

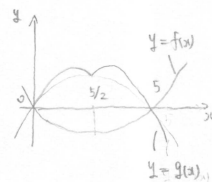
東大理科数学 1968

第 1 問

[解]  $f(x) = x^2 - 5x$ ,  $g(x) = \frac{\pi}{5} \sin\left(\frac{2\pi x}{5}\right) - \frac{2}{5} \sin^2\left(\frac{\pi x}{5}\right)$  とおく。グラフが既知の

右図。この52つの図の面積  $S$  とする

$$S = \int_0^5 g(x) dx + \int_0^5 (-f(x)) dx \quad \dots \textcircled{1}$$



て、

$$\begin{aligned} \int_0^5 g(x) dx &= \left[ -\cos\left(\frac{2\pi x}{5}\right) \right]_0^5 - \frac{3}{5} \int_0^5 \left[ x - \frac{5}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{5}\right) \right] dx \\ &= 2 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^5 f(x) dx = \frac{1}{6} 5^3 = \frac{125}{6}$$

これより

$$S = \frac{64}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。さらに  $-\int_0^5 f(x) dx > \int_0^5 g(x) dx$  であるから  $x < 0$  である。このとき  $y = f(x)$  と  $y = dx$  の交点の x 座標  $t$  ( $t \neq 0$ ) とする。題意から、

$$\int_0^t (dx - f(x)) dx = \frac{1}{6} t^3 = \frac{1}{2} S = \frac{32}{3} \quad (\because \textcircled{2})$$

$$\therefore t = 4$$

よって  $f(x) = dx$  の解は  $x = 0, 4$  となる。  $d = -\frac{1}{4}$  が従う。

## 第 2 問

[解] ABCD が辺 2 の正方形であるとして良い。この時、 $V$ -ABCD の高さは 1 となる。  
 (∵ 題意) そこで、 $A(1, 1, 0)$   $B(1, -1, 0)$   $C(-1, -1, 0)$   $D(-1, 1, 0)$   $V(0, 0, 1)$  なる空間  
 座標をとり、対称性から面  $VAB$  と面  $VBC$  のなす角を  $\theta$  として良い。

面  $VAB$ ,  $VBC$  の法線ベクトル  $\vec{n}, \vec{m}$  は

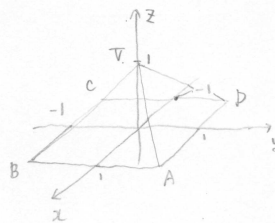
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。このなす角  $\theta$  として、

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq \theta \leq \pi)$$

だから、2面のなす角は  $\frac{\pi}{3}$  ( $< \frac{\pi}{2}$ ) である。



### 第 3 問

[解]  $a+b+c=0$  から.

$$f(x) = ax^2 + bx - (a+b)$$

$$= a(x^2-1) + b(x-1)$$

$$= (x-1)[a(x+1) + b] \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

である。したがって、 $a, b$  が 1 か否かで場合分けすれば良い。

$$1^\circ \ a = \beta = 1$$

①から、 $f(x) = f(\beta) = 0$  より、 $(0, 0)$  のみとなる。

$$2^\circ \ a = 1 \wedge \beta \neq 1$$

$f(x) = 0, f(\beta) = 0$  は任意の実数  $x$  とする。  $x = 0$

$$3^\circ \ a \neq 1 \wedge \beta = 1$$

$$2^\circ \text{ と同じく } y = 0$$

$$4^\circ \ a \neq 1 \wedge \beta \neq 1$$

この時、 $(X, Y) = (f(a), f(\beta))$  とすると

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a^2-1 \\ \beta^2-1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} a-1 \\ \beta-1 \end{pmatrix}$$

だから、まず第2式を  $b$  についてといて、

$$b = \frac{1}{\beta-1} X - (a+1)a \quad (\because a \neq 1)$$

第1式に代入して、

$$Y = (\beta^2-1)a + \frac{\beta-1}{\beta-1} X - (a+1)(\beta-1)a$$

$$= \frac{\beta-1}{\beta-1} X + (\beta-1)(\beta-a)a$$

ここで、①から、 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  に注意して、

$$\textcircled{2} \ a \neq \beta \text{ の時、 } Y \neq \frac{\beta-1}{\beta-1} X$$

$$\textcircled{1} \ a = \beta \text{ の時、 } Y = X$$

である。

以上をまとめて、

$$a = \beta = 1 \dots (0, 0)$$

$$a = 1 \wedge \beta \neq 1 \dots x = 0$$

$$a \neq 1 \wedge \beta = 1 \dots y = 0$$

$$\beta \neq a \wedge a \neq 1 \wedge \beta \neq 1 \dots Y \neq \frac{\beta-1}{\beta-1} X \text{ となる任意の点}$$

$$\beta = a \wedge a \neq 1 \wedge \beta \neq 1 \dots Y = X$$

—H—

[解注]

