$ が異なる２解（実数とは限らない）をもち, しかもその２解が $p,\ ap+b$ の形で表わされるような実数 $a,\ b$ の組の全体を考えるとき,

(1) a はどのような範囲にあるか.

(2) $a,\ b$ がともに自然数であるような例を１組あげよ.

（学コン 99/04）

$\boxed{\mathbf{3}}$ 円 $C\ :\ (x-s)^2+y^2=t^2+s^2$ （ただし, $s,\ t$ は正の定数）上の点 A $(0, t)$ を通り, 傾き $m,\ -m$ (ただし, $m>0$）の直線がともに C と A 以外の点で交わるとする（その交点をそれぞれ P, Q とする）．P, Q の中点を R とするとき,

(1) R は m によらない定直線上にあることを示せ.

(2) $s=2,\ t=1$ のとき, R の描く軌跡を図示せよ.

（学コン 99/04）

$\boxed{\mathbf{4}}$ 放物線 $C\ :\ y=x^2$ と $D\ :\ -2x^2-\dfrac{3}{2}$ にともに接する直線のうち傾きが正であるものを ℓ とし, ℓ と $C,\ D$ の接点をそれぞれ A, B とする.

(1) ℓ の方程式, および A, B の座標を求めよ.

(2) 直線 m は, 次の 1°, 2° をともに満たす．このとき m の方程式を求めよ.

1° m と線分 AB は交わり, その交点を通って y 軸に平行な直線を n とする. C と $\ell,\ n$ で囲まれる部分の面積は, D と $\ell,\ n$ で囲まれる部分の面積の半分である.

2° m と $C,\ D$ はそれぞれ異なる２点で交わり, m と C で囲まれる部分の面積は m と D で囲まれる部分の面積の $8\sqrt{2}$ 倍である.

（学コン 99/04）

$\boxed{\mathbf{5}}$ $0 \leqq a \leqq 1$ を満たす定数 a に対し, 数列 $\{a_n\}$ を, $a_1=a,\ a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$ （$n=1, 2, \ldots$）で定義する.

(1) $a=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$ とおくとき, a_2 を $\cos 2\theta$ で表わせ．また, a_n を n と θ で表わせ.

(2) すべての自然数 n に対して $a_{n+p}=a_n$ が成り立つような自然数 p が存在するとき, そのような p のうちで最小のものを $\{a_n\}$ の周期と呼ぶことにする．任意の自然数 q に対して, $\{a_n\}$ の周期が q となるような a が存在することを示せ.

（学コン 99/04）

6 3 以上の奇数 a と自然数 x, y に対して $2^x = a^y + 1$ が成り立つとき, 次の問に答えよ.

(1) m を奇数, n を自然数とするとき m^n を 4 で割った余りを求めよ. また, y は奇数であることを示せ.

(2) $y = 1$ であることを示せ.

（学コン 99/04）

7 a, b, c は 2 以上の整数の定数で, どの 2 つも互いに素であるとする.
自然数 n に対して, 1 から n までの n 個の整数から, a の倍数, b の倍数, c の倍数をすべて取り除いてできる整数全体の集合を $A(n)$ とし, $A(n)$ の要素の総和を $S(n)$ とする.

(1) $abc = N$ として, $A(N)$ について考える.

(i) $A(N)$ の要素の個数を, a, b, c で表せ. （因数分解された形で答えよ.）

(ii) (i) の答を M とするとき, $S(N)$ を N, M で表せ.

(2) k を自然数とするとき, (1) の N に対して, $\dfrac{S(kN)}{S(N)}$ を k で表せ.

（学コン 99/05）

8 正の数からなる等比数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ があり, 以下の 2 条件をみたす.

（ア）$a_k = 1$, $a_{2k} = 2$ をみたす自然数 k が存在する.

（イ）$a \leqq a_i \leqq 3$ となる i と $3 \leqq a_j \leqq 4$ となる j が同数である.

(1) k は奇数であることを示せ.

(2) k の値と $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

（学コン 99/05）

9 方程式 $x^2 - 2x + a - k = 0$ （a, k は実数）の解を α, β とする.
次の条件をみたす a の範囲は k によって定まるので, その範囲を A_k とおく.

［条件］ α, β は異なる実数で, $|\alpha| > |a|$ かつ $|\beta| > |a|$

(1) A_1 を求めよ.

(2) A_k が $p < \alpha < q$ $(p < q)$ の形になるような k の範囲を求めよ.

（学コン 99/05）

10 曲線 $C\ :\ y = x(x-1)^2$ と $D\ :\ y = kx^2$ が 3 点で交わるとき, C と D で囲まれる 2 つの部分を原点に近い方から順に S_1, S_2 とおく. S_2 の面積が S_1 の面積の 2 倍となるような k を求めよ.

（学コン 99/05）

11 複素数平面において, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする. また, 点 $\mathrm{P}(z)$ $(z \neq 1)$ に対して点 $\mathrm{P}'(w(z))$ を, $w(z) = \dfrac{1}{z-1}$ によって定める.

(1) $\mathrm{P}(z)$ $(z \neq 1)$ が C 上を動くとき, $\mathrm{P}'(w(z))$ はどのような図形を描くか.

(2) C 上に異なる 3 定点 $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ および動点 $\mathrm{P}(z)$ $(z \neq 1)$ をとる.

(i) $\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}}$ を $w(z)$ と $w(\beta)$ で表せ.

(ii) $\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} + \dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PA}}$ の最小値を β と γ で表せ.

（学コン 99/05）

12

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^{2k-2}}$ を求めよ.

(2) 実数の数列 $\{a_n\}$ は, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $|a_{n+2} - a_n| = \dfrac{n}{2^{n-1}}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ を満たす. このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ. なお, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ であることは, 証明せずに用いてよい.

（学コン 99/05）

13 袋の中に, Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ, Ⓓ, Ⓔ, Ⓕの 6 種類のバッジが 3 個ずつ, 計 18 個入っている. この中から無作為に 6 個のバッジを取り出すとき, k 種類のバッジが得られるとして, k の期待値を求めよ.

（学コン 99/08）

14 座標平面上に 2 直線 $\ell : y = 3\sqrt{3}x$, $m : y = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}x$ がある. ℓ 上に点 A, m 上に点 B があり, 点 C を $\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形になるようにとる. ただし, A, B, C はこの順に反時計まわりに並んでいるものとする. A, B の x 座標をそれぞれ a, b とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) $a = \sqrt{3}$ で, b は全実数を動くとき, C のえがく軌跡を求めよ.

(2) a, b が $\sqrt{3} \leqq a \leqq 2\sqrt{3}$, $-1 \leqq b \leqq 2$ の範囲で動くとき, C の存在する領域の面積を求めよ.

（学コン 99/08）

15 1 辺の長さが 1 の正方形 OABC がある. 辺 AB 上に点 P をとり, OP を折り目として $\triangle\mathrm{OAP}$ を折り返し, A が移る点を A' とする. 次に, C が A' に重なるように, 辺 BC 上に点 Q をとり, OQ を折り目として $\triangle\mathrm{OCQ}$ を折り返す. OP, OQ と AC との交点を, それぞれ R, S とする.

(1) $\angle\mathrm{AOP} = \alpha$ とするとき, OR の長さを α で表せ.

(2) OR : OQ を求めよ.

(3) 3 直線 QR, PS, OA' は 1 点で交わることを示せ.

（学コン 99/08）

$\boxed{\mathbf{16}}$ 次の（イ），（ロ）のうちから**一方のみ**を選んで解答してください.

