(x, y, z) を空間の直交座標とし，点 $(1, 0, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とする．yz 平面内にあって $y = 1 - z^2$ で表される曲線の $-1 \leq z \leq 1$ なる部分を，直線 l のまわりに回転してできる曲面と，平面 $z = 1$ および $z = -1$ とによって囲まれた部分の体積を求めよ．

[解] 題意の立体の体積 V とする．このうち $0 \leq z$ の部分の体積 V' とすると，対称性から

$$V = 2V' \tag{1}$$

である．$z = t(0 \leq t \leq 1)$ での断面を考えよう．曲線と $z = t$ との交点は $P(0, 1 - t^2, t)$ だから，$Q(1, 0, t)$ との距離は

$$\begin{aligned}|PQ|^2 &= 1^2 + (1 - t^2)^2 \\ &= t^4 - 2t^2 + 2\end{aligned}$$

である．これを $f(t)$ とおく．断面は Q を中心とした半径 $|PQ|$ の円である．故に求める体積は

$$\begin{aligned}V' &= \pi \int_0^1 f(t)dt \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 2t\right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 2\right) \\ &= \frac{23}{15}\pi\end{aligned}$$

したがって (1) から

$$V = \frac{46}{15}\pi \cdots (答)$$

である．