京大 理科数学 1984

1二/120分

		計	思	総
[1]				
[2]	関数	B	D	D
[3]	多変数	B	B	B
[4]	多変数 ☆(1)	B	C	B
[5]	確立 ☆	C	C	C
[6]	関数	A	A	A

第 1 問

/2

第 2 問

[解]

(1) $f(x+2\pi) = \sin(\sin(x+2\pi)) = \sin(\sin x) = f(x)$ から、

$f(x)$は周期関数である. 以下周期が2πであることを示す.

$0 < c < 2\pi$, $f(x+c) = f(x)$ をみたすcがあるとすると

$$\sin(x+c) = \sin x + 2n\pi,\ -\sin x + (2n+1)\pi\ (n \in \mathbb{Z})$$

と表せるが. $-1 \leq \sin(x+c), \sin x \leq 1$, $\pi \fallingdotseq 3.14$ から. これをみたすnは0のみである

$$\sin(x+c) = \pm\sin x$$

これを任意のxでみたす $c\ (0<c<2\pi)$ は存在せず. 矛盾 …☆

よって周期は2πである ■

(2) (1)と同じく. $c = 2\pi$とすれば $f(x)$ は周期関数であるから.

以下周期が2πであることを示す. $0 < c < 2\pi$. $f(x+c) = f(x)$をみたすcがあるとすると

$$\cos(\sin(x+c)) = \cos(\sin x)$$

$$\cos(x+c) = \cos x + 2n\pi,\ -\cos x + 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$$

$-1 \leq \cos(x+c). \cos x \leq 1$から. $n=0$で.

$$\cos(x+c) = \pm\cos x$$

これを任意のxでみたすcは存在せず. 矛盾。よって周期は2πである■

(3) $f(x+c) = f(x)$ をみたす $c\ (0<c)$が存在するとすると. $x=0$での成立が必要で.

$$\sin c^3 = \sin 0 = 0$$

$$\therefore c^3 = \sqrt[3]{n\pi}\ (n \in \mathbb{N})$$

とおける さらに. $0<x<\sqrt[3]{\pi}$の時. $f(x) \neq 0$ だから $c < x < c + \sqrt[3]{\pi}$ でも$f(x) \neq 0$ であることが必要 だが. $x = \sqrt[3]{(n+1)\pi}$ はこれをみたし. $f(\sqrt[3]{(n+1)\pi}) = 0$だから.矛盾. よって.$f(x)$は周期関数ではない ■

[(1), (2)は $-\frac{\pi}{2} < \sin x < \frac{\pi}{2}$ と言うと早いか (by 採)]

/20

[解](1) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix}2\\2t\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ から.

$PQ: \{x-(t+1)\}t-(y-t)=0$

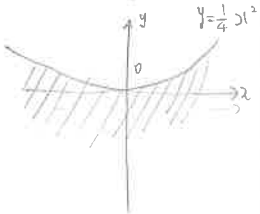
とおける. セイリして

$t^2-xt+y=0 \quad \cdots①$

をみたす $t\in\mathbb{R}$ が存在するので. 判別式Dとして $D\geq 0$.

$x^2-4y\geq 0$

これを図示して. 右図斜線部

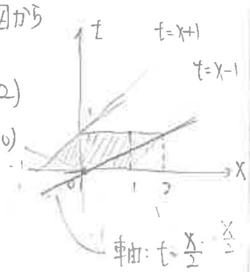


(2) ①から

$y=f(x)=-t^2+xt \quad (0\leq t\leq 1,\ t-1\leq x\leq t+1)$

をみたす (x,y) をもとめる. $x=X$ と固定し右辺 $g(t)$ の値域をもとめる. $(X-1\leq t\leq X+1)$. 右図から

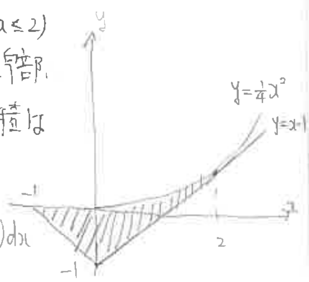
$$\begin{cases} g\left(\frac{X}{2}\right)\geq y\geq g(1) & (0\leq X\leq 2) \\ g(0)\geq y\geq g(X+1) & (-1\leq X\leq 0) \end{cases}$$



だからXをうごかして

$$\begin{cases} -x-1\leq y\leq 0 & (-1\leq x\leq 0) \\ x-1\leq y\leq \frac{1}{4}x^2 & (0\leq x\leq 2) \end{cases}$$

より、この領域は右図斜線部(境界含む)でもとめる面積は



$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^2-x+1\right)dx$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2^3$

$=\frac{7}{6}$

/20

第4問

[解] (1) (与式左辺) $= v\overrightarrow{AB} + w\overrightarrow{AC} + (u-v-w)\overrightarrow{OA}$ である.

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ はどの2つも平行でないから $u-v-w \neq 0$ の時

与式左辺の表す点 O' は O と異なる平面にあり不適. よって $u-v-w=0$

である. このもとで $v\overrightarrow{AB}+w\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ となる時を考える. …☆

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ とおける ($\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}$) からこの時

$$\begin{cases} v x_1 + w x_2 = 0 \\ v y_1 + w y_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} v(x_1y_2-y_1x_2)=0 \\ w(y_1x_2-x_1y_2)=0 \end{cases}$$

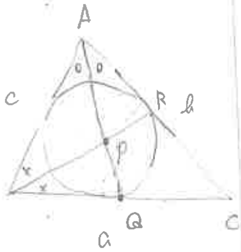
$\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}$ から $x_1y_1-x_2y_1\neq0$ だから $v=w=0$. これを $u-v-w=0$

