平面上に点列 $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ があり，P_0，P_1 の座標はそれぞれ (0,0)，(1,0) である．また，任意の自然数 n に対し，線分 P_nP_{n+1} の長さは，線分 $P_{n-1}P_n$ の長さの 2 倍で，半直線 P_nP_{n+1} が半直線 $P_{n-1}P_n$ となす角は 120° である．P_{3n} の座標を求めよ．

[解] $e(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ とし，複素数平面で置き換えて考える．$\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ を表す複素数を a_n とすれば，題意より

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2e\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)a_n \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

だから，繰り返し用いて $a_n = \left\{2e\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right\}^{n-1}$ である．従って P_{3n} を表す複素数 b_n として $a = 2e\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ とおけば,

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{3n}(a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{3n}(a^{k-1}) \\ &= \frac{1-a^{3n}}{1-a} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}i}{7}(1-2^{3n}) \end{aligned}$$

であるから，求める座標は

$$P_{3n}\left(\frac{2}{7}(1-2^{3n}), \frac{\sqrt{3}}{7}(1-2^{3n})\right)$$

である．$\cdots$(答)