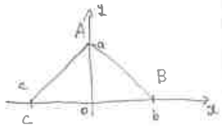
京大 理科数学　1962

150/155

		計	思	総
1	多変数 ☆	C	B	C
2	多変数	B	A	B
3	図形 ☆	A	D	D
4	多変数(関数) ☆	C	C	C
5	多変数	B	B	B
6	多変数	B	A	B

[解] 座標平面で、A(0,a) B(b,0) C(c,0) (a>0, b>0, c<0) として良い。PQの中点の軌跡を考える。まず、P,QがAC,BC上を動く時



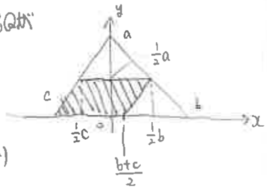
$P(ct,\ a(1-t))$ $Q(s,0)$ $(0\leq t\leq 1,\ c\leq s\leq b)$

とおける。PQの中点R(X,Y)とすると

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}ct\\a(1-t)\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}s\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}t\begin{pmatrix}c\\-a\end{pmatrix}+\frac{1}{2}s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$$

だから Rの軌跡は右図斜線部の通りである。(境界含む) P,Qが

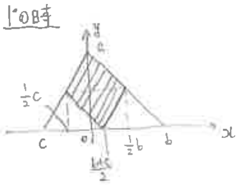


1° AC, AB上の時

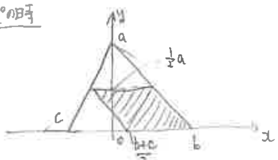
2° AB, BC上の時

も、対称性からRの軌跡は以下のようになる。(境界含む)

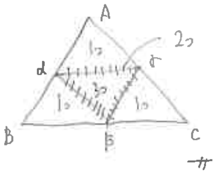
1°の時



2°の時



以上まとめて、AB,BC,CAの中点をα,β,γとして、以下のようになる。

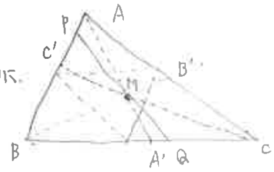


[解2] (解1の最後の図を用いる)

△Aαγ, △Bβα, △βCγ (辺βγ, γα, αβをのぞく)の周及び内部をT₁
辺βγ, γα, αβ をT₂
△αβγの内部 をT₃

とする。Mが各々の領域をうごく時の線分の本数をしらべる。まずT₃について。

AMとBC, BMとAC, CMとABの交点を各々A', B', C'とする。PをAから、QをA'から、反時計回りに、PQがMを通るようにうごかす。(PはA→C'→B→A', QはA'→C→B'→A)



$|MA|-|MA'|>0,\ |MC'|-|MC|<0$

から、PがA→C'とうごく時、

$|MP|-|MQ|$

はレンゾクした値をとりながら正→負と変化するので、$|MP|-|MQ|=0$ なる(P,Q)の組が少なくとも1つ存在する。このような組が2つ以上あると仮定すると、これらを(P_1,Q_1) (P_2,Q_2)として、この4点は平行四辺形をなすが、$AB \nparallel BC$より矛盾。よって$|MP|-|MQ|=0$なる(P,Q)がただ1つ存在する。同様にPがC'→B, B→A'と動く時にも1つずつ、計3つある。

同様にT₂のときは2つ、T₁の時は1つあるので、[解1]のようになる。

第 2 問

[解] (イ) (与式) $\Leftrightarrow k(x^2+y^2-by)+(x^2+y^2-ax)=0$ だから、この円は

$(x,y)=(0,0),\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}, \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$ を通る.

(ロ) 中心 $M(X, Y)$ とすると

$$X=\frac{a}{2(k+1)},\ Y=\frac{kb}{2(k+1)}$$

$a\neq0$ から $X\neq0$ で.

$$\frac{Y}{X}=\frac{b}{a}k \quad \therefore k=\frac{a}{b}\frac{Y}{X} \quad (\because b\neq0)$$

だから. 代入して

$$X=\frac{a}{2\left(\frac{a}{b}\frac{Y}{X}+1\right)}=\frac{abX}{2(aY+bX)}$$

$X\neq0$ から

$$2(aY+bX)=ab \qquad (X\neq0)$$

より. 方程式は

$$2bx+2ay=ab \quad (x\neq0)$$ //.

