東大理科数学　1966

第 1 問

[解] $a=0.1\alpha$, $b=0.1\beta$ とおく。($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$) キョリ x の時の運賃を $f(x)$ とする。

$$\begin{cases} f(319)=970 \\ f(349)=1010 \end{cases} \quad \cdots ☆$$

であり、後半の文章から、

- $f(319)$ は $300a+19b=30\alpha+1.9\beta$ の10円未満を切り上げたもの
- $f(349)$ は $300a+49b=30\alpha+4.9\beta$ の 〃

でもある。したがって

$$\begin{cases} 960 < 30\alpha+1.9\beta \leq 970 \\ 1000 < 30\alpha+4.9\beta \leq 1010 \end{cases} \quad \cdots ①$$

辺々引いて

$$30 < 3\beta < 50 \qquad \therefore 10 < \beta < 16.6\cdots$$

だから $\beta \in \mathbb{N}$ とあわせて $\beta=11, 12, 13, 14, 15, 16$ である。以下 $A=f(349)-f(319)$ とする。

$A=40$ となることが必要である。又、30α は10の倍数である。

1° $\beta=11$

$1.9\beta=20.9$, $4.9\beta=53.9$ より、$A=60-30=30$ で不適。

2° $\beta=12$

$1.9\beta=22.8$, $4.9\beta=58.8$ より $A=60-30=30$ 〃

3° $\beta=13$

$1.9\beta=24.7$, $4.9\beta=63.7$ より $A=70-30=40$ だが、☆に代入して

$$970=30\alpha+30 \quad \therefore \alpha=\frac{94}{3} \notin \mathbb{N}$$

で不適。

4° $\beta=14$

$1.9\beta=26.6$, $4.9\beta=68.6$ より、3° と同じく不適。

5° $\beta=15$

$1.9\beta=28.5$ より、3° と同じく不適。

6° $\beta=16$

$1.9\beta=30.4$, $4.9\beta=78.4$ より、☆に代入して $\alpha=31$ を得て、適。

以上から、$(\alpha, \beta)=(31, 16)$、つまり $(a, b)=(3.1, 1.6)$ // である。

第 2 問

[解] まず l が y 軸平行の時、$x=k$ $(k\in\mathbb{R})$ とかける。この時 $(X, Y)=(4x+2y, x+3y)$ とおくと、

$$X=4k+2y$$

となり、題意をみたさず不適。そこで $l: y=mx+n$ とおける。$(m, n\in\mathbb{R})$ この時

$$\begin{cases} X=4x+2(mx+n)=(4+2m)x+2n \\ Y=x+3(mx+n)=(1+3m)x+3n \end{cases}$$

で表される点 (X, Y) が再び l 上にあるので、

$$(1+3m)x+3n=m\{(4+2m)x+2n\}+n \quad \cdots ①$$

が x についての恒等式で

$$\begin{cases} 1+3m=m(4+2m) \\ 3n=2mn+n \end{cases} \qquad \therefore (m, n)=\left(\tfrac{1}{2}, 0\right)\ (-1, 0)$$

だから、$l: y=\frac{1}{2}x,\ y=-x$ である。

[解2-略] $l: y=f(x)$ とおく。$x=0$ での成立が必要で、$(2f(0), 3f(0))$ も l 上にある。そこで $f(0)=0$ か否かで場合分けして答えが求まる。

第 3 問

[解] x軸を実軸, y軸を虚軸とするガウス平面を考える。

また. $e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく。$\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$の表す複素数$a_n$とする$(n\in\mathbb{N})$と、

$$\begin{cases} a_{n+1}=2e\left(\frac{2}{3}\pi\right)a_n \\ a_1=1 \end{cases}$$

だから. くり返し用いて.

$$a_n=2^{n-1}\cdot e^{n-1}\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

であるから. $\overrightarrow{OP_{3n}}$の表す複素数Pとして

$$\begin{aligned} P&=\sum_{k=1}^{3n}a_k \\ &=\frac{1-2^{3n}e^{3n}\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{1-2e\left(\frac{2}{3}\pi\right)} \\ &=\frac{1-2^{3n}e(2n\pi)}{1-2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \\ &=\frac{2+\sqrt{3}i}{7}\left(1-2^{3n}\right) \end{aligned}$$

だから.

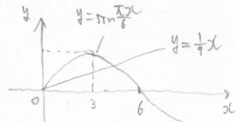
$$P_{3n}\left(\frac{2}{7}\left(1-2^{3n}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{7}\left(1-2^{3n}\right)\right)$$

//

である。

第 4 問

[解] 与方程式の解は、xy平面での $y=\frac{1}{9}x$, $y=\sin\frac{\pi x}{6}$ の交点のx座標に他ならない。これらのグラフの概形は右図。



まず、$6 \leq x$の時 与方程式が解を持たないことを示す。

$6 \leq x \leq 12$の時 $\sin\frac{\pi x}{6} \leq 0 < \frac{1}{9}x$から明らか。

$12 \leq x$の時 $\frac{1}{9}x \geq \frac{12}{9} > 1 \geq \sin\frac{\pi x}{6}$から明らか

($f(x)=\sin\frac{\pi}{6}x-\frac{1}{9}x$とすると $f(3)=\frac{2}{3}>0$, $f(6)=-\frac{2}{3}<0$から $3<x<6$に解を持つ)

以上から、与式の最大の解は $3<x<6$にある。$f(x)$は同区間で単調減少で、

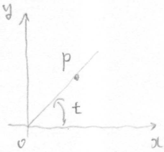
$$f(3)=\frac{2}{3},\quad f(4)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{9}\ (>0)$$

$$f(4.5)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\ (>0),\quad f(5)=-\frac{1}{18}\ (<0)$$

だから、$4.5<x<5$に もとめる解があるので、最も近いセイスウ解は 5 である。

第 5 問

[解] 時刻0でのOXをx軸正方向とし、OXがx軸からy軸正方向へと動くよう座標をおく。この時、時刻tでのPの座標



(X、Y)として

$$X=e^{2t}\cos t\ ,\ Y=e^{2t}\sin t$$

だから

$$X'=e^{2t}(-\sin t+2\cos t)$$

$$Y'=e^{2t}(\cos t+2\sin t)$$

となり、もとめる長さLとして、(Pは$0\leq t\leq 2\pi$では重ならないので)

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(X')^2+(Y')^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{5}\,e^{2t}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left[e^{2t}\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(e^{4\pi}-1\right)\ \#$$

第 6 問

[解] 4ケタの数のつくり方は $_9P_4$ 通りで同様にたしからしい。このうち、1966より小さいのは、以下の2つである。

1° 1900未満

2° 1900以上1965以下

1°となるのは

$$\underset{\substack{\uparrow\\4位}}{1} \times \underset{\substack{\uparrow\\3位}}{7} \times 7 \times 6 = 6 \times 7^2 \text{通り} \quad \cdots ①$$

である。一方、2°となるのは、

$$\underbrace{4 \times 6}_{1960未満} + \underbrace{4}_{1960以上} = 28\text{通り} \quad \cdots ②$$

①、②から、もとめる確率 p は

$$p = \frac{6 \times 7^2 + 28}{_9P_4} = \frac{322}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{161}{1512} = \frac{23}{216}$$ //