無限級数 $\dfrac{r}{1-r^2}+\dfrac{r^2}{1-r^4}+\dfrac{r^4}{1-r^8}+\cdots+\dfrac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}+\ldots$ の和を求めよ．ただし $|r|\neq 0$ とする．

[**解**] 題意の無限級数 S の第 n 部分和を S_n とおく．

$$\frac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}=\frac{1}{1-r^{2^{n-1}}}-\frac{1}{1-r^{2^n}}$$

だから

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-r^{2^{k-1}}}-\frac{1}{1-r^{2^k}} \\ &= \frac{1}{1-r}-\frac{1}{1-r^{2^n}} \end{aligned}$$

である．故に $|r|$ で場合分けして

$$S=\begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & (|r|>1) \\ \dfrac{r}{1-r} & (|r|<1) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

となる．