京大 理科数学 1967

[解]

(1) $x=\pm1$は明らかに解でないから。

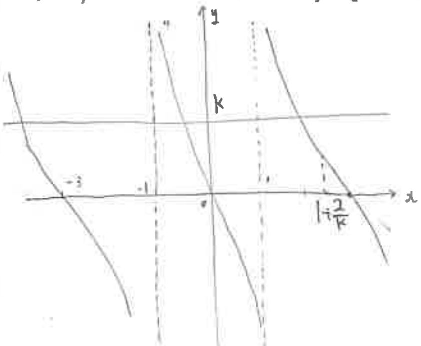
$$k=\frac{-x(x-3)(x+3)}{3(x+1)(x-1)}=-\frac{1}{3}\left[x-\frac{8x}{x^2-1}\right]\equiv f(x)\cdot\frac{1}{3}$$

$$f'(x)=-1+\frac{8(x^2-1)-8x\cdot2x}{(x^2-1)^2}=-1+\frac{-8x^2-8}{(x^2-1)^2}=\frac{-(x^2+3)^2}{(x^2-1)^2}<0$$ から、$f(x)$は

$x<-1,\ -1<x<1,\ 1<x$の各区間で単調増加。これと、

$$f(x)\longrightarrow\pm\infty\quad(x\to\mp\infty)$$
$$f(x)\longrightarrow\mp\infty\quad(x\to1\pm0)\qquad(複号同順)$$
$$f(x)\longrightarrow\mp\infty\quad(x\to-1\pm0)$$

から$y=f(x)$のグラフは下図。よって示すべきことは明らか■



(2) (1)より

$$f\left(1+\frac{2}{k}\right)=\frac{-\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(-2+\frac{2}{k}\right)\left(4+\frac{2}{k}\right)}{3\left(2+\frac{2}{k}\right)\frac{2}{k}}=\frac{-(2+k)(2-2k)(4+2/k)}{6(2k+2)}$$

$$=\frac{-(k-1)(k+2)(2k+1)}{3k(k+1)}$$

から

$$k-\frac{(k-1)(k+2)(2k+1)}{3k(k+1)}=\frac{k^3+3k+2}{3k(k+1)}>0\quad(\because k>0)$$

より、$k>f\left(1+\frac{2}{k}\right)$となり、$1<1+\frac{2}{k}$とあわせて、正の解はただ1つあって

$$1<x<1+\frac{2}{k}$$

をみたす■

第 2 問

[解] $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = i$ だから.複素数の相等から

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \iff (x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{(複号同順)} \cdots ①$$

(ii) $z = 2i \pm \sqrt{(2i)^2 - (-4+2i)}$

$= 2i \pm \sqrt{-4+4-2i}$

$= 2i \pm \sqrt{-2i}$

$= 2i \pm \sqrt{2}\, i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

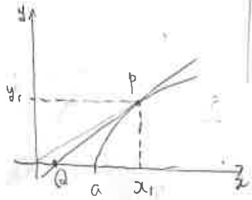
$= -1 + 3i = x + yi$ $\cdots ②$

だから.①又は②をみたせば良く

$(x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ (-1, 3)$

第　3　問

[解] Pでの接線は $\frac{x_1}{a^2}x - \frac{y_1}{b^2}y = 1$ …① であるから、$Q\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$ である。



(1) まず $\frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - 1$ 及び $y_1, b > 0$ から

$$y_1 = b\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}$$

だから

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2}\frac{a^2}{x_1} b\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}$$
//

(2) $$\triangle OPQ = \frac{ab}{2}\sqrt{\frac{x_1^2 - a^2}{x_1^2}}$$

$$= \frac{ab}{2}\sqrt{1 - a^2/x_1^2} \xrightarrow{x_1 \to \infty} \frac{ab}{2}$$
//

第 4 問

[解]

(1) 証明

$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3} \iff (a-c)=(d-b)\sqrt{3}$ である。もし $d-b \neq 0$ と仮定すると、(セイスウ)=(ムリスウ) となって不適。よって $d-b=0$ で、$a-c=0$ が従う。□

さて

$$(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3},\quad (2+\sqrt{3})^3=8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}=26+15\sqrt{3}$$

から

$$(x_2, y_2)=(7,4) \quad (x_3, y_3)=(26,15)$$

第 5 問

[解]

(1) Pが直線AB上にある時. tを実数として

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

とかける。せい理して

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

だから $a = 1-t$, $b = t$ とおけば、十分性が示される …①

次に、$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$, $a+b=1$ とかける時. $b=1-a$ から.