（イ） 実数 x, y, z は, $x^2+y^2+z^2=1$ を満たす変数とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) x を $x=\cos\theta$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ と固定するとき, $y+z$ の取り得る値の範囲を θ で表せ.

(2) $F=(4x+y+3z)(4x+3y+z)$ の最大値を求めよ.

（ロ） $0 \leqq a < 1$ とする. 点 A $(0, a)$ を中心とし, 半径が 1 の円 C の内部および周のうち, $y \geqq 0$ の部分を D_1, $y \leqq 0$ の部分を D_2 とする. このとき以下の問に答えよ.

(1) D_1 に含まれ, 円 C と x 軸に同時に接する円 C_0 の中心 P お描く曲線 E の方程式を求めよ.

(2) (1) の E と x 軸で囲まれる領域の面積を S_1, 領域 D_2 の面積を S_2 とする.
$S(a)=S_1-S_2$ を最大にする a の値と最小にする a の値をそれぞれ求めよ.

（学コン 99/08）

$\boxed{\mathbf{17}}$ $x>0$ においてつねに $f(x+1)-f(x) \geqq f'\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ が成り立つような $f(x)$ を「性質 (A) をもつ」と呼ぶことにする.

(1) $f(x)=\log x$ は性質 (A) をもつことを示せ.

(2) $f(x)=x^a$ （a は正の定数）とする.
(i) a が自然数のときは $f(x)$ は性質 (A) をもつことを示せ.
(ii) $f(x)$ が性質 (A) をもたないような a の例をあげよ.

（学コン 99/08）

$\boxed{\mathbf{18}}$ 行列 $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ に対し, $X^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ $(n=1, 2, \ldots)$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) c_n, d_n を a_n, b_n を用いて表せ.

(2) a_n-b_n は 3 の倍数でないこと, および a_n と b_n は互いに素であることを示せ.

(3) a_n+3b_n と c_n+3d_n は互いに素であることを示せ.

(4) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 53 \\ 175 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を満たす自然数 m と整数 k の組を求めよ.

（学コン 99/08）

$\boxed{\mathbf{19}}$ 数列 $\{a_n\}$ は, $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n+4^n-p$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ を満たすものとする. a_n の最小値を与える n の値が 10 のみになるような実数の定数 p の値の範囲を求めよ.

（学コン 99/09）

$\boxed{\mathbf{20}}$ 4 面体 ABCD を K とし, K の体積を V, K に内接する球の半径を r, $\triangle$BCD, $\triangle$ACD, $\triangle$ABD, $\triangle$ABC の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3, S_4 とし, $S=S_1+S_2+S_3+S_4$ とおく.

(1) V を S と r で表せ.

(2) 右図のように, K の外部にあり, 4 平面 ABC, ABD, ACD, BCD と接し, とくに, $\triangle$BCD の内部で平面 BCD と接するような球の中心を P_1, 半径を R_1 とする. 6 面体 $\mathrm{A}-\mathrm{BCD}-\mathrm{P}_1$ の体積を, S_2, S_3, S_4, R_1 で表せ.

(3) (2) と同様に, K の外部にあり, 4 平面 ABC, ABD¡ ACD, BCD と接し, $\triangle$ACD の内部で接する球の半径を R_2, $\triangle$ABD の内部で接する球の半径を R_3, $\triangle$ABC の内部で接する球の半径を R_4 とするとき, $\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}=\dfrac{2}{r}$ であることを示せ.

(学コン 99/09)

21

(1) $8(x+y+z)^3-(x+y)^3-(y+z)^3-(z+x)^3$ を因数分解せよ.

(2) 素数 p および整数 x, y, z が $9p^3=8(x+y+z)^3-(x+y)^3-(y+z)^3$ $-(z+x)^3$ を満たすとき, $p=2$ であることを示せ. また, (x,y,z) の組の個数を求めよ.

(学コン 99/09)

22 つぎの（イ）,（ロ）のうちから**一方のみ**を選んで解答してください.

（イ）「任意の実数 x について, $f(x)\geqq 0$ または $g(x)\geqq 0$」が成り立つとき,「$f(x)*g(x)\geqq 0$」と表すことにする. とくに, $f(x)=x(x-1)$, $g(x)=(x-a)(x-2a)$ の場合について,

(1) $f(x)*g(x)\geqq 0$ となるための実数 a の条件を求めよ.

(2) $a=0$ のとき, $f(x)*\{kf(x)+g(x)\}\geqq 0$ となるための実数 k の条件を求めよ.

(3) (1) の条件を満たすすべての a について, $f(x)*\{kf(x)+g(x)\}\geqq 0$ となるための実数 k の条件を求めよ.

（ロ） k は正の定数で, t が $0\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき, xy 平面上の直線 $(\cos^k t)x+(\sin^k t)y=\cos^k t\sin^k t$ が通過する領域を図示せよ.

(学コン 99/09)

23 放物線 C : $y=x^2$ 上に 2 定点 $\mathrm{A}(a,a^2)$, $\mathrm{B}(b,b^2)$ $(a<b)$ と動点 $\mathrm{P}\,(t,t^2)$ $(a<t<b)$ がある. $\angle\mathrm{APB}=\theta$ とするとき, θ の最小値が存在するための a, b の条件を求め, ab 平面上に図示せよ. また, a, b がこの条件を満たすとき, θ が最小になる t を a と b で表せ.

(学コン 99/09)

24 曲線 $y=\log x$ の点 A $(\alpha,\log\alpha)$, B $(\beta,\log\beta)$ $(\alpha\neq\beta)$ における法線の交点を P とし, β を α に限りなく近づけたときの P を P_α とする.

(1) P_α の座標を α で表せ. （結果のみでよい）

(2) α が $\frac{1}{2}$ から 1 まで変化するときの P_α の描く曲線を C とする. C の凹凸を調べ, 概形をかけ. また, C と直線 $x=3$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

(学コン 99/09)

25 Oを原点とする座標平面上の円 $C : x^2+y^2=1$ の内部に定点 A $(a, 0)$ がある. C の周上に点 P, Q を, P, Q における C の接線が交わるようにとり, その交点を R (X, Y) とする.

(1) OR と PQ の交点を S とするとき, S の座標を X, Y を用いて表せ. また, SA の長さを a, X, Y を用いて表せ.

(2) A を固定したまま, P, Q を C の周上で $\angle \mathrm{PAQ} = 90^\circ$ を満たすように動かすとき, R の軌跡の方程式を求めよ.

(学コン 99/12)

26

(1) 以下の連立方程式は $x = y = z = 0$ 以外の複素数解を持たないことを示せ.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0 \\ x^3 + 2y^3 + 3z^3 = 0 \end{cases}$$

(2) 以下の連立方程式について,

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{4}y + \sqrt[3]{9}z = 6 \\ x^2 + \sqrt[3]{2}y^2 + \sqrt[3]{3}z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 6 \end{cases}$$

(i) この連立方程式を満たす実数 x, y, z の組を 1 つ求めよ.（答のみでよい）

(ii) この連立方程式は, (i) で求めたもの以外には複素数解を持たないことを示せ.

(学コン 99/12)

27

(1) 数直線上の原点を出発して, 1 秒ごとに正方向に 1 歩ずる歩く. 歩幅は 0, 1, 2 のどれかであり, 1 歩ごとにそれらの歩幅はそれぞれ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ の確率で独立に選ばれるものとする.

このとき, 点 n （$n = 0, 1, 2, \ldots$）を踏む確率を p_n として, p_{n+2} を p_{n+1} と p_n とで表せ.

