n を 2 以上の整数とする．

1. $n-1$ 次多項式 $P_n(x)$ と n 次多項式 $Q_n(x)$ で実数 θ に対して

$$\sin(2n\theta) = n\sin(2\theta)P_n(\sin^2\theta), \quad \cos(2n\theta) = Q_n(\sin^2\theta)$$

を満たすものが存在することを帰納法を用いて示せ．

2. $k=1,2,\ldots,n-1$ に対して $\alpha_k = \left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^{-2}$ とおくと

$$P_n(x) = (1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$$

となることを示せ．

3. $\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k = \frac{2n^2-2}{3}$ を示せ．

[解]

$n \in \mathbb{N}$ に拡張して考えて良い．

(1) 数学的帰納法で題意を示す．

(i) $n=1,2$ のとき

$$P_1(x)=1, P_2(x)=1-2x$$
$$Q_1(x)=1-2x, Q_2(x)=8x^2-8x+1 \quad \cdots(*)$$

とすれば良く成立する．

(ii) 以下 $n=k,k+1\in\mathbb{N}$ での成立を仮定し，$n=k+2$ での成立を示す．和積公式より，

$$\sin(2k+4)\theta = 2\sin(2k+2)\theta\cos 2\theta - \sin 2k\theta$$
$$\cos(2k+4)\theta = 2\cos(2k+2)\theta\cos 2\theta - \cos 2k\theta$$

であり，ここに $n=k,k+1$ のときの $P_n(x), Q_n(x)$ を代入して

$$\sin(2k+4)\theta = \{2(1-2\sin^2\theta)(k+1)P_{k+1}(\sin^2\theta) - kP_k(\sin^2\theta)\}\sin(2\theta)$$
$$\cos(2k+4)\theta = 2(1-2\sin^2\theta)Q_{k+1}(\sin^2\theta) - Q_k(\sin^2\theta)$$

を得る．従って，

$$\begin{cases} P_{k+2}(x) &= \dfrac{1}{k+2}\{2(1-2x)(k+1)P_{k+1}(x) - kP_k(x)\} \\ Q_{k+2}(x) &= 2(1-2x)Q_{k+1}(x) - Q_k(x) \end{cases}$$

とすれば、$P_{k+2}(x), Q_{k+2}(x)$ は $k+1, k+2$ 次多公式であり条件を満たす．以上から $n=k+2$ でも成立．

(i), (ii) より，数学的帰納法により題意は示された．

(2) 題意を示すには，因数定理より $P_n(x)$ の零点が $x=1/\alpha_k$ であること，および 0 次の係数が 1 であることを示せば良い．まずは前者から示す．$0 \le \theta < 2\pi$ とする．$\sin(2n\theta)=0 \Leftrightarrow 2n\theta = 0,\pi,2\pi,\ldots$ だから、これ以外の時、(1) から

$$P_n(\sin^2\theta) = \frac{\sin(2n\theta)}{n\sin(2\theta)} \qquad \cdots\cdots②$$

だから、$P_n(\sin^2\theta)=0 \Leftrightarrow \sin(2n\theta)=0$ $\theta_k = \frac{k\pi}{2n}$ $(k = 1,2,\ldots,2n-1, \text{ただし} k \neq n, 2n, 3n, \ldots)$ となる。$x=\sin^2\theta$ とすると、$\sin^2\theta$ の周期性から $P_n(x)=0 \Leftrightarrow x = \sin^2\frac{k\pi}{2n}$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$ これら $n-1$ 個の解は互いに異なり、さらに $P_n(x)$ は $n-1$ 次式だから、これが $P_n(x)=0$ の全ての解である。$A\neq 0$ として

$$P_n(x) = A\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right) \qquad \cdots\cdots③$$

とおける。以下 A を求める。$P_n(x)$ の定数項を a_n とすると、(1) 及び (2) から

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+2} = \frac{1}{n+2}\{2(n+1)a_{n+1} - na_n\} \end{cases}$$

となり、帰納的に $a_n = 1$ である。③で係数比較して

$$A\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right) = 1$$

$$\therefore A = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right)}$$

だから、③に代入して

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-d_k x) \qquad \cdots\cdots④$$

と表せる。

(3) $\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$ は、$P_n(x)$ の x の 1 次の項の係数を b_n として、

$$\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k=-b_n \quad \cdots\cdots 5$$

と表せる。ここで、b_n について、$(*)$ から

$$\begin{cases} b_1=0,\ b_2=-2 \\ b_{n+2}=\frac{1}{n+2}[2(n+1)(b_{n+1}-2)-nb_n] \quad (\because a_n=1) \end{cases} \quad \cdots\cdots 6$$

となる。以下、$b_n=-\frac{2}{3}(n^2-1)$ となることを数学的帰納法により示す。

(i) $n=1,2$ のとき $b_1=-\frac{2}{3}(1^2-1)=0$ $b_2=-\frac{2}{3}(2^2-1)=-2$ となり、6 の初期条件と一致するため成立する。

(ii) $n=k,k+1$ での成立を仮定する。すなわち、$b_k=-\frac{2}{3}(k^2-1)$, $b_{k+1}=-\frac{2}{3}((k+1)^2-1)$ が成り立つと仮定する。このとき、$n=k+2$ での成立を示す。6 の漸化式に $n=k$ を代入し、仮定を用いると、

$$\begin{aligned}
b_{k+2}&=\frac{1}{k+2}[2(k+1)(b_{k+1}-2)-kb_k]\\
&=\frac{1}{k+2}\left[2(k+1)\left\{-\frac{2}{3}((k+1)^2-1)-2\right\}-k\left\{-\frac{2}{3}(k^2-1)\right\}\right]\\
&=\frac{1}{k+2}\left[2(k+1)\left\{-\frac{2}{3}(k^2+2k)-2\right\}+\frac{2}{3}k(k^2-1)\right]\\
&=\frac{1}{k+2}\left[-\frac{4}{3}(k+1)(k^2+2k)-4(k+1)+\frac{2}{3}k(k^2-1)\right]\\
&=\frac{2}{3(k+2)}[-2(k+1)k(k+2)-6(k+1)+k(k-1)(k+1)]\\
&=\frac{2(k+1)}{3(k+2)}[-2k(k+2)-6+k(k-1)]\\
&=\frac{2(k+1)}{3(k+2)}[-2k^2-4k-6+k^2-k]\\
&=\frac{2(k+1)}{3(k+2)}(-k^2-5k-6)\\
&=-\frac{2(k+1)}{3(k+2)}(k+2)(k+3)\\
&=-\frac{2}{3}(k+1)(k+3)\\
&=-\frac{2}{3}((k+2)^2-1)
\end{aligned}$$

よって、$n=k+2$ のときも成立する。

(i), (ii) より、すべての自然数 n に対して $b_n=-\frac{2}{3}(n^2-1)$ が示された。これと 5 から、

$$\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k=-b_n=\frac{2}{3}(n^2-1)$$

となる。