京大理科数学　1982

75/150分

		思	計	総	
1	多変数	A	B	B	20
2	多変数	B	A	B	20
3	ベクトル	B	B	B	20
4	空間	B	B	B	20
5	確立	A	A	A	20
6	関数	B	B	B	20

第 1 問

[解] $f(x)=x^3+ax$, Pのx座標をtとすると. $f'(t)=3t^2+a$から接線は

$$l: y=g(x)=(3t^2+a)x-2t^3$$

だから

$$f(x)-g(x)=x^3-3t^2x+2t^3$$
$$=(x-t)^2(x+2t)$$

より. $x=-2t$ ($\neq t$, ∵$t\neq0$) をx座標とする点Qで交わる.

(2) $x\leqq0$の部分の面積S_1, $x\geqq0$ 〃 S_2とする。$y=f(x)$は原点対称だから $t>0$の時 $S_1:S_2=A:B$ ならば $t<0$の時 $S_1:S_2=B:A$ である…① よって, $t>0$の時のみ考える

$$S_1=\int_{-2t}^{0}\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_{-2t}^{0}\{(x+2t)-3t\}^2(x+2t)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}(x+2t)^4-2t(x+2t)^3+\frac{9t^2}{2}(x+2t)^2\right]_{-2t}^{0}$$
$$=\left(\frac{16}{4}-16+18\right)t^4=6t^4 \quad \cdots②$$

$$S_2=\int_0^t\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^t(x-t)^2\{(x-t)+3t\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}(x-t)^4+t(x-t)^3\right]_0^t$$
$$=-\frac{1}{4}t^4+t^4=\frac{3}{4}t^4 \quad \cdots③$$

②,③. $t\neq0$から, $t>0$の時. $S_1:S_2=8:1$
$t<0$ 〃 $S_1:S_2=1:8$ (∵①)

/20

第 2 問

[解] 与式の左辺 $f(t)$ とおくと $f(t)=0$ が2実解を持つ時

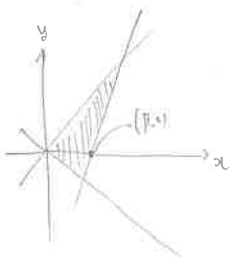
$$a^2-3a+2 \geqq 0 \iff a \leqq 1,\ 2 \leqq a \quad \cdots ①$$

以下. $ay \geqq 3(x-\beta) \cdots ②$ について考える. まず. $ay=3(x-\beta)$ が $(\beta, 0)$ を通るから $\beta>0$ が必要. これは①のもとで

$$\begin{cases} 端点\ f(0)>0 \\ 軸:\ \frac{3}{2}a>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a-2>0 \\ a>0 \end{cases} \iff a>\frac{2}{3} \quad \cdots ③$$

だから ③が条件。このもとで.

$$② \iff y \geqq \frac{3}{a}(x-\beta)$$



より 条件は

$$\frac{3}{a}>1 \iff 3>a \quad \cdots ④$$

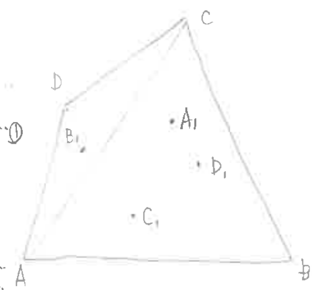
①.③.④から

$$\frac{2}{3}<a \leqq 1,\ 2 \leqq a<3$$

第 3 問

[解] 原点Oとし、点Xの位置ベクトル $\vec{x}$ とする。

$$\begin{cases} a_{n+1} = (b_n + c_n + d_n)/3 \\ b_{n+1} = (a_n + c_n + d_n)/3 \\ c_{n+1} = (a_n + b_n + d_n)/3 \quad \cdots ① \\ d_{n+1} = (a_n + b_n + c_n)/3 \end{cases}$$



帰納的に

$$\vec{a_n} + \vec{b_n} + \vec{c_n} + \vec{d_n} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \quad ②$$

(1) AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上の点は各々 $0 \leq t, s, u, v \leq 1$ として

$$t\vec{a_1} + (1-t)\vec{a} =$$
$$s\vec{b_1} + (1-s)\vec{b}$$
$$u\vec{c_1} + (1-u)\vec{c}$$
$$v\vec{d_1} + (1-v)\vec{d}.$$

で表される $t = s = u = v = \frac{3}{4}$ とすれば、いずれも

$$\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

を通るから、これがPである □

(2) 帰納的に示す。つまり $A_1, A_2, A_3, \cdots$ が直線 AA_1 上にあることを示す AA_1 上の点Xは $t \in \mathbb{R}$ として

$$\vec{x} = \frac{t}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) + (1-t)\vec{a} \quad \cdots ③$$

と表される。$n=1$ の時は明らか。$n=k$ での成立を仮定する

①②から

$$\overrightarrow{a_{k+1}} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} - \vec{a_k})$$

カテイから ③で、A_k に対応する t が存在し、これを t_k とおくと

$$\overrightarrow{a_{k+1}} = \frac{1}{3}\left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} - \frac{t_k}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) - (1-t_k)\vec{a}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[\left(1 - \frac{t_k}{3}\right)(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) + t_k\vec{a}\right]$$

だが、これは③で $t = 1 - \frac{t_k}{3}$ としたものにひとしく、A_{k+1} も AA_1 上にある。よって $n = k+1$ でも成立。

以上から示された □

(3) (2)から点 A_n に対応する t を t_n とおくと

$$\begin{cases} t_{n+1} = 1 - \frac{t_n}{3} \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