(1)から. これが2定点 A, B として. ABの垂直2等分線なら

OKだが

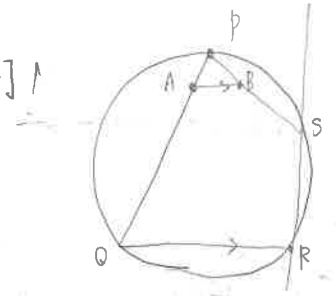
$$y=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}\right)+\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}$$

$$y=-\frac{b}{a}x+\frac{b(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)}$$

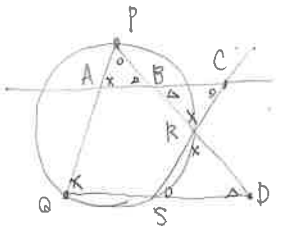
$$bx+ay=\frac{1}{2}ab \quad \Rightarrow 一致!!$$

第 3 問

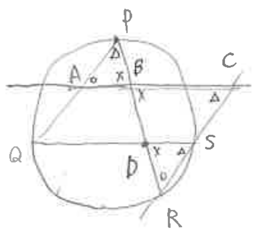
[解] 1



SRとABの交点Cとおく。Pの位置によって以下の2通りのイチカンケイがありうる



1° 線分QSとPRが交わらない



2° 〃 交わる

1°の時、PRとQSの交点Dとすると、内接四角形の対角の和がπであることから角度が図のようにおけ (∵ AB//QS)

$\triangle PAB \backsim \triangle CRB$

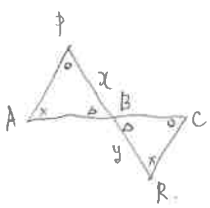
2°の時、同じくDをとると円周角の定理から$\angle QPR = \angle QSR$であることから角度が図のようにおけ (∵ AB//QS)

$\triangle PAB \backsim \triangle CRB$

以上1°、2°から、いずれの場合も$\triangle PAB \backsim \triangle CRB$であり、

$PB = x$, $BR = y$とおくと

$$BC = \frac{xy}{AB} \quad \cdots ①$$



である。一方、直線BCと円の交点E, Fとして

方べきの定理から

$$x \cdot y = BF \cdot BE \quad \cdots ②$$

①、②から

$$BC = \frac{BF \cdot BE}{AB} = \text{const}$$ (Pの位置によらない)

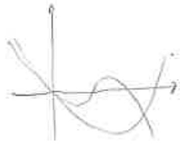
∴だから、直線SRはPの位置によらず、定点Cを通る 図

第 4 問

[解] $f(x)=x(x-a)(b-x)-px^2+qx$ に対し、$x\leq c$ で常に
$f(x)\geq 0$ となる (p,q) をさがせばよい。

$$f'(x)=-3x^2+2(a+b-p)x-ab+q \quad \cdots\cdots ①$$

また、2つの関数の解は $x=0,a,b$ と $x=0,\frac{q}{p}(>0)$ だから
グラフは右のようになる。したがって、2つが $x=0$ で
接することが必要で、



$$-q=-ab \Leftrightarrow q=ab \quad \cdots ②$$

だから①に代入して

$$f'(x)=x\left[-3x+2(a+b-p)\right]$$

従って $0<a+b-p$ となるよう p をとると下表をえる。

x		0		$\frac{2}{3}(a+b-p)$	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	0	↗		↘

① $c<\frac{2}{3}(a+b)$ の時、

$c\leq\frac{2}{3}(a+b-p)$ となるよう $p(>0)$ がとれて、この時
$f(x)$ は $x=0$ で min 0 をとるから、題意のような p,q が存在する。

② $c\geq\frac{2}{3}(a+b)$ の時、

$\frac{2}{3}(a+b-p)<c$ から $f(x)$ は、$x=0$ or $x=c$ で min をとる。

$$f(c)=-c(c-a)(c-b)-pc^2+abc$$
$$=c\left[-(c-a)(c-b)-pc+ab\right]$$
$$=c^2\left(-c+(a+b-p)\right)$$

だから、

1° $c<a+b$ の時 $f(c)\geq 0$ となる p がとれて、
題意のような (p,q) が存在する

2° $c\geq a+b$ の時 $f(c)<0$ から不適。

一方、$a+b-p\leq 0$ となるよう p をとったとき $0\leq x$ で $f(x)$ は単調減少し、
かつ $f(0)=0$ から、これは不適。従って、まとめ

