京大理科数学 1977

120/150

		計	思	総
1		A	A	A
2		A	A	A
3		A	A	A
4		A	A	A
5	A	B	B	B
6	B	C	C	C

第 1 問

[解] c, dの条件は

$$\begin{cases} ac+bd=0 & \cdots① \\ c^2+d^2=1 & \cdots② \end{cases}$$

$ab\neq0$から①より. $d=-\frac{a}{b}c$だから②に代入して

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)c^2=1$$

$$\therefore c=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{b}{\sqrt{3}}$$

だから①に代入して $d=\mp\frac{a}{\sqrt{3}}$ (以下複号同順) となるから

$$(c+d,\ cd)=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(b-a),\ \frac{1}{3}\right)$$

a, bは$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$をとることから $b-a=\pm\sqrt{5}$だから

$$(c+d,\ cd)=\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{15},\ \frac{1}{3}\right)$$

となり. c, dを2解に持つ方程式は

$$x^2\pm\frac{1}{3}\sqrt{15}+\frac{1}{3}=0$$

第 2 問

[解] $a>0$. $f(x)=x\left[a-(1+a^4)x^2\right]$ から. $y=f(x)$ と x 軸の交点のうち. x 座標正のもののそれは $c=\sqrt{\dfrac{a}{1+a^4}}$ である.

$$S_a=-a^4\int_0^c x^3dx+a\int_0^c x\,dx-\int_0^c x^3dx$$

$$\frac{d}{da}S_a=-a^4\cdot c^3\cdot c'-4a^3\int_0^c x^3dx+\int_0^c x\,dx+acc'-c^3\cdot c'$$

$$=-(a^4+1)c^3\cdot c'+acc'+\frac{1}{2}c^2-a^3c^4 \quad \cdots ①$$

又. $a-(a^4+1)c^2=0$ だから

$$\frac{dS_a}{da}=c^2\left(\frac{1}{2}-\frac{a^4}{1+a^2}\right)$$

$$=\frac{-c^2}{2(1+a^2)}(2a^2+1)(a^2-1)$$

より下表を得る

a	0		1	
S'		+		−
S		↗		↘

よって S_a を最大にする a は $a=1$

/20

第 3 問

[解] $S=\sin x$, $C=\cos x$ と略記する。漸化式から $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ として

$$f^{4k}(x)=-S,\quad f^{4k+1}=C,\quad f^{4k+2}=-S,\quad f^{4k+3}=-C$$

である。以下 P の x 座標を p とする

1° $C_1: y=xS$, $C_2: y=C$ の時

$p\sin p=\cos p$ であり、t_1, t_2 の接線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\ p\cos p+\sin p\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\ -\sin p\end{pmatrix}$ だから

$$\begin{pmatrix}1\\ p\cos p+\sin p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -\sin p\end{pmatrix}=\cos p(\cos p-p\sin p)=0$$

となり t_1, t_2 は直交する

2° $C_1: y=xC$, $C_2: y=-S$ の時

$p\cos p=-\sin p$ であり、接線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\ \cos p-p\sin p\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\ -\cos p\end{pmatrix}$ となり 1° と同じく t_1, t_2 は直交する

3° $C_1: y=-xS$, $C_2: y=-C$ の時

$p\sin p=\cos p$ であり、接線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\ -p\cos p-\sin p\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\ \sin p\end{pmatrix}$ だから、1° と同じく t_1, t_2 は直交する

4° $C_1: y=-Cx$, $C_2: y=S$ の時

$-p\cos p=\sin p$ であり、接線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\ -\cos p+p\sin p\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\ \cos p\end{pmatrix}$ だから、1° と同じく t_1, t_2 は直交する

以上から示された■

/20

第4問

[解] (i) 1回目に出る目のキタイ値も、2回目に出る目のキタイ値も

$\frac{7}{2}$だから、

1回目で3以下なら振り直し、4以上なら振り直さない

とすれば良い

(ii) (i)から、3回目をふるかどうかは 2回目が3以下ならば振り直し、4以上なら振り直さねば良い。この時の

2,3回目 だけの得点の期待値は

$$\frac{1}{6}(4+5+6)+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{17}{4}。$$

だから、1回目に出た目が4以下ならば振り直し、5以上ならば振り直さなければ良い

/20

第 5 問

[解] (1) a以外の2辺の長さx, yとする。この時

$$x+y=m$$

に注意する。$s=\frac{1}{2}(x+y+a)=\frac{1}{2}(m+a)$として ヘロンの公式から.面積Tとして.

