α，β は与えられた実数とするう．x の二次式 $f(x)=ax^2+bx+c$ の係数 a，b，c が，$a+b+c=0$ なる関係式を満たしながら動く時，座標 $(f(\alpha), f(\beta))$ を持つ点の全体は，平面上のどんな集合になるか．

[解] $p=f(\alpha)$，$q=f(\beta)$ とし，$A(p,q)$ とおけば，A の動く範囲を求めればよい．$c=-a-b$ だから，

$$f(x)=a(x^2-1)+b(x-1)=(x-1)\{a(x+1)+b\}$$

である．従って，α，β が 1 か否かで場合分けする．

<u>(1)$\alpha=\beta=1$ の時</u>
$p=q=0$ ゆえ $A(0,0)$ である．

<u>(2)$\alpha=1, \beta\neq 1$ の時</u>
$p=0$，q は任意の実数をとるので，A は直線 $y=0$ 上を動く．

<u>(3)$\alpha\neq 1, \beta=0$ の時</u>
(2) と同様に，A は直線 $x=0$ 上を動く．

<u>(4)$\alpha\neq 1, \beta\neq 1$ の時</u>
$p=(\alpha-1)\{a(\alpha+1)+b\}$ を b についてといて，

$$b=\frac{p}{\alpha-1}-a(\alpha+1) \qquad (\because \alpha\neq 1)$$

である．これを $q=(\beta-1)\{a(\beta+1)+b\}$ に代入して

$$\begin{aligned} q &= (\beta-1)\left\{a(\beta+1)+\frac{p}{\alpha-1}-a(\alpha+1)\right\} \\ &= \frac{\beta-1}{\alpha-1}p+(\beta-1)(\beta-\alpha)a \end{aligned}$$

である．故に $\alpha=\beta$ なら $q=p$ となり，$\alpha\neq\beta$ なら $p\neq q$ であるから，

$$\begin{cases} \alpha=\beta\text{の時} & y=x \\ \alpha\neq\beta\text{の時} & y\neq x \end{cases}$$

となる．

以上をまとめて，

$$\begin{cases} \alpha=\beta=1\text{ の時} & (0,0) \\ \alpha=1\wedge\beta\neq 1\text{ の時} & y=0 \\ \alpha\neq 1\wedge\beta=1\text{ の時} & x=0 \\ \alpha\neq 1\wedge\beta\neq 1\wedge\alpha=\beta\text{の時} & y=x \\ \alpha\neq 1\wedge\beta\neq 1\wedge\alpha\neq\beta\text{の時} & y\neq x \end{cases}$$

である．$\cdots$(答)