a，b，c を相異なる数，x，y，z を連立方程式

$$x + ay + a^2z = a^3, x + by + b^2z = b^3, x + cy + c^2z = c^3$$

の根とするとき，$a^3 + b^3 + c^3$ を x，y，z で表せ.

[解] 題意から a，b，c は t の 3 次式 $t^3 - zt^2 - yt - x = 0$ の異 3 実解である．解と係数の関係から

$$\begin{cases} a + b + c = z & \text{(1a)} \\ bc + ca + ab = -y & \text{(1b)} \\ abc = x & \text{(1c)} \end{cases}$$

である．(1a)，(1b) から

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(bc + ca + ab) \\ &= z^2 + 2y \end{aligned}$$

したがって与式から

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + c^3 \\ =&3x + (a + b + c)y + (a^2 + b^2 + c^2)z \\ =&3x + zy + (z^2 + 2y)z \\ =&z^3 + 3yz + 3x \cdots (答) \end{aligned}$$

である.