京大理科数学 1963

100/150分

		計	思	統
1	多変数	B	B	B
2	図形・多変数	C	C	C
3	基礎	A	B	B
4	多変数	B	B	B
5	多変数	C	B	B
6	不等式	A	A	A

第1問

[解] (イ) 判別式Dとして

$$D=(a+c)^2-4(ac-b^2)$$
$$=4b^2+(a-c)^2 \geqq 0$$

より、与方程式は実根を持つ。図

(ロ) $\begin{cases} \alpha+\beta=a+c \\ \alpha\beta=ac-b^2 \end{cases}$

$$\gamma-\alpha=\frac{a+c}{2}-\alpha-\frac{(a-c)(p^2-q^2)+4bpq}{2(p^2+q^2)}$$

この正負は以下とひとしい

$$A=(a+c)(p^2+q^2)-2\alpha(p^2+q^2)-(a-c)(p^2-q^2)-4bpq$$
$$=2cp^2+2aq^2-2\alpha(p^2+q^2)-4bpq$$
$$\frac{A}{2}=(c-\alpha)p^2-2bqp+(a-\alpha)q^2\equiv f(p)$$

$c=\alpha$ つまり $b=0$ の時 $f(p)=(a-\alpha)q^2\geqq 0$ となって $\gamma\geqq\alpha$ である。$c>\alpha$ の時 $f(p)=0$ の判別式Dとして

$$D/4=[b^2-(c-\alpha)(a-\alpha)]q^2=0$$

より、グラフの形を考えて $f(p)\geqq 0 \Leftrightarrow \gamma\geqq\alpha$、よっていずれの場合も $\gamma\geqq\alpha$ …① が成り立つ

$$\beta-\gamma=\beta-\frac{a+c}{2}+\frac{(a-c)(p^2-q^2)+4bpq}{2(p^2+q^2)}$$

この正負は、以下とひとしい

$$B=2\beta(p^2+q^2)-(a+c)(p^2+q^2)+(a-c)(p^2-q^2)+4bpq$$
$$=2\beta(p^2+q^2)-2aq^2-2cp^2+4bpq$$
$$\frac{B}{2}=(\beta-c)p^2+2bqp+(\beta-a)q^2\equiv g(p)$$

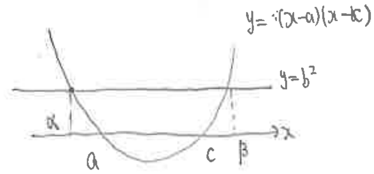
$\beta=c$ つまり $b=0$ のとき、$g(p)=(\beta-a)q^2\geqq 0$ から $\beta\geqq\gamma$、
$\beta>c$ の時、同様に判別式 D' として

$$D'/4=[b^2-(\beta-c)(\beta-\alpha)]q^2=0$$

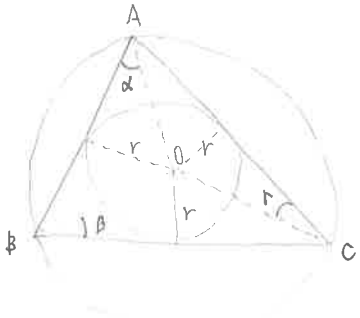
だから、$\beta\geqq\gamma$。以上より $\beta\geqq\gamma$ も成り立つ …②

①,②から常に $\alpha\leqq\gamma\leqq\beta$ が成立する 図

※以上の証明に、$\alpha\leqq a, c\leqq\beta$ を用いたが、これはグラフより明らかである(対称性から $a\leqq c$ とした)



[解]



内接円の半径 r, 外接円の半径 R とおく. まず $\triangle ABC$ において 内心 O とし, 図のように角度をおく ($\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$) と

$$AB=\frac{r}{\tan\alpha}+\frac{r}{\tan\beta}$$

だから正弦定理から

$$\frac{r}{\sin 2\gamma}\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}\right)=2R$$

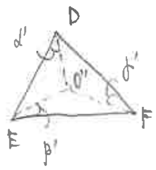
$A=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ とおくと

$$\frac{r\sin(\alpha+\beta)}{2A\cdot\cos\gamma}=2R$$

$\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$ から. $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\pi/2-\gamma)=\cos\gamma$ だから

$$A=\frac{r}{4R} \quad \cdots ①$$

である. 同様に $\triangle DEF$ において右のように角をおくと (O'' は $\triangle DEF$ の内心)



$$\sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma'=\frac{r}{4R} \quad \cdots ②$$

