1990. T. K. 後

第 1 問

[解] $f(x)=(x+1)(x-2)$. $g(x)=1+5x$ とおく. 題意から.

$g(x)\in\mathbb{Z}$, $g(x)-\frac{1}{2}\leq f(x)<g(x)+\frac{1}{2}$ …① をみたす $x\in\mathbb{R}$ を

もとめれば良い。$g(x)\in\mathbb{Z}$ から $5x\in\mathbb{Z}$. つまり. $x=\frac{t}{5}$ $(t\in\mathbb{Z})$

とかける. 不等式に代入

$$1+t-\frac{1}{2}\leq\left(\frac{t}{5}+1\right)\left(\frac{t}{5}-2\right)<1+t+\frac{1}{2}$$

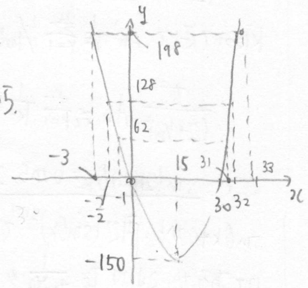
$$t+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{25}t^2-\frac{1}{5}t-2<t+\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 125\leq 2t^2-60t<175. \quad \cdots ②$$

$y=2x^2-60x$ のグラフから. ②を

みたす $t\in\mathbb{Z}$ は $t=32,-2$ だから.

$x=\frac{32}{5},\ -\frac{2}{5}$



$2\cdot225-60\cdot15$

$-30\cdot15$

$\frac{1}{25}t^2-\frac{6}{5}t-\frac{5}{2}\geq0$

$t^2-30t-\frac{125}{2}\geq0$

$2t^2-60t-125\geq0$

$5\cdot25$

$\frac{1}{25}t^2-\frac{6}{5}t-\frac{7}{2}<0$

$2t^2-60t-175<0$

31

$1600\cdot2-40\cdot60$

$4\cdot2$

32

$3200-2400$

$-2\cdot2\cdot-32$

125

$2\cdot31$

$2t(t-30)$

-1

$32\cdot4$

$3\quad 2\cdot33\cdot3$

$\cdot125$

6

195

$2\cdot31$

T.K すうがく 1990 こうえ

第 2 問

(2) ①で $\theta = \frac{k\pi}{2n}$ とおく. $\sin 2n \frac{k\pi}{2n} = 0$. $\sin 2 \frac{k\pi}{2n} > 0$

$\therefore P_n\left(\left(\sin \frac{k\pi}{2n}\right)^2\right) = P_n\left(\frac{1}{\alpha_k}\right) = 0$

よって $P_n(x)$ のていすうが 1 とわかる ましめた

(3) $_3Q_n(x)$ で(けして

$$(n+2)P_{n+2}(x) = 2(n+1)(1-2x)P_{n+1}(x) - nP_n(x)$$

ここで $P_n(x) = 1 - S_n x + \cdots$ $(n=1 のとき S_1 = 0)$

とおくと. 係数ひかくして

$$(n+2)S_{n+2} = 2(n+1)S_{n+1} - nS_n + 4(n+1)$$

$t_n = nS_n$ として

$$t_{n+2} = 2t_{n+1} - t_n + 4(n+1)$$

$$t_{n+1} = t_n + 2n(n+1)$$

$$\therefore t_n = \frac{2}{3}(n-1)n(n+1)$$

$$\therefore \Sigma a_k = S_n = \frac{t_n}{n} = \frac{2n^2-2}{3}$$

▷(2)

[参考] バーゼル問題の証明

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- 収束を示すのはラク. $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$

$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$

[証明]

$k = 1, 2, \cdots n$ に対し, $\theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ とおく. $0 < \theta_k < \frac{\pi}{2}$ から $\sin\theta_k \leq \theta_k \leq \tan\theta_k$

だから. 逆数とって2乗してセイリ(このはさみ方だと tan のみになる!)

$$\frac{1}{\tan^2\theta_k} \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \frac{1}{\sin^2\theta_k}$$

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\frac{1}{\tan^2\theta_k} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(1 + \frac{1}{\tan^2\theta_k}\right)$$

k について足して $A_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1/\tan^2\theta_k$ とおくと.

$$\frac{\pi^2}{(2+1/n)^2}A_n \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2+1/n)^2}\left(\frac{1}{n^2} + A_n\right) \quad \cdots ①$$

ここで. $\sin(2n+1)\theta_k = 0$ から $z = e(\theta_k)^{2n+1}$ の虚部は 0 である

$\sin\theta_k \neq 0$ から. 両辺 $(\sin\theta_k)^{2n+1}$ でわって. $z' = \left(\frac{1}{\tan\theta_k} + i\right)^{2n+1}$ の虚部は

0 であるが. これは $t_k = \frac{1}{\tan^2\theta_k}$ の n 次式とみなせ, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

とおくと. $f(t_k) = 0$ が $k = 1, 2, \cdots n$ について成り立つ. t_k は k によって異なるので. k.k.k. から

$$n^2 A_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \quad \cdots ②$$

実際けさんすると. $a_n = 2n+1$, $a_{n-1} = -{}_{2n+1}C_3 = -\frac{1}{6}2n(2n+1)(2n-1)$ だから ② に代入

$$A_n = \frac{1}{n^2}\frac{(2n+1)(2n-1)\cdot n}{3(2n+1)} \longrightarrow \frac{2}{3}$$

