r を正の実数とする．xyz 空間において，

$$x^2+y^2 \leq r^2$$
$$y^2+z^2 \geq r^2$$
$$z^2+x^2 \leq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ．

[解] 各軸を $1/r$ 倍して考える．題意の体積を V とする．

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ y^2+z^2 \geq 1 \\ z^2+x^2 \leq 1 \end{cases}$$

を満たす立体の体積を V' とすると，

$$V = r^3 V' \tag{1}$$

である．対称性から，さらに $x \geq 0$，$0 \leq y \leq z$ を満たす部分の体積 v とすると，

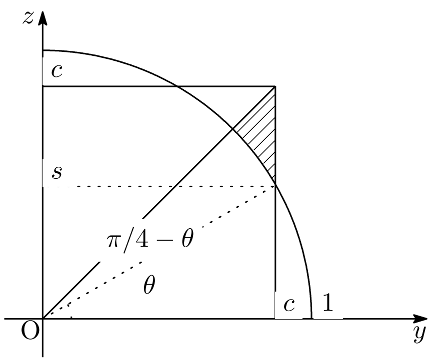
$$V' = 16v \tag{2}$$

である．

$\cos\theta = c$，$\sin\theta = s$ とおく． ただし，$0 \leq \theta \leq \pi/4$ である．$x = s$ での切断面は，

$$\begin{cases} y^2 \leq 1-s^2 = c^2 \\ y^2+z^2 \geq 1 \\ z^2 \leq 1-s^2 = c^2 \end{cases}$$

であって，下図である．



この平面での v の面積 $S(\theta)$ として，

$$S(\theta) = \frac{1}{2}(c-s)c - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned} v &= \int_0^{\sqrt{2}/2} S(\theta)ds \\ &= \int_0^{\pi/4} S(\theta)\frac{ds}{d\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left\{(c-s)c^2 - c\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}d\theta \end{aligned}$$

各項計算して，

$$\int_0^{\pi/4} c^3 d\theta = \left[s - \frac{1}{3}s^3\right]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{12}$$
$$\int_0^{\pi/4} sc^2 d\theta = \frac{-1}{3}[c^3]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$
$$\int_0^{\pi/4} c d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\int_0^{\pi/4} c\theta d\theta = [s\theta + c]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

であるから，代入して，

$$v = \frac{1}{2}\left[\frac{5\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{4}{3}\right)$$

これを (1)，(2) に代入して，

$$V = 8\left(\sqrt{2}-\frac{4}{3}\right)r^3$$

である．$\cdots$(答)