京大理科数学1995

第 1 問

第 2 問

[解] $a, b \in \mathbb{N},\ a > b, \cdots ①$
$p, d \in \text{prime}\quad p > 2 \cdots ②$

$A = a^p - b^p$とおく、

$$A = (a-b)(a^{p-1} + \cdots + b^{p-1})$$

であり、$a-b \in \mathbb{N}$, $a^{p-1} + \cdots + b^{p-1} \in \mathbb{N} > 2$ ($\because$ ①) から、$A \in \text{prime}$には $a-b=1 \Leftrightarrow a=b+1$が必要。以下、$d-1 = (b+1)^p - (b^p+1)$が $2p$でわりきれることを示す。…☆

$1°$ $d-1 \equiv 0 \pmod 2$の証明

$(b+1)^p$, (b^p+1)の偶奇は一致するから、$d-1 \equiv 0 \pmod 2$ ■

$2°$ $d-1 \equiv 0 \pmod p$の証明

$k = 1, 2, 3, \cdots p-1$の時、

$${}_pC_r = \frac{1}{r}\,{}_{p-1}C_{r-1} \cdot p \in \mathbb{Z}$$

において、rはpと互いに素だから、${}_pC_r$はpの倍数であるから

$$d-1 = {}_pC_1 \cdot b^{p-1} + \cdots + {}_pC_{p-1} \cdot b \equiv 0 \pmod p \quad ■$$

以上$1°$, $2°$から dは $2p$でわって 1あまる ■

[別解]

(フェルマーの小定理を証明した上で) が以下

$$a^p - b^p \equiv a - b \equiv 1 \pmod p$$

[フェルマーの小定理の証明の再掲]

① ウィルソンを経由

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \pmod p$$
$$(p-1)! \cdot a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod p$$
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

② 帰納法 ($n^p \equiv n$)

㋐ $(m+1)^p \equiv m^p + 1 \pmod p$を用いる方法と

㋑ $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p$から

$$a^p \equiv (1 + \cdots + 1)^p \equiv \cdots \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 = a$$

とする方法

第 3 問

[解] 3交点のx座標を小さい順にα, β, γとおく。

又 $f(x)=ax^2+bx+c$とする。

$$x^3-f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad \cdots ①$$

各点での接線l_1, l_2, l_3として、これらは

$$y=3k^2x-2k^3 \quad (k=\alpha, \beta, \gamma) \quad \cdots ②$$

で表される。②がPを通ることから

$$2k^3-3pk^2+q=0 \quad \cdots ③$$

したがって、α, β, γはkの3次式③の3実解で、①から

$$x^3-f(x)=x^3-\frac{3}{2}px^2+\frac{q}{2}$$

係数比較して

$$a=\frac{3}{2}p,\ b=0,\ c=-\frac{1}{2}q \quad (1)$$

(2) p, qの条件はxの3次方程式 $x^3-\frac{3}{2}px^2+\frac{1}{2}q=0$ ④ が3異実解を持つこと。④の左辺$g(x)$とおく。$g'(x)=3x^2-3px$から、pによって下のようになる

1° $p=0$の時

$g'(x)\geqq 0$となり、$g(x)$は単調増加し、④が3異実解を持つことはない。

2° $p>0$の時

x		0		p	
g'	$+$	0	$-$	0	$+$
g	↗		↘		↗

上図から条件は

$$g(0)>0 \wedge g(p)<0$$

$$\Leftrightarrow \ q>0 \wedge -p^3+q<0$$

3° $p<0$の時

2°と同様に、条件は

$$g(p)>0 \wedge g(0)<0 \Leftrightarrow q<0 \wedge -p^3+q>0$$

以上まとめて

$$\begin{cases} p>0,\ 0<q<p^3 \\ \text{又は} \\ p<0 \quad p^3<q<0 \end{cases}$$

//

第 4 問

第 5 問

[解] (1) 題意のようになるのは、1人目がどちらの席にすわるか場合分けして考えて、確率P_1として

$$P_1 = \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{10} + \frac{2}{12}\cdot\frac{1}{8} = \frac{9}{240} = \frac{3}{80}$$ //

(2) 席のうまる順番は

。(2, 4, 6) (6, 4, 2) …①

。(2, 6, 4) (6, 2, 4) …②

。(4, 2, 6) (4, 6, 2) …③

2と6の対称性から、①②③の2つの順番がおこる確率は、いずれも等しく、排反だから、これらのおこる確率の和が求める確率P_2である

①の時 $\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{81}$

②の時 $\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{81}$

③の時 $\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{72}$

より、

$$P_2 = 2\left(\frac{1}{81} + \frac{1}{81} + \frac{1}{72}\right) = \frac{25}{324}$$ //

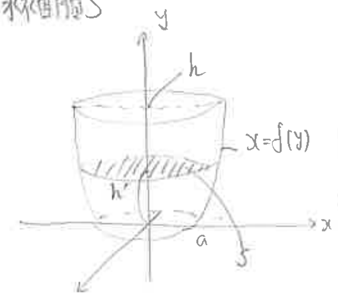
第 6 問

[解] 時刻tでの水深h', 水表面積S

とおくと

$$V = S\frac{dh'}{dt} \quad \cdots ①$$

$$S = Vt + \pi a^2$$
$$= \pi f(h')^2 \quad \cdots ②$$



②と$f(y) > 0$から

$$f(h') = \sqrt{a^2 + \frac{V}{\pi}t} \quad \cdots ③$$

②を①に代入, セイリして

$$\frac{V}{Vt + \pi a^2}dt = dh'$$

積分して, Cを定数とすると

$$\log\left(t + \frac{\pi}{V}a^2\right) = h' + C$$

$t=0$で$h'=0$だから, $C = \log\frac{\pi}{V}a^2$なので, 代入して

$$t = e^{h'} \cdot e^{C} - \frac{\pi}{V}a^2$$
$$= \frac{\pi}{V}a^2\left(e^{h'} - 1\right) \quad \cdots ④$$

$t=T$で$h'=h$だから

$$T = \frac{\pi}{V}a^2\left(e^{h} - 1\right)$$
//

④を③に代入し, h'をyでおきかえて

$$f(y) = ae^{\frac{y}{2}}$$
//

[この時

$$h' = \log\left(\frac{Vt}{\pi a^2} + 1\right), \quad S = \pi a^2 e^{h'} = \pi a^2\left(\frac{Vt}{\pi a^2} + 1\right)$$

より①に代入

$$V = (Vt + \pi a^2)\,\frac{\pi a^2}{Vt + \pi a^2} \cdot \frac{V}{\pi a^2} = V$$

⇒あってそう]