a が与えられた実数のとき，xyz 空間の点 $C(a, 0, 3)$ から出た光が球 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$ で遮られてできる xy 平面上の影を S とする．S の方程式を求めよ．

[解] P$(X, Y, 0)$，O'$(0, 0, 1)$ とする．直線 CP と O' の距離が 1 以下ならばよい．直線 CP のベクトル方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} X-a \\ Y \\ -3 \end{pmatrix}$$

であるから，CP 上の点 Q に対して，

$$\begin{aligned} &|O'Q|^2 \\ =&(a+t(X-a))^2 + (tY)^2 + ((3-3t)-1)^2 \\ =&\{(X-a)^2 + Y^2 + 9\}t^2 + 2(aX - a^2 - 6)t \\ &+ a^2 + 4 \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} A &= (X-a)^2 + Y^2 + 9 (> 0) \\ B &= aX - a^2 - 6 \end{aligned}$$

とおいて，式変形を続けて，

$$|O'Q|^2 = A\left(t + \frac{B}{A}\right) + a^2 + 4 - \frac{B^2}{A}$$

であるから，

$$\min |O'Q| \leq 1 \Longleftrightarrow \min |O'Q|^2 \leq 1$$

に代入して，

$$\begin{aligned} a^2 + 4 - \frac{B^2}{A} &\leq 1 \\ a^2 + 4 - \frac{(aX - a^2 - 6)^2}{\{(X-a)^2 + Y^2 + 9\}} &\leq 1 \\ \frac{(X+a)^2}{a^2+3} + \frac{Y^2}{3} &\leq 1 \end{aligned}$$

が求める式である．$\cdots$(答)