[解] (i) (イ) 全て (ロ) 少なくとも1つ (ハ) ない

(ii) まず A が A′ に一致するよう平行移動する。
次に、A を中心に BC が B′C′ と同一直線上にあるように
回転移動する。これで △ABC と △AB′C′ が一致しなければ、
A を通り BC に垂直な直線を軸に線対称移動する □

(iii) 完全に一致するとすると 任意の $x$ に対し

$$f(x+h) = f(x)$$

が成立する。展

$$(x+h)^4 + a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d$$
$$= x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

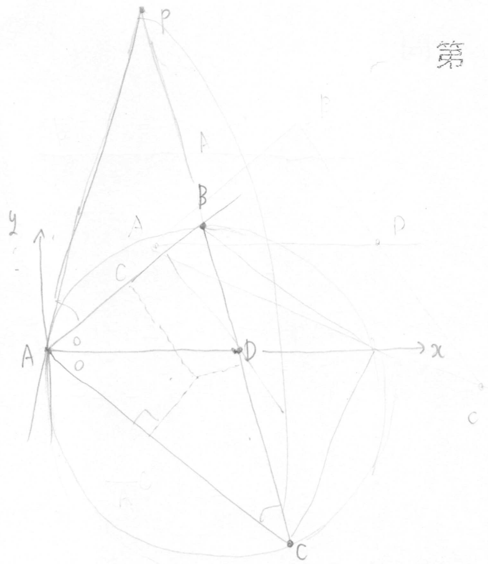
$$\Leftrightarrow (4hx^3 + 6h^2x^2 + 4h^3x + h^4) + a(3hx^2 + 3h^2x + h^3)$$
$$+ b(2hx + h^2) + ch = 0$$

3次の項を比較して $h = 0$ だが $h \neq 0$ に反し矛盾,
よって示された □

/20

第 2 問

[解]




AD=1として一般性を失わない。Aを原点とし、ADをx軸とする上図のような座標平面をとり、

$B(\alpha,\ \alpha\tan\theta)$

$C(\beta,\ -\beta\tan\theta)$ $\quad(0<\theta<\pi/2)$

とおく。$(\alpha\neq\beta)$ $\alpha,\beta>0)$

$BC: (\beta+\alpha)\tan\theta(x-\alpha)+(\beta-\alpha)(y-\alpha\tan\theta)=0$

$(\beta+\alpha)\tan\theta\cdot x+(\beta-\alpha)y-2\alpha\beta\tan\theta=0$ …①

これがD(1,0)を通るので、

$(\beta+\alpha)\tan\theta=2\alpha\beta\tan\theta$

$\tan\theta\neq0$ より

$\alpha+\beta=2\alpha\beta$ … ②

△ABCの外心$O'(X,Y)$とすると、$O'A=O'B=O'C$から

$X=\frac{1}{4}(t^2+1)(\alpha+\beta)$ …③ $(t=\tan\theta)$

$Y=\frac{1}{4t}(t^2+1)(\alpha-\beta)$ …④

となり、外接円は $C: (x-X)^2+(y-Y)^2=X^2+Y^2$ だから点Aでの接線は

$l: Xx+Yy=0$

$(\alpha+\beta)\cdot t\,x+(\alpha-\beta)y=0$ …⑤

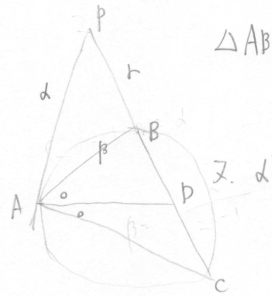
よって①⑤から BCとlの交点$P(p,q)$は

$p=\frac{1}{2},\ q=\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\cdot\frac{t}{2}$

よってPは定直線 $x=\frac{1}{2}$ 上にあるから示された 

[別解 …実験で[illegible]]

$AP=\alpha,\ AB=\beta,\ BP=\gamma$ とおく




△ABP∽△CAP より

$AC=\frac{\alpha}{\gamma}\beta$ …①

又 $\alpha^2=\gamma\cdot PC$ から

$PC=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ …②

従って $BD=BC\cdot\frac{AB}{AB+AC}=\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}-\gamma\right)\frac{\beta}{\beta+\frac{\alpha}{\gamma}\beta}$

$=\alpha-\gamma$

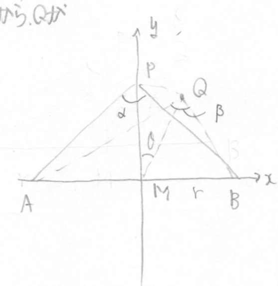
から $AP=PD=\alpha$ だから △APDは2等辺三角形。

よって PはADの垂直2等分線上にある 

/20

第 3 問

[別解] Mを原点, ABをx軸, MPをy軸とする.右のような座標をとる(対称性からQが1象限にあるとしてよい)




$$Q\left(a\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right), a\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$
$$=Q(a\sin\theta, a\cos\theta)$$