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a^2-1 \\ \beta^2-1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} a-1 \\ \beta-1 \end{pmatrix} \text{ へ、 } \begin{pmatrix} a^2-1 \\ \beta^2-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-1 \\ \beta-1 \end{pmatrix} \text{ が 1 次独立である}$$

条件を代入しても (△の面積が0でない) 良い。

# 第 4 問

[問] 上  $z=k$  での切り口の面積  $S(k)$  は

$$S(k) = \pi \{1 + (1-k)^2\} = \pi \{2 - 2k + k^2\}$$

だから、求める体積  $V$  とは

$$V = \int_0^1 S(k) dk$$

$$= 2\pi \int_0^1 (2 - 2k + k^2) dk$$

$$= 2\pi \left[ 2k - \frac{2}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{46}{15}\pi$$

# 第 5 問

【解】 (1) から  $P(x)$  は奇関数で  $P(x) = ax^3 + bx$  ( $a \neq 0$ ) とおける。

(2) から  $b \neq 0$  である ( $b=0$  なら  $x=0$  が重根になり矛盾に  $b \neq 0$  なら重根は存在しない)。

さて  $P(x) = 3ax^2 + b$  において (3) から  $P(x)$  は定符号である。

$ab \neq 0$  とおいて。

$$\begin{cases} 1^\circ a > 0 \wedge b > 0 \\ 2^\circ a < 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$

のいずれかとなる。又 (4), (5) から

$$\begin{cases} P(\frac{1}{2}) = \frac{a}{8} + \frac{b}{2} \in \mathbb{Z} & \dots ① \\ 0 < P(1) = a + b < 6 & \dots ② \end{cases}$$

$1^\circ, 2^\circ$  のいずれから  $2^\circ$  はありえず  $1^\circ$  に限定される。又 (1) から

$$\frac{a+4b}{8} \in \mathbb{Z} \quad \therefore a+4b=8k \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \dots ③$$

$1^\circ$  から  $(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)$

となるが、③を満たすのは  $(a, b) = (4, 1)$  のみ。したがって、

$$P(x) = 4x^3 + x$$



## 第 6 回

[解] (1)  $f(x) = (1+x)^d - (1+\frac{x}{2})$  とおく。  $f'(x) = d \left[ \left( \frac{1}{1+x} \right)^{1-d} - \frac{1}{2} \right]$  であり、

$0 \leq x \leq 1$ ,  $0 < d < 1$  かつ、 $1 \geq \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{2}$ ,  $0 < 1-d < 1$  であることより  $f'(x) > 0$  ため  $f(x)$  は  
単調増加で、 $[0, 1]$  の時、 $f(x) \geq f(0) = 0$ 。  $\therefore 1+\frac{x}{2} \leq (1+x)^d$  同

(2)  $1 < \frac{1024}{1000} < 2^{\frac{1}{20}}$  ... ① を示す。①の左側は自明である。右側について、(1)で

$(x, d) = (1, \frac{1}{20})$  とすると、 $(x, d)$  は  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 < d < 1$ ,  $d \in \mathbb{Q}$  を満たす

$$2^{\frac{1}{20}} \geq 1 + \frac{1}{40} > 1 + \frac{24}{1000} \quad (\because \frac{1}{40} > \frac{24}{1000} \Leftrightarrow 1000 > 960)$$

だから、①の右側も成立。したがって①は成立する。①の両辺1000倍してから20乗する。

$$10^{60} < 2^{200} < 2 \cdot 10^{60}$$

--- ②

だから、 $2^{200}$  は、6桁で、最上位は1

(3) ②の各正数から常用対数をとる。

$$60 < 200 \log_{10} 2 < 60 + \log_{10} 2$$

$$\therefore \frac{30}{100} < \log_{10} 2 < \frac{60}{199}$$

--- ③

より、

$$\frac{30}{100} = 0.300, \quad \frac{60}{199} \approx 0.3015 \dots < 0.302$$

から、

$$0.300 < \log_{10} 2 < 0.302$$

と示る。□