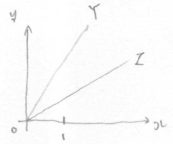
東大理科数学 1961

第 1 問

[解] xy平面で: $O(0.0)$ $A(1.0)$ $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$とする.



時刻tでのP, Q, Rの座標は、

$P(t+1, 0)$

$Q\left(\frac{3}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$R\left(t+\frac{1}{2}, \sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

で与えられる。

(1) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t-1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ だから. P, Q, Rが一直線上の時

$k \in \mathbb{R}$があって

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t-1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

とかける。

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t-1 = -\frac{1}{2}k \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t = k\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} k = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

だから. もとめるのは $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ //

(2) $\triangle PQR$の面積は (1)から

$$\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2}t-1\right)\sqrt{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}t\right|$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left|t^2-t-1\right|$$

一方, $\triangle OAB$の面積は $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ だから. これらが等しいとき

$$|t^2-t-1| = 1 \quad \therefore \ t = 1, 2$$ //

第 2 問

[解] $f(-\frac{1}{5})=A,\ f(-\frac{1}{10})=B,\ f(0)=C,\ f(\frac{1}{10})=D,\ f(\frac{1}{5})=E$ とおく。

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

とする。

○ $f(0)=C=e$

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{5})=A=\dfrac{a}{625}-\dfrac{b}{125}+\dfrac{c}{25}-\dfrac{d}{5}+e \\ f(\frac{1}{5})=E=\dfrac{a}{625}+\dfrac{b}{125}+\dfrac{c}{25}+\dfrac{d}{5}+e \end{cases} \quad \cdots ①$$

$$\begin{cases} f(\frac{1}{10})=D=\dfrac{a}{10^4}+\dfrac{b}{10^3}+\dfrac{c}{10^2}+\dfrac{d}{10}+e \\ f(-\frac{1}{10})=B=\dfrac{a}{10^4}-\dfrac{b}{10^3}+\dfrac{c}{10^2}-\dfrac{d}{10}+e \end{cases} \quad \cdots ②$$

①, ②の辺々引いて

$$\begin{cases} E-A=\dfrac{2b}{125}+\dfrac{2}{5}d \\ D-B=\dfrac{2b}{1000}+\dfrac{2}{10}d \end{cases}$$

bを消して.

$$\frac{6}{5}d=A-8B+8D-E$$

$$=3.258$$

$$\therefore\ d=2.715$$

より.

$$f'(0)=2.715$$

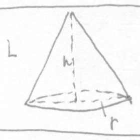
//

$\overline{AH}$

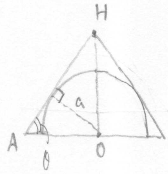
第 3 問

▷ 直円錐の側面積

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ S = \pi r\sqrt{r^2+h^2} = \pi r L \end{cases}$$



[解] 直円錐の軸を含む平面で切る。右図のように点, 図形量をおく。$(0 < \theta < \pi/2)$ 以下 $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$ と書く。



$$\overline{AO} = \frac{a}{s},\ \overline{AH} = \frac{a}{cs},\ \overline{OH} = \frac{a}{c}$$

だから, 直円錐の表面積 T は

$$T = \pi\overline{AO}^2 + \pi\,\overline{AO}\cdot\overline{AH}$$

$$= \pi\left(\frac{a^2}{s^2} + \frac{a^2}{cs^2}\right)$$

$$= \pi a^2\frac{1}{c(1-c)} \geq \pi a^2\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$ (等号成立は $c = \frac{1}{2}$ の時)

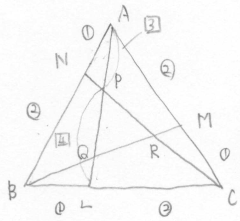
だから, この時

$$\overline{OH} = 2a$$

である。

第 4 問

[解] $\triangle ABL$ と CN にメネラウスを用いて.



$$\frac{NB}{AN}\cdot\frac{CL}{BC}\cdot\frac{PA}{LP}=1$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{PA}{LP}=1 \quad \cdots ①$$