(2) 図のように格子状の廊下がある（廊下は直線で表され, 上下, 左右それぞれ無数にある A 君と B さんはそれぞれ図の P, Q を同時に出発して（P から見て右に 4, 上に 4 の位置に Q がいる）, 1 秒ごとに A 君は右方向か上方向の 1 区画を同じ確からしさで進み, B さんは左方向か下方向の 1 区画を同じ確からしさで進む. このとき, A 君が B さんを発見できる確率を求めよ. なお, A 君が B さんを発見できるには, 2 人が同じ直線上にいることが必要十分であるものとする.

(学コン 99/12)

28 つぎの（イ）,（ロ）のうちから**一方のみ**を選んで解答してください.

（イ） r を正の定数とする. 複素数 z が $|z| = r$ を満たしながら動くとき, $|z^3 + z^2 + 4z|$

の最小値を $f(r)$ とする. $r \leqq \sqrt{5}$ のとき, $f(r)$ の最大値を求めよ.

（ロ） k を 0 でない定数として曲線 $C : y = \dfrac{1}{e^{kx}+e^{-kx}}$ がある. 正の定数 a に対し, C, x 軸, $x=0$, $x=a$ で囲まれた部分を x 軸の回りに回転させてできる立体の体積を $I_k(a)$ とおく. $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{I_k(a)}{a} = \lim_{a\to\infty} I_k(a)$ となるように k の値を定めよ.

(学コン 99/12)

29 楕円 $x^2+4y^2=1$ の $x>0$, $y>0$ の部分に点 P をとり, P から x 軸, y 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ S, T とおく. また, 直線 OP に関して S と反対側に点 Q を, $\angle\mathrm{QOP} = 2\angle\mathrm{POS}$ かつ, OQ を一辺とする正方形の面積が長方形 OSPT の面積に等しくなるようにとる. P が動いたときの Q の軌跡に原点 O を加えてできる曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ.

(学コン 99/12)

30

(1) $f(x)$ を 2 次以上の整数係数多項式, p を素数とし, $f(x)$ を $x-1$ で割った商を $Q_1(x)$, 余りを R_1 とする. $f(1)$ が p の倍数ならば R_1 は p の倍数であることを示せ. さらに $f(2)$ も p の倍数であるならば $Q_1(x)$ を $x-2$ で割った余りは p の倍数であることを示せ.

(2) 次の 3 つの条件を同時に満たす 6 次の整数係数多項式 $F(x)$ は存在しないことを示せ.

(a) $F(x)$ の最高次の係数は 1

(b) $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(6)$, $F(7)$ はすべて 7 の倍数

(c) $F(0)$ は平方数

(学コン 99/12)

31 △ABC の辺 AC を 1 : 2 に内分する点を D とする．辺 AB 上（端点を除く）に点 P をとり，PD の中点を Q，BD と CQ の交点を R，直線 AR と BC の交点を S とする．△RSC と △ABC の面積の比が 1 : 4 となるとき，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}$ の値を求めよ．

（学コン 10/05）

32 $f(x)$ を 2 次関数として，xy 平面上に 2 つの放物線 $C : y = x^2$，$D : y = f(x)$ がある．C と D は異なる 2 点 $\mathrm{P}(p, p^2)$，$\mathrm{Q}(q, q^2)$ で交わっていて，P における C の接線と D の接線は直交し，Q における C の接線と D の接線も直交する．

(1) p と q の満たす関係式を求めよ．

(2) (1) の関係を満たすように p と q を動かすとき，D の頂点の軌跡を図示せよ．

（学コン 10/05）

33 $x + 2y + 3z = xyz$ を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ．

（学コン 10/05）

34 a, p を実数の定数として，$a_1 = a$, $a_{n+1} = 2a_n + p(n-1)$（$n = 1, 2, \dots$）によって数列 $\{a_n\}$ を定める．すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ となるための a, p の条件を求め，ap 平面上に図示せよ．

（学コン 10/05）

35

(1) n を自然数とする．$(x + y + z)^n$ を展開したとき，x, y, z すべてが現れる項の係数の和を求めよ．

(2) m, n を自然数とする．$(x; y + z)^m (x + y + z + w)^n$ を展開したとき，x, y, z, w すべてが現れる項の係数の和を求めよ．

（学コン 10/05）

36 3 次関数 $f(x) = x^3 - x$ があり，そのグラフ $C : y = f(x)$ 上に，3 点 $\mathrm{P}(t-1, f(t-1))$，$\mathrm{Q}(t, f(t))$，$\mathrm{R}(t+1, f(t+1))$ をとる．P, Q, R を通る 2 次以下の関数のグラフを D_t とする．

(1) D_t を表す式を求めよ．

(2) t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，D_t の PQ 間（P と Q を含む）の部分が通過する領域を図示せよ．

（学コン 10/05）

37 a, b, c, d を定数として，$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく．曲線 $C : y = f(x)$ が 3 点 $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -2)$ を通るとする．

$f(x)$ が $-2 < x < 1$ で極大および極小となるとき，C が通過しうる領域を図示せよ．

（学コン 10/07）

38 α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，O を中心とする半径 1，中心角 α の扇形 O-AB を考える．扇形の弧 AB 上（端点を除く）に点 P をとり，P を通り OA に平行な直線と線

分 OB の交点を Q とする．さらに, P, Q から線分 OA に下ろした垂線の足をそれぞれ R, S とし, 長方形 PQRS の面積を T とする．

(1) $\angle \mathrm{AOP} = \theta$ とするとき, T を α, θ で表せ．

(2) $T = \dfrac{1}{3}$ となる点 P をとれるような $\tan\alpha$ の範囲を求めよ．

（学コン 10/07）

39 O を原点とする xyz 空間に, 3 点 A$(1, 1, 0)$, B$(2, -1, 0)$, C$(0, 1, 2)$ がある．いま, 直線 AB 上の A, B 以外の部分に点 P をとり, P から平面 OAC に下ろした垂線の足を Q, P から平面 OBC に下ろした垂線の足を R とする．与えられた正の数 k に対して, $\triangle$PQR の面積が k に等しくなるような点 P は何個あるか．必要ならば k の値で場合分けして答えよ．

（学コン 10/07）

40 a, b を実数, t を 0 でない実数とする．xy 平面上に 2 つの放物線 $C : y = x^2$, $D : x = (y-b)^2 + a$ があり, C と D は $x = t$ で接している．P(a, b) とする．

(1) a と b をそれぞれ t で表せ．

(2) 原点と P の距離の最小値と, そのときの t の値および P の座標を求めよ．

（学コン 10/07）

41

(1) $25^2 - 22$ は 67 の倍数である．$n^2 - 22$ が 67 の倍数になるような, 67 以下の自然数 n が 25 以外に存在するならばすべて求めよ．

(2) $n(n^2 - 22)$ が 2010 の倍数になるような自然数 n で $n \leqq 2010$ を満たすものはいくつあるか．

（学コン 10/07）

42 十分大きい自然数の定数 n に対して, $x^2 + n\cos x = 0$ を満たす正の実数 x のうち最小のものを a_n とおく．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(2) (1) の答を α とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(a_n - \alpha)$ を求めよ．

(3) (2) の答を β とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\{n(a_n - \alpha) - \beta\}$ を求めよ．必要ならば $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で $\sin x \leqq x \leqq \tan x$ となることを用いてよい．

（学コン 10/07）

43 凸 12 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \cdots \mathrm{A}_{12}$ の頂点のうちの 6 個を頂点とする凸 6 角形は ${}_{12}\mathrm{C}_6$ 個あるが, このうち, もとの 12 角形と, ちょうど 3 本の辺を共有するものは何個あるか．

（学コン 10/08）

44

(1) $x^2-2xy-3y^2+py+kp^2$（k は x, y, z によらない定数）が x, y, p についての 1 次式の積に因数分解されるとき, 定数 k の値を求めよ.

