xyz 空間において，不等式 $0 \leq z \leq 1+x+y-3(x-y)y$，$0 \leq y \leq 0$，$y \leq x \leq y+1$ の全てを満足する x，y，z を座標に持つ点全体が作る立体の体積を求めよ．

[解]y を固定して考える．するとこの平面内では,

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq (1-3y)x+(1+y+3y^2) \equiv f(x) \\ y \leq x \leq y+1 \end{cases}$$

となる．$f(y)=1+2y>0$，$f(y+1)=2-y>0$ ゆえ，断面の概形は以下のようになる．

したがって，この平面内での題意の立体の断面積 $S(y)$ は

$$S(y)=\frac{1}{2}\{(2y=1)+(2-y)\}=\frac{y+3}{2}$$

だから，求める体積 V は

$$V=\int_0^1 S(y)dy=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y^2+3y\right]_0^1=\frac{7}{4} \quad (\text{答})$$

である．

図が欲しい