に代入して $u=0$. よって, 題意の時, $v=u=w=0$ である ■

[$v\overrightarrow{AB}+w\overrightarrow{AC}=(u-v-w)\overrightarrow{AO}$ とすれば☆は自明だがそこまでしなくても良い気はする]

(2) AP と BC の交点 Q, BP と AC の交点 R

を各点 X に対し $\overrightarrow{AX}=\vec{x}$ とおく



$\vec{q}=\frac{b}{b+c}\vec{b}+\frac{c}{b+c}\vec{c}$

$\vec{r}=\frac{c}{a+c}\vec{c}$

P は AP, BC 上の点だから $k, l\in\mathbb{R}$ として

$\vec{p}=k\left(\frac{b}{b+c}\vec{b}+\frac{c}{b+c}\vec{c}\right)$

$=(1-l)\vec{b}+l\frac{c}{a+c}\vec{c}$ …①

(1) と同様にして $\vec{c}\not\parallel\vec{b}$ の時 $v\vec{c}+u\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow v=u=0$

だから ①より

$$\begin{cases} 1-l=k\frac{b}{b+c} \\ l\frac{c}{a+c}=k\frac{c}{b+c} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} k=\frac{b+c}{a+b+c} \\ l=\frac{a+c}{a+b+c} \end{cases}$$

①に代入してからセイリして

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})$

だから, (1)から同様に

$u=\frac{a}{a+b+c}$

$v=\frac{b}{a+b+c}$

$w=\frac{c}{a+b+c}$ //

/20

$i-1$

第 5 問

[解] i回目で勝負がきマルとき. $1 \le i \le S+1$ であるから. 以下このもとで考える …①

(1) i回目に勝者が決まる確立は, $S=0$の時 $P_1=1$, $S \ge 1$の時 $i=1$なら $P_i = \frac{r}{r+s}$, $i \ge 2$なら

$$P_i = \frac{s}{r+s} \cdot \frac{s-1}{r+s-1} \cdots \frac{s-(i-2)}{r+s-(i-2)} \cdot \frac{r}{r+s-(i-1)}$$

だから $i=2,3,\cdots s$の時 一部をAとして,

$$P_i - P_{i+1} = A\frac{r}{r+s-(i-1)} - A\frac{s-(i-1)}{r+s-(i-1)}\cdot\frac{r}{r+s-i}$$

$$= Ar\frac{r-1}{(r+s-i)(r+s-i+1)} \ge 0 \quad \cdots *_1$$

$i=1$の時

$$P_1 - P_2 = \frac{r}{r+s} - \frac{s}{r+s}\cdot\frac{r}{r+s-1} \ge 0 \ (\because S \ge 1) \cdots *_2$$

以上から. $P_i \ge P_{i+1}$ である図

(2) Aが勝者となるのは. $2k-1$ ($k \in \mathbb{N}$, $1 \le 2k-1 \le S+1$) 回目にはじめて赤玉を引く確立で. これをP_A, Bが勝者となる確立 P_Bとおくと

1° $S = 2s'-1$ ($s' \in \mathbb{N}$)の時

$$\begin{cases} P_A = P_1 + P_3 + \cdots + P_{2s'-1} \\ P_B = P_2 + P_4 + \cdots + P_{2s'} \end{cases}$$

であり. (1)から $P_1 \ge P_2$, $\cdots$ $P_{2s'-1} \ge P_{2s'}$とした式を辺々たしあわせて

$$P_A \ge P_B$$

これと $P_A + P_B = 1$ から. $P_A \ge \frac{1}{2}$

2° $S = 2s'$ ($s' \in \mathbb{N}_0$)の時

$$\begin{cases} P_A = P_1 + P_3 + \cdots + P_{2s'-1} + P_{2s'+1} \\ P_B = P_2 + P_4 + \cdots + P_{2s'} \end{cases}$$

であり. 同様に$P_1 \ge P_2$, $\cdots$ などとした式と. $P_{2s'+1} \ge 0$から.

$$P_A \ge P_B \quad \therefore \quad P_A \ge \frac{1}{2} \ (\because P_A + P_B = 1)$$

3° $S=0$の時

Aが1回目で勝利するから $P_A = 1$

以上から $P_A \ge \frac{1}{2}$ であり. 等号が成立するのは

1°の時の. $P_i \ge P_{i+1}$ ($i = 1, 2, \cdots 2s'-1$)とした式全てで等号が成立する時である. この時 まず $i=1$での成立が必要で. $*_2$の等号が成立し, $r \ge 1$, $S \ge 0$から. $r=1$が必要. この時. $S=1$なら十分. $S \ge 3$の時 $*_1$での等号もiによらず成立し. $r=1$である.

よって. もとめる条件は $r=1$, $S \in \text{odd}$

第 6 問

[解] $k \geq 0$ である

(1) $F(x)=f(x)-x$ とおくと. $F'(x)=f'(x)-1<0$ ($\because$ (ハ)) から. $F(x)$ は単調減少. これと $F(a)=f(a)-a \geq a-a=0$, $F(b)=f(b)-b \leq 0$ から. $F(x)=0$ をみたす x が $[a, b]$ の中に唯1つ存在し これが c_0 に他ならない ■

(2) 平均値の定理から $d_n \neq c_0$ のとき.

$$f(d_n)-f(c_0)=f'(p)(d_n-c_0)$$

をみたす $f'(p)$ がある (ハ) から $|f'(p)| \leq k$ だから. 両辺絶対値をとって 整理して.

$$|d_{n+1}-c_0| \leq k|d_n-c_0| \quad (\because f(d_n)=d_{n+1}, f(c_0)=c_0)$$

くり返し用いて

$$|d_n-c_0| \leq k^n|d_0-c_0|$$

又. $d_n=c_0$ の時. 明らかに成立.

以上から示された ■

/20