半直線 OX が，点 O のまわりに毎秒 1 ラジアンの角速度で回転している．OX 上を運動する点 P が，時刻 t 秒において，点 O から e^{2t} (cm) の距離にあるという．時刻 0 秒から 2π 秒までの間に，点 P の動く道のりを求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

[解] $\cos t = c$,$\sin t = s$ とおく．時刻 0 での P の位置が $(1,0)$ となり，かつ半直線 OX が正の向きに回転するように xy 座標をとる．すると時刻 t での $P(X,Y)$ の座標は

$$\begin{cases} X = e^{2t}c \\ Y = 3^{2t}s \end{cases} \therefore \begin{cases} dX/dt = e^{2t}(2c-s) \\ Y = 3^{2t}(c+2s) \end{cases}$$

である．また，$0 \leq t < 2\pi$ の間に P が再び同じ場所を通ることはないから，求める道のり L として

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(dX/dt)^2 + (dY/dt)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{2t}\sqrt{(2c-s)^2 + (c+2s)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{5}e^{2t} dt \\ &= \sqrt{5}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1) \end{aligned}$$

である．$\cdots$(答)