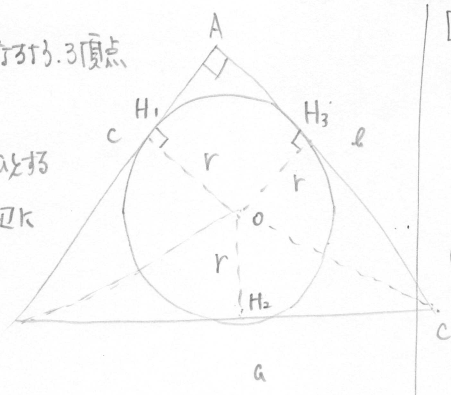
第1問

[解] $\angle BAC=\angle R$ となるような3頂点 A,B,C,を定める。
$\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$ とする
内接円の中心Oから各辺に下ろした垂足をH_1〜H_3とする。題意から

$2r+a+b+c=2$ …①



(1) $\square AH_1OH_3$ が正方形だから。

$$\begin{cases} BH_2=BH_1=c-r \\ CH_2=CH_3=b-r \end{cases} \quad \therefore a=b+c-2r$$

①に代入して

$b+c=1$ …②

だから $a=1-2r$ //

(2) △ABCの面積 $S(r)$ とする

$S(r)=\frac{1}{2}bc$

以下このmaxをもとめる。$a,b,c,r>0$ であり、△ABCの存在条件から

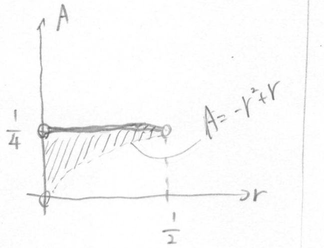
$$\begin{cases} b+c>b+c-2r \\ 2b+c-2r>c \\ 2c+b-2r>b \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 2r>0 \\ b-r>0 \\ c-r>0 \end{cases}$$

$A=bc$ とおくと b,c は t の2次方程式 $t^2-t+A=0$ (∵②)の r より大なる2実解。判別式D,左辺 $f(t)$ として

$$\begin{cases} D\geq 0 \\ f(r)>0 \\ r<\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 1-4A\geq 0 \\ r^2-r+A>0 \\ 0<r<\frac{1}{2} \end{cases}$$

これを図示すると右図斜線部
(境界は $A=\frac{1}{4}$ のみ含む)
したがって

$\max S(r)=\frac{1}{2}\max A=\frac{1}{8}$ //



[別] … a,bを消す。完全に
内接円と三角形のカンケイから

$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(2-2r)$

$ab=2r(1-r)$

(本解)から $a+b=1$ でもあるから a,b は

$t^2-t+2r(1-r)=0$

の2実解。これが $r<t$ に2実解をもつので、

$$\begin{cases} r<\frac{1}{2} \\ 1-8r(1-r)\geq 0 \\ r^2-r+2r(1-r)>0 \end{cases}$$

⇒とくと $0<r\leq\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ となり、代入してオワリ。

第 2 問

[解] $f(x)=x^2+7$

(1) a^2+7 が 2^n の倍数の時. ($a\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}\geq 3$) …①

$f(a)=a^2+7$

$f(a+2^{n-1})=(a+2^{n-1})^2+7=(a^2+7)+2^n a+2^{2n-2}$

$f(a)$ が 2^{n+1} の倍数の時題意は成立。$f(a)$が2^{n+1}の倍数でない時,

①から $f(a)=a^2+7=2^n\cdot A$ ($A\in odd$)とかける.

$f(a+2^{n-1})=2^n\cdot A+2^n(2^n\cdot A-7)+2^{2n-2}$

$=\underline{2^n(A-7+2^nA)}+\underline{2^{2n-2}}$

ここで. $A\in odd$から $A-7+2^n\cdot A\equiv 0\pmod 2$, 又 $n\geq 3$から $2n-2\geq n+1$

だから ~~ はいずれも 2^{n+1}でわり切れる. つまり $f(a+2^{n-1})$ は 2^{n+1}でわり切れる. 以上から示された. 終

(2) nについての帰納法で示す.

