京大理科数学 1981年

75/150分

		思	計	総
1	多変数	B	C	B
2	ベクトル	B	A	B
3	多変数	B	B	B
4	多変数	B	B	B
5	場数	B	B	B
6	不等式	C	B	C

第　問

[解] 題意の直線 l は y 軸平行でないので、その傾き m とする。l と $y=\frac{1}{4}x^2$ の交点の x 座標を $(\alpha, \frac{1}{4}\alpha^2)$ $(\beta, \frac{1}{4}\beta^2)$ とおく。$(\alpha<\beta)$ ここで、$l: y=m(x-4)+5$ だから、α, β は次の2次方程式

$$\frac{1}{4}x^2-m(x-4)-5=0 \quad \cdots ①$$

の2解である。(図形的に2解持つことは明らかである) $|PQ|^2$ を $f(m)$ とおく。

$$f(m)=(\beta-\alpha)^2+\left(\frac{1}{4}\beta^2-\frac{1}{4}\alpha^2\right)^2=\left(1+\frac{1}{16}(\beta+\alpha)^2\right)(\beta-\alpha)^2 \quad \cdots ②$$

①から、

$$\alpha+\beta=4m$$

$$\beta-\alpha=2\sqrt{(2m)^2-16m+20} \qquad (\because \beta>\alpha)$$

$$=4\sqrt{m^2-4m+5}$$

だから、②に代入して

$$f(m)=\left\{1+\frac{1}{16}(4m)^2\right\}16(m^2-4m+5)$$

$$=16(1+m^2)(m^2-4m+5)$$

このmaxを求める。

$$f'(m)=16\left[2m(m^2-4m+5)+(1+m^2)(2m-4)\right]$$

$$=16\left[4m^3-12m^2+12m-4\right]$$

$$=64(m-1)^3$$

よって下表をうる。

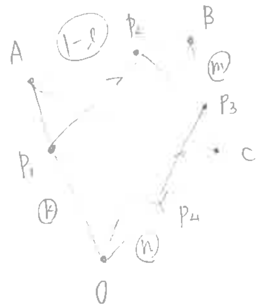
m		1	
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

$|PQ|\geq 0$ より、$|PQ|^2$ が min のとき $|PQ|$ も min であることから、もとめるカタムキは $\underline{\underline{1}}$ である。

第 2 問

[解] 点Xに対し $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ とすると

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は1次独立であり …①



$\vec{p_1}=k\vec{a}$

$\vec{p_2}=l\vec{a}+(1-l)\vec{b}$

$\vec{p_3}=(1-m)\vec{b}+m\vec{c}$

$\vec{p_4}=n\vec{c}$

(1) $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_4P_3}$ だから

$$(l-k)\vec{a}+(1-l)\vec{b}=(1-m)\vec{b}+(m-n)\vec{c}$$

①から $l-k=0,\ m-n=0,\ 1-l=1-m$

$\therefore\ k=l=m=n$ 図

(2) (1)から $k=l=m=n=\alpha$ とおく.

対角線の交点は P_1P_3 の中点だから, この点Xとして

$$\vec{x}=\frac{1}{2}\left(\alpha\vec{a}+(1-\alpha)\vec{b}+\alpha\vec{c}\right) \quad ②$$

一方, OB, ACの中点をY, Zとすると

$$\vec{y}=\frac{1}{2}\vec{b},\quad \vec{z}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$$

だから, 線分YZ上の点Wは

$$\vec{w}=\frac{1}{2}\left(t(\vec{a}+\vec{c})+(1-t)\vec{b}\right)\quad (0\leq t\leq 1)$$

の形でかける. $t=\alpha$ とすると $(0<\alpha<1)$ ②から $W=X$ となるから

題意は示された. 図

[本時のミス]

・題意のよみちがえ → 証明できないことに気付く

/20

第3問

[解] $f(x)=k(x^{m+1}-1)-(x^m-1)$ とおく. $f(x)\geq 0$ が $0<x$ の任意の x で成りたつ k の条件をしらべる

$$f'(m)=k(m+1)x^m-mx^{m-1}$$
$$=\left[k(m+1)x-m\right]x^{m-1}$$

から, 下表を得る

x	0		$\frac{m}{k(m+1)}$	
f'		$-$	0	$+$
f		↘		↗

よって,

$$f(x)\geq f\left(\frac{m}{k(m+1)}\right)=k\left[\left\{\frac{m}{k(m+1)}\right\}^{m+1}-1\right]-\left\{\frac{m}{k(m+1)}\right\}^{m}+1$$

$$=\left(\frac{m}{k(m+1)}\right)^m\left(\frac{m}{m+1}-1\right)+(1-k) \quad \cdots ①$$

$x\to\infty$ とすれば. $k>0$ が必要なので. $t=\frac{1}{k}$ とおいて. ①を $g(t)$ とすると

$$g(t)=-\frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}t^m+1-\frac{1}{t}$$
$$g'(t)=-\frac{m^{m+1}}{(m+1)^{m+1}}t^{m-1}+\frac{1}{t^2}$$

より. 下表をえる

t	0		$\frac{m+1}{m}$	
g'		$+$	0	$-$
g		↗		↘

これより $g(t)\leq g\left(\frac{m+1}{m}\right)=0$

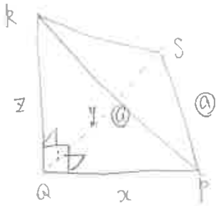
だから. 常に $f(x)\geq 0$ がみたされるには $t=\frac{m+1}{m} \Leftrightarrow k=\frac{m}{m+1}$ が条件である

/20

第4問

[解] (1) $PQ=x$, $QS=y$, $QR=z$ (いずれも正)とおくと.

