放物線 $y=x^2$ を C_1 とし，C_1 上に両端をもつ長さ 1 の線分の中点の軌跡を C_2 とする．C_1, C_2 および 2 直線 $x=\pm a$ $(a>0)$ で囲まれる部分の面積を S_a とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S_a$ を求めよ．

[解]

(1)

0.1　C_2 の軌跡

まず，C_2 の軌跡を求める．題意の直線の 2 端点 $\mathrm{P}(\alpha,\alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とおく．この概形は fig. 1 である．

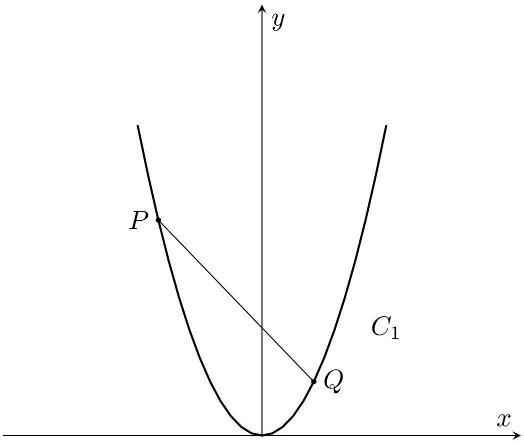

図 1　C_1 の概形

$|PQ|>0$, $|PQ|=1 \iff |PQ|^2=1$ だから，

$$(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2=1$$
$$\therefore(\beta-\alpha)^2\left[1+(\alpha+\beta)^2\right]=1 \tag{1}$$

ここで，$p=\alpha+\beta$, $q=\beta-\alpha$ とおく．$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ および $\alpha<\beta$ から

$$q>0 \tag{2}$$

となる．題意の中点を $M(X,Y)$ とすると

$$X=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{p}{2} \tag{3}$$
$$Y=\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)=\frac{1}{4}\left[(\alpha+\beta)^2+(\beta-\alpha)^2\right]=\frac{1}{4}\left(p^2+q^2\right) \tag{4}$$

となることに注意する．さらに，eq. (1) を p と q で書くと

$$q^2(1+p^2)=1$$
$$\therefore q^2=\frac{1}{1+p^2}\quad(\because 1+p^2\neq 0)$$

で，これは eq. (2) を満たす．eqs. (3) and (4) に代入して p および q を消去して X,Y の関係を求めれば，それが求める軌跡である．eq. (3) から $p=2X$ だから，eq. (4) から，

$$\begin{aligned}Y&=\frac{1}{4}\left(p^2+1/(1+p^2)\right)\\&=\frac{1}{4}\left((2X)^2+1/(1+(2X)^2)\right)\\&=\frac{1}{4}\left((4X^2+1/(1+4X^2)\right)\end{aligned}$$

である，これが C_2 の軌跡である．X はすべての実数を取る．

0.2　S_a の極限値

以上より，求める面積 S_a は fig. 2 の斜線部である．

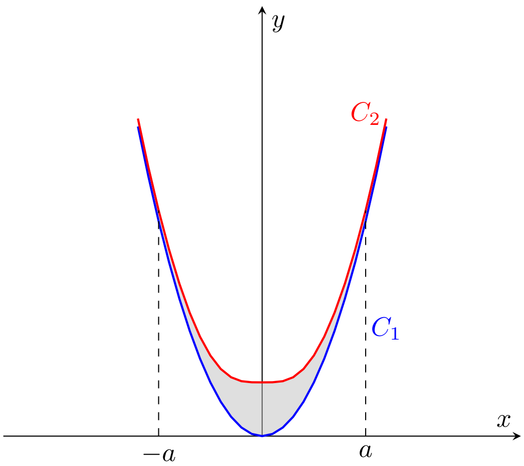

図 2　C_1 と C_2 の概形

C_1 と C_2 が偶関数だから，$0\leq x$ の部分の面積の 2 倍が求める面積であり，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_a&=\int_0^a\left(x^2+\frac{1}{4(1+4x^2)}-x^2\right)dx\\&=\frac{1}{4}\int_0^a\frac{1}{1+4x^2}dx\end{aligned} \tag{5}$$

ここで，$x=\frac{1}{2}\tan\theta$ $(0\leq\theta<\pi/2)$ とすると，$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{2\cos^2\theta}$，又 $a=\frac{1}{2}\tan\alpha$ となる α があるので，eq. (5) に

代入して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_a &= \frac{1}{4}\int_0^\alpha \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{a2\cos^2\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{8}\int_0^\alpha d\theta \\ &= \frac{\alpha}{8} \\ \therefore S_a &= \frac{\alpha}{4} \qquad (6)\end{aligned}$$

と面積が求まる．$a = \frac{1}{2}\tan\alpha$ より，$a \to \infty$ で $\alpha \to \pi/2$ だから，eq. (6) の極限は

$$\lim_{a\to\infty} S_a = \frac{1}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

となる．$\cdots$(答)

[解説]