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + (1-a)\overrightarrow{OB}$$
$$= \overrightarrow{OB} + a\overrightarrow{BA}$$

となり、たしかにPはAB上にある。よって必要性が示された …②

①②から示された ■

(2) $p+q+r=0$ から. $r=-(p+q)$ だから.

$$p(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + q(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = 0$$

$$p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB} = 0 \quad \cdots③$$

ここで、A, B, Cは一直線上にないから③をみたす p, q は $p=q=0$ のみ。よって

$$r = 0$$

となるから $(p, q, r) = (0, 0, 0)$ である ■

(3) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ (∵題意) から.

$$\overrightarrow{OQ} = (1-x-y)\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}$$
$$= l\ \overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}$$

(2)から. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の係数比較ができて

$$l = 1-(x+y),\ m = x,\ n = y \quad \cdots④$$

これは $l+m+n=1$ をみたしている。したがって④のように一意に表せ、又必ず存在する ■

第 6 問

[解] $y_1 = f(x) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{4} + 1$, $y_2 = g(x) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}x$ とおく。

(1) $y_1 - y_3 = \frac{\pi}{4}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}x - 1 = \frac{\pi}{4}\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)$ であり、$0 < x \leq 1$ では

AM-GMから

$$y_1 - y_3 \geq \frac{\pi}{4}(2-2) = 0$$

等号成立は $x=1$ …①

$$y_3 - y_2 = \frac{\pi}{4}(1-x) + 1 - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}x$$
$$= \frac{\pi}{4}(1-x) + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}x\right)$$

これは $x=1$ で等号成立。…② $0 < x < 1$ の時、平均値の定理から

$$\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}x = (1-x)\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}c \quad (0 < c < 1)$$

をみたす c があるので

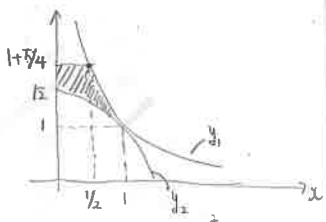
$$y_3 - y_2 = \frac{\pi}{4}(1-x)\left[1 - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}c\right] > 0 \quad (\because \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}c < 1)$$

だから、②とあわせて

$$y_3 \geq y_2 \quad (\text{等号成立は } x=1) \quad \text{…②}$$

①②から、$0 < x < 1$ では $y_1 > y_2$ となり、交点を持たず、$x=1$ での $(1,1)$ のみである■

(2) 右図から、もとめる面積 S として



$$S = \int_0^{1/2}\left(1 + \pi/4 - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}x\right)dx + \int_{1/2}^{1}(f(x) - g(x))dx$$
$$= \int_0^{1/2}(1+\pi/4)dx + \int_{1/2}^{1} f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \quad \text{…③}$$

ここで

∘ $\int_0^{1/2}(1+\pi/4)dx = \frac{1}{2}(1+\pi/4)$

∘ $\int_{1/2}^{1} f(x)dx = \left[\frac{\pi}{4}\log x + (1-\pi/4)x\right]_{1/2}^{1} = \frac{\pi}{8}\log 2 + \frac{1}{2}(1-\pi/4)$

∘ $\int_0^1 g(x)dx = \sqrt{2}\frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{4}x\right]_0^1 = \frac{4}{\pi}$

を③に代入して

$$S = \frac{1}{2}(1+\pi/4) + \frac{\pi}{8}\log 2 + \frac{1}{2}(1-\pi/4) + \frac{4}{\pi}$$
$$= 1 + 4/\pi + \frac{\pi}{8}\log 2 \quad /\!\!/$$