放物線 $y=x^2$ を C で表す．C 上の点 Q を通り，Q における C の接線に垂直な直線を，Q における C の接線という．$0 \leq t \leq 1$ とし，つぎの 3 条件をみたす点 P を考える．

(イ) C 上の点 $Q(t, t^2)$ における C の法線上にある．

(ロ) 領域 $y \geq x^2$ に含まれる．

(ハ) P と Q の距離は $(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$ である．

t が 0 から 1 まで嚥下する時，P の描く曲線を C' とする．このとき，C と C' とで囲まれた部分の面積を求めよ．

[解]$(x^2)'=2x$ だから，Q での法線方向のベクトル $\vec{l}$ は,

$$\vec{l}=\begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける．故に $P(X,Y)$ は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける．(ハ) の条件から,

$$\left| s\begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} \right|=(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$$
$$\Longleftrightarrow s=\pm(t-t^2)$$

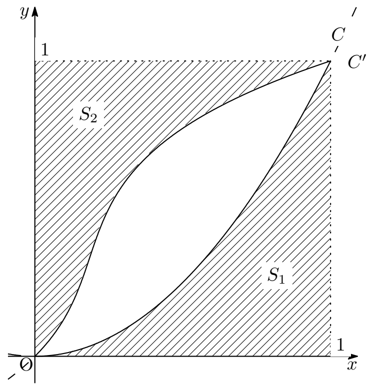
である．条件 (ロ) から複合正をとって,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}+(t-t^2)\begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．従って

$$C:\begin{cases} X=2t^3-2t^2+t \\ Y=t \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow X=2Y^3-2Y^2+Y \qquad (0 \leq Y \leq 1)$$

である．図示して右上図.



故に求める面積 S は，上のように S_1，S_2 をおいて,

$$S=1-S_1-S_2 \qquad (1)$$

と書ける．各項計算して

$$S_1=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$
$$S_2=\int_0^1 (2Y^3-2Y^2+Y)dY$$
$$=\left[\frac{Y^4}{2}-\frac{2Y^3}{3}+\frac{Y^2}{2}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

であるから，(1) に代入して

$$S=\frac{1}{3}$$

である．$\cdots$(答)