正方形 $ABCD$ を底面とし，V を原点とする正四角錐において，底面と斜面のなす角が $45°$ のとき，となりあう二つの斜面のなす二面角を求めよ．

[解] 底面が一辺 2 の正方形であるとしてよい．そこで xyz 座標を設定し $A(1,1,0)$, $B(1,-1,0)$, $C(-1,-1,0)$, $D(-1,1,0)$ とおく．底面と斜面の成す角が $\pi/4$ だから，$V(0,0,1)$ として考えてよい．対称性から平面 VAB と平面 VBC のみ考えればよい．これらの平面の基底をなす 2 ベクトルは

$$VAB : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$VBC : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，法線ベクトルは

$$VAB : \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad VBC : \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．故にこれら 2 ベクトルの成す角 θ として $(0 \leq \theta \leq \pi)$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である．従って $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ である．故に 2 平面の成す角 t は $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ で考えて

$$t = \min(\theta, \pi - \theta) = \frac{\pi}{3}$$

である．$\cdots$(答)