

第 1 問

[解]

(1) $n=4$ の時, 4つのものを 1, 2, 3, 4 (はじめの左からの位置) で表す.

2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 2 3
2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
2 3 4 1	3 4 2 1	4 3 2 1

の 9通り

(2) n の場所を左から a_1, a_2, \dots, a_n とする. n のものを n はじめの左からの位置に対応して 1, 2, ..., n とする. 対称性から $a_1=2, 3, \dots, n$ となる並べ方は等しいので, 以下 $a_1=2$ と考える.

1° $a_2=1$ の時

a_3, a_4, \dots, a_n は 3, 4, ..., n を問題で与えられた並べ方が良く, $D(n-2)$ 通り.

2° $a_2 \neq 1$ の時

$a_2 \in a_1$ とおきかえれば, 1° と同じく, $D(n-1)$ 通り

よって

$$D(n) = (n-1) \{ D(n-1) + D(n-2) \}$$

である. 問

第 2 問

[解] $n \in \text{even}$ とき $\dots \textcircled{1}$, $f_n(x) = x^n$, $g_n(x) = n^x$ とおく。

(1) $x < 0$ の時、 $t = -x$ とすると、 $t > 0$ である。

$$f_n(x) = g_n(x) \Leftrightarrow t^n = \left(\frac{1}{n}\right)^t \quad (\dots \textcircled{2})$$

両辺正から、自然対数をとって、

$$n \log t = -t \log n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log t}{t} = -\frac{\log n}{n} \quad (\because t, n > 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで、 $h(x) = \frac{\log x}{x}$ とおくと、 $h(x) = \frac{\log x - 1}{x^2}$ から下表を作る。

x	0		0	
h'		-	0	+
h		\nearrow		\searrow

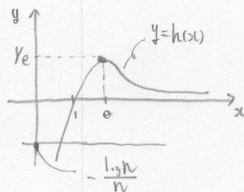
$$\left(\begin{array}{l} h(x) \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow +0) \\ h(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty) \end{array} \right)$$

よってグラフは左図。ここで、 $\textcircled{1}$ から、 $\frac{\log n}{n} > 0$ だから、

グラフから、 $\textcircled{2}$ で等号が成立する t が $0 < t < 1$ に

ただ1つ存在し、したがって C_1, C_2 は $x < 0$ に

ただ1つ交点を持つ。図



(2) $x > 0$ の時、 f, g 共に正だから、(1)と同様に

$$f_n(x) = g_n(x) \Leftrightarrow n \log x = x \log n \Leftrightarrow \frac{\log x}{x} = \frac{\log n}{n}$$

$\textcircled{1}$ から、 $\frac{\log n}{n} > 0$ だからグラフから、この方程式は $x > 0$ に2つある。 $\dots \textcircled{3}$

$x = 0$ の時、 $f_n(0) = 0$, $g_n(0) = 1$ から、 C_1, C_2 は交わらない。 $\dots \textcircled{4}$

C_1, C_2 の交点の数は $f_n(x) = g_n(x)$ の実解の数に等しいことと、 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ (1) から

あわせて 3_{\pm} の交点がある。

(3) $P_n(x_n, y_n)$ とおく。 ($0 < x_n < 1$) P_n の条件から、

$$y_n = (-x_n)^n = n^{-x_n} \quad \dots \textcircled{5}$$

である。(1)のグラフから、 $n \rightarrow \infty$ で $\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$ だから、 $\textcircled{3}$ より $\frac{\log x_n}{x_n} = \frac{\log n}{n}$ で

あることをあわせて、

$$\frac{\log x_n}{x_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

で、グラフ及び $0 < x_n < 1$ から、 $x_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) である。 $\dots \textcircled{6}$

⑤に⑥を代入して、

$$y_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \dots \textcircled{7}$$

だから、 $\textcircled{6}, \textcircled{7}$ より、 $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (-1, 0)$ である。

$$\left(\frac{1}{n}\right)^A < 1$$