空間内の店点の集合 $\{(x,y,z)|0\leq y, 0\leq z\}$ に含まれ，原点 O において x 軸に接し，xy 平面と 45° の傾きをなす，半径 1 の円板 C がある．座標が $(0,0,2\sqrt{2})$ の位置にある点光源 P により，xy 平面上に投ぜられた円板 C の影を S とする．

(1) S の輪郭を表す xy 平面上の曲線の方程式を求めよ．

(2) 円板 C と影 S の間に挟まれ，光の届かない部分のつくる立体の体積を求めよ．

[解]

(1) 点光源のある点を P とする．題意の曲線を C' とし，この上の点を $Q(X,Y,0)$ とする．題意から，C の中心は $R\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ であり，また C は平面 $y=z$ にあるから，C の外周 D 上の点 E の満たす式は

$$D:\begin{cases} y=z \\ |\overrightarrow{ER}|=1 \end{cases} \tag{1}$$

となる．Q の条件は，直線 PQ が D と交わることである．直線 PQ はパラメータを用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} X \\ Y \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

と表せるから，これは (1) を満たす t が存在することである．代入して

$$tY=2\sqrt{2}(1-t) \tag{2}$$

$$x^2+(y-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(z-\frac{\sqrt{2}}{2})^2=1 \tag{3}$$

$Y\geq 0$ に注意して (2) から t を消去して $t=\dfrac{2\sqrt{2}}{Y+2\sqrt{2}}$ である．これを (3) に代入して，

$$\frac{8X^2}{(Y+2\sqrt{2})^2}+2(\frac{2\sqrt{2}Y}{Y+2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2})^2=1$$

$$\therefore 8X^2+2(\frac{3\sqrt{2}}{2}Y-2)^2=(Y+2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore X^2+(Y-\sqrt{2})^2=2\cdots(\text{答})$$

これがもとめる C' の方程式である．

(2) 求める体積 V とすれば，

$$V=(\text{円錐 P-C'})-(\text{円錐 P-C}) \tag{4}$$

である．円錐 P-C' は底面積 $\sqrt{2}\sqrt{2}\pi=2\pi$，高さ $2\sqrt{2}$ の円錐で，この体積 V_1 として

$$V_1=\frac{1}{3}(2\sqrt{2})(2\pi)=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi \tag{5}$$

となる．次に円錐 P-C について，この高さは平面 $y=z$ と点 P の距離に等しく 2，底面積は半径 1 の円のそれ π である．故に体積 V_2 として

$$V_2=\frac{2}{3}\pi \tag{6}$$

(5)，(6) を (4) に代入して

$$V=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi\cdots(\text{答})$$

である．