これをといて、等比数列の公式から、

$$t_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}$$

よって、$t_n \to \frac{3}{4}$ $(n \to \infty)$ だから、(1)とあわせて

$$A_n \to P \quad (n \to \infty)$$

となり

$$\overline{A_nP} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

である □

/20

第4問

[解]

(1) 切り口は右図斜線部で

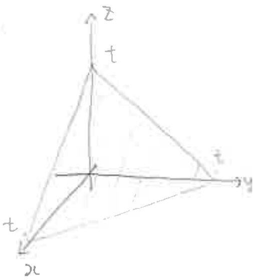
これは一辺$\sqrt{2}t$の正三角形

だから

$$T(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2}t\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2t^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$



(2)㋐ $1\leq t\leq 2$の時

右図斜線部でこれは

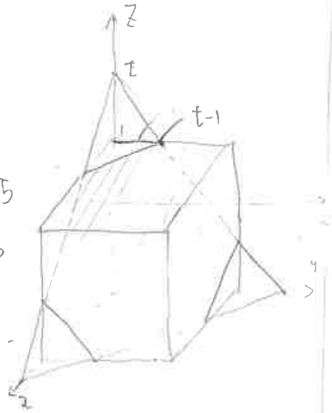
一辺$\sqrt{2}t$の正三角形から

一辺$\sqrt{2}(t-1)$の 〃 3つ

をとりのぞいたもので

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-2t^2+6t-3\right)$$

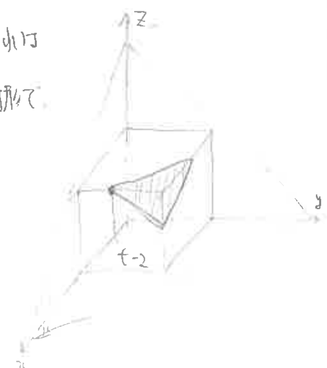


㋑ $2\leq t<3$の時

右図斜線部でこれは

一辺$\sqrt{2}(3-t)$の正三角形で

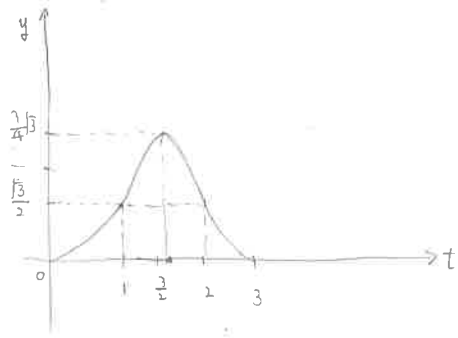
$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2$$



㋒ $0<t\leq 1$の時

明らかに $S(t)=T(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$

以上から $y=S(t)$のグラフは下図

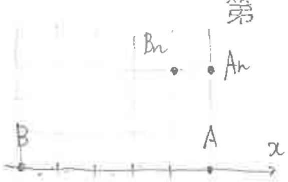


よって、$\max S(t)=S\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{3}$

/20

第 5 問

[解] Aから北へnメートルいった点をA_n，その1m西をB_nとする



(1) A_nにたどりつくのはB_nについてから表をだす確立で

(オモテ)…右へ1
(ウラ)…上へ1

$$P_n = \frac{{}_{n+4}C_4}{2^{n+4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{{}_{n+4}C_4}{2^{n+5}}$$ //

(2) $\frac{P_{n+1}}{P_n} \geq 1$ …① をみたすnをもとめる。(1)から。

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{{}_{n+5}C_4}{{}_{n+4}C_4} \cdot \frac{2^{n+5}}{2^{n+6}} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)\cancel{(n+2)}}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n+5}{2(n+1)} \geq 1$$

$\Leftrightarrow 3 \geq n$ (n=3で等号成立)

だから…

$$P_1 < P_2 < P_3 = P_4 > P_5 > \cdots$$

より、P_nを最大にするnは、$\underline{n=3,4}$ //

/20

第 6 問

(1) $-1 \le x \le 0$ の時

$$f(x) = \int_x^0 te^t\,dt + \int_0^{x+1} te^{-t}\,dt$$

より

$$f'(x) = -xe^x + (x+1)e^{-x-1}$$

$$= e^{-x}\left[\frac{1}{e}(x+1) - xe^{2x}\right] \ge 0 \quad (\because -1 \le x \le 0)$$

から. $f(x)$は単調増加で.

$$f(-1) \le f(x) \le f(0) \quad (-1 \le x \le 0)$$

(2) ○ $0 \le x$ の時 $f(x) = \int_x^{x+1} te^{-t}\,dt$ だから.

$$f'(x) = (x+1)e^{-x-1} - xe^{-x}$$

$$= e^{-x-1}\left[(1-e)x+1\right]$$

○ $x \le -1$ の時 $f(x) = \int_x^{x+1} te^t\,dt$ だから

$$f'(x) = (x+1)e^{x+1} - xe^x$$

$$= e^x\left[(e-1)x+e\right]$$

から表をえる

x		$\frac{-e}{e-1}$		-1		0		$\frac{1}{e-1}$	
f'	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
f	↘		↗	↗	↗		↗		↘

これと $\lim_{x\to\infty} f(x) \to 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) \to 0$, $f\left(\frac{-e}{e-1}\right) = e^{\frac{-e}{e-1}}(1-e) < 0$

$f\left(\frac{1}{e-1}\right) = (e-1)e^{-\frac{1}{e-1}-1} > 0$ から

max: $x = \frac{1}{e-1}$

min: $x = \frac{-e}{e-1}$

/20