京大理科数学 1961

		計	思	総	
1	関数	B	B	B	20
2	図形	B	B	B	20
3	多変数	B	B	B	20
4	多変数	B	A	A	20
5	多変数	B	A	A	20
6	多変数	B	B	B	20

第 1 問

[解] (i) (イ) 全て (ロ) 少なくとも1つ (ハ) ない

(ii) まず A が A' に一致するよう平行移動する.
次に, A を中心に BC が B'C' と同一直線上にあるように回転移動する. これで △ABC と △AB'C' が一致しなければ, A を通り BC に垂直な直線を軸に線対称移動する □

(iii) 完全に一致するとすると任意の x に対し

$$f(x+h) = f(x)$$

が成立する

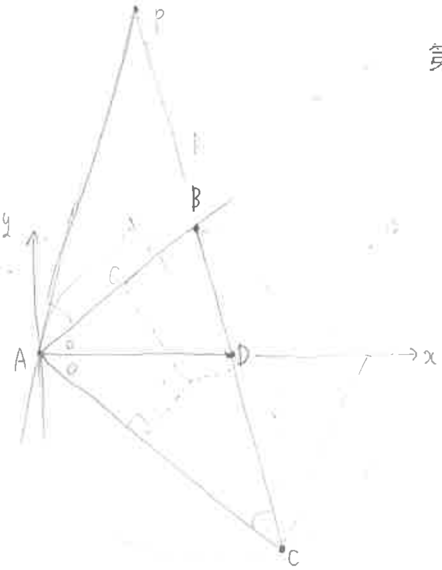
$$(x+h)^4+a(x+h)^3+b(x+h)^2+c(x+h)+d$$
$$= x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\Leftrightarrow (4hx^3+6h^2x^2+4h^3x+h^4)+a(3hx^2+3h^2x+h^3)$$
$$+b(2hx+h^2)+ch=0$$

3次の項を比較して $h=0$ だが $h\neq 0$ に反し矛盾,
よって示された □

第 2 問

[解]



AD=1として一般性を失わない。Aを原点とし、ADをx軸とする上図のような座標平面をとり

$B(\alpha, \alpha\tan\theta)$

$C(\beta, -\beta\tan\theta)$ $\quad (0<\theta<\pi/2)$

とおく $(\alpha \neq \beta)$ $\alpha, \beta>0$

$BC: (\beta+\alpha)\tan\theta(x-\alpha)+(\beta-\alpha)(y-\alpha\tan\theta)=0$

$(\beta+\alpha)\tan\theta\cdot x+(\beta-\alpha)y-2\alpha\beta\tan\theta=0$ …①

これがD(1,0)を通るので、

$(\beta+\alpha)\tan\theta = 2\alpha\beta\tan\theta$

$\tan\theta \neq 0$ より

$\alpha+\beta=2\alpha\beta$ … ②

△ABCの外心 $O'(X,Y)$ とすると $O'A=O'B=O'C$ から

$X=\frac{1}{4}(t^2+1)(\alpha+\beta)=$ …③

$Y=\frac{1}{4t}(t^2+1)(\alpha-\beta)=$ …④ $\quad (t=\tan\theta)$

となり、外接円は $C: (x-X)^2+(y-Y)^2=X^2+Y^2$ だから点Aでの接線は

$l: Xx+Yy=0$

$(\alpha+\beta)\cdot t x+(\alpha-\beta)y=0$ …⑤

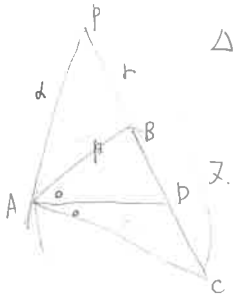
よって①⑤から BCとlの交点$P(p,q)$は

$p=\frac{1}{2},\ q=\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\cdot\frac{t}{2}$

よってPは定直線 $x=\frac{1}{2}$ 上にあるから示された□

[別解]

$AP=\alpha, AB=\beta, BP=\gamma$ とおく



△ABP∽△CAPより

$AC=\frac{\alpha}{\gamma}\beta$ …①

又, $\alpha^2=\gamma\cdot PC$ から

$PC=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ …②

従って $BD=BC\cdot\frac{AB}{AB+AC}=\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}-\gamma\right)\frac{\beta}{\beta+\frac{\alpha}{\gamma}\beta}$