① に代入して

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6} \quad 図$$

- 和を3角ではさむ → 積分か k.k.k.
- 和のつくり方(方程式)
  - ① チェビシフ(もととなる性質は位相を定数倍)
  - ② ド・モアブルから $\tan\theta$ をつくり出す
    - * $\sin\theta = e(\theta) - e(-\theta)$ / $\cos\theta = e(\theta) + e(-\theta)$ を用いる
    - * いきなり $\sin\theta$ でわって. $\left(i + \frac{1}{\tan\theta}\right)$ もしくは $(1 + i\tan\theta)$ をつくり出す
  - ⇒ 虚部・実部にも注目できる

第 2 問

[解] $n\in\mathbb{N}$に拡張して良い。

(1) $n=1,2$の時

$$P_1(x)=1,\ P_2(x)=1-2x,\quad Q_1(x)=1-2x,\ Q_2(x)=8x^2-8x+1 \qquad \cdots(*)$$

とすれば良く成立する。そこで、以下$n=k,k+1\in\mathbb{N}$での成立を仮定する。

$$\begin{cases} \sin(2k+4)\theta = 2\sin(2k+2)\theta\cos 2\theta - \sin 2k\theta \\ \quad = \{2(1-2\sin^2\theta)(k+1)P_{k+1}(\sin^2\theta) - kP_k(\sin^2\theta)\}\sin(2\theta) & (\because 仮定) \\ \cos(2k+4)\theta = 2\cos(2k+2)\theta\cos 2\theta - \cos 2k\theta \\ \quad = 2(1-2\sin^2\theta)Q_{k+1}(\sin^2\theta) - Q_k(\sin^2\theta) & (\because 仮定) \end{cases}$$

だから、

$$\begin{cases} P_{k+2}(x) = \dfrac{1}{k+2}\{2(1-2x)(k+1)P_{k+1}(x) - kP_k(x)\} \\ Q_{k+2}(x) = 2(1-2x)Q_{k+1}(x) - Q_k(x) \end{cases} \qquad \cdots ①$$

とすれば、$P_{k+2}(x)$, $Q_{k+2}(x)$は$k+1$, $k+2$次式でかつ条件をみたす。以上から$n=k+2$でも成立。よって示された。■

(2) $0\leq\theta<2\pi$とする。$\sin 2\theta=0 \Leftrightarrow \theta=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi$ だから、これ以外の時、(1)から

$$P_n(\sin^2\theta) = \frac{\sin(2n\theta)}{n\sin 2\theta} \qquad \cdots ②$$

だから、$P_n(\sin^2\theta)=0 \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{2n}$ ($k=1,2\cdots 4n-1$, ただし$k\neq n, 2n, 3n$) となる。$x=\sin^2\theta$とすると、$\sin^2\theta$の周期性から

$$P_n(x)=0 \Leftrightarrow x=\sin^2\frac{k\pi}{2n} \quad (k=1,2\cdots n-1)$$

これら$n-1$コの解は互いに異なり、さらに$P_n(x)$は$n-1$次式だから、これが$P_n(x)=0$の全ての解である。$A\neq 0$として

$$P_n(x) = A\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right) \qquad \cdots ③$$

とおける。以下Aをもとめる。$P_n(x)$の定数項をa_nとする。(*)及び①から、

$$\begin{cases} a_1=a_2=1 \\ a_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}\{2(n+1)a_{n+1} - na_n\} \end{cases}$$

となり、帰納的に$a_n=1$である。③で係数比較して、

$$A\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right) = 1 \qquad \therefore A = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right)}$$

だから、③に代入して

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_k x) \qquad \cdots ④$$

と表せる。■

(3) $\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$は、④より、$P_n(x)$のxの項b_nとして、

$$\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k = -b_n \qquad \cdots ⑤$$

と表せる。ここで、b_nについて、(*)、①から

$$\begin{cases} b_1=0,\ b_2=-2 \\ b_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}\left[2(n+1)(b_{n+1}-2) - nb_n\right] & (\because a_n=1) \end{cases} \qquad \cdots ⑥$$

となる。以下$b_n = -\frac{2}{3}(n^2-1)$となることを帰納的に示す。⑥から、$n=1,2$の時は成立。以下$n=k,k+1$での成立を仮定する。

$$b_{k+2} = \frac{1}{k+2}\left[2(k+1)\left(-\frac{2}{3}((k+1)^2-1)-2\right) + \frac{2}{3}(k^2-1)k\right]$$
$$= -\frac{2}{3}(k+1)(k+3)$$
$$= -\frac{2}{3}\{(k+2)^2-1\}$$

だから$n=k+2$でも成立。以上から示された。これと⑤から、

$$\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k = \frac{2}{3}(n^2-1)$$

となる。■

$$\frac{-4(k+1)}{k+2}a_{k+1}$$

$$-\frac{2}{3}(k+1)(k+3)$$

$$\prod\frac{-1}{\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2}$$

$$2(n+1)((1-2x)(b_{n+1}x+1)) - nb_n$$

$$2(n+1)(\ b_{n+1}x \cdots - 2x)$$