

東大理科数学 1970

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

第1問

[解] (1) $a^k=1$ から、 $k=0,1,2,3,4,5$ に対し、 $a^{6n+k}=a^k$ ($n \in \mathbb{N}$) だから、 $k=0,1,2,3,4,5$ のみをしるだけが良い。しかし、 a^k はいずれも異なるので、
コ

(2) 各同式の法を6とする、式をIとする。

$$\left\{ \begin{array}{l} h \equiv 0, \pm 2, 3 \text{ の時 } I=0 \\ h \equiv \pm 1 \text{ の時 } I=1 \end{array} \right. \quad \text{---}$$

である。

[解]

(1) 4回操作した時、 $x = \pm 1, \pm 3$ にある確率は明らかに0である。 --- ①又、 $x = \pm 2$ にいる確率は等しく、 $\frac{{}_4C_1}{2^4}$ (表か3回) $= \frac{1}{4}$ --- ② $x = \pm 4$ " $\frac{{}_4C_0}{2^4}$ (表か4回) $= \frac{1}{16}$ --- ③①、②、③より、 $x = 0$ にいる確率は $1 - 2(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}) = \frac{3}{8}$ となる。

以上をまとめて、

$$\begin{cases} x = \pm 1, \pm 3 & \dots 0 \\ x = 0 & \dots 3/8 \\ x = \pm 2 & \dots 1/4 \\ x = \pm 4 & \dots 1/16 \end{cases}$$

(2) $x = n-2$ にいるのは、 $n-1$ 回表が出た時で、 $\frac{{}_n C_{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2^n}$ --- $x = n-4$ " $n-2$ 回表が出た時で、 $\frac{{}_n C_{n-2}}{2^n} = \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}$ ---

n-1

第 3 問

$$\frac{1}{4}t - \frac{3}{2} = 0 \quad t=6$$

[解] 時刻 t での A, B の位置を $x_A(t), x_B(t)$ とし, $x_A(0) = 0, x_B(0) = 25$ とする。

$$\begin{cases} x_A(t) = \int_0^t u dt + x_A(0) = ut \\ x_B(t) = \int_0^t v dt + x_B(0) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 25 \end{cases}$$

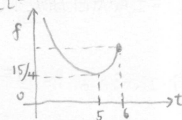
とわかる。 $x_B(t) \leq 25 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 6$ である。 ($\because t \geq 0$) A が B においつくには、 $y = x_A(t), y = x_B(t)$ のグラフが $0 < t < 6$ で少なくとも 1 回交わる必要がある。

$$x_A(t) = x_B(t)$$

$$\therefore u = \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{25}{t} \equiv f(t) \quad (\because t > 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{とすると, } f'(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2} - \frac{25}{t^2} = \frac{(t-5)(t^2+2t+10)}{2t^2} \text{ と表せる。}$$

t	0	5	6
f'		-	+
f		$\searrow \frac{15}{4}$	$\nearrow \frac{25}{6}$



よって $f(t) \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow 0$) とあわせて、グラフは右図。したがって、かつ

$0 < t < 6$ でみたす t が存在する u の条件は

$$\frac{15}{4} \leq u$$

よって、もとめる $\min u = \frac{15}{4} \text{ [m/s]} \quad \rightarrow$ である。

第 4 問

[解]

(1) 時刻 $t=0$ に穴をひいた水の、時刻 t での位置 (X, Y) とする。

ただし、右の方向に X 平面をとる。

$$\begin{cases} X = \sqrt{2gh} t \\ Y = a - h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$\sqrt{2gh} \neq 0$ から、 t を消して

$$Y = -\frac{1}{2}g \frac{X^2}{2gh} + a - h$$

$$= -\frac{1}{4h}X^2 - h + a \quad \dots \textcircled{1}$$

したがって、水が到達する時は $X = 2\sqrt{h(a-h)}$

(2) (1) の値を最大にするのは $h = \frac{1}{2}a$ かつ、水槽の中心

(3) ①で $0 < h < a$ とするときの (X, Y) の値を考える。

$$Y' = -1 + \frac{X^2}{4h^2}$$

だから、下表を作る。(1) から $0 \leq X < a$)

h	0	$\frac{X}{2}$	a
Y'		+	0
Y	$(-\infty)$	$a - X$	$-\frac{X^2}{4a}$

よって $0 < Y$ かつ、

$$0 < Y \leq a - X$$

がもとめる領域である。

