n を 2 以上の偶数とする．2 つの曲線 $C_1 : y = x^n$ と $C_2 : y = n^x$ について，次の問いに答えよ．

1. C_1 と C_2 は $x < 0$ において，ただ 1 つの点 P_n で交わることを示せ．
2. C_1 と C_2 の交点の個数を求めよ．
3. P_n の $n \to \infty$ のときの極限の位置を求めよ．

[解] (1) n は偶数とし，$f_n(x) = x^n$, $g_n(x) = n^x$ とおく．

(1) $x < 0$ の時．$t = -x$ とおくと，$t > 0$ であり，$f_n(x)$ と $g_n(x)$ が一致するとすると

$$\begin{aligned} & f_n(x) = g_n(x) \\ \iff & t^n = \left(\frac{1}{n}\right)^t \quad (*) \end{aligned}$$

両辺正だから，自然対数をとって

$$\begin{aligned} & n \log t = t \log n \\ \iff & \frac{\log t}{t} = \frac{\log n}{n} \quad (\text{ただし } x > 0) \quad (**) \end{aligned} \tag{1}$$

である．ここで $h(t) = \frac{\log t}{t}$ とおくと，一階微分は

$$h'(t) = \frac{1 - \log t}{t^2}$$

であり，また $h(t)$ の極限値は

$$\begin{aligned} & h(t) \to -\infty \quad (t \to +0) \\ & h(t) \to 0 \quad (t \to +\infty) \end{aligned}$$

で与えられるから，$h(t)$ の増減表は table 1 となる．

表 1: $h(x)$ の増減表

t	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
h'		$+$	0	$-$	
h	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	(0)

よって $h(t)$ のグラフは fig. 1 となる．

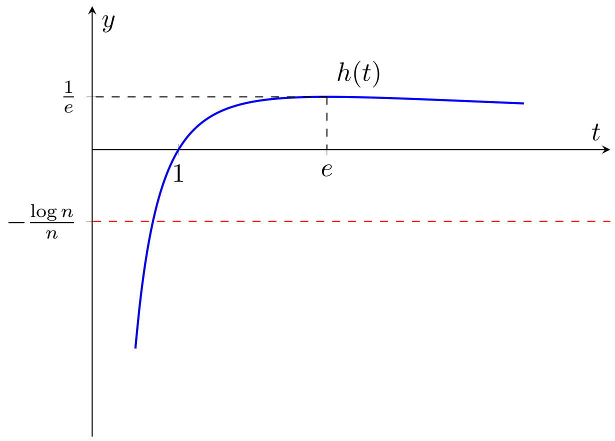

図 1: $h(t)$ の概形.$t = e$ で最大値をとる．

ここで n が 2 以上の偶数であるから $h(x) < 0$ であり，グラフの形から eq. (1) が成立する t が $0 < t < 1$ にただひとつ存在する．したがって C_1, C_2 は $x < 0$ にただ 1 つ交点を持つ.$\cdots$(答)

(2) $x > 0$ の時．$f_n(x), g_n(x)$ 共に正だから，(1) と同様に自然対数をとって考えると

$$\begin{aligned} & f_n(x) = g_n(x) \\ \iff & n \log x = x \log n \\ \iff & \frac{\log x}{x} = \frac{\log n}{n} \end{aligned}$$

である．n が 2 以上の偶数だから $\frac{\log n}{n} > 0$ であり，また fig. 1 より $\frac{\log n}{n} < 1/e$ である．従って fig. 1 からこれみたす x は 2 つある．

最後に $x = 0$ の時は $f_n(0) = 0$, $g_n(0) = 1$ だから，C_1, C_2 は交わらない．

以上で x について全ての場合が考えられた．$x < 0$ で一つ，$x = 0$ で 0 個，$x > 0$ で 2 つの解が存在する．C_1, C_2 の交点の数は $f_n(x) = g_n(x)$ の実解の数に等しいことからあわせて 3 つの交点がある.$\cdots$(答)

(3) $P_n(-x_n, y_n)$ とおくと，(1) の結果から $0 < x_n < 1$

である．P_n の条件から，

$$y_n = (-x_n)^n = n^{-x_n} \tag{2}$$

である．

$n \to \infty$ のとき，fig. 1 から $\frac{\log n}{n} \to 0$ だから，eq. (1) より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log x_n}{x_n} = 0$$

である．これを満たすには fig. 1 および $0 < x_n < 1$ から

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \tag{3}$$

である．これを eq. (2) に代入して

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{x_n} = 0 \tag{4}$$

である．eqs. (3) and (4) より，求める P_n の極限値は

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (-1, 0)$$

である．