京大理科数学 1974

120/150分

		計	思	術
1	多変数	A	A	A
2	多変数	B	B	B
3	関数	B	B	B
4	関数	B	B	B
5	整数 ☆	B	B	B
6	図形	A	C	B

第 1 問

[解] 3点 $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $B(\cos\beta, \sin\beta)$. $C(\cos\gamma, \sin\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ を考える. この外心は $(0,0)$ で, 題意から重心も $(0,0)$ である. 外心と重心が一致するのは正三角形なので, $\triangle ABC$ は正三角形.
(以上に $0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 2\pi$ を用いた).

従って

$$\beta - \alpha = \gamma - \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

[解2]

$\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$ に代入

$$2 + 2\cos(\beta - \alpha) = 1.$$

$$\cos(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

同様にして

$$\gamma - \alpha = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

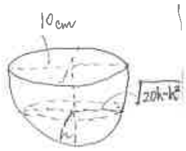
以上と $0 \leq \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$ から

$$\beta - \alpha = \frac{2}{3}\pi, \gamma - \alpha = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \gamma - \beta = \frac{2}{3}\pi$$

/20

第 2 問



[解] 時刻 t での水面の面積 S，水深 h とすると，
水の流出速度 k として

$$-k = S\frac{dh}{dt} \quad \cdots ①$$

ここで，

$$S = \pi(20h-h^2) \quad \cdots ②$$

又，題意から，

$$-v = \frac{dh}{dt}$$

であり，両辺積分して，$t=0$ で $h=10$ より，

$$h = 10 - vt \quad \cdots ③$$

(1) 題意の水量 $V(t)$ とすると，

$$V(t) = \pi\int_0^{10-h}(100-x^2)\,dx = \pi\left[100x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{vt} = \pi\left(100vt - \frac{1}{3}v^3t^3\right) \text{//}$$

(2) ①，②，③から

$$k = Sv = \pi v(20-h)h = \pi v(10+vt)(10-vt) = \pi v(100-v^2t^2) \text{//}$$

第 3 問

[解] $f_q(x)=x^4-6p^2x^2-8q^3x$ とおく．($p>0,\ q\geq 0$)

$f_q'(x)=4x^3-12p^2x-8q^3$ だから．$q=0$の時．下表を得る

x		$-\sqrt{3}p$		0		$\sqrt{3}p$	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f							

従って．Aのx座標は $-\sqrt{3}p\ (=x_0)$ である．又．$f_q''(x)=12(x^2-p^2)$から

下表を得る

x		$-p$		p	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f'	↗	$8(p^3-q^3)$	↘	負	↗

…$*$

従って qの値により下表をえる

1° $p>q$の時

$f_q'(-p)>0$ から．$f_q'(x)=0$なるxが3つある ($\alpha<\beta<\gamma$とする)

x		α		β		γ	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
f	↘		↗		↘		↗

この時Aが右のくぼみに落ちるのは $\beta\leq-\sqrt{3}p\leq\gamma$ ① の時である．

しかし．$*$から $-p<\beta$ であり．又$p>0$から $-\sqrt{3}p<-p$ だから

①がみたされることはなく．不適．

2° $p\leq q$ の時

$f_q'(-p)\leq 0$ から．$f_q'(x)=0$ なるxが唯1つ存在する(αとする)

x		α	
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

よって．Aが右のくぼみに落ちるのは $-\sqrt{3}p\leq\alpha$ つまり $f_q'(-\sqrt{3}p)\leq 0$

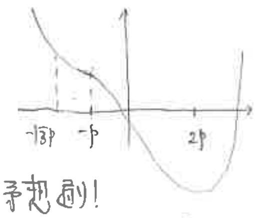
の時．

$f_q'(-\sqrt{3}p)=-8q^3\leq 0\quad \therefore\ q\geq 0$

したがって．$0<p$ から $p\leq q$の時．Aが右のくぼみにおちる

以上1°，2°から 求める $\min q=p$ である

[この時．$f'(x)=4(x^3-3p^2x-2p^3)=4(x+p)^2(x-2p)$ となり．．



⇒ 予想通り！]

