区間 $1 \leq x \leq 3$ において次のように定義された関数 $f(x)$ がある．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (1 \leq x \leq 2) \\ x - 1 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

いま実数 a に対して，区間 $1 \leq x \leq 3$ における関数 $f(x) - ax$ の最大値から最小値を引いた値を $V(a)$ とおく．このとき次の問いに答えよ．

(1) a がすべての実数に渡って動くとき，$V(a)$ の最小値を求めよ．

(2) $V(a)$ の最小値を与えるような a の値を求めよ．

[解] $g(x) = f(x) - ax$ とおく．

$$g(x) = \begin{cases} -ax + 1 & (1 \leq x \leq 2) \\ (1-a)x - 1 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

である ($g(x)$ は連続)．a の値によって以下のようになる．

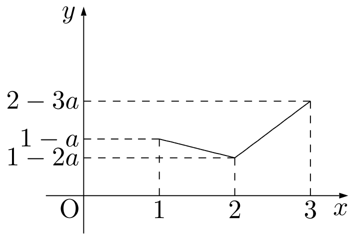
(i)$a \leq 0$ の時

$g(x)$ は増加関数だから，

$$V(a) = g(3) - g(1) = 1 - 2a$$

(ii)$0 \leq a \leq 1$ の時

$g(x)$ のグラフの概形は下図．



また

$$\begin{cases} g(3) \geq g(1) & (0 \leq a \leq 1/2) \\ g(3) \leq g(1) & (1/2 \leq a \leq 1) \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned} V(a) &= \begin{cases} g(3) - g(2) & (0 \leq a \leq 1/2) \\ g(1) - g(2) & (1/2 \leq a \leq 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - a & (0 \leq a \leq 1/2) \\ a & (1/2 \leq a \leq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

(iii)$1 \leq a$ の時

$g(x)$ は減少関数だから，

$$V(a) = g(1) - g(3) = 2a - 1$$

以上から，$\min V(a) = V(1/2) = 1/2$ である．$\cdots$(答)