$c<a+b$ の時、(p,q) は存在する
$c\geq a+b$ の時 〃 しない

—(終)

/20

第 5 問

[解] (イ) $f(x)=\sqrt{2}a\pi x+\cos\pi x+\sin\pi x$

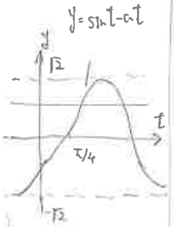
$=\sqrt{2}at+\cos t+\sin t \quad (t=\pi x)\equiv g(t)$

とすると

$g'(t)=\sqrt{2}a+\cos t-\sin t$

だから t_0 の前後で $g'(t)$ の符号が変化するような

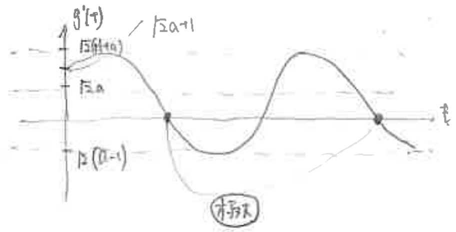
t_0 の存在条件は、右図から



$-\sqrt{2}<\sqrt{2}a<\sqrt{2}$

$\therefore\ 0<a<1 \quad (\because a>0)$

(ロ)



$g'(t)$ が周期 2π の周期関数であることから、$0\leq t_0<2\pi$ で

$g'(t)$ の符号が t_0 の前後で正から負になるような t_0 があって、

$t=t_0+2n\pi\ (n\in\mathbb{Z})$ において は、$g(t)$ は極大になる、

従って、極大となる点の座標 (X, Y) とすると $t=\pi x$ から

$X=\dfrac{t_0}{\pi}+2n,\quad Y=\sqrt{2}a\left(\dfrac{t_0}{\pi}+2n\right)+\cos t_0+\sin t_0$

従って、たしかに (X, Y) は直線上にあり(n を消せばわかる)

その x 座標の間隔が2だから、等間隔である図

/20

第6問

[解] $y=4-x^2$ 上の $x=t$ での接線 l は $(0<t<2)$

$$l: y=f(x)=-2tx+4+t^2$$

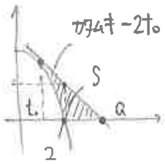
だからこれが $(a,0)$ を通る時,

$$0=t^2-2at+4$$

$$\therefore t=a-\sqrt{a^2-4} \quad (\because t<2,\ a>2)$$

である. これを t_0 とおくと, 右図から

求める面積Sは



$S=$  $+$ 

$$=\int_{t_0}^{2}\left(f(x)-(4-x^2)\right)dx+\frac{1}{2}(a-2)^2\cdot 2t_0$$

$$=\int_{t_0}^{2}(x-t_0)^2dx+t_0(a-2)^2$$

$$=\frac{1}{3}(2-t_0)^3+t_0(a-2)^2$$

$\left(A=\sqrt{2+a},\ B=\sqrt{a-2}\right.$ とおく$\left.\right)$

$$=\frac{1}{3}(-B^2+AB)^3+(a-AB)B^4$$

$$=\frac{1}{3}B^3(A^3-3A^2B+3AB^2-B^3)+aB^4-AB^5$$

$$=\frac{1}{3}B^3(A^3-B^3)-A^2B^4+aB^4$$

$$=\frac{1}{3}\left((a^2-4)^{\frac{3}{2}}-(a-2)^3\right)-2(a-2)^2$$

$$=\frac{1}{3}(a^2-4)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(a+4)(a-2)^2$$

思ったより大変だった. 他の方法だと…

$S=$  $-$ 

$$=\frac{1}{2}(a-t_0)^2\cdot 2t_0-\int_{t_0}^{2}(4-x^2)dx$$

$$=t_0(a^2-4)-\frac{16}{3}+4t_0-\frac{1}{3}t_0^3$$

$$=t_0\left(4-\frac{1}{3}t_0^2+a^2-4\right)-\frac{16}{3}$$

$$=\frac{1}{3}(a-\sqrt{a^2-4})(a^2+4+2a\sqrt{a^2-4})-\frac{16}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left[a(a^2+4)-2a(a^2-4)+(a^2-4)^{\frac{3}{2}}\right]-\frac{16}{3}$$

$$=\frac{1}{3}(a^2-4)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(a+4)(a-2)^2$$

/20