/20

第4問

[解] (イ)から $F(x)$ は $n+1$ 次式だから、$a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ として

$$F(x) = (ax+b)\,g(x) \quad \cdots ①$$

とおける。(∵(ロ)) 両辺微分して

$$g(x) = a\,g(x) + (ax+b)\,g'(x) \quad \cdots ②$$

又、(ハ)から、$g(x) = x^n + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots$ となるから $g'(x) = nx^{n-1} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} \cdots$

となる。② において x^n, x^{n-1} の項を比較して

$$\begin{cases} x^n = ax^n + anx^n & \cdots ③ \\ 0 = 0 + bnx^{n-1} & \cdots ④ \end{cases}$$

$n>0$ と ③, ④ から、$b=0$, $a = \dfrac{1}{1+n}$ となるので $g(x) = y$ として

② に代入

$$\frac{n}{1+n}\,y = \frac{1}{n+1}\,x\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{n}{x}\,dx = \frac{1}{y}\,dy$$

両辺積分して

$$n\log x + C_1 = \log y \quad (C_1: \text{定数})$$

$$y = e^{C_1} x^n$$

$g(x)$ の x^n の係数は 1 だから $e^{C_1} = 1$ となり

$$g(x) = x^n$$

① から

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

/20

第5問

[解] (イ) $\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}$ は m について単調減少で (∵ $m, a, b>0$)

$m\to\infty$ で 0 に収束し、$m=1$ で $a+b$ をとるから、

1° $a+b<1$ の時.

$$4m<n^2<4m+\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}<4m+1$$

となり、これが解を持つとすると $4m$ と $4m+1$ の間に整数が存在することになり矛盾. よってこの時与不等式は解ナシ

2° $a+b\geqq 1$ の時

$\frac{a}{\sqrt{m_0}}+\frac{b}{m_0}\geqq 1>\frac{a}{\sqrt{m_0+1}}+\frac{b}{m_0+1}$ をみたす $m_0\in\mathbb{N}$ が存在する. $m\geqq m_0+1$ の時、1°と同じく与不等式は解なし. したがって解があるのは $1\leqq m\leqq m_0$ の時。さらにこの時、

$$4m<N<4m+\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}$$

をみたす $N\in\mathbb{N}$ は $\left[\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}\right]$ コであるから、全ての N に、$n\in\mathbb{Z}$ が 2つずつ対応していたとしても、n は $2\left[\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}\right]$ コである. 以上から解は多くとも

$$\sum_{m=1}^{m_0} 2\left[\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}\right] コ$$

であり、これは有限の値をとる.

以上1°、2°から示された■

(ロ) $4m<n^2<4m+\frac{8}{\sqrt{m}}+\frac{9}{m}$ $(m\geqq 9)$. …①

$f(x)=\frac{8}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x}$ とおく. $f'(x)=-\frac{4}{x\sqrt{x}}-\frac{9}{x^2}=\frac{-1}{x^2}(4\sqrt{x}+9)$

は $x\geqq 9$ の時負の値をとるから、$x\geqq 9$ で $f(x)$ は単調減少。これと $f(9)=\frac{11}{3}$ だから、$m\geqq 9$ の時、$f(m)\leqq\frac{11}{3}$ である. 従って①をみたす n^2 は

$$n^2=4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3$$

に限られる。ここで、mod 4 で考えると $n^2\equiv 0, 1$ だから、適するものは $n^2=4m+1$ に限られる■

(ハ) $n>0$ の時を考えれば良く、この時(ロ)から $n=\sqrt{4m+1}$、つまり n が最大の時 m が最大である。まず、$n^2=4m+1$ が解であるには

$$1<\frac{8}{\sqrt{m}}+\frac{9}{m}$$

$$\Leftrightarrow (m-9)^2<64m \quad (∵ m\geqq 9)$$

が必要。これをといて、$9\leqq m\in\mathbb{N}$ とあわせて

$$9\leqq m\leqq 80 \quad …②$$

だから

$$0<37\leqq 4m+1\leqq 321 \quad …③$$

であり、$36<37<49$ から $6<\sqrt{37}<7$、$289<321<324$ から $17<\sqrt{321}<18$

なので、③の両辺 $\sqrt{\ }$ をとって、$n\in\mathbb{N}$ から

$$7<n\leqq 17$$

従って $n=17$ をみたす m があれば、これが求める値で、$n^2=4m+1$ をといて計算すると $(n, m)=(17, 72)$ が求めるものである.

/20