(2) 素数 p と正の整数 x, y が, $x^2-2xy-3y^2+py=0$ を満たすとする. このとき, x, y を p で表し, p を 4 で割った余りを求めよ.

（学コン 10/08）

45 O$(0,0)$, A$(27,0)$, B$(15,9)$, C$(3,4)$ とし, 直線 AB と直線 CO の交点を D, 直線 BC と直線 OA の交点を E とする. $\angle$OAB, $\angle$ABC, $\angle$BCO, $\angle$COA, $\angle$BDC, $\angle$CEO の外角の二等分線をそれぞれ l, m, n, p, q, r とする.

(1) 直線の式 $ax+by+c=0$ で, $a^2+b^2=1$, $b>0$ を満たすものを良形と呼ぶことにする. 直線 AB, BC の式で良形のものをそれぞれ, $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ とする. $f(x,y)$, $g(x,y)$ を求めよ. また, m の式を, 実数 k を用いて $f(x,y)+kg(x,y)=0$ と表すとき, k の値を求めよ.

(2) l と n の交点を F, m と p の交点を G, q と r の交点を H とするとき, F, G, H が同一直線上にあるかどうかを調べよ.

（学コン 10/08）

46 $f(x)=\dfrac{(\log x)^2}{x+1}$ とする.

(1) $S=\displaystyle\int_1^e f(x)dx$, $T=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x)dx$ とするとき, S を T で表せ.

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^e f(x)dx$ を求めよ.

（学コン 10/08）

47 xy 平面上に 2 つの曲線 $C: y=\tan x$, $D: y=\log x$ がある. D を x 軸方向に a だけ平行移動した曲線を E とするとき, C と E が接するような定数 a の値を求めよ.

（学コン 10/08）

48 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, a_1, b_1 が自然数であって, $n=1,2,\ldots$ に対して,

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_nb_n \end{cases}$$

を満たしている. $c_n={a_n}^2-4b_n$ とおく.

(1) $b_1=1$ ならば, $c_k=1$ となる自然数 k が存在することを示せ.

(2) ある自然数 k に対し, $a_k\geqq 3$ かつ $b_k\geqq 2a_k$ ならば, k 以上の任意の自然数 I に対し, $c_{l+1}>c_l$ となることを示せ.

(3) $b_1=1$ とする. $c_k=1$ となる自然数 k の個数が最も多くなるように a_1 の値を定めよ

（学コン 10/08）

49 一辺の長さが 1 である正六角形 ABCDEF がある. 辺 CD, DE, EF の中点をそれぞれ P, Q, R とするとき, 直線 AP, BQ, CR によって囲まれる三角形の面積を求めよ.

（学コン 10/09）

50 凸 n 角形（$n \geqq 4$）の対角線のうちの一本を無作為に選ぶとき, その対角線が他の対角線のうちの k 本と交わっている（端点のみを共有するものは除く）として, k の期待値を求めよ.

（学コン 10/09）

51 自然数 N の桁数が d であるとし, N の各桁の数字が一の位から順に $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_d$ であるとき, $M = a_1! + a_2! + \cdots + a_d!$ とおく. なお, $0! = 1$ である.

(1) $d \geqq 8$ のとき, $N > M$ が成立することを示せ.

(2) $d = 3$ のとき, $N = M$ となる N が存在するならば求めよ.

（学コン 10/09）

52 3 次方程式 $x^3 + 5kx^2 + 10x + 5k = 0$ が $0 \leqq x \leqq \sqrt{6}$ に異なる 3 つの実数解を持つような, 実数の定数 k の取り得る値の範囲を求めよ.

（学コン 10/09）

53 一辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC の辺 OA, 辺 BC の中点をそれぞれ M, N とする. 半直線 NC 上に点 S を NS = MN となるようにとり, さらに直線 BC 上に点 P をとる. △OAP の外心を Q として, 次の問に答えよ.

(1) ∠PMN $= \theta$ とするとき, △OAP の外接円の半径を θ で表せ.

(2) P が線分 NS（端点を含む）上を動くとき, 線分 PQ が通過する部分の面積を求めよ.

（学コン 10/09）

54 O を原点とする xy 平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 4$ があり, 半径 1 の円 D が C に点 P$(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ （$0 < \theta < \pi$）で内接している. y 軸に平行な直線で D に接するもののうち, x 軸の正の部分と交わるものを l とする. l と C で囲まれる領域のうち, O を含まない方の面積を S_θ とするとき, $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{S_\theta}{\theta^3}$ の値を求めよ. 必要ならば, $x \geqq 0$ のとき, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ となることを用いてよい.

（学コン 10/09）

55 p を正の定数とし, 放物線 $C : y = x^2$ 上に相異なる 3 点 P(p, p^2), A, B を取り, A における C の接線を l_{A}, B における C の接線を l_{B} とする. AP $\perp l_{\mathrm{A}}$ かつ BP $\perp l_{\mathrm{B}}$ が成り立つとき,

(1) p がとり得る値の範囲を求めよ.

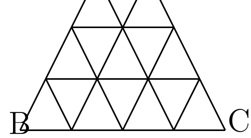
(2) 三角形 ABP の面積を S_1 とするとき, S_1 を p を用いて表せ.

(3) 直線 AB と C で囲まれる部分の面積を S_2 とする. $S_1 : S_2 = 1 : k$ とするとき, k のとり得る値の範囲を求め, このときの p を k で表せ.

（学コン 10/10）

56 図のような小さな正三角形を 16 個並べた正三角形 ABC がある. 1 回の試行で, この 15 個の頂点の中から無作為に 1 つの頂点を選ぶ. n 回の試行後, 選ばれた点が AB, BC, CA のどの

辺上（端点を含む）にも少なくとも 1 点存在する確率を求めよ.



（学コン 10/10）

57 $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$, $\mathrm{BC}=\sqrt{3}$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ がある. 点 B を P_1 として, 直線 BC 上の点 P_n に対し, P_n を通り直線 AC に垂直な直線と直線 AC の交点を Q_n, Q_n を通り直線 AB に垂直な直線と直線 AB の交点を R_n, R_n を通り直線 BC に垂直な直線と直線 BC の交点を P_{n+1} とする.
$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n+\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n+\mathrm{R}_n\mathrm{P}_{n+1}$（$n$ は自然数）を n で表せ.

（学コン 10/10）

58 xyz 空間で, 2 点 $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ を通る直線を l とし, l と y 軸に球 S が接している. a を実数の定数とし, 点 $(a,0,1)$ において l と接する S のうち, 半径が最小で中心の y 座標が 0 以上のものを S_a とする.

(1) S_a の中心と半径を求めよ.

(2) S_a を平面 $y=0$ によって切断し, $y\leqq 0$ の部分を考える. その部分の体積を V_a とし, 切断面を底面とするときの高さを h_a とおく. $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V_a}{h_a}$ の値を求めよ.

（学コン 10/10）

59 $a+b=c$, $ac=b+d$ をともに満たす素数の組 (a,b,c,d) をすべて求めよ.

（学コン 10/10）

60 以下, 実数成分の 2 次正方行列を考える. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とする. $b=0,1$ のそれぞれの場合について, $X^2=A$ を満たす行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が存在するための a, c の条件を ac 平面に図示せよ.

（学コン 10/10）

61 a を定数として, $f(x)=|x^2+ax-a^2+1|$ とおく. $-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき, $M(a)$ の最小値を求めよ.

