一辺の長さが 1 の立方体を，中心を通る対角線のうちの一本を軸として回転させたとき，この立方体が通過する部分の体積を求めよ．

[解] fig. 1 のように、一辺の長さが 1 の立方体の 8 頂点を定める。回転軸を OE とし、その方向ベクトルを

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．OE 上の点 $P_t = t\vec{l}$ $(0 \leq t \leq 1)$ を通り，$\vec{l}$ に垂直な平面 $x+y+z=3t$ で立体を切断したときの断面積を考える．これを OE を軸に回転させたときの面積を $S(t)$ とする．最終的に、この $S(t)$ を線分 OE に沿って積分することで、回転体の体積 V を求める．対称性から，$0 \leq t \leq 1/2$ についてのみ考えれば十分である．

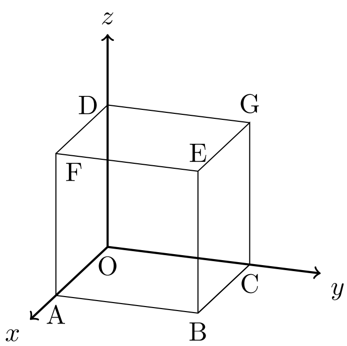

図 1　立方体と頂点の定義

1　断面積 S(t) の計算

1.1　$0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ の場合

断面は fig. 2 のように，3 点 $(3t,0,0),(0,3t,0),(0,0,3t)$ を頂点とする正三角形となる．回転の軸となる点 $P_t(t,t,t)$ から最も遠い点はこの三角形の頂点である．例えば、点 $\mathrm{Q}(3t,0,0)$ を考えると、回転体の半径の 2 乗は $\overline{P_tQ}^2$ で与えられる．

$$\begin{aligned}\overline{P_tQ}^2 &= (3t-t)^2 + (0-t)^2 + (0-t)^2 \\ &= 6t^2\end{aligned}$$

より，この場合の回転断面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned}S(t) &= \pi\overline{P_tQ}^2 \\ &= 6\pi t^2 \qquad (1)\end{aligned}$$

となる．

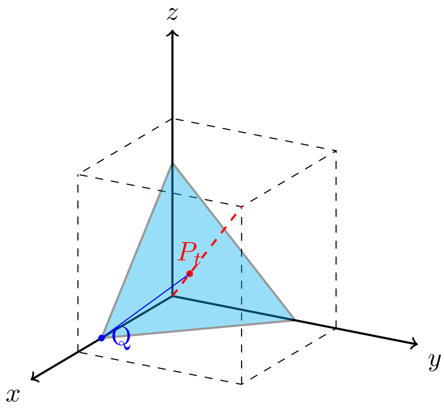

図 2　三角形の断面 ($t = 1/4$ の例)

1.2　$\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$ の場合

断面は fig. 3 のような六角形となる．この六角形の頂点の一つは，例えば辺 AB 上の点 $\mathrm{Q}(1, 3t-1, 0)$ である．

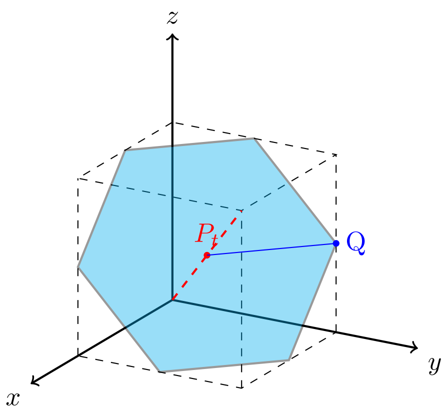

図 3　六角形の断面 ($t = 1/2$ の例)

対称性から点 P_t と各頂点の距離はいずれも等しく，回転半径は点 $P_t(t,t,t)$ とこの六角形の頂点との距離で決まる．

$$\begin{aligned}\overline{P_tQ}^2 &= (1-t)^2 + (3t-1-t)^2 + (0-t)^2 \\ &= (1-t)^2 + (2t-1)^2 + t^2 \\ &= (1-2t+t^2) + (4t^2-4t+1) + t^2\end{aligned}$$

$$= 6t^2 - 6t + 2$$

よって，この場合の回転断面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi\overline{P_tQ}^2 \\ &= \pi(6t^2 - 6t + 2) \end{aligned} \tag{2}$$

となる．

1.3 体積 V の計算

この立体は $t = \frac{1}{2}$（立方体の中心）に関して対称であるため，体積の半分 $\frac{V}{2}$ を $t = 0$ から $t = \frac{1}{2}$ まで積分して求める．積分要素 dl は $P_t = t\vec{l}$ の移動距離であるため $dl = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}dt = \sqrt{3}dt$ となる．

$$\frac{V}{2} = \int_0^{1/2} S(t)\sqrt{3}\mathrm{d}t$$

ここに eqs. (1) and (2) を代入して

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \sqrt{3}\pi\left(\int_0^{1/3} 6t^2\mathrm{d}t + \int_{1/3}^{1/2}(6t^2 - 6t + 2)\mathrm{d}t\right) \\ &= \sqrt{3}\pi\left(\left[2t^3\right]_0^{1/3} + \left[2t^3 - 3t^2 + 2t\right]_{1/3}^{1/2}\right) \\ &= \sqrt{3}\pi\left(\frac{2}{27} + \left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1\right\} - \left\{\frac{2}{27} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right\}\right) \\ &= \sqrt{3}\pi\left(\frac{2}{27} + \frac{1}{2} - \frac{11}{27}\right) \\ &= \sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{27}\right) = \sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi \end{aligned}$$

したがって、求める体積 V は、

$$V = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

である．$\cdots$(答)

[解説]