n を正の整数とし，$\left(\cos\dfrac{2\pi}{n}k, \sin\dfrac{2\pi}{n}k\right)$ を座標とする点を Q_n で表す．このとき n 個の点 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_{n-1}$ によって円周 $x^2+y^2=1$ は n 等分される．

平面上の点 P の座標を (a, b) とし，$s_n = \dfrac{1}{n}\left(\overline{PQ_0}^2 + \overline{PQ_1}^2 + \cdots + \overline{PQ_{n-1}}^2\right)$ とするとき，$\lambda_p = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ の値を a，b を用いてあらわせ．また，P がどこにあれば λ_p の値は最小となるか．

[解]$L_n = \overline{PQ_n}^2$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
L_n &= \left(\cos\frac{2\pi}{n}k - a\right)^2 + \left(\sin\frac{2\pi}{n}k - b\right)^2 \\
&= 1 + a^2 + b^2 - 2\left(a\cos\frac{2\pi}{n}k + b\sin\frac{2\pi}{n}k\right)
\end{aligned}
$$

となる．$a_k = \left(a\cos\dfrac{2\pi}{n}k + b\sin\dfrac{2\pi}{n}k\right)$ とおけば区分求積により，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} &\int_0^1 (a\cos 2\pi x + b\sin 2\pi x)\,dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} L_k \\
&= \frac{1}{n}\left\{1 + a^2 + b^2 - 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right\} \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 + a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

となって $\lambda_p = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1 + a^2 + b^2 \cdots$(答) で，これは $P(0, 0)$ の時に最小であること明らかである．$\cdots$(答)

[解注]$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k = 0$ は極限を取る前から成立していること明白だが，減点される恐れありと判断してあえて区分求積を用いた．