（学コン 10/11）

62 $\mathrm{AB}=3$, $\mathrm{BC}=7$, $\mathrm{CA}=5$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ がある. 辺 BA と辺 BC に接する円 D の半径を R, D と辺 BC との接点を P とし, 辺 CA と辺 CB に接する円 E の半径を r, E と辺 CB との接点を Q とする. D と E が互いに外接し, $\mathrm{BP}=\mathrm{CQ}$ が成り立つとき, R と r の値を求めよ.

（学コン 10/11）

63 n を 2 以上の自然数とし, r を $r\leqq n-1$ となる自然数とする.

(1) ${}_n\mathrm{C}_{r-1} : {}_n\mathrm{C}_r : {}_n\mathrm{C}_{r+1} = 1 : 2 : 3$ となるような n, r の組 (n, r) を求めよ.

(2) 自然数 p に対して, ${}_n\mathrm{C}_{r-1} : {}_n\mathrm{C}_r : {}_n\mathrm{C}_{r+1} = 1 : p : 22$ が成り立つとき

(i) p と r が満たす関係式を求めよ.

(ii) n, r, p の組 (n, r, p) を求めよ.

（学コン 10/11）

64 a を 1 より大きい定数として, $C : \dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ とする. C の焦点のうち x 座標が正のものを F とし, 原点 O を中心として OF を半径とする円を D とおく. C と D が相異なる 4 点で交わるとき,

(1) a の取り得る値の範囲を求めよ.

(2) 第 1 象限で C と D に接する直線を l とおく. D と l の接点の y 座標を求めよ.

(3) A$(0, 1)$ として, $l /\!/ \mathrm{FA}$ となるときの a の値を求めよ.

（学コン 10/11）

65

(1) x を正の実数とする. 任意の自然数 n に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{x^{n+2}}{n+2)!} \leqq e^x - \left\{1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right\} \leqq \frac{x^{n+2}e^x}{(n+2)!}$$

(2) $S_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} x(\log x)^n dx$, $T_n = \dfrac{(-2)^n}{n!} S_n$ とする. $n \geqq 1$ のとき, S_n を n と S_{n-1} を用いて表し, さらに T_n を n と T_{n-1} を用いて表せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(-1)^n S_n$ を求めよ.

（学コン 10/11）

66 A, B, C 3 枚の皿におはじきを置いていくゲームをする. 1 回の試行では, 1 個のサイコロを振って, 1, 2 が出た場合は A の皿に, 3, 4 が出た場合は B の皿に, 5, 6 が出た場合は C の皿に, おはじきを 1 個加える. ただし, 皿にあるおはじきの個数の最大と最小の差が 3 になると, このゲームは終了する.

(1) $3k$ $(k \geqq 1)$ 回の試行後, 皿にあるおはじきの個数がすべて等しくなる確率を p_k, どの 2 つも異なる確率を q_k とする. p_k, q_k を p_{k-1}, q_{k-1} を用いて表せ.

(2) n $(n \geqq 1)$ 回の試行後にゲームが終了する確率を r_n とするとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nr_n$ を求めよ. ただし, 必要であれば, $|\alpha| < 1$ のとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ が成り立つことを用いてよい.

（学コン 10/11）

67 8, x^2, y, $-y-5$ を適切に並べ替えたものが等比数列の連続した項になるような実数 x, y を求めよ. ただし, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y \neq -5$ とする.

（学コン 10/12）

68 n を自然数とする. 箱の中に, 1 と書かれた玉, 2 と書かれた玉, $\cdots$, n と書かれた

玉が 1 個ずつ計 n 個ある. n 個の玉から無作為に 1 個を選び元に戻すことを 2 回繰り返し, 1 回目に選ばれた玉に書かれた数と 2 回目に選ばれた玉に書かれた数の和を S とする.

(1) n が 9 の倍数であるとき, S が 9 の倍数となる確率を求めよ.

(2) 700 以下の自然数 n のうち, S が 9 の倍数となる確率が $\dfrac{1}{9}$ であるものは何個あるか.

（学コン 10/12）

$\boxed{\textbf{69}}$ xy 平面上に放物線 $C: y = x^2$ と直線 $l: x = ay + b$ がある. C 上の異なる 2 点 P, Q で, l に関して対称なものが存在するための a, b の条件を ab 平面上に図示せよ.

（学コン 10/12）

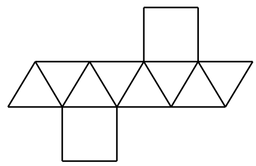
$\boxed{\textbf{70}}$ xy 平面上に 2 曲線 $C: y = b^{x^2}$, $D: y = axe^{x^2}$ がある. ただし, a は 1 より大きい定数である. C と D と y 軸で囲まれる部分と, C と D と直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積の和を $S(a)$ とするとき. $S(a)$ を最小にする a が存在するならば求めよ. （存在しない場合は「ない」と答えよ）

（学コン 10/12）

$\boxed{\textbf{71}}$ $1 < x$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$ のとき, $x \sin y > \sin xy$ は正しいか. 正しいときは, その証明をし, 誤りであるときは, 反例をあげよ.

（学コン 10/12）

$\boxed{\textbf{72}}$ 正方形 2 つ, 正三角形 8 つの面からなり, 展開図が右のようになる立体の体積を求めよ. ただし, 辺の長さはすべて 1 とする.



（学コン 10/12）

$\boxed{\textbf{73}}$ 放物線 $C: y = x^2$ 上に原点 O 以外の点 P をとり, $\mathrm{F}\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ とする. いま, 直線 PF と C の P でない交点を Q, $\angle\mathrm{OFP}$ を二等分する直線と C の交点を A, B とする. $\mathrm{AB} : \mathrm{FQ}$ を求めよ.

（学コン 11/01）

$\boxed{\textbf{74}}$ 曲線 $C: y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$（$a$, b, c, d は定数）の点 $\mathrm{P}(0, d)$ における接線が C と点 Q、R で交わり, $0 <$ (Q の座標) $<$ (R の座標) を満たすものとする. 線分 PQ と C で囲まれた部分の面積を S_1, 線分 QR と C で囲まれた部分の面積を S_2 として, $S_1 : S_2 = 1 : 2$ のとき, $\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}} + \dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PR}}$ の値を求めよ.

（学コン 11/01）

$\boxed{\textbf{75}}$ $\mathrm{AB} = 2$, $\mathrm{BC} = \sqrt{3}$, $\mathrm{CA} = \sqrt{2}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ がある. $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部の点 P が, A を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, $\dfrac{\triangle\mathrm{PBC}}{\triangle\mathrm{PCA}}$ の最小値を求め, さらにこのときの $\dfrac{\triangle\mathrm{PAB}}{\triangle\mathrm{PCA}}$ を求めよ.

（学コン 11/01）

76 $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 自然数 n に対して, $X^n = a_n A + b_n B$ となる実数 a_n, b_n が存在することを示せ.

(2) X^n を求めよ.

（学コン 11/01）

77 自然数 m, n が次の条件（∗）を満たすとき, 以下の問いに答えよ.

（∗）　$11^m + 23^n$ が 100 の倍数である.

(1) n を 4 で割った余りは 2 であることを示せ.

(2) 23^2, 23^4 の下 2 桁をそれぞれ求めよ.（答えのみでよい）

(3) $n = 2, 6, 10, 14, 18$ に対して,（∗）を満たす m をそれぞれ求めよ.

(4) 条件（∗）に加えて $m + n = 2011$ を満たす自然数 m, n の組はいくつあるか.

