第 1 問

[解] $\sin\theta = S$, $\cos\theta = C$ と書く.

$$f'(\theta) = -4\sin 4\theta - 8S\cdot C$$
$$= -8\sin 2\theta \cdot \cos 2\theta - 8C\cdot S$$
$$= -8C\cdot S\,(2\cos 2\theta + 1)$$
$$= -8C\cdot S\,(4C^2 - 1)$$

より下表を得る

θ	0		$\pi/3$		$\pi/2$		$2\pi/3$		$3\pi/4$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	-3

したがって. max … 1, min … $-\frac{7}{2}$ 〃

第 2 問

[解] $a>0$ …①

$$f(x)=\left(\frac{e}{x^a}-1\right)\frac{\log x}{x} \quad \cdots ②$$

$f(x)\geq 0 \iff 1\leq x\leq e^{\frac{1}{a}}$ だから、面積Sとして

$$S=\int_1^{e^{\frac{1}{a}}} f(x)\,dx \quad \cdots ③$$

ここで、

$$\int_1^{e^{\frac{1}{a}}}\frac{\log x}{x^{a+1}}\,dx=\left[-\frac{1}{a}\frac{\log x}{x^a}\right]_1^{e^{\frac{1}{a}}}+\int_1^{e^{\frac{1}{a}}}\frac{1}{ax^{a+1}}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{a}\frac{\log x}{x^a}-\frac{1}{a^2}\frac{1}{x^a}\right]_1^{e^{\frac{1}{a}}}$$

$$=\left(-\frac{1}{a}\frac{\frac{1}{a}}{e}-\frac{1}{a^2}\frac{1}{e}\right)-\left(-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

$$\int_1^{e^{\frac{1}{a}}}\frac{\log x}{x}\,dx=\left[\frac{1}{2}\log^2 x\right]_1^{e^{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{2}\frac{1}{a^2}$$

だから③に代入

$$S=\frac{e}{a^2}\left(1-\frac{2}{e}\right)-\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{a^2}\left(e-\frac{5}{2}\right)$$

//

n^2-n

第3問

[解] $f(x)=x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}$ とおくと、$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\left(x-\dfrac{n-1}{n}\right)$ である。したがって、$x=\dfrac{1}{n},\ \dfrac{n-1}{n}$ として、

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2n}=a_n\left(\dfrac{1}{n}\right)+b_n\\[2ex]\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{2n}=a_n\left(\dfrac{n-1}{n}\right)+b_n\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}\dfrac{2-n}{n}a_n=\left\{\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2n}-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{2n}\right\}\\[2ex](n-2)b_n=(n-1)\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2n}-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{2n}\end{cases}\cdots①$$

である。$n\to\infty$ の時を考えるので、$n\neq2$ として良く、①から $n\to\infty$ の時

$$a_n=\frac{1}{\frac{2}{n}-1}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n\cdot(-2)}\right\}\longrightarrow e^{-2}$$

$$b_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}-\frac{1}{n}\cdot a_n\longrightarrow 0\qquad(\because a_n\to e^{-2})$$

第 4 問

[解]

第 5 問

[解] Cが±1を通るので、Cの中心はβとおける(βは純虚数).

$$|1-\beta|^2=|-1-\beta|^2=|\alpha-\beta|^2=A \quad \cdots ①$$

さらに、$\alpha=kz$ $(k\in\mathbb{R}_{>0})$とおける. ただし$|z|=1$.

①から

$$|\beta|^2-\beta-\bar{\beta}+1=|\beta|^2-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+|\alpha|^2$$

βは純虚数で $\beta+\bar{\beta}=0$より

$$1=k^2-k\bar{z}\beta-kz\bar{\beta} \quad \cdots ②$$

又、

$$\left|-\frac{1}{\alpha}-\beta\right|^2=\left|\frac{z}{k^2}+\beta\right|^2$$

$$=|\beta|^2+\frac{1}{k}\beta\bar{z}+\frac{1}{k}\bar{\beta}z+\frac{1}{k^2} \quad \cdots ③$$

一方、②の両辺k^2でわって

$$\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k}\bar{z}\beta+\frac{1}{k}z\bar{\beta}=1$$

だから③に代入して

$$\left|-\frac{1}{\alpha}-\beta\right|^2=|\beta|^2+1=A$$

したがって示された □

第 6 問

▷実験

N=1

⇒ $Q_1 = 1$

N=2

▷ N番目で…

⇒そこで…

$p_{N+1} = (1-p_N)\cdot\frac{1}{N+1}$

→オワタ

第 6 問

[解] 全ての操作の後、$N+1$ に赤が入っているのは、N 回目の操作後に赤の入っている箱 i として、

$N+1$ 回目で i をえらぶ時である。$(i \neq N+1)$ $i \neq N+1$ となる確率は、排反を考えて、

$$1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^N$$

だから もとめるのは

$$\frac{1}{N}\left\{1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right\} \#$$