$n=1,2,3$の時. $a_1=1, a_2=1, a_3=1$とすれば成立。

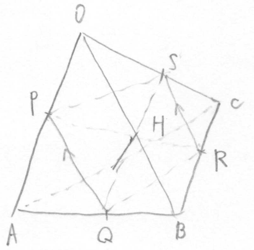
$n=k\in\mathbb{N}$での成立を仮定すると, (1)から $f(a_k)$ 又は $f(a_k+2^{k-1})$ のいずれかは 2^{k+1}でわり切れるから. そのわり切れる方をとって $a_{k+1}=a_k$ or a_k+2^{k-1}とすれば良く, $n=k+1$でも成立

以上から示された.

第 3 問

[解] 点Xに対し $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ と定めると

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は1次独立…①。題意から



$$\begin{cases} \vec{p} = p\vec{a} \\ \vec{q} = q\vec{a}+(1-q)\vec{b} \\ \vec{r} = r\vec{b}+(1-r)\vec{c} \\ \vec{s} = s\vec{c} \end{cases}$$

とおける。p〜sはいずれも $0<p,q,r,s<1$ をみたす実数。

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (q-p)\vec{a}+(1-q)\vec{b} \equiv \vec{A} \\ \overrightarrow{PS} = -p\vec{a}+s\vec{c} \equiv \vec{B} \quad \cdots * \\ \overrightarrow{PR} = -p\vec{a}+r\vec{b}+(1-r)\vec{c} \\ \overrightarrow{PH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PQ}) \quad (\text{HはPR,SQの交点}) \cdots ② \end{cases}$$

ただし最後の式は□PQRSが平行四辺形であることによる。PQRSは同一平面上にあることと、$\vec{A},\vec{B}$ が1次独立であることから $\overrightarrow{PR}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}$ の形で一意に表せる。これと②から

$$\overrightarrow{PR}=\vec{A}+\vec{B}$$

*を代入して

$$-p\vec{a}+r\vec{b}+(1-r)\vec{c}=(q-2p)\vec{a}+(1-q)\vec{b}+s\vec{c}$$

①から

$$\begin{cases} -p=q-2p \\ r=1-q \\ 1-r=s \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} q=s=p \\ r=1-p \end{cases}$$

②に代入して

$$\vec{h}=\frac{1}{2}\left(p\vec{a}+(1-p)\vec{b}+p\vec{c}\right) \quad \cdots ③$$

一方、題意の線分上の点Xは $r\in\mathbb{R}$ として $(0<r<1)$

$$\vec{x}=r\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+(1-r)\frac{\vec{b}}{2} \quad \cdots ④$$

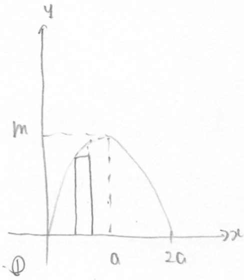
と表せる。$0<p<1$ とあわせて、④で $r=p$ としたものが③だから、たしかにHは題意の線分上にある□

第　　問

第 4 問

[解] 題意の放物線は

$$y=f(x)=\frac{m}{a^2}x(2a-x)$$



である.

$$S_m=\int_0^{2a} f(x)dx$$

$$=\frac{1}{6}\frac{m}{a^2}(2a)^3=\frac{4}{3}ma \cdots ①$$

又, $L_m=\sum_{k=0}^{2a}\{[f(k)]+1\}$ だから. $f(k)-1<[f(k)]\le f(k)$ より

$$\sum_{k=0}^{2a} f(k) < L_m \le \sum_{k=0}^{2a} f(k)+2a+1 \cdots ②$$

①より

$$\frac{3}{4ma}\sum_{k=0}^{2a} f(k) < \frac{L_m}{S_m} \le \frac{3}{4ma}\sum_{k=0}^{2a} f(k)+\frac{3(2a+1)}{4ma} \cdots ②$$