対称性から

$$LQ:QP:PA=NP:PR:RC$$

$$=MR:RQ:QB=a:b:c \quad \cdots ②$$

とおけることに注意して $\triangle CPL$ と BR にメネラウスを用いて.

$$\frac{RP}{CR}\cdot\frac{QL}{PQ}\cdot\frac{BC}{LB}=1$$

$$\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{3}{1}=1 \qquad \therefore \frac{a}{c}=\frac{1}{3} \quad \cdots ③$$

一方. ①.②から.

$$a+b:c=4:3 \quad \cdots ④$$

③.④から,

$$a:b:c=1:3:3$$

だから.

$$\triangle PQR=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{7}\triangle ABC$$

となる。

第 5 問

[解] $x(t)=t^2+1$, $y(t)=t^2+t-2$ とおく。

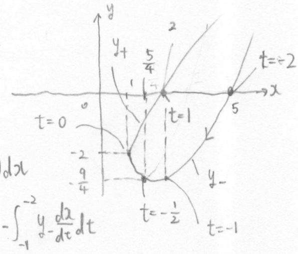
$$x'(t)=2t,\ y'(t)=2t+1$$

から．下表をうる。

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
(x,y)	$(+\infty,+\infty)$	$\swarrow$	$\left(\frac{5}{4},-\frac{9}{4}\right)$	$\nwarrow$	$(1,-2)$	$\nearrow$	$+\infty+\infty$

よって．グラフの概形は右図

$(y(t)=0 \Leftrightarrow t=-2,1)$



したがってもとめる面積Tとして

$$T=\int_1^{2}(y_+-y_-)\,dx+\int_{2}^{5}(-y_-)\,dx$$

$$=\int_0^1 y_+\frac{dx}{dt}dt-\int_0^{-1}y_-\frac{dx}{dt}dt-\int_{-1}^{-2}y_-\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_{-2}^{1} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_{-2}^{1}(t^2+t-2)\cdot 2t\,dt=2\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$ //

[解注]

$$xy'-yx'=(t^2+1)(2t+1)-(t^2+t-2)\cdot 2t$$

$$=-t^2+6t+1$$

だから．ガウスグリーンより

$$T=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}-(-t^2+6t+1)\,dt=\frac{9}{2}$$ //

としても良い。

第 6 問

$-\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)-c$　　$-5\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$+\sin\frac{3}{2}c$

[解] $f(x)=a\sin x+b\cos x+c\sin 2x$ より、

$$f'(x)=a\cos x-b\sin x+2c\cos 2x$$

となる。$x=\pi/4$ で極大ゆえ、

$$f'(\pi/4)=0 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)=0 \iff a=b \quad \cdots ①$$

が必要。さらに $f(\pi/4)=6\sqrt{2}$ より

$$f(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)+c=6\sqrt{2} \quad \cdots ②$$

又、積分の条件から、

$$\int_0^{2\pi}(a\sin x\cos x+b\cos^2 x+c\cos x\cdot\sin 2x)\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}b\cos^2 x\,dx=\frac{b}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}=\pi b=5\pi$$

$$\therefore b=5 \quad \cdots ③$$

①〜③より、$(a,b,c)=(5,5,\sqrt{2})$ となる。この時

$$f'(x)=5\cos x-5\sin x+2\sqrt{2}\cos 2x$$

$$=(\cos x-\sin x)(5+2\sqrt{2}\sin x+2\sqrt{2}\cos x)$$

$$=(\cos x-\sin x)(5+4\sin(x+\pi/4))$$

から下表をうる。$(0\leq x\leq 2\pi)$

x	0		$\pi/4$		$\frac{5}{4}\pi$		2π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘	$-4\sqrt{2}$	↗	

したがって、たしかに $x=\pi/4$ で極大となり、十分。以上から $(a,b,c)=(5,5,\sqrt{2})$ //

(2) 表から、$x=\frac{5}{4}\pi$ // で $\min f(x)=-4\sqrt{2}$ // をとる。