$a=\sin^2\dfrac{\pi}{5}$，$b=\sin^2\dfrac{2\pi}{5}$ とおく．このとき，以下のことが成り立つことを示せ．

(1) $a+b$ および ab は有理数である．

(2) 任意の自然数 n に対し $(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$ は整数である．

[解] $\theta=\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{4\pi}{5}$ はいずれも $5\theta=2n\pi$ をみたす．$(n\in\mathbb{Z})$ ので

$$\begin{aligned}3\theta&=2n\pi-2\theta\\ \therefore\cos3\theta&=\cos2\theta\end{aligned}$$

以下 $x=\cos\theta$ とすれば倍角，3 倍角の公式から

$$\begin{aligned}4t^3-3t&=2t^2-1\\(t-1)(4t^2+2t-1)&=0\\4t^2+2t-1&=0 \qquad (\because t\neq0)\end{aligned}$$

ここで $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\neq\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ より，2 次方程式の 2 解はこれらである．故に解と係数の関係から

$$\begin{cases}p\equiv\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{-1}{2}\\ q\equiv\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{-1}{4}\end{cases}\qquad(1)$$

である．

(1) (1) に注意して，倍角公式から

$$\begin{cases}a+b=\frac{1}{2}(2-p)=\frac{4}{5}\in\mathbb{Q}\\ ab=\frac{1}{4}(1-p)(1-q)=\frac{5}{16}\in\mathbb{Q}\end{cases}\qquad(2)$$

故に示された．□

(2) $a_n=(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$，$b_n=a^{-n}+b^{-n}$ とおくと，

$$b_{n+2}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})b_{n+1}-\frac{1}{ab}b_n$$

に注意して

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=b_{n+2}(a+b)^{n+2}\\&=\{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})b_{n+1}-\frac{1}{ab}b_n\}(a+b)^n\\&=\frac{(a+b)^2}{ab}(a_{n+1}-a_n)\\&=5(a_{n+1}-a_n) \qquad (\because(2))\end{aligned}$$

である．これと $a_1=5$，$a_2=15$ から，帰納的に $a_n\in\mathbb{Z}$ である．□