一辺の長さ a の正四面体 $ABCD$ の辺 AB，AC，AD の上に A から等距離にそれぞれ点 P，Q，R をとり，P，Q，R から面 BCD に下ろした垂線の足をそれぞれ P'，Q'，R' とする．

(1) 三角柱 PQR-$P'Q'R'$ の体積が最大になる時の AP の長さを求めよ．

(2) この三角柱の体積の最大値 V_0 と正四面体 $ABCD$ の体積 V の比 $\dfrac{V_0}{V}$ を求めよ．

[解]

(1) A から平面 BCD に下ろした垂足 H とする．$ABCD$ が正四面体だから $|AH| = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$ である．$|AP| = x$ $(0 < x < a)$ とおく．すると相似から

$$|PP'| = \frac{a-x}{a}|AH| = \frac{\sqrt{6}}{3}(a-x)$$
$$|PQ| = x$$

である．$\triangle PQR$ は正三角形でその面積

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}|PQ|^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

だから，三角錐の体積 $V(x)$ は

$$\begin{aligned} V(x) &= (\triangle PQR)|PP'| \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}(a-x)S \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}x^2(a-x) \end{aligned}$$

となる．$x, a-x > 0$ から AM-GM より

$$\begin{aligned} V(x) &= \sqrt{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2(a-x) \\ &\leq \sqrt{2}\left(\frac{a}{3}\right)^3 \qquad (1) \end{aligned}$$

である．等号成立は $\dfrac{x}{2} = a-x \iff x = \dfrac{2}{3}a$ である．(これは $0 < x < a$ を満たす．) 以上から求める値は $|AP| = \dfrac{2}{3}a$ である．$\cdots$(答)

(2) (1) から $V_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{27}a^3$ であり，また

$$V = \frac{1}{3}S|AH| = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

だから，

$$\frac{V_0}{V} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{27}a^3}{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3} = \frac{4}{9}$$

である．$\cdots$(答)