原点 O に中心を持つ半径 2 の固定された円板を A とする．半径 1 の円板 B を，その中心 C が点 $(3, 0)$ に重なるように置くとき，点 $(4, 0)$ に重なる B の周上の点を M とする．B を，A の周囲にそって滑らないように転がして，OC が x 軸の正の方向と成す角が θ になったときの，M の位置の座標を (X, Y) とする．

θ が 0 から $\pi/2$ まで動くとして，次の問いに答えよ．

(1) X と Y とを θ の関数として表せ．

(2) Y の最大値を求めよ．

(3) M の描く曲線の弧の長さを求めよ．

[解] $\cos\theta = c$，$\sin\theta = s$ とおく． グラフの概形は下図.

従って，

$$\begin{cases} X = 3c + \cos 3\theta = 3c^3 \\ Y = 3s + \sin 3\theta = 6s - 4s^3 \end{cases}$$

である．$\cdots$(答)

従って，

$$\begin{cases} X' = -9c^2 s \\ Y' = 6c(1 - 2s^2) \end{cases}$$

であり，下表を得る．

θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$
X'	0	$-$	$-$	$-$	0
Y'	$+$	$+$	0	$-$	0
(X, Y)	$(4, 0)$	$\nwarrow$	$(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$	$\swarrow$	$(0, 2)$

従って，$\max Y = 2\sqrt{2}$ である．$\cdots$(答)

さて，求める孤長 L とすると，

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{X'^2 + Y'^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{81c^4 s^2 + 36c^2(1 - 2s^2)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36c^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} 6c\, d\theta \quad (\because c \geq 0) \\ &= 6 \end{aligned}$$

である．$\cdots$(答)