$=\alpha-\gamma$

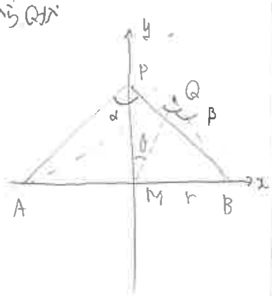
から $AP=PD=\alpha$ だから △APDは2等辺三角形。

よってPはADの垂直2等分線上にある □

/20

第 3 問

[解] Mを原点, ABをx軸, MPをy軸とする右のような座標をとる(∵対称性からQが1象現にあるとしてよい)



$Q\left(a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

$= Q\left(a\sin\theta, a\cos\theta\right)$

(1) $\tan\frac{\alpha}{2} = t$ とおくと $t = \frac{r}{a}$ だから

$$\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2(r/a)}{1-(r/a)^2} = \underline{\underline{\frac{2ra}{a^2-r^2}}}$$

(2) $\overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} -r-a\sin\theta \\ -a\cos\theta \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QB} = \begin{pmatrix} r-a\sin\theta \\ -a\cos\theta \end{pmatrix}$ から

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QB}|\sin\beta}{|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QB}|\cos\beta}$$

$$= \frac{|(-r-as)(-ac)-(r-as)(-ac)|}{(-r-as)(r-as)+a^2c^2} \quad (c=\cos\theta, s=\sin\theta)$$

$$= \frac{|2rac|}{a^2-r^2} = \frac{2rac}{a^2-r^2} \quad (\because 2rca>0)$$

だから

$$\tan\alpha\cdot\cos\theta = \frac{2rac}{a^2-r^2} = \tan\beta \quad ∎$$

である

/20

第 4 問

[解] 出発点の座標0とすると時刻tでのA,Bの座標は各々

$$A \cdots at$$
$$B \cdots v\left(t-\frac{l}{a}\right) \quad \left(t \geq \frac{l}{a},\ v > a\right)$$

とかける BがAにおいつく時刻t_0は

$$t_0 = \frac{l/a}{1-\frac{a}{v}} = \frac{lv}{a(v-a)}$$

である. したがって, Bのひろう$f(v)$は

$$f(v) = v^2\left(t_0 - \frac{l}{a}\right)$$
$$= \frac{v^2}{v-a}l = l\left(v+a+\frac{a^2}{v-a}\right)$$

$$\frac{f'(v)}{l} = 1 - \frac{a^2}{(v-a)^2} = \frac{v(v-2a)}{(v-a)^2}$$

より下表をえる

v	a		$2a$	
f'		$-$	0	$+$
f		↘		↗

よって $v=2a$ の時 疲労が最小.

/2

第 5 問

[解] ・$n \leqq 1$の時 $S = \sum_{k=1}^{100}(k-n) = \frac{1}{2}100 \cdot 101 - 100n$から

Sはnについて単調減少

・$n \geqq 100$の時 $S = \sum_{k=1}^{100}(n-k) = 100n - \frac{1}{2} 100 \cdot 101$から

Sはnについて単調増加

よって$1 \leqq n \leqq 99$で考える$\left(S|_{n=99} < S|_{n=100}\right)$

$$S = \sum_{k=1}^{n}(n-k) + \sum_{k=n+1}^{100}(k-n)$$

$$= n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(101-n)(100-n) \quad \cdots ★$$

$$= n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \cdot 201 \cdot n + 50 \cdot 101$$

$$= n^2 - 101n + 50 \cdot 101$$

$$= \left(n - \frac{101}{2}\right)^2 + 50 \cdot 101 - \frac{(101)^2}{4}$$

よって $\underline{n = 50, 51}$ の時 $\min S = \underline{2500}$ となる

/20

第 6 問

[解] Aの出発点Oとする。時刻tでのA, Bのイチ $f(t)$, $g(t)$ とすると

$$f(t)=\int_0^t (p^2+5)\,dp = \frac{1}{3}t^3+5t$$

$$g(t)= 2+\int_0^t 5p\,dp = \frac{5}{2}t^2+2$$

だから $0\leq t\leq 4$ で $f(t)=g(t)$ となるtの数をもとめればよい

$h(t)=f(t)-g(t)$ とおくと、これは $h(t)=0$ となるtの数にひとしい

$$h'(t)= t^2+5-5t$$

$$=\left(t-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

から下表をえる

t	0		$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$		4
h'		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	-2	↗		↘		↗	$-\frac{2}{3}$

ここで. $h(t)=\left(\frac{1}{3}t-\frac{5}{6}\right)h'(t)-\frac{5}{6}t+\frac{13}{6}$ から

$$h\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{12}\left(1+5\sqrt{5}\right)>0$$

$$h\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{1}{12}\left(1-5\sqrt{5}\right)<0$$

だから もとめるtは 2コ である.

/20