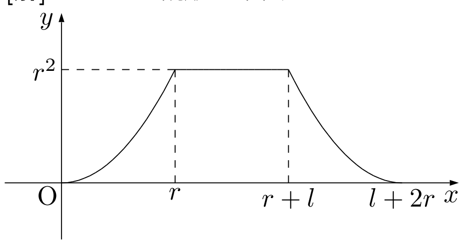
負でない実数 r，l に対して，xy 平面上の曲線

$$y = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x \leq r) \\ r^2 & (r \leq x \leq l+r) \\ (x-l-2r)^2 & (l+r \leq x \leq l+2r) \end{cases}$$

を考え，これを x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を V とする．r^2 と l の和が正の定数 c になるように r と l を変化させるとき，V の最大値を与えるような r と l の値を求めよ．

[解] グラフの概形は下図．



また，題意の条件から

$$r^2 + l = c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．求める体積は，対称性から

$$\frac{V}{\pi} = 2\int_0^r (x^2)^2\,dx + (r^2)^2 l$$

であるから①を代入して

$$\frac{V}{\pi} = 2\int_0^r x^4\,dx + r^4(c-r^2) \equiv f(r)$$

として

$$\begin{aligned} f'(r) &= 2r^4 + 4cr^3 - 6r^5 \\ &= 2r^3(-3r^2 + r + 2c) \end{aligned}$$

である．ただし，$l, r \geq 0$ から，

$$0 \leq r^2 \leq c$$
$$0 \leq r \leq \sqrt{c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．ここで

$$-3r^2 + r + 2c = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

の 2 実解を α，β とする．$(\alpha < \beta)$

$f(0) = 2c > 0$ だから，$\alpha < 0 < \beta$ であり，

$$\beta = \frac{1+\sqrt{1+24c}}{6} \leq \sqrt{c}$$

$$1 + \sqrt{1+24c} \leq 6\sqrt{c}$$
$$2 + 24c + 2\sqrt{1+24c} \leq 36c$$
$$0 \leq c(c-1)$$

に注意して，c の値によって場合分けする．

(i)$1 \leq c$ の時

下表を得る．

r	0		β		$\sqrt{c}$
f'		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

従って，$r = \beta$ のとき V は最大．

(ii)$0 < c \leq 1$ の時

下表を得る．

r	0		$\sqrt{c}$
f'		$+$	
f		↗	

故に $r = \sqrt{c}$ のとき V は最大．

以上および①にも注意して，

$$c \geq 1 \quad \begin{cases} r = \dfrac{1+\sqrt{1+24c}}{6} \\ l = \dfrac{6c-1-\sqrt{1+24c}}{18} \end{cases}$$

$$0 < c \leq 1 \quad \begin{cases} r = \sqrt{c} \\ l = 0 \end{cases}$$

のとき V は最大である．$\cdots$(答)