ここで,

$$\sum_{k=0}^{2a} k(2a-k) = -\frac{1}{6}2a(2a+1)(4a+1)+a\cdot 2a(2a+1)$$

$$=-\frac{1}{3}a(2a+1)(4a+1)+2a^2(2a+1)$$

$$=\frac{1}{3}a(4a^2-1) \quad \frac{m}{a^2}$$

だから. $\sum_{k=0}^{2a} f(k)=\frac{m}{3}\frac{4a^2-1}{a}$ だから. ②に代入

$$\frac{1}{4ma}m\frac{4a^2-1}{a} < \frac{L_m}{S_m} \le \frac{1}{4ma}m\frac{4a^2-1}{a}+\frac{3(2a+1)}{4ma}$$

$$1-\frac{1}{4a^2} < \frac{L_m}{S_m} \le 1-\frac{1}{4a^2}+\frac{3(2a+1)}{4ma}$$

はさみうちから

$$\frac{L_m}{S_m} \longrightarrow 1-\frac{1}{4a^2} \quad (m\to\infty)$$

第 5 問

[解] 青、赤、白をB, R, Wとし、たとえば青玉の1番をB-1と表す.

(1) 3点となるのは、色も番号も異なる3つの玉をとりだしたときで

$A(3) = 3\times2\times1 = 6$ //

2点となることはありえず. $A(2)=0$ // 1点となるのは. 2つの玉のみ.

色又は番号が被る時で、全く被らない1つの決め方から

$A(1) = 9\times({}_4C_2 - 2) = 36$ //

余事象から

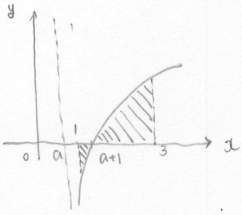
$A(0) = {}_9C_3 - (6+0+36) = 42$ //

(2) $E = 3\times\dfrac{6}{{}_9C_3} + 2\times0 + 1\times\dfrac{36}{{}_9C_3}$

$= \dfrac{18+36}{84} = \dfrac{9}{14}$ //

第 6 問

[解] $0<a<1$ …… ① より、グラフは右図。$f(x)=\log(x-a)$ とする。



(1) $V(a)=\int_1^3 \pi\{f(x)\}^2dx$

$=\pi\int_{1-a}^{3-a}(\log x)^2dx$ …②

$=\pi\Big[x(\log x)^2-2x(\log x-1)\Big]_{1-a}^{3-a}$

$=\pi\Big\{(3-a)\{\{\log(3-a)\}^2-2\log(3-a)+2\}-(1-a)\{\{\log(1-a)\}^2-2\log(1-a)+2\}\Big\}$ //

(2) ②から

$\frac{1}{\pi}V'(a)=-(\log(3-a))^2+(\log(1-a))^2$

$=\{\log(1-a)+\log(3-a)\}\{\log(1-a)-\log(3-a)\}$

$=\log(1-a)(3-a)\cdot\log\frac{1-a}{3-a}$

から、下表をうる。

a	0		$2-\sqrt{2}$		1
V'		$-$	0	$+$	
V		↘		↗	

$\left(\begin{array}{l}(1-a)(3-a)\geq 1 \Leftrightarrow a\leq 2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\leq a \\ \text{①から、} \frac{1-a}{3-a}\leq 1 \text{ である。}\end{array}\right)$

したがって、$a=2-\sqrt{2}$ の時 V は min で、この時

$\begin{cases}1-a=-1+\sqrt{2}\\3-a=1+\sqrt{2}\end{cases}$

から、$B=\log(-1+\sqrt{2})$, $A=\log(1+\sqrt{2})$ として、$B=-A$ だから

$V(a)\cdot\frac{1}{\pi}=(1+\sqrt{2})\{A^2-2A+2\}-(-1+\sqrt{2})\{B^2-2B+2\}$

$=(1+\sqrt{2})\{A^2-2A+2\}+(1-\sqrt{2})\{A^2+2A+2\}$

$=2A^2-4\sqrt{2}A+4$

$\therefore V(a)=2\pi\{(\log(1+\sqrt{2}))^2-2\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})+2\}$ //