$a, b$ を正の数とする．$xy$ 座標平面において，楕円 $ax^2+by^2=1$ の第 4 象限 $(x\geq 0, y\leq 0)$ に含まれる部分を $C$，傾き $t\geq 0$ の半直線 $y=tx$ $(x\geq 0)$ を $l_t$ とする．$l_t$ 上の点 $P$ と $C$ 上の点 $P'$ を結ぶ線分 $PP'$ が $y$ 軸に平行になるように動くとき，線分 $PP'$ の長さを最大にする $P$ を $P_t$ で表し，$t\geq 0$ が変化するときに $P_t$ が描く曲線を $C'$ とする．また，楕円 $ax^2+by^2=1$ と $C'$ との交点を $Q(\alpha,\beta)$ とする．

1. 曲線 $C'$ の方程式 $y=f(x)$ を求めよ．
2. $\alpha$ と $\beta$ を求めよ．
3. 直線 $y=\beta$，曲線 $C'$ および $y$ 軸が囲む領域を $D$ とする．$D$ を $y$ 軸の回りに 1 回回転してできる回転体の体積 $V$ を求めよ．

**[解]**

題意より，

$$C: ax^2+by^2=1 \quad (x\geq 0, y\leq 0)$$
$$l_t: y=tx \quad (t\geq 0, x\geq 0)$$

である．$l_t$,$C$ 上の点 $P, P'$ は $P(X,tX), P'(X,Y)$ とおける．ただし

$$0\leq X\leq \frac{1}{\sqrt{a}}$$
$$Y=-\sqrt{\frac{1-aX^2}{b}}$$

である．この様子を fig. 1 に示す．

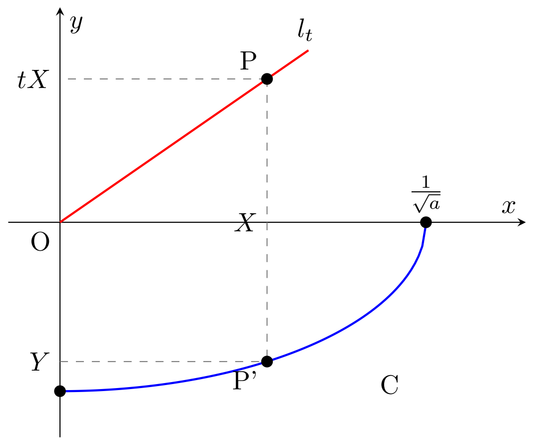


図 1: $C$ および $l_t$ の概形

$PP'=g(X)$ とおくと，

$$\begin{aligned} g(X) &= tX+|Y| \\ &= tX+\sqrt{\frac{1-aX^2}{b}} \end{aligned}$$

より，一階微分は

$$\begin{aligned} g'(x) &= t+\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{-2ax}{2\sqrt{1-ax^2}} \\ &= \frac{t\sqrt{b(1-ax^2)}-ax}{\sqrt{b(1-ax^2)}} \\ &= \frac{t^2b(1-ax^2)-a^2x^2}{\sqrt{b(1-ax^2)}\left(t\sqrt{b(1-ax^2)}+ax\right)} \\ &= \frac{bt^2-(abt^2+a^2)x^2}{\sqrt{b(1-ax^2)}\left(t\sqrt{b(1-ax^2)}+ax\right)} \end{aligned}$$

と書ける．分母は常に正であり，$g'=0$ となるのは

$$\alpha=\sqrt{\frac{bt^2}{abt^2+a^2}}$$

の時である．増減表は table 1 となる．

表 1: $g(x)$ の増減表

| $X$ | $0$ | | $\alpha$ | | $\frac{1}{\sqrt{a}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $1/\sqrt{b}$ | | | | $t/\sqrt{a}$ |

よって $X=\alpha$ で $g(X)$ は最大だから，$P_t$ の座標は

$$X=\alpha$$
$$Y=t\alpha$$

で与えられる．

ここから $t$ を消去すれば，題意の曲線 $C'$ の表示を得る．まず，$t=0$ の時，$P_0(0,0)$ である．次に $t\neq 0$ の時 $X\neq 0$ から

$$t=\frac{Y}{X}$$

であり，$X=\alpha$ に代入して

$$X=\sqrt{\frac{bt^2}{abt^2+a^2}}$$

$$
\begin{aligned}
X &= \sqrt{\frac{b(Y/X)^2}{ab(Y/X)^2 + a^2}} \\
\iff X^2\{abY^2 + a^2X^2\} &= bY^2 \quad (\because X \geq 0) \\
\iff Y^2(b - abX^2) &= a^2X^4 \\
\iff Y &= \frac{aX^2}{\sqrt{b(1 - aX^2)}}
\end{aligned}
$$