ピタゴラスから



$$\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 \\ a^2 = x^2 + z^2 \end{cases} \cdots ①$$

だから. 四面体の体積Vとして

$$V = \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{6}x(a^2-x^2) \quad (\because ①) \quad (0<x<a)$$

$$\frac{d}{dx}V = \frac{1}{6}(a^2-3x^2)$$

から. 下表をえる

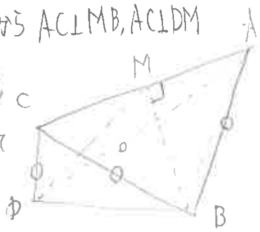
x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}a$		a
V'		$+$	0	$-$	
V		↗		↘	

よって. $\max V$ は $x=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ のときの $\underline{\frac{\sqrt{3}}{27}a^3}$ //

(2) ACの中点Mとすると対称性から $AC \perp MB$, $AC \perp DM$

であり 四面体ABCDの体積V,

四面体ABDMの体積V'として



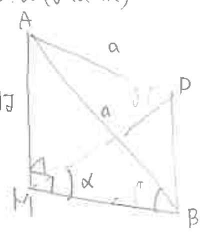
$$V = 2V' \cdots ②$$

である. 角$\angle ABM$を固定して$\angle BMD = \alpha$ $(0<\alpha<\pi)$

をうごかすと底面積を考えてV'は

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ で max である. この時の体積は

(1)から $\frac{\sqrt{3}}{27}a^3$ だから ②に代入



$$\therefore V = \frac{2\sqrt{3}}{27}a^3$$ //

/20

第 5 問

[解] k $(1 \le k \le N-1)$ 回目に大吉を引く確立 p_k は

$$p_k = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

N回目のおみくじを引く確立は

$$p_N = (1-p)^{N-1}$$

だから

$$E = \sum_{k=1}^{N} k p_k$$
$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} p k (1-p)^{k-1}}_{S} + N(1-p)^{N-1} \quad \cdots ①$$

であり

$$\begin{cases} \dfrac{S}{p} = 1 + 2(1-p) + \cdots + (N-1)(1-p)^{N-2} \\ (1-p)\dfrac{S}{p} = (1-p) + \cdots + (N-2)(1-p)^{N-2} + (N-1)(1-p)^{N-1} \end{cases}$$

から辺々引いて

$$S = \sum_{k=0}^{N-2} (1-p)^k - (N-1)(1-p)^{N-1}$$
$$= \frac{1-(1-p)^{N-1}}{1-(1-p)} - (N-1)(1-p)^{N-1}$$

だから①に代入して

$$E = \frac{1-(1-p)^{N-1}}{p} + (1-p)^{N-1}$$
$$= \frac{1-(1-p)^N}{p} \quad \text{答}$$

であり $(p, N) = \left(\frac{1}{5}, 10\right)$ の時

$$E = 5\left\{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}\right\}$$
$$= 5\left[1 - \left(\frac{4^3}{100}\right)^5\right]$$
$$\doteqdot 5(1 - 0.107392) \quad \cdots ☆$$
$$\doteqdot 4.463$$
$$\doteqdot \underline{4.46}$$

/20

第 6 問

[解] (1) $0<a\leq x$ とする。部分積分から.

$$\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \int_a^x \frac{1}{t}\cdot t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \left[\frac{1}{t}\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\right]_a^x - \int_a^x \frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\leq \frac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad ∎ \qquad \left(\because \frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}>0,\ \text{等号成立は } x=a\right)$$

(2) $$\int_3^b e^{-\frac{t^2}{2}+2t}dt = \int_3^b \frac{1}{-t+2}(-t+2)e^{-\frac{t^2}{2}+2t}dt$$

$$= \left[\frac{1}{-t+2}e^{-\frac{t^2}{2}+2t}\right]_3^b - \int_3^b \frac{e^{-\frac{t^2}{2}+2t}}{(-t+2)^2}dt$$

$$< e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2-b}e^{-\frac{b^2}{2}+2b} \qquad \left(\because \frac{e^{-\frac{t^2}{2}+2t}}{(-t+2)^2}>0\right)$$

$$< e^{\frac{3}{2}} \quad ∎ \qquad \left(\because \frac{1}{2-b}e^{-\frac{b^2}{2}+2b}<0\right)$$

[解2] (1) $f(x) = \frac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} - \int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ とする。

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$$

及び $f(a)=0$ から $a\leq x$ に対して $f(x)\geq f(a)$ である。∎

(2)