（学コン 11/01）

78 t $\left(0 < t \leqq \frac{\pi}{3} \cdots ①\right)$ を定数とする. O を原点とする xy 平面上に円 $C : x^2+y^2 = 1$ がある. C 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 < \theta < t \cdots ②)$ から x 軸および直線 $x = \cos t$ に下ろした垂線の足をそれぞれ H, I とする. さらに, C 上の点 $\mathrm{Q}(\cos t, \sin t)$ から x 軸および y 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ J, K とする. 四角形 PIJH の面積を S_θ, 四角形 QKOJ の面積を T とする.

(1) θ が ② の範囲を動くとき, S_θ が最大となるような θ の値を β とする. t と β の関係式を求めよ.

(2) (1) の β に対し, $f(t) = S_\beta + T$ とおく. t が ① の範囲を動くとき, $f(t)$ が最大となるような t の値を α とする.

(i) $\alpha + \beta$ を求めよ.　　(ii) $f(\alpha)$ の値を求めよ.

（学コン 11/01）

79 春の相撲大会は, どの力士も 1 日 1 番ずつ, 15 日間行う. 4 人の力士 A〜D は, 12 日目が終わった時点で, A, B はそれぞれ 7 勝 5 敗, C, D はそれぞれ 6 勝 6 敗となった. 13 日目以降の取組は,

13 日目：A 対 D, B 対 C, 14 日目：A 対 C, B 対 D, 千秋楽（15 日目）：A 対 B, C 対 D

と決まっている. このとき, 4 人とも 8 勝 7 敗になる確率を, 次の各場合について求めよ.

(1) 各対戦で, どちらの力士が勝つ確率も 1/2 である場合.

(2) 8 勝以上の力士と 7 勝以下の力士が対戦するときは 7 勝以下の力士が必ず勝ち, それ以外の対戦ではどちらの力士が勝つ確率も 1/2 である場合.

（学コン 11/04）

80 $a > b > c$ である実数 a, b, c が次の等式をみたす.

$$\begin{cases} a(b+c-3)=b^3+c^3-3 \\ b(c+a-3)=c^3+a^3-3 \\ c(a+b-3)=a^3+b^3-3 \end{cases}$$

(1) a, b, c は 3 次方程式 $x^3-x^2+(a+b+c-3)x-(a^3+b^3+c^3-3)=0$ の解であることを示せ.

(2) a, b, c を求めよ.

（学コン 11/04）

81 $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ を満たす三角形 ABC があり, その重心を G とおく. また, $0<k<\dfrac{2}{3}$ を満たす定数 k に対し, 辺 AB, AC を $k:(1-k)$ に内分する点をそれぞれ X, Y とおき, 線分 AG と線分 XY の交点を K とおく.

(1) 線分の長さの積 $\mathrm{KA}\cdot\mathrm{KG}$ を a, b, c, k で表せ.

(2) 4 点 A, X, G, Y が同一円周上にあるとする.

(i) k の値を a, b, c で表せ.

(ii) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ を満たすすべての三角形 ABC に対して k の値が一定となるような定数 θ は存在するか. 存在するならば求め, 存在しないならばそのことを示せ.

（学コン 11/04）

82 $f(x)$ は次数が 1 以上の多項式で, 最高次の係数は 1 であり, 等式

$$\int_{-x}^{x}\{f(t+1)-f(t)\}^2dt=f(0)x^2\int_{-x}^{x}\{f(t+1)-f(t)\}dt$$

がすべての実数 x で成り立つとする.

次の各場合について, $f(x)$ が存在するときはそれを求め, 存在しないときはそのことを示せ.

(1) $f(x)$ の次数が偶数

(2) $f(x)$ の次数が奇数

（学コン 11/04）

83 xy 平面上の放物線 $C: y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{P}(t-1, (t-1)^2)$, $\mathrm{Q}(t+1, (t+1)^2)$ （$t\neq 0$）がある. 線分 PQ 上にない 2 点 R, S を, 四角形 PRQS の各辺が x 軸または y 軸に平行になるように取る. t が 0 以上の実数を動くとき, 線分 RS が動きうる領域を図示せよ.

（学コン 11/04）

84 n を 2 以上の整数とする. 1 から n までの n 個の数字を小さい順に並べ, その $n-1$ 個の間に, $+$, $-$, $\times$ のいずれか 1 つを書き込み式を作る. 式の値が奇数となる場合が a_n 通りであるとする.

(1) n が偶数のとき, a_{n+1} を, a_n を用いて表せ.

(2) n が奇数のとき, a_{n+1} を, a_n と a_{n-1} のうち必要なものを用いて表せ.

(3) a_n を求めよ.

（学コン 11/04）

85 xy 平面上に 2 曲線 $C: y = x^2$, $D: y = f(x)$ がある. $f(x)$ は x^3 の係数が 1 の 3 次関数があり, C と D は 3 点 (p, p^2), (q, q^2), (r, r^2) で交わっている. $f(x)$ が $x = p,\ q$ で極限を取り, かつ $p < q < r$ となるように p, q を動かすとき, r の取りうる値の範囲を求めよ.

（学コン 11/05）

86 $a_1 = 3$, $a_2 = 200$, $a_{n+2} = -|a_{n+1}| + |a_n|$ （$n = 1, 1, \ldots$） で定まる数列 $\{a_n\}$ がある.

(1) $a_n = 0$ となることはあるか. また, あるならば, そのうち最小の n を求めよ.

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく. S_n の最大値を求めよ.

（学コン 11/05）

87 O を原点とする座標平面に, 点 A$(1, 0, 0)$, B$(0, 1, 0)$, C$(0, 0, 1)$ があり, OA の中点を M, OB の中点を N とおく. 線分 OA 上に点 P$(p, 0, 0)$, 線分 OB 上に点 Q$(0, q, 0)$, 線分 OC 上に点 R$(0, 0, r)$ を, △PQR の重心 G が平面 CMN 上にあるようにとる.

(1) p, q, r の間に成り立つ関係式を求めよ.

(2) G の存在する範囲の面積を求めよ.

（学コン 11/05）

88 放物線 $y = x^2$ 上に 3 頂点 A(a, a^2), B(b, b^2), C(c, c^2) がある正方形 ABCD がある. ただし, $a > b > c$ とする. 直線 AB の傾きを m とするとき,

(1) a, b を m で表せ. また, $\displaystyle\lim_{m \to \infty} (a - b)$ を求めよ.

(2) D の x 座標を m で表せ.

（学コン 11/05）

89 p を素数とする. $p^2 ab = (a + b)^3 - (a + b)^2$ を満たす自然数の組 (a, b) をすべて求めよ.

（学コン 11/05）

90 1 組のトランプから, 2, 3 の数字が書かれたカード 8 枚を取り, 初めの手持ちのカードとする.

＜操作＞　手持ちのカードをすべて投げ, カードの表裏の状態により＜ルール＞に従ってカードを取り除き, 残ったカードをあらたな手持ちのカードとする.

(1) 「マークの色と数字の両方が一致するカード 2 枚（例えばクラブ 3 とスペード 3 ）が表であれば, その 2 枚を取り除く.」という＜ルール＞に従って n 回＜操作＞を行う. n 回後の手持ちのカードが 2 枚である確率を求めよ.

(2) 「同じ数字のカードがちょうど 2 枚表になっているとき, その 2 枚を取り除く. 同じ数字のカードがすべて表になっているとき, その 4 枚を取り除く.」という＜ルール＞に従って, n 回＜操作＞を行う. n 回後の手持ちのカードが 2 枚である確率を求めよ.

