京大理科数学 1969

35/150分

		計	思	総
1	関数 >	A	A	A
2	図形	A	A	A
3	論理	A	A	A
4	多変数	B	B	B
5	関数	A	A	A
6	多変数	A	A	A

第 1 問

[解]

(イ) $f(x)=0$ は実数範囲で少なくとも1つ解を持つことを示せば良い。$y=f(x)$ のグラフを考えると、$f(x) \to \pm\infty \ (x \to \pm\infty)$、$f(x)$ は連続だから、中間値の定理から $f(x)=0$ は実数範囲で少なくとも1つ解を持つ ∎

[複素共役が解ばいい?(by(2))]

(ロ) (イ)より、複素数 α に対し $f(\alpha)=0$ ならば $f(\bar{\alpha})=0$ であることと、$f(x)=0$ は複素範囲で重根含めて3つの解しかないことから $f(x)=0$ の解は以下のいずれか。

1° 3つとも実解 2° 1つ実解、2つが複素解

1°の時

3解 $\alpha, \beta, \gamma \ (\alpha, \beta, \gamma < 0)$ として $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ とかけるから、係数比較して

$$-(\alpha+\beta+\gamma)=a>0$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b>0$$

$$-\alpha\beta\gamma=c>0$$

よって $a, b, c>0$.

2°の時

実解 α、共役解を $p \pm qi \ (p, q \in \mathbb{R}, p<0, \alpha<0)$ とおくと、

$$f(x)=(x-\alpha)(x-(p+qi))(x-(p-qi))$$

$$=(x-\alpha)(x^2-2px+(p^2+q^2))$$

と表せるから係数比較して

$$-\alpha-2p=a>0$$

$$p^2+q^2+2\alpha p=b>0$$

$$-\alpha(p^2+q^2)=c>0$$

よって $a, b, c>0$

以上から、いずれの場合も $a, b, c>0$ である ∎

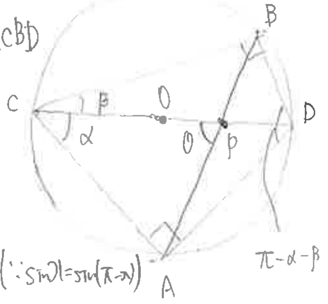
/20

第 2 問

[解] 定円の中心Oとする

円周角の定理から∠CAD=∠CBD

=∠Rだから.



$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{AP}{CA}\cdot\frac{BD}{CB}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin(\pi-\alpha-\beta)}{\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin(\alpha+\beta)} \quad (\because \sin x = \sin(\pi - x))$$

$$= \frac{\triangle ADB}{\triangle ACB} \quad \cdots ①$$

又. $\angle CPA = \theta$とおけば

$$\frac{\triangle ADB}{\triangle ACB} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot DP\sin\theta}{\frac{1}{2}\ AB\cdot CP\sin\theta} = \frac{DP}{CP} \quad \cdots ②$$

①.②から.題意は示された図

/20

第 4 問

[解] Aからの流出速度を v，水の単位体積あたりの重さを w とすると．

㋐ 時刻 k における総水溶液は vk

㋑ その重さは

$$w\int_0^k (1+ae^{-bt})v\,dt$$

$$=\left[t-\frac{a}{b}e^{-bt}\right]_0^k vw$$

$$=wv\left[\left(k-\frac{a}{b}e^{-bk}\right)-\left(-\frac{a}{b}\right)\right]$$

$$=wv\left(k+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^{-bk}\right)$$

だから，もとめる比重は

$$\frac{wv\left(k+\frac{a}{b}(1-e^{-bk})\right)}{vk}\cdot\frac{1}{w}$$

$$=1+\frac{a}{bk}\left(1-e^{-bk}\right)$$

[“比重…水に対する相対重さ”という解釈で良いのか
⇒ $\frac{(\text{重さ})}{(\text{総量})}$ が単位あたり重さ，これと水の重さをくらべる]

/2

第 5 問

[解] $|\vec{X}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B_k}|^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B_k}$

$$= a^2+1+2\vec{A}\cdot\vec{B_k} \quad \cdots ①$$

である。題意から $\vec{A} = a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ とおける。$(0\leq\theta<2\pi)$

$|\vec{X}|^2$の大きさの期待値Eとおくと①から。

$$E=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\left\{a^2+1+2\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{k\pi}{3}\\ \sin\frac{k\pi}{3}\end{pmatrix}\right\}$$

$$=(a^2+1)+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{k\pi}{3}-\theta\right) \quad \cdots ②$$

ここで、単位円に内接する正六角形を考えると、中心から各頂点へのベクトルのx成分は $\cos\left(\frac{k\pi}{3}-\theta\right)$ $(k=1,2,\cdots 6)$ で表され、又、この重心は中心だから、

$$\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{k\pi}{3}-\theta\right)=0.$$

②に代入して

$$\underline{E=a^2+1}$$

/20

[解] $X=\sqrt{x}$, $Y=\sqrt{y}$ とおくと

$$X \geq 0,\ Y \geq 0,\ X^2+Y^2 \geq 1 \quad \cdots ①$$

の時 $g(X,Y)=X+aY$ の min をもとめればよい。$\underset{②}{k=X+aY}$ と

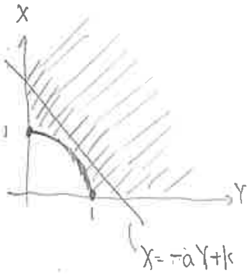
おいて Y−X 平面で ①,②が交点を持つ条件をもとめれば

よく。

1° $0<a\leq 1$ の時

②が $(Y,X)=(1,0)$ を通る

時で min $k=a$



2° $a \geq 1$ の時

②が $(Y,X)=(0,1)$ を通る時で min $k=1$

従って

$$\min f(x,y) = \min\{a,1\}$$

である

[解… 一応、上が一番早い気がしただけで 順序もまあ]

$f(x,y)=\sqrt{x}+a\sqrt{y}$ において x を固定する。$a>0$ に注意して

$\min f(x,y)=\sqrt{x}+a\sqrt{1-x}\quad (0\leq x\leq 1)\ \cdots ①$

$\min f(x,y)=\sqrt{x}\quad (1<x)\ \cdots ②$

①の時 x をうごかして、$\min f(x,y)=\min(a,1)$

②の時 〃 $\min f(x,y)=1$

したがって

$$\min f(x,y)=\min(a,1)$$