xy 平面において，曲線 $= x^3/6 + 1/(2x)$ 上の点，$(1, 2/3)$ を出発し，この曲線上を進む点 P がある．出発してから t 秒後の P の速度 $\vec{v}$ の大きさは $t/2$ に等しく，$\vec{v}$ の x 成分は正または 0 であるとする．

(1) 出発してから t 秒後の P の位置を (x, y) として，x と t の関係式を求めよ．

(2) $\vec{v}$ がベクトル $(8, 15)$ と平行になるのは出発してから何秒後か．

[解]

(1) 題意から，時刻 t までに P は，

$$\int_0^t \frac{s}{2} ds = \frac{t^2}{4} \tag{1}$$

だけ進む．これが，曲線上で $(1, 2/3)$ から (x, y) までの長さ L に等しい．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 + \frac{dy}{dx} &= 1 + \frac{1}{4}\left(x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \qquad (3) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} L &= \int_1^x \sqrt{1 + (dy/ds)^2} ds \\ &= \frac{1}{2}\int_1^s \left(s^2 + \frac{1}{s^2}\right) ds \qquad (\because (3)) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{s^3}{3} - \frac{1}{s}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\right) \qquad (4) \end{aligned}$$

となる．　(2) と (4) が等しいので，

$$t^2 = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\right)$$

である．$\cdots$(答)

(2) $\vec{v}$ は P での曲線の接線方向のベクトルと平行である．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \tag{5}$$

故，$(1, dy/dx) \parallel (8, 15)$ の時，

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \frac{15}{8} \\ &\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{15}{4} \qquad (\because (5)) \\ &p^2 - \frac{15}{4}p - 1 = 0 \qquad (\because p = x^2) \\ &(4p+1)(p-4) = 0 \\ &p = 4, \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

である．題意から $x < 1$ ゆえ $p = x^2 \geq 0$ であるから，$p = 4$ つまり $x = 2$ が従う．この時，前問の結果より，

$$t^2 = 2\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{17}{3}$$

$t > 0$ より，求める　t は $t = \sqrt{17/3}$ である．$\cdots$(答)