$$T=\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-a)}$$

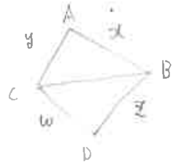
$$\leqq\sqrt{s(s-a)}\cdot\frac{(s-x)+(s-y)}{2}\qquad(\because s-x,\ s-y>0 \text{ から AM-GM})$$

$$=\sqrt{s(s-a)}\ \frac{2s-m}{2}$$

等号成立は $s-x=s-y$ ∴ $x=y=\frac{m}{2}$の時。つまり.この時三角形は2等辺三角形である。■

(2) 四角形ABCDとし.4辺の長さx, y, z, wとする。この時.mを定数(>0)として

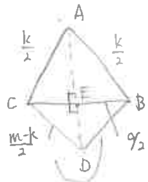
$$x+y+z+w=m \qquad \cdots ①$$



となる。$|BC|=a\ (>0)$, ∴ $x+y=k\ (k>a)$と固定すると、

$\triangle ABC$, $\triangle BCD$は. $x=y$, $z=w$の時面積最大である。

この面積 $S(k)$とする。右下図から(Eは BCの中点)



$$S(k)=\frac{1}{2}a\left(\overline{AE}+\overline{ED}\right)$$

$$=\frac{1}{2}a\left\{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{m-k}{2}\right)^2}\right\}$$

$$\leq\frac{1}{2}a\sqrt{(1+1)\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{m-k}{2}\right)^2\right\}}$$

(∵コーシー・シュワルツ。等号成立は $k=\frac{1}{2}m$)

$$=\frac{1}{2}a\sqrt{k^2-mk+\frac{1}{2}m^2-a^2}$$

$$=\frac{1}{2}a\sqrt{(k-\tfrac{1}{2}m)^2+\frac{1}{4}m^2-a^2}$$

$$\leq\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}m^2-a^2}\qquad(\text{等号成立は }k=\tfrac{1}{2}m)$$

だから aを固定した時. $k=\frac{1}{2}m$で $S(k)$は max $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}m^2-a^2}$ をとる。($\frac{1}{2}m>a$はみたされる)

次にaを動かす. $(0<a<\frac{1}{2}m)$

$$S(k)=\frac{1}{2}\sqrt{-a^4+\frac{1}{4}m^2a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{-\left(a^2-\frac{1}{8}m^2\right)^2+\frac{1}{64}m^4}$$

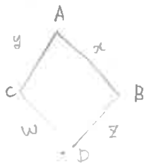
$$\leq\frac{1}{16}m^2\qquad(\text{等号成立は }a=\tfrac{\sqrt{2}}{4}m\text{ のとき})$$

したがって $S(k)$は $a=\frac{\sqrt{2}}{4}m$ $\left(0<\frac{\sqrt{2}}{4}m<\frac{1}{2}m\right)$ でmax。

この時 $x=y=z=w=\frac{1}{4}m$, $a=\frac{\sqrt{2}}{4}m$で たしかに□ABCDは正方形である。

以上から示された。■

[解2] $\angle BAC+\angle BDC=\theta$とする。



ブレードシュナイダーの公式から. $S=\frac{1}{2}(x+y+z+w)=\frac{1}{2}m$として.

$$T=\sqrt{(s-x)(s-y)(s-z)(s-w)-xyzw\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\leq\sqrt{\left(\frac{(s-x)+(s-y)+(s-z)+(s-w)}{4}\right)^4}$$

(∵AM-GM及び $xyzw\cos^2\frac{\theta}{2}\geq 0$)

$$=\frac{m^2}{16}$$

等号成立は$x=y=z=w$かつ$\theta=\pi$, つまり□ABCDが正方形の時.■

第 6 問

[解] (1)を(2),(3)に代入して,

$$\begin{cases} -f''(x) \geq f(x) & \cdots ① \\ f'(0)=0 & \cdots ② \\ 0 \leq x \leq a \Rightarrow f(x)>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

(i) $0 \leq t \leq a$の時,①,③から

$$-f''(t) > 0$$

$[0, x]$ $(0 \leq x \leq a)$で積分して,

$$f'(0) - f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 > f'(x) \quad (\because ②) \quad \cdots ④$$

だから$x=a$として,

$$0 > f'(a) \Leftrightarrow 0 < g(a)$$ □

(ii) $a \leq y \leq a + \dfrac{f(a)}{-f'(a)}$ で常に$f(y)>0$ (∵ $f(0)>0$) と仮定する。③とあわせて

" $0 \leq x \leq a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ で常に $f(x)>0$ " $\cdots ⑤$

である。①から,同区間で

$$f''(t) < 0 \quad \therefore f'(t)\text{は単調減少} \quad \cdots ⑥$$

となり,②から,$f'(t) \leq 0$ つまり$f(t)$は単調減少である。ここで$f(x)$には平均値の定理が適用できて,

$$f\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right) - f(a) = -\frac{f(a)}{f'(a)} f'(c) \quad \left(a < c < a - \frac{f(c)}{f'(c)}\right)$$

なるcが存在する。変形して,

$$f\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right) = \frac{f(a)}{f'(a)} \{f'(a) - f'(c)\} \quad \cdots ⑦$$

ここで,⑤,⑥から

$$f\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right),\ f(a) > 0,\quad f'(a) < 0$$

だから ⑦より,

$$f'(a) - f'(c) < 0 \Leftrightarrow f'(a) < f'(c)$$

しかし,これは⑥及び$a<c$に反し矛盾。以上から $a \leq y \leq a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ に$f(y)=0$なるyがある。□