n を 2 より大きい正の整数とする．曲線

$$y = x^n \tag{i}$$

上で，x 座標が 0，1，2 である点をそれぞれ O，A，B とし，O，A，B を通り y 軸に平行な軸を持つ放物線

$$y = f(x) \tag{ii}$$

をえがく．曲線 (i) および曲線 (ii) の，O，A の間にある部分の囲む面積を S_1，A，B の間にある部分の囲む面積を S_2 とするとき，$S_1 = S_2$ となるためには，n はどのような数でなければならないか.

[解] $O(0,0)A(1,1)B(2,2^n)$ である．まず $f(x)$ を求める．O，A を通るから $a_{\neq 0}$ を用いて，

$$f(x) - x = ax(x-1)$$

と書ける．B を通る条件から

$$2^n - 2 = 2aa = 2^{n-1} - 1$$

であるから，結局

$$f(x) = (2^{n-1}-1)x^2 + (2-2^{n-1})x$$

である．$g_n(x) = x^n - f(x)$ とおく．

$$\begin{aligned} g_n(x) &= x\left[x^{n-1} - (2^{n-1}-1)x - 2 + 2^{n-1}\right] \\ &= x\left[x^{n-1} + x + 2^{n-1}(1-x) - 2\right] \\ &= x(x-1)h(x) \end{aligned} \tag{1}$$

である．ただし

$$h(x) = (x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 2) - 2^{n-1}$$

とおいた．$0 \leq x \leq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} h(x) &\leq (2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 2) - 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1} - 1 + (1 - 2^{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

であるから，(1) より，

$$\begin{cases} g_n(x) \geq 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ g_n(x) \leq 0 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

従って，

$$S_1 = \int_0^1 g_n(x)dx S_2 = -\int_1^2 g_n(x)dx$$

であり，

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 &\iff \int_0^2 g_n(x)dx = 0 \\ &\iff \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{6}\right)2^{n+1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

をみたす n を求めればよい．$n \geq 5$ のとき，この左辺は 0 以下になり不適だから，$n = 3, 4$ が必要．実際に代入すると，適するのは $n = 3$ のときである．$\cdots$(答)