平面上に 1 辺の長さが 1 の正方形 S がある．この平面上で S を平行移動して得られる正方形で，点 P を中心に持つものを $T(\mathrm{P})$ とする．このとき，共通部分 $S \cap P(\mathrm{P})$ の面積が 1/2 となるような点 P の存在範囲を図示せよ．またこの範囲の面積を求めよ．

[解] S を，xy 平面上の

$$|x| \leq \frac{1}{2} \qquad |y| \leq \frac{1}{2}$$

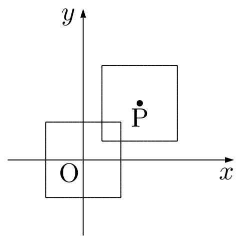
とする．$\mathrm{P}(a, b)$ とすれば，$T(\mathrm{P})$ は

$$|x-a| \leq \frac{1}{2} \qquad |y-b| \leq \frac{1}{2}$$

で表される．対称性から，

$$a, b \geq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で考える．



これらが共通部分を持つとき，

$$\begin{cases} a-1/2 \leq 1/2 \\ b-1/2 \leq 1/2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a \leq 1 \\ b \leq 1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が条件で，このもとで長方形領域

$$\begin{cases} a-1/2 \leq x \leq 1/2 \\ b-1/2 \leq y \leq 1/2 \end{cases}$$

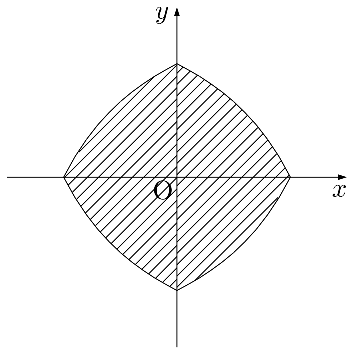
が共通部分である．この面積は

$$\left(\frac{1}{2}-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}-\left(b-\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$=(1-a)(1-b)$$

である．従って，求める条件は

$$\frac{1}{2} \leq (1-a)(1-b) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

である．以上①，②，③から P の存在範囲は下図斜線部 (境界含む)．



従って求める面積 U は，対称性から

$$\begin{aligned} U &= 4\int_0^{1/2}\left(1-\frac{1}{2(1-a)}\right)da \\ &= 4\left[a+\frac{1}{2}\log|1-a|\right]_0^{1/2} \\ &= 2(1-\log 2) \end{aligned}$$

である．$\cdots$(答)