次の問に答えよ．

1. 実数 $a_1, a_2, x_1, x_2, y_1, y_2$ が

$$\begin{aligned} 0 < a_1 &\leq a_2 \\ a_1 x_1 &\leq a_1 y_1 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 &\leq a_1 y_1 + a_2 y_2 \end{aligned}$$

をみたすとしている．このとき $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$ であることを証明せよ．

2. n を 2 以上の整数とし，$3n$ 個の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ が

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$

および n 個の不等式

$$\sum_{i=1}^{j} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{j} a_i y_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

をみたしているならば，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$$

であることを証明せよ．

[解]

問題の構成として，(1) は (2) の $n = 2$ の時を証明する問題になっている．そこで，(2) を数学的帰納法により証明すれば (1) が含まれていることになるため，いきなり (2) を考える．

各不等式に式番号を与える．

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \tag{1}$$

$$A_j : \sum_{i=1}^{j} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{j} a_i y_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{3}$$

0.1　$n = 2$ のとき

まず，A_1 は

$$a_1 x_1 \leq a_1 y_1$$

であり，eq. (1) より $a_1 > 0$ だから両辺 a_1 で割って

$$x_1 \leq y_1 \tag{4}$$

である．

A_2 は

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq a_1 y_1 + a_2 y_2$$

であり，まず a_1 と a_2 についてこの不等式を整理すると

$$a_2 (x_2 - y_2) \leq a_1 (y_1 - x_1) \tag{5}$$

である．さらに，eq. (1) より $0 < a_1 \leq a_2$ だから，右側の不等式はさらに上から評価すると

$$a_1 (y_1 - x_1) \leq a_2 (y_1 - x_1) \tag{6}$$

ただし，eq. (4) より $y_1 - x_1 \geq 0$ であることを用いた．以上 eqs. (5) and (6) から

$$a_2 (x_2 - y_2) \leq a_2 (y_1 - x_1)$$

である．両辺 $a_2 > 0$ で割って

$$\begin{aligned} x_2 - y_2 &\leq y_1 - x_1 \\ \therefore x_1 + x_2 &\leq y_1 + y_2 \end{aligned}$$

であり，これは eq. (3) であるから $n = 2$ のとき eq. (3) は成り立つ．((1) の証明) $\cdots$(答)

0.2　$n \leq k (k \in \mathbb{N} \geq 2)$ での成立を仮定

eqs. (1) and (2) を仮定する．$A_j (j = 3, 4, \cdots, k+1)$ について．$n = 2$ の時と同じく

$$a_2(x_2 - y_2) + \sum_{i=3}^{j} a_i x_i \leq a_1(y_1 - x_1) + \sum_{i=3}^{j} a_i y_i$$
$$a_1(y_1 - x_1) + \sum_{i=3}^{j} a_i y_i \leq a_2(y_1 - x_1) + \sum_{i=3}^{j} a_i y_i$$

が成り立つ．従って

$$a_2(x_2 - y_2) + \sum_{i=3}^{j} a_i x_i \leq a_2(y_1 - x_1) + \sum_{i=3}^{j} a_i y_i \tag{7}$$

である．

ここで新しい数列 $\{a'_i\}, \{X_i\}, \{Y_i\}$ を

$$\begin{cases} a'_i = a_{i+1} & (i = 1, 2, \cdots, k) \\ X_1 = x_2 - y_2, X_i = x_{i+1} & (i = 2, 3, \cdots, k) \\ Y_1 = y_1 - x_1, Y_i = y_{i+1} & (i = 2, 3, \cdots, k) \end{cases} \tag{8}$$

と定めると，a_i が eq. (1) を満たすから a'_i は

$$0 < a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_k \tag{9}$$

を満たす．さらに，eq. (7) より

$$a'_1 X_1 + \sum_{i=2}^{j-1} a'_i X_i \leq a'_1 Y_1 + \sum_{i=2}^{j-1} a'_i Y_i$$
$$\sum_{i=1}^{j-1} a'_i X_i \leq \sum_{i=1}^{j-1} a'_i Y_i \tag{10}$$

である. 以上 eqs. (9) and (10) から, 数列 $\{a'_i\}, \{X_i\}, \{Y_i\}$ は eqs. (1) and (2) を満たしている．これと帰納法の仮定より，$\{X_i\}, \{Y_i\}$ に対して eq. (3) が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \leq \sum_{i=1}^{k} Y_i$$

ここに eq. (8) を代入して元の x_i, y_i の式に戻すと

$$(x_2 - y_2) + \sum_{i=2}^{k+1} x_i \leq (y_1 - x_1) + \sum_{i=2}^{k+1} y_i$$
$$\iff \sum_{i=1}^{k+1} x_i \leq \sum_{i=1}^{k+1} y_i$$

となり，数列 $\{x_i\}, \{x_i\}$ は $n = k+1$ に対して eq. (3) を満たす．よって，$n = k+1$ でも題意は成立する．

以上から，数学的帰納法により任意の $n \in \mathbb{N} \geq 2$ に対し $\diamond$ は成立する．よって題意は示された．$\cdots$(答)

[解説]