$f(x)=1-\sin x$ に対し，$g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ とおく．このとき, 任意の実数 x，y について

$$g(x+y)+g(x-y) \geq 2g(x)$$

が成り立つことを示せ.

[**解**] 与式を変形して

$$g(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$$

だから

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^x f(t)dt + xf(x) - tf(t) \\ &= \int_0^x f(t)dt \end{aligned}$$

$$\therefore g''(x)=f(t) \geq 0$$

したがって，$g(x)$ は下に凸な関数であるから, 凸不等式から

$$g(x+y)+g(x-y) \geq 2g(x)$$

となる.