a が与えられた実数のとき，xyz 空間の点 $\mathrm{C}(a, 0, 3)$ から出た光が球 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leqq 1$ でさえぎられてできる xy 平面上の影を S とする．点 $(X, Y, 0)$ が S に含まれる条件を求めよ．

[解] $P(X, Y, 0)$, 球の中心 $O'(0, 0, 1)$ とする．球の様子は fig. 1 のようになる．

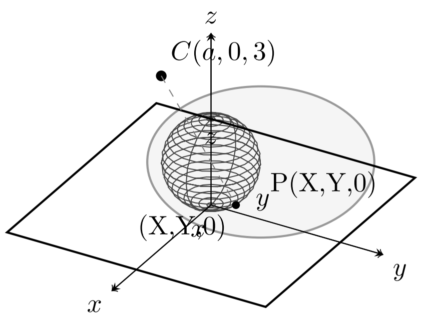

図 1: 球と点光源の様子

線分 CP が球に遮られるためには，線分 CP と球の中心 O' の距離が球の半径である 1 より小さければ良い．直線 CP はパラメータ表示で

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} X-a \\ Y \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

だから、CP 上の点 $Q(t)$ として、

$$\begin{aligned}
&|O'\vec{Q}(t)|^2 \\
=&\{a + t(X-a)\}^2 + (tY)^2 + \{3 - 3t - 1\}^2 \\
=&\{a + t(X-a)\}^2 + (tY)^2 + (2 - 3t)^2 \\
=&\{(X-a)^2 + Y^2 + 9\}t^2 + 2\{a(X-a) - 6\}t + a^2 + 4
\end{aligned}$$

となる．ここで簡単のため

$$\begin{aligned}
A &= (X-a)^2 + Y^2 + 9 (> 0) \\
B &= aX - a^2 - 6
\end{aligned}$$

とおいて，式変形を続けると

$$|O'Q|^2 = A\left(t + \frac{B}{A}\right) + a^2 + 4 - \frac{B^2}{A}$$

だから，$t = -B/A$ の時最小値 $a^2 + 4 - B^2/A$ をとる．よって条件は

$$\begin{aligned}
&\min |O'\vec{Q}|^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow & a^2 + 4 - \frac{\{a(X-a) - 6\}^2}{(X-a)^2 + Y^2 + 9} \leq 1 \\
\Leftrightarrow & a^2 + 3 - \frac{\{a(X-a) - 6\}^2}{(X-a)^2 + Y^2 + 9} \leq 0 \\
\Leftrightarrow & (a^2+3)\{(X-a)^2 + Y^2 + 9\} - \{a(X-a) - 6\}^2 \leq 0 \\
\Leftrightarrow & (a^2+3)(X-a)^2 + (a^2+3)Y^2 + 9(a^2+3) \\
& \quad - \{a^2(X-a)^2 - 12a(X-a) + 36\} \leq 0 \\
\Leftrightarrow & 3(X-a)^2 + (a^2+3)Y^2 + 12a(X-a) + 9a^2 - 9 \leq 0 \\
\Leftrightarrow & 3\left[(X-a) + 2a\right]^2 + (a^2+3)Y^2 + 12a(X-a) - 3(a^2+3) \leq 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{(X+a)^2}{a^2+3} + \frac{Y^2}{3} \leq 1
\end{aligned}$$

という楕円となり，これが求めるべき条件である．従って答えは

$$\frac{(X+a)^2}{a^2+3} + \frac{Y^2}{3} \leq 1$$

である．$\cdots$(答)

[解説] CP と O' の距離が 1 以下となる条件を立式する際，解答では直線 CP 上の点と O' の距離の最小値が 1 以下となるように立式した．ほぼ同じだが別の方法として，点と直線の距離を直接求めに行く方法も紹介しよう．一定検算に利用できるだろう．O' から直線 CP におろした垂線の足を H とする．

CH は CO' の CP への正射影ベクトルだから

$$\vec{CH} = \frac{\vec{CP} \cdot \vec{CO'}}{|\vec{CP}|^2} \vec{CP}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\vec{O'H} &= \vec{CH} - \vec{CO} \\
&= \frac{\vec{CP} \cdot \vec{CO'}}{|\vec{CP}|^2} \vec{CP} - \vec{CO}
\end{aligned}$$

となる．各ベクトルは

$$\vec{CO'} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CP} = \begin{pmatrix} X-a \\ Y \\ -3 \end{pmatrix}$$

だから，

$$\vec{O'H} = \frac{-a(X-a) + 6}{(X-a)^2 + Y^2 + 9} \begin{pmatrix} X-a \\ Y \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-B}{A}\begin{pmatrix} X-a \\ Y \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

この長さが 1 よりも小さければ良いので,

$$\left|\vec{O'H}\right|^2 \leq 1$$

が条件である.

$$\begin{aligned}\left|\vec{O'H}\right|^2 &= \left(\frac{-B}{A}(X-a)+a\right)^2 + \left(\frac{-B}{A}Y\right)^2 + \left(\frac{3B}{A}+2\right)^2 \\ &= \frac{1}{A^2}\left(-B(X-a)+aA\right)^2 + \frac{B^2Y^2}{A^2} + \frac{1}{A^2}\left(3B+2A\right)^2\end{aligned}$$

を得る．さらに整理すると

$$\begin{aligned}\left|\vec{O'H}\right|^2 &= \frac{B^2}{A^2}\left((X-a)^2+Y^2+9\right) + \frac{-2aAB(X-a)}{A^2} + a^2 + 4 + \frac{12AB}{A^2} \\ &= \frac{B^2}{A} + a^2 + 4 + \frac{-2B(a(X-a)-6)}{A} \\ &= \frac{B^2}{A} + a^2 + 4 + \frac{-2B^2}{A} \\ &= -\frac{B^2}{A} + a^2 + 4\end{aligned}$$

となり，解答の最小値と一致する．

　これでふた通りの方法でもとまった．導出を見ればわかるようにどちらも計算量には大差ないので，お好みで使い分けると良いだろう．