原点を O とする xy 平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>0, b>0)$$

上の点 P における接線と 2 つの漸近線との交点を Q，R とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 QOR の面積 S は，点 P の取り方にはよらず，a，b によって定まることを示せ．

(2) $a=5e^{2t}+e^{-t}$，$b=e^{2t}+e^{-t}$ として実数 t を変化させるときの S の最小値を求めよ．

[**解**]

(1) 2 本の漸近線は $y=\pm\frac{b}{a}x$ であり，$P(X,Y)$ での双曲線の接線 l は

$$\frac{Xx}{a^2}-\frac{Yy}{b^2}=1$$

である．故にこれらの交点は

$$A=\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}, B=\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}$$

として

$$\left(\frac{a}{A},\frac{-b}{A}\right),\left(\frac{a}{B},\frac{b}{B}\right)$$

である．したがってサラスの公式から

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\frac{ab}{AB}+\frac{ab}{AB}\right|\\&=\frac{ab}{AB}\\&=ab \quad \left(\because AB=\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1\right) \quad (1)\end{aligned}$$

となる．これは X，Y によらない定数である．□

(2) $p=e^t$ とする．t が任意実数だから $p>0$ である．(1) に値を代入して

$$\begin{aligned}S&=(5p^2+p^{-1})(p^2+p^{-1})\\&=5p^4+6p+p^{-2} \qquad (2)\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dp}&=20p^3+6=\frac{2}{p^3}\\&=\frac{2}{p^3}(5p^3-1)(2p^3+1)\end{aligned}$$

となって，下表をうる．

p	0		$\left(\frac{1}{5}\right)^{1/3}$	
S'		$-$	0	$+$
S		$\searrow$		$\nearrow$

したがって (2) とあわせて

$$\begin{aligned}\min S&=5\left(\frac{1}{5}\right)^{4/3}+6\left(\frac{1}{5}\right)^{1/3}+5^{2/3}\\&=7\left(\frac{1}{5}\right)^{1/3}+5^{2/3}\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

となる．