東大理科数学 1964

第 1 問

[解] a, b, c は t の3次方程式

$$t^3 - zt^2 - yt - x = 0 \quad \cdots ①$$

の相異なる3解である。したがって、

$$a^3 + b^3 + c^3 = z(a^2 + b^2 + c^2) + y(a + b + c) + 3x \quad \cdots ②$$

ここで

$$\begin{cases} bc + ca + ab = -y \\ a + b + c = z \end{cases}$$

だから、②に代入して

$$a^3 + b^3 + c^3 = z(z^2 + 2y) + yz + 3x = z^3 + 3yz + 3x \;/\!/$$

第 2 問

[解] $A(t, t^2)$とする。APの$m:n$内分点は

$$B\left(\frac{nt+m\alpha}{m+n}, \frac{nt^2+m\beta}{m+n}\right)$$

でこれが(2)上にある時、

$$\frac{nt^2+m\beta}{m+n} = 3\left(\frac{nt+m\alpha}{m+n}\right)^2 + 24\left(\frac{nt+m\alpha}{m+n}\right) + 50 \quad \cdots ①$$

これが任意の$t \in \mathbb{R}$で成立するので①がtについての恒等式である。係数比較して

$$\begin{cases} \dfrac{n}{m+n} = 3\left(\dfrac{n}{m+n}\right)^2 \\ 0 = 6\dfrac{nm\alpha}{(m+n)^2} + 24\dfrac{n}{m+n} \\ \dfrac{m\beta}{m+n} = 3\left(\dfrac{m\alpha}{m+n}\right)^2 + 24\dfrac{m\alpha}{m+n} + 50 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m+n = 3n & \cdots ② \\ 0 = \dfrac{m\alpha}{m+n} + 4 \quad (\because n, m > 0) & \cdots ③ \\ m\beta = 3\dfrac{(m\alpha)^2}{m+n} + 24m\alpha + 50(m+n) & \cdots ④ \end{cases}$$

②から、$m = 2n \cdots ⑤$だから、③④に代入して、

$\alpha = -6, \quad \beta = 3$ //

又、⑤から $m:n = 2:1$ //

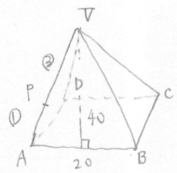
第 3 問

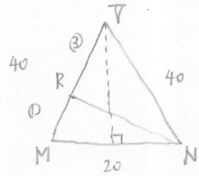
[解] 平面 PBC と 辺 VD の交点 Q とすると

Q も VD を 3:1 に内分する。したがって

$$|PQ| = \frac{3}{4}|AD| = 15\ [\mathrm{cm}]$$

又、AD, BC の中点 M, N として、$\triangle VMN$ で立体を切ると右図。ただし、R は PQ の中点である。





$$\cos\angle RMN = \frac{1}{4}$$

だから、$\triangle MNR$ に余弦定理を用いて、

$$|RN| = \sqrt{(10)^2 + (20)^2 - 2\cdot 10\cdot 20\cdot \frac{1}{4}}$$

$$= 20$$

したがって 切り口（台形 PQCB）の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(|PQ| + |BC|)\cdot|RN|$$

$$= \frac{1}{2}(15+20)\cdot 20 = 350\ [\mathrm{cm}^2]$$

//

35・20

第 4 問

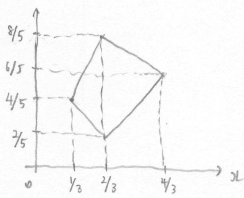
[解] $P_k(x_k, y_k)$とおく。題意から.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



これをといて.

$$P_1\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{5}\right) \; P_2\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right) \; P_3\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{5}\right) \; P_4\left(\frac{4}{3}, \frac{6}{5}\right)$$ //

となり. 右上図から、この面積Sは

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{5} - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{5}$$ //

第 5 問

[解] (1) $P(a, \frac{1}{a})$ $Q(t, \frac{1}{t})$ $(t<0)$とする。

$$|PQ|^2 = (t-a)^2 + \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right)^2 = f(t)$$

とすると. $f(t)$がminのとき $|PQ|$ (>0)もminである。

$$f'(t) = 2(t-a) + 2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$= 2(t-a)\left(1 + \frac{1}{at^3}\right)$$

から下表をうる

t		$-\sqrt[3]{1/a}$		0
f'	$-$	0	$+$	
f	$\searrow$	0	$\nearrow$	

したがって

$$\min f(t) = f\left(-\sqrt[3]{1/a}\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}} + a\right)^2 + \left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}\right)^3$$

だから

$$\min |PQ| = \left(a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

//

(2) この時 $Q\left(-\sqrt[3]{1/a}, -\sqrt[3]{a}\right)$ だから $\alpha = \sqrt[3]{a}$ として

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \alpha^3 + \frac{1}{\alpha} \\ 1/\alpha^3 + \alpha \end{pmatrix}$$

これとx軸正方向のなす角30°だから

$$\tan 30° = \frac{1/\alpha^3 + \alpha}{\alpha^3 + 1/\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1+\alpha^4}{\alpha^6 + \alpha^2} \qquad \therefore \alpha = 3^{\frac{1}{4}}$$

よって $a = \alpha^3 = 3^{\frac{3}{4}}$

//

第 6 問

[解] $f(1)=4 \Leftrightarrow b+a=3$ …① に注意する。

$f(0)=0$ で $x=0$ の時(2)はみたされるから、以下 $x>0$ とする。この時.

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2+ax+3-a \geq 0 \quad (\because ①) \quad \cdots ②$$

だから、②の左辺 $g(x)$ とおくと、$g(x)$ の条件は

$$\begin{cases} ㋐ \text{ 実解を持たない or 重解を持つ} \\ ㋑ \ x \leq 0 \text{ に2異実解を持つ} \end{cases}$$

となる。

㋐の時

$g(x)=0$ の判別式 D として

$$D \leq 0 \quad \therefore \ a^2-4(3-a) \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq a \leq 2$$

㋑の時

$$\begin{cases} \text{端点} : g(0) \geq 0 \\ D \ : D \geq 0 \\ \text{軸} : -\frac{a}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq a \\ a \leq -6, \ 2 \leq a \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq a \leq 3$$

㋐.㋑から、②をみたすのは

$$-6 \leq a \leq 3 \quad \cdots ③$$

である。

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_0^1 = -\frac{1}{6}a+\frac{7}{4} \quad (\because ①)$$

だから、③より、

$$\begin{cases} \max \cdots (a, b) = (-6, 9) \\ \min \cdots (a, b) = (3, 0) \end{cases}$$

//