xyz 空間内の点 $P(0,0,1)$ を中心とする半径 1 の球面 K がある．

K 上の点 $Q(a,b,c)$ が条件 $a>0, b>0, c>1$ のもとで K 上を動く時，Q において K に接する平面を L とし，L が x 軸，y 軸，z 軸と交わる点をそれぞれ A，B，C とする．このような三角形 ABC の面積の最小値を求めよ．

[解]Q は K 上の点であるから

$$a^2+b^2+(c-1)^2=1 \tag{1}$$

が成り立つ．L は $\overrightarrow{PQ}=(a,b,c-1)$ に垂直で点 Q を通るので，その方程式は

$$a(x-a)+b(y-b)+(c-1)(z-c)=0$$
$$\therefore ax+by+(c-1)z-c=0 \qquad (\because (1))$$

となる．ゆえに $a>0, b>0, c>1$ から

$$A\left(\frac{c}{a},0,0\right), B\left(0,\frac{c}{b},0\right), C\left(0,0,\frac{c}{c-1}\right)$$

である．そこで

$$p=\frac{c}{a}, q=\frac{c}{b}, r=\frac{c}{c-1} \tag{2}$$

とおけば

$$\overrightarrow{CA}=(p,0,-r), \overrightarrow{CB}=(0,q,-r)$$
$$|\overrightarrow{CA}|^2=p^2+r^2, |\overrightarrow{CB}|^2=q^2+r^2$$
$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=r^2$$

である．よって三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2|\overrightarrow{CB}|^2-(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+r^2)(q^2+r^2)-r^4}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(pqr)^2(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2})}\\&=\frac{1}{2}\frac{pqr}{c} \qquad (\because (1),(2))\end{aligned}$$

である．(2) の値を代入して $S=\dfrac{c^2}{2ab(c-1)}$ だから，以下この最小値を求める．$a,b>0$ から，(1) に AM-GM を用いて

$$2ab\leq a^2+b^2=1-(c-1)^2=2c-c^2$$

である．等号成立は $a=b$ の時．したがって $c-1>0$ に注意して

$$\begin{aligned}S&=\frac{c^2}{ab(c-1)}\\&\geq\frac{1}{2c-c^2}\frac{c^2}{c-1}\\&=\frac{1}{3-(c+2/c)}\\&\geq\frac{1}{3-2\sqrt{2}} \qquad (\because\text{AM-GM})\\&=3+2\sqrt{2} \qquad (3)\end{aligned}$$

等号成立は $c=2/c$ つまり $c=\sqrt{2}$ のときである ($c>0$)．以上の等号成立条件を (1) に代入すれば $(a,b,c)=(\sqrt{\sqrt{2}-1},\sqrt{\sqrt{2}-1},\sqrt{2})$ となって条件 $a>0,b>0,c>1$ を満たす．故に求める最小値は (3) の $\min S=3+2\sqrt{2}\cdots$(答) である．