1 つの頂点から出る 3 辺の長さが x，y，z であるような直方体において，x，y，z の和が 6，全表面積が 18 であるとき，

(i) x のとりうる値の範囲を求めよ．

(ii) このような直方体の体積の最大値を求めよ．

[解] まず題意から

$$\begin{cases} x, y, z > 0 & \text{(1a)} \\ x + y + z = 6 & \text{(1b)} \\ yz + zx + xy = 9 & \text{(1c)} \end{cases}$$

となる．

(i) まず $s = y + z$，$t = yz$ として，y，z の存在条件を考える．(1b)，(1c) から

$$\begin{cases} s = 6 - x \\ t = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \quad (2)$$

となる．

さて，(1a)，(2) から y，z は p の 2 次方程式

$$p^2 - sp + t = 0$$
$$\Longleftrightarrow p^2 - (6 - x)p + (x^2 - 6x + 9) = 0$$

の正 2 実解であるから，判別式 D として

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ s, t > 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (6 - x)^2 - 4(x^2 - 6x + 9) \geq 0 \\ 6 - x > 0 \\ x^2 - 6x + 9 > 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (6 - x)^2 - 4(x^2 - 6x + 9) \geq 0 \\ 6 - x > 0 \\ x^2 - 6x + 9 > 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x < 6 \\ x \neq 3 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow 0 \leq x < 3, 3 < x \leq 4 \quad \text{(答)}$$

となる．

(ii) $a = x + y + z$，$b = yz + zx + xy$，$c = xyz$ とおく．すると x，y，z は p の 3 次方程式

$$p^3 - ap^2 + bp - c = 0$$
$$\Longleftrightarrow p^3 - 6p^2 + 9p - c = 0 \quad (3)$$

の正実解である．故にこれが正の 3 実解 (重解含む) をもつ条件を求める．

(3) が正の 3 実解を持つ．
$\Longleftrightarrow y = f(p) = p^3 - 6p^2 + 9p$ と $y = c$ が $0 < p$ に 3 つの共有点 (重解含む) を持つ．

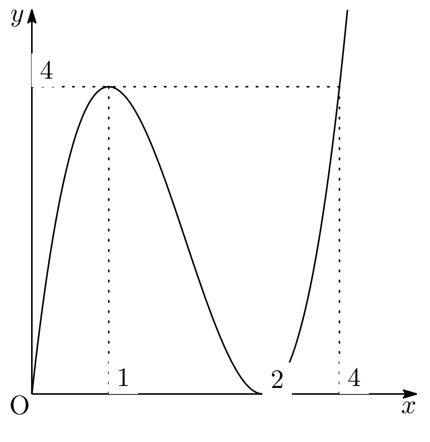
である．

$$f'(p) = 3p^2 - 12p + 9$$
$$= 3(p - 1)(p - 3)$$

であるから下表を得る．

p		1		3	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

従って，$y = f(p)$ のグラフは下のようになり，故に c の値域は $0 \leq c \leq 4$ である．



さて，直方体の体積は c に等しいから $\max c = 4 \cdots$ (答) である．

[別解]

[解] と同様に，x，y，z は p の 3 次方程式 $p^3 - 6p^2 + 9p - c = 0$ の正の 3 実解であるから，$y = f(p)$ と $y = c$ の共有点の p 座標である．ゆえにグラフから，x の値域は $0 < x \leq 4$ である．$\cdots$ (答)