ただし，$X = 1/\sqrt{3}$ の時はこの式は成り立たないから，$0 < X < \frac{1}{\sqrt{a}}$ である．この式は $t = 0$ でも成立するから，求めるべき曲線 $C'$ の表示は

$$
f(X) = \frac{aX^2}{\sqrt{b(1 - aX^2)}} \qquad \left(0 \leq X < \frac{1}{\sqrt{a}}\right)
$$

である．$\cdots$(答)

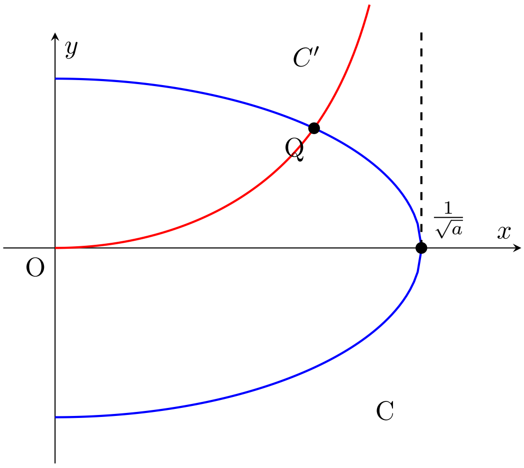


図 2: $C$ および $C'$ の概形

(2) $C$ と $C'$ の方程式の連立解を求める．楕円 $C$ の式に $y = f(x)$ を代入して $y$ を除去すると，

$$
\begin{aligned}
&ax^2 + b\frac{(ax^2)^2}{b(1 - ax^2)} = 1 \\
&\therefore ax^2(1 - ax^2) + a^2x^4 = 1 - ax^2 \\
&\therefore 2ax^2 = 1 \\
&\therefore x = \sqrt{\frac{1}{2a}}
\end{aligned}
$$

であり，この時，

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) \\
&= \frac{a/2a}{\sqrt{b(1 - a/2a)}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2a}}
\end{aligned}
$$

である．以上から

$$
\alpha = \sqrt{\frac{1}{2a}} \qquad\qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{2b}}
$$

である．$\cdots$(答)

(3) $f(x)$ は区間内で単調増加で，グラフ概形および領域 $D$ は fig. 3 である．

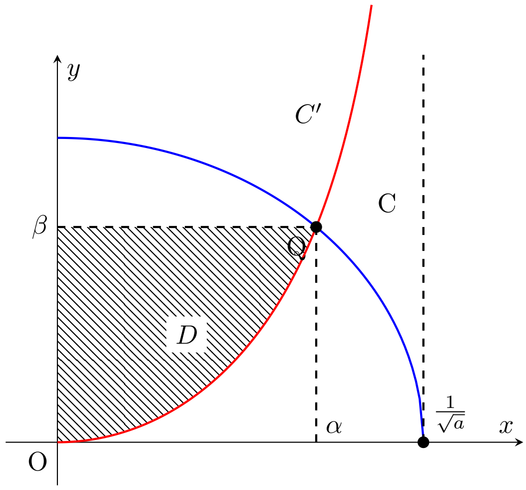


図 3: $D$ の概形

以下，バームクーヘン積分法によって $D$ を $y$ 軸周りに回転した回転体の体積 $V$ を求める．$x \sim x + dx \quad (dx \ll 1)$ の部分を軸まわりに回した立体の体積は幅 $dx$，高さ $\frac{1}{\sqrt{2b}} - f(x)$，長さ $2\pi x$ の直方体で近似できるので，求める立体の体積 $V$ として，

$$
V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2b}} - f(x)\right) x dx \tag{1}
$$

である．一項目は

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}} \frac{1}{\sqrt{2b}} x dx &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2b}} x^2 \Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{a\sqrt{b}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

であり，二項目は $s = 1 - ax^2$ と置換すると

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}} f(x) x dx &= \int_1^{1/2} \frac{1 - s}{\sqrt{bs}} \frac{1}{-2a} ds \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{b}} \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \sqrt{s}\right) ds \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{b}} \left[2\sqrt{s} - \frac{2}{3}s^{3/2}\right]_{1/2}^{1} \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{b}} \left[2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{b}}\left(\frac{4}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{6}\right) \tag{3}$$

だから，eq. (2) を eq. (1) に代入して

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\left[\frac{1}{4\sqrt{2}a\sqrt{b}} - \frac{1}{2a\sqrt{b}}\left(\frac{4}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{6}\right)\right] \\ &= \frac{2\pi}{a\sqrt{b}}\left[\frac{13\sqrt{2}}{24} - \frac{2}{3}\right] \end{aligned}$$

が求める体積である．$\cdots$(答)

**[解説]**