三角形 ABC において，各辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{BA}=c$ と記す．いま辺 BC を n 等分する点を $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\cdots$，$\mathrm{P_{n-1}}$ とし，$\mathrm{P_n}=\mathrm{C}$ とする．このとき極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\mathrm{AP_1}^2+\mathrm{AP_2}^2+\cdots+\mathrm{AP_n})$$

を求め，これを a，b，c で表せ．

[解] 題意から $k=1,2,\cdots,n-1$ に対して

$$\mathrm{P_kP_{k+1}}=\frac{a}{n}$$

である．そこで三角形 $\mathrm{ABP_k}$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{AP_k}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BP_k}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BP_k}\cos\angle\mathrm{B}\\&=c^2+\left(\frac{ak}{n}\right)^2-2c\frac{ak}{n}\cos\angle\mathrm{B}\quad\cdots①\end{aligned}$$

また，三角形 ABC に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{B}\\b^2&=c^2+a^2-2ac\cos\angle\mathrm{B}\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，②から

$$\mathrm{AP_k}^2=c^2+\left(\frac{ak}{n}\right)^2-(a^2+c^2-b^2)\frac{k}{n}$$

$A=a^2+c^2-b^2$ とおいて，これを k について足して

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{AP_k}^2=c^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{ak}{n}\right)^2-A\frac{k}{n}\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{AP_k}^2&=c^2+\int_0^1(a^2x^2-Ax)\,dx\\&=c^2+\left[\frac{a^2}{3}x^3-\frac{1}{2}Ax^2\right]_0^1\\&=c^2+\frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)\\&=\frac{1}{6}(-a^2+3b^2+3c^2)\end{aligned}$$

となる．$\cdots$(答)