C を放物線 $y = 3x^2/2 - 1/3$ とする．C 上の点 $\mathrm{Q}(t, 3t^2/2 - 1/3)$ を通り，Q における C の接線と垂直な直線を，Q における C の法線とする．

(1) xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ で P を通る C の法線が一本だけ引けるようなものの存在範囲を求め，図示せよ．

(2) (1) で求めた範囲と放物線の内部 (不等式 $y > 3x^2/2 - 1/3$ の定める範囲) の共通部分の面積を求めよ．

[解] $y' = 3x$ だから，C における法線は

$$(x-t) + 3t\left(y - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}\right) = 0$$
$$9t^3 - 6yt - 2x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．放物線では接点が異なれば法線が異なるから，点 P にたいし①を満たす t がただ一つ存在すればよい．すなわち，求める領域を D とすると，

$D = \{(x, y) \mid$ ①を満たす t が唯一つ存在する.$\}$

①の左辺 $g(t)$ とおく．$g'(t) = 27t^2 - 6y$ より，y の値によって以下のようになる．

(i)$y \leqq 0$ の時

$g'(t) \geqq 0$ だから，$g(t)$ は単調増加．これと $g(t)$ は 3 次関数だから，$g(t) = 0$ は唯一つ解を持つ．故に D に含まれる．

(ii)$y > 0$ の時

下表を得る．ただし $\alpha = \sqrt{2y}/3$ である．

t		$-\alpha$		α	
g'	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

従って，グラフの概形は下図のようになる．

D のようになる条件は，

$$g(-\alpha)g(\alpha) > 0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である．ここで①から

$$g(\pm\alpha) = \pm 9\alpha^3 \mp 6y\alpha - 2x$$
$$= \mp\frac{4\sqrt{2}}{3}y^{3/2} - 2x$$

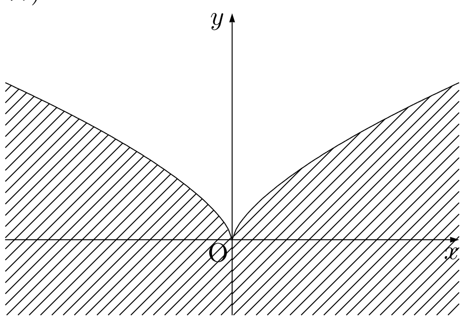
であるから，②に代入して

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2} - x\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2} - x\right) > 0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

以上から，求める領域 D は，

$$y \leqq 0 \vee (y > 0 \wedge ③) \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

で，図示して下図斜線部 (境界含む)．$\cdots$((1) の答)



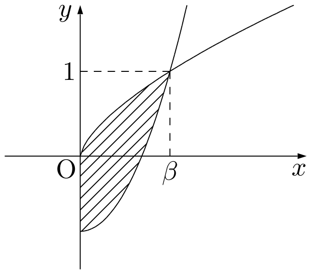
この領域の対称性から D のうち $x \geqq 0$ の部分の面積 S_1 とすると，求める面積 S との関係は

$$S = 2S_1 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

である．$y = f(x)$ と $x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2}$ の $y > 0$ での交点は，

$$y = \frac{3}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2}\right)^2 - \frac{1}{3}$$
$$4y^3 - 3y - 1 = 0$$
$$(y-1)(4y^2 + 4y + 1) = 0$$
$$y = 1 \qquad (\because y > 0)$$

である．このとき $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(\equiv\beta)$ である．グラフの概形は下図.



さて，$x>0$ のとき

$$x=\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2}$$
$$\therefore y=\frac{\sqrt[3]{9}}{2}x^{2/3}$$

に注意して

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^{\beta}\left(f(x)-\frac{\sqrt[3]{9}}{2}x^{2/3}\right)dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x\right]_0^{\beta}-\frac{\sqrt[3]{9}}{2}\left[\frac{3}{5}x^{5/3}\right]_0^{\beta}\\&=\frac{44\sqrt{2}}{135}\end{aligned}$$

であるから，⑤に代入して

$$S=\frac{88\sqrt{2}}{135}$$

である．$\cdots$((2) の答)