（学コン 11/05）

91 x の多項式 $(1+x+x^2+\cdots+x^{20})^4=\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{20}x^k\right)^4$ の x^n の係数を求めよ．ただし，$0\leqq n\leqq 40$ とする．

（学コン 11/07）

92 a を実数の定数とする．$\cos 3\theta+2\cos 2\theta-2a\cos\theta+a+2=0$, $0\leqq\theta<2\pi$ を満たす θ は何個あるか．

（学コン 11/07）

93 1 辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正三角形 ABC がある．いま，$\triangle$ABC の内部または辺上に点 P をとり，点 P を中心として $\triangle$ABC を 1 回転させたとき，$\triangle$ABC の辺が通過する部分の面積を $S(\mathrm{P})$ とする．このとき，$S(\mathrm{P})\leqq 10\pi$ を満たすような点 P の存在範囲の面積を求めよ．

（学コン 11/07）

94

(1) $t\geqq 0$ のとき，$t-\dfrac{1}{2}t^2\leqq\log(1+t)\leqq t-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3$ が成り立つことを示せ．

(2) 曲線 $C: y=\log(1+x)$ と曲線 $D: y=x^2+kx$ は，原点における接線が一致するものとする．k の値を求めよ．

(3) (2) の C, D の $x=t$ におけるそれぞれの接線の交点の x 座標を p とする．$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{p}{t}$ を求めよ．

（学コン 11/07）

95 p を素数とする．数列 $\{a_n\}$ は，a_1, a_2（$a_1\geqq a_2$）が自然数であって，$n\geqq 2$ に対し，$p(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a_1a_2\cdots a_n$ を満たしている．

(1) a_1 と a_2 の組を求めよ．

(2) $k\geqq 3$ とするとき，$1<a_k<2$ であることを示せ．

（学コン 11/07）

96 台形 ABCD で，AD//BC である．辺 AB 上に P をとり，AP : PB $=t:(1-t)$（$0<t<1$）となるようにする．また，辺 CD 上に Q をとり，PD//BQ となるようにする．

(1) AQ//PC であることを示せ．

(2) PC と BQ の交点を R，AQ と PD の交点を T とする．a, b, S を正の定数とし，AD $=a$, BC $=b$, 台形 ABCD の面積を S とする．四角形 PRQT の面積を $S(t)$ とするとき，$S(t)$ を a, b, S, t を用いて表せ．また，$S(t)$ の最大値を求めよ．

（学コン 11/07）

97 点 O を中心とする扇形 OAB があり，OA $=$ OB $=1$, $\angle$AOB $=\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ である．弧 AB 上に点 P をとり，P から OA に下ろした垂線の足を Q とし，Q から OB に下ろした垂線の足を R とする．四角形 PQOR の面積を S とする．

(1) P を弧 AB 上で動かすとき, S の最大値を α で表せ.

(2) (1) の最大値を M とする. α を動かすとき, M^2 の最大値を求めよ.

（学コン 11/09）

98 N, A, D, E, S, H, I, K, O, J, A, P, A, N と書かれた 14 枚のカードがある. 母音（A, E, I, O）から 3 枚, 子音（D, H, J, K, N, P, S）から 3 枚選んで, 円周上に並べてできる文字列を考える. ただし, 回転して同じ文字列になる並べ方は同じとみなす.

(1) 母音どうし, 子音どうしが隣り合わないような並べ方は何通りあるか.

(2) 並べ方は全部で何通りあるか.

（学コン 11/09）

99 数列 $\{a_n\}$ を, $1,\ -2,\ -2,\ 3,\ 3,\ 3,\ -4,\ -4,\ -4,\ -4,\ \ldots$ で定める. つまり, k を自然数として, $(-1)^{k-1}k$ が k 個, k が小さい順に並んでいる. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = b_n$ とおくとき, $ma_n = b_n$ を満たす整数 m, n の組は $1 \leqq n \leqq 2011$ の範囲に何個あるか.

（学コン 11/09）

100 $a,\ b,\ p,\ q$ を定数とする. xy 平面上に曲線 $C : y = x^4$, $D : y = ax^2 + b$, $E : y = px^2 + q$ がある. C と D がある 2 点 A, B で接し, かつ D と E がその 2 点 A, B で直交するように a, b, p, q を動かすとき, D と E で囲まれる部分の面積 S の最小値を求めよ. ただし, 2 曲線がある点で直交するとは, 2 曲線がその点で交わり, かつその点における各々の接線が直交することを言う.

（学コン 11/09）

101 p, q を負でない実数の定数として, ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が $|\vec{a}+\vec{b}| = p$ と $|\vec{a}-\vec{b}| = q$ を満たすとき, $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ の取り得る値の範囲を p, q で表せ.

（学コン 11/09）

102 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において $f''(x) \leqq 0$ である関数 $f(x)$ がある.

(1) $0 \leqq a < b \leqq 1$ である実数 a, b に対して,

$$\frac{(b-a)\{f(a)+f(b)\}}{2} \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$ が成り立つことを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$ を $f(0)$ と $f(1)$ で表せ.

（学コン 11/09）

103 あるアイドルグループは A, B, C, D の 4 つのチームからなる. 各チームの代表者 2 人ずつ計 8 人で, 図 1 のトーナメント表に従ってじゃんけんのトーナメント戦を実施することとなった.（図 1 : 普通の 8 人トーナメント. 左半分に ①, 右半分に ② と書いてある）

(1) まず, 図 1 で誰が 8 ヶ所のうちのどこに入るかを無作為に決める抽選会を行う.

「①, ②それぞれにちょうど 3 チームのメンバーが含まれる」

「1 回戦では同じチームのメンバーどうしの対戦はない」

をともに満たす確率を求めよ.

(2) 図 2 は　(1) の 2 条件をともに満たしている. （A_1, A_2 はチーム A の代表者を表し, 他も同様とする）. （図 2 ：左から順に A_1, B_1, A_2, C_1, B_2, D_1, C_2, D_2）

この表に従って対戦を行うとき, 同じチームに属する 2 人が直接対決することなく優勝者が決まる確率を求めよ. なお, じゃんけんではどちらが勝つ確率も 1/2 であり引き分けはないものとする.

（学コン 11/10）

104 　正三角形 ABC の辺 AB 上に点 P, 辺 CA 上に点 Q をとり, 線分 PQ を折り目として △APQ を折り返したところ, A は辺 BC 上の点 D に重なった. $\triangle\mathrm{PBD} : \triangle\mathrm{DCQ} = 16 : 25$ のとき, BD : DC を求めよ.

（学コン 11/10）

105 　$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + k$ とし, $-1 \leqq x \leqq 3$ における $f8x)$ の最大値を M, 最小値を m とする.

(1) $k = 0$ のとき, M と m を a で表せ.

(2) 実数 k を一つ与えたとき, $|M| = 2|m|$ となるような実数 a は何個あるか. k の値で分類して答えよ.

（学コン 11/10）

106 　A を中心とする半径 1 の四分円 APQ が, A(1,1), P(0,1), Q(1,0) となるように xy 平面上に置いてある. この状態から, 弧 PQ が y 軸の 0 以上の部分に接し, かつ Q が x 軸の 0 以上の部分にあるように, A(1,0), P(1,1), Q(0,0) となるまで四分円 APQ を動かす. このときの P の軌跡を C とする. また, A から y 軸に垂線 AH を下ろし, $\angle\mathrm{PAH} = \theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ であるときの四分円 APQ の弧 PQ を D_θ とする.

(1) 各 θ に対し, C と D_θ の共有点は P のみであることを示せ.

(2) D_θ の通過する領域の面積を求めよ.