(1) $\tan\frac{\alpha}{2}=t$ とおくと $t=\frac{r}{a}$ だから

$$\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2(r/a)}{1-(r/a)^2}=\frac{2ra}{a^2-r^2}$$

(2) $\overrightarrow{QA}=\begin{pmatrix}-r-a\sin\theta\\ -a\cos\theta\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QB}=\begin{pmatrix}r-a\sin\theta\\ -a\cos\theta\end{pmatrix}$ から

$$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\overline{QA}\cdot\overline{QB}\cdot\sin\beta}{\overline{QA}\cdot\overline{QB}\cos\beta}$$

$$=\frac{|(-r-as)(-ac)-(r-as)(-ac)|}{(-r-as)(r-as)+a^2c^2}\quad(c=\cos\theta, s=\sin\theta)$$

$$=\frac{|2rac|}{a^2-r^2}=\frac{2rac}{a^2-r^2}\quad(\because 2rca>0)$$

だから

$$\tan\alpha\cdot\cos\theta=\frac{2rac}{a^2-r^2}=\tan\beta \quad \text{図}$$

である.

/20

# 第 4 問

[解] 出発点の座標0とすると時刻tでのA,Bの座標は各々

$$A \cdots at$$
$$B \cdots v\left(t-\frac{l}{a}\right) \qquad \left(t \geq \frac{l}{a},\ v > a\right)$$

とおける BがAにおいつく時刻$t_0$は

$$t_0 = \frac{l/a}{1-\frac{a}{v}} = \frac{lv}{a(v-a)}$$

である. したがって. Bのひろう$f(v)$は

$$f(v) = v^2\left(t_0-\frac{l}{a}\right)$$
$$= \frac{v^2}{v-a}l = l\left(v+a+\frac{a^2}{v-a}\right)$$
$$\frac{f'(v)}{l} = 1-\frac{a^2}{(v-a)^2} = \frac{v(v-2a)}{(v-a)^2}$$

より下表をえる

| $v$ | $a$ | | $2a$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | | ↘ | | ↗ |

よって $v=2a$ の時 疲労が最小.

/20

# 第 5 問

[解] ∘ $n \leqq 1$ の時 $S = \sum_{k=1}^{100}(k-n) = \frac{1}{2}100\cdot101 - 100n$ から

$S$ は $n$ について単調減少.

∘ $n \geqq 100$ の時 $S = \sum_{k=1}^{100}(n-k) = 100n - \frac{1}{2}100\cdot101$ から

$S$ は $n$ について単調増加

よって $1 \leqq n \leqq 99$ で考える $\left(S|_{n=99} < S|_{n=100}\right)$

$$S = \sum_{k=1}^{n}(n-k) + \sum_{k=n+1}^{100}(k-n)$$

$$= n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(101-n)(100-n) \cdots ☆$$

$$= n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\cdot201\cdot n + 50\cdot101$$

$$= n^2 - 101n + 50\cdot101$$

$$= \left(n - \frac{101}{2}\right)^2 + 50\cdot101 - \frac{(101)^2}{4}$$

よって $n = 50, 51$ の時 $\min S = 2500$ となる

/20

# 第 6 問

[解] Aの出発点Oとする. 時刻 $t$ でのA, Bのイチ $f(t)$, $g(t)$ とすると

$$f(t) = \int_0^t (p^2+5)\,dp = \frac{1}{3}t^3 + 5t$$

$$g(t) = 2 + \int_0^t 5p\,dp = \frac{5}{2}t^2 + 2$$

だから $0 \leq t \leq 4$ で $f(t) = g(t)$ となる $t$ の数をもとめればよい.

$h(t) = f(t) - g(t)$ とおくと. これは $h(t) = 0$ となる $t$ の数にひとしい

$$h'(t) = t^2 + 5 - 5t$$

$$= \left(t - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(t - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

から下表をえる

| $t$ | $0$ | | $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ | | $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h$ | $-2$ | ↗ | | ↘ | | ↗ | $-\frac{2}{3}$ |

ここで. $h(t) = \left(\frac{1}{3}t - \frac{5}{6}\right)h'(t) - \frac{5}{6}t + \frac{13}{6}$ から

$$h\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{12}\left(1 + 5\sqrt{5}\right) > 0$$

$$h\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{1}{12}\left(1 - 5\sqrt{5}\right) < 0$$

だから. もとめる $t$ は $\underline{2コ}$ // である.

/20