四角形 $ABCD$ と頂点 O からなる四角錐を考える．5 点 A, B, C, D, O の中の 2 点は，ある辺の両端にあるとき，互いに隣接点であるという．

今，O から出発し，その隣接点の中から 1 点を等確率で選んでその点を X_1 とする．次に X_1 の隣接点の中から 1 点を等確率で選びその点を X_2 とする．この様にして順次 $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ を定めるとき，X_n が O に一致する確率を求めよ．

[解]

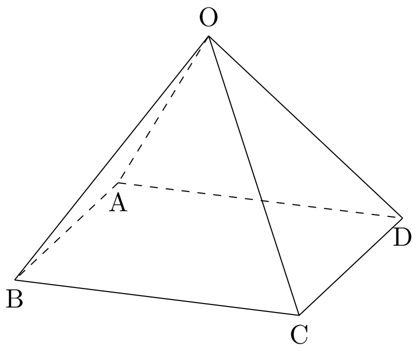

図 1: 四角錐 OABCD

対称性から、X_n が A に一致する確率を q_n とおくと、X_n が B,C,D に一致する確率も q_n にひとしい．X_n が O に一致する確率を p_n とおく．X_n は O,A,B,C,D のうちいずれかに一致するから，全体の確率が 1 となることより

$$p_n + 4q_n = 1 \tag{1}$$

を満たす．

次に p_n の漸化式を求める．$n+1$ で X_n が O に等しい時，n では X_n は A,B,C,D のいずれかに存在し，そこから確率 1/3 で O に移動する．したがって漸化式は

$$p_{n+1} = \frac{4}{3}q_n$$

である．eq. (1) を代入して q_n を消去して

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \tag{2}$$

これと $p_1 = 0$ から

$$p_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(0 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \tag{4}$$

となる．$\cdots$(答)

[解説]