（学コン 11/10）

107 　次のように数列 $\{a_n\}$ を定める. $a_1 = a$ （a は実数）, $a_{n+1} = {a_n}^2 - 2$ （$n = 1, 2, 3, \ldots$） 任意の自然数 n に対して $a_{n+p} = a_n$ を満たす, n によらない自然数 p が存在するとき, そのような p のうちの最小のものを $\{a_n\}$ の基本周期と呼ぶ.

(1) $\{a_n\}$ の基本周期が 1 のとき, a を求めよ.

(2) $\{a_n\}$ の基本周期が 2 のとき, a を求めよ.

(3) $\{a_n\}$ の基本周期が 2 以上のとき, a は無理数であることを示せ.

（学コン 11/10）

108 実数を成分とする 2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ があり, $aA^2+bA+cE$ は逆行列を持たないとする. ここで, a, b, c は実数の定数で, E は 2 次の単位行列を表す.

(1) $t=p+s$, $d=ps-qr$ とおくとき, a, b, c, t, d が満たす等式を求めよ.

(2) $b^2-4ac<0$ のとき, $aA^2+bA+cE=O$ を示せ. ここで, O は 2 次の零行列を表す.

(学コン 11/10)

109 半径 1 の円上に, $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ となる異なる 3 点 A, B, C と, B を含まない $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 上（ただし, 端点は除く）に点 P がある. ∠APB に二等分線と AB との交点を D, ∠BPC の二等分線と BC との交点を E とし, $\angle\mathrm{APB}=2\theta$ とする. $L=\dfrac{1}{\mathrm{DB}}+\dfrac{1}{\mathrm{BE}}$ とするとき, L を θ で表せ.

(学コン 11/11)

110 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が, $a_1=b_1$, $a_n=\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(b_k+k)$ $(n\geqq 2)$ を満たすとき, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項 a_n, b_n をそれぞれ求めよ.

(学コン 11/11)

111 実数 a に対し, a 以下の最大の整数を $[a]$ で表す.

(1) x を実数として $[x]=k$ とおくとき, $-[x]+[2x]-[3x]$ を k で表せ.

(2) $[x^2]=-[x]+[2x]-[3x]$ を満たす実数 x の範囲を求めよ.

(学コン 11/11)

112 O を原点とする xy 平面上に点 A $(1,1)$, B $(-1,1)$ がある. いま, 辺 AB 上（端点を含む）に点 C をとり, OC の中点を L とする. さらに, 直線 AL と直線 OB の交点を D, AD の中点を M, 直線 BL と直線 OA の交点を E, BE の中点を N とし, 直線 MN と直線 OC の交点を P とする. C を辺 AB 上で動かすときの点 P の軌跡を求め, 図示せよ.

(学コン 11/11)

113 空間内に四面体 OABC がある. $0\leqq p\leqq 1$, $0\leqq q\leqq 1$ として, 線分 OA を $p:(1-p)$ に内分する点を P, 線分 OB を $q:(1-q)$ に内分する点を Q とする. さらに, 三角形 PQC の重心を G, 直線 OG と面 ABC との交点を X とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を p, q, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

(2) p, q が $0\leqq p\leqq\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}\leqq q\leqq 1$ の範囲を動くとする. 点 X の動き得る領域の面積は, 三角形 ABC の面積の何倍か.

(学コン 11/11)

114 n を十分大きい整数として, 1 以上 n 以下の自然数の中から無作為に 1 個選ぶ, という操作を 3 回くり返す. 1 回目, 2 回目, 3 回目に選ばれた数をそれぞれ x, y, z とする.

(1) 整数 k $(1 \leqq k \leqq n)$ に対して, $\sin \frac{\pi x_k}{2n} = \frac{k}{n}$, $0 \leqq x_k \leqq n$ を満たす x_k をとる.
$y = k$ かつ $\sin \frac{\pi x}{2n} < \frac{y}{n} < \cos \frac{\pi z}{2n}$ となる確率を q_k とするとき,
$q_k \leqq \frac{1}{n} \cdot \frac{x_k}{n}\left(1 - \frac{x_k}{n}\right)$ を示せ.

(2) $\sin \frac{\pi x}{2n} < \frac{y}{n} < \cos \frac{\pi z}{2n}$ となる確率を p_n とするとき, $\lim_{n \to \infty} p_n$ を求めよ.

（学コン 11/11）

115 『赤玉, 白玉, 青玉, 黄玉を 1 個ずつ用意して, A_1, A_2, A_3, A_4 の 4 人に無作為に 1 個ずつ配る』という作業を 4 回くり返す.

(1) A_1 と A_2 が, それぞれ 4 色の玉を得る確率を求めよ.

(2) 4 人とも, それぞれ 4 色の玉を得る確率を求めよ.

(3) 4 人のうち 2 人だけが, それぞれ 4 色の玉を得る確率を求めよ.

（学コン 12/02）

116

(1) 等式 $x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3) + Ax(x-1)(x-2) + Bx(x-1) + Cx$ が x についての恒等式であるとき, 定数 A, B, C の値を求めよ.（答のみでよい）

(2) n を自然数とするとき, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n^2+2n} k[\sqrt{k}]$ を求めよ. ただし, 実数 x に対し, x を超えない最大の整数を $[x]$ で表すことにする.

（学コン 12/02）

117 O を原点とする座標平面上に平行四辺形 OABC と 4 点 P, Q, R, S があり, P は線分 OQ を, Q は線分 AR を, R は線分 BS を, S は線分 CP を, それぞれ $k : (1-k)$（$0 < k < 1$）に内分している.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$, k で表せ.

(2) A$(1, 0)$, C$(0, 1)$ とする.

(i) P, Q の軌跡を図示せよ.

(ii) k が $0 \leqq k \leqq \frac{1}{2}$ の範囲で動くときに線分 PQ が通過してできる領域の面積を求めよ. ただし, $k = 0$ のとき, 線分 PQ は線分 OA とする.

（学コン 12/02）

118 a を正の定数として, xy 平面上に曲線 $C : \frac{x^2}{a^3} + a^3 y^2 = 1$ がある. $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \cdots$① として, C, y 軸, 直線 $x = a^{-\frac{3}{2}} \cos\theta$ で囲まれる領域を x 軸周りに回転してできる立体の体積を V とし, C, x 軸, 直線 $y = a^{-\frac{3}{2}} \sin\theta$ で囲まれる領域を y 軸周りに回転してできる立体の体積を W とする.

(1) θ が①の範囲を動くとき, $V + W$ の最大値を a を用いて表せ.

(2) (1) の答を M とし, $t = a + \frac{1}{a}$ とおく. M を t を用いて表せ. また, a が正の実数全体を動くとき, M の最小値を求めよ.

（学コン 12/02）

119 円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と曲線 $D : y = ax^{2n} - 1$ が 3 点で接しているとき, C の $x \geqq 0$,

$y \leqq 0$ の部分と D で囲まれる領域の面積を S_n とする.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

(2) (1) の答えを α とする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\alpha - S_n)$ を求めよ.

（学コン 12/02）

120 最高次の係数が 1 で, 有理数係数の範囲では因数分解できない整数係数の 4 次式 $f(x) = x^4 + px^2 + q$ （p, q は整数）がある. $f(x) = 0$ の解が α, $-\alpha$, $\alpha^3 - 10\alpha$, $-\alpha^3 + 10\alpha$ であるとき, 次の問に答えよ.

(1) $s = \alpha \times (-\alpha)$, $t = (\alpha^3 - 10\alpha) \times (-\alpha^3 + 10\alpha)$ とおくとき, t を s で表せ.

(2) $p = k - 10$ とおくとき, k を求めよ. また, q を求めよ.

（学コン 12/02）