である。$\{\alpha', \beta'\}=\{\alpha, \beta\}$ ならば $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は合同である …③. 以下,

$$f(x,y)=\sin x\sin y\sin(\pi/2-x-y)$$
$$=\sin x\sin y\cos(x+y) \quad (0<x, y,\ x+y<\pi/2)$$

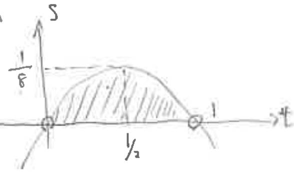
のとりうる値を考える. もし異なる2組の (x,y) に対し $f(x,y)$ が同じ値をとるなら, ①.②から $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は合同とは限らない. …④

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\sin y\left(\sin(2x+y)-\sin y\right)$$

まず y を固定して考える. $0<x<\pi/2$ から $y<2x+y<\pi-y$, $0<y<\pi/2$ に注意して 右辺 $g(y)$ とおくと

$$0<g(y)\leq\frac{1}{2}\sin y(1-\sin y) \quad \cdots *$$

次に $t=\sin y$ $(0<t<1)$ とおいて y をうごかすことにより. $S=g(y)$ のとりうる領域は下図斜線部である (境界は, 曲線部のみ含む)



今. ①.②をみたす文字の存在は保障されていることから ③.④より

$0<\frac{r}{4R}<\frac{1}{8}$ の時 合同とは限らない

$\frac{r}{4R}=\frac{1}{8}$ の時. 合同

(∵ $0<y<\pi/2$ から $t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{6}$, *で等号が成立することから $2x+\frac{\pi}{6}=\pi/2 \Leftrightarrow x=\pi/6$

第 3 問

[解]: 答案を書き直し,修正部には＿を下に引く.

(1)×y−(2)×x ∴ $(y-x)z(z+1)=0$

から (イ) $z=0$, (ロ) $z=-1$, (ハ) $y=x$

(イ)の時. (1).(2).(3) から $(x.y.z)=(0.0.0)$

(ロ)の時. (1).(2)から $x=y=0$ だが. これは (3)をみたさず不適

(ハ)の時. (3)から $z^2(z+y+2)=0$, (イ)で $z=0$は考えたので.

$z\neq0$として $z+y+2=0 \iff z=-(y+2)$ だから (2)に代入

$$-y(y+2)=y+(y+2)^2-(y+2)$$

$$y^2+3y+1=0$$

$$y=\frac{-3\mp\sqrt{5}}{2}$$

$z=-(y+2)$ に代入して

$$z=-\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

だから. $x=\dfrac{-3\mp\sqrt{5}}{2}$

以上から

$$(x.y.z)=(0.0.0)\ \left(\frac{-3\mp\sqrt{5}}{2},\frac{-3\mp\sqrt{5}}{2},\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$$

/20

第4問

[解] (イ) $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(-c,0)$ $(a,b,c>0)$ とおく。

D, E, F の時刻 t での座標は題意より

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -c-b \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} \end{cases} \quad \cdots ①$$

だから、△DEF の重心 $G(X,Y)$ とすると

$$X = \frac{1}{3}\left[tb + b + t(-c-b) - c + tc\right]$$

$$= \frac{1}{3}(b-c)$$

$$Y = \frac{1}{3}\left[a - ta + ta\right] = \frac{1}{3}a$$

となって、はじめの重心からうごかない 圄

(ロ) ①から

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} tb \\ a(1-t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b - t(b+c) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b + t(2b+c) \\ a(1-t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} c(t-1) \\ ta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b - t(b+c) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b-c + t(b+2c) \\ ta \end{pmatrix}$$

だから、時刻 t での △ABC の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2}\left|\{-b+t(2b+c)\}\cdot ta - \{-b-c+t(b+2c)\}\cdot a(1-t)\right|$$

$$= \frac{1}{2}a\left|\left(-bt + (2b+c)t^2\right) + \left((b+2c)t^2 - (2b+3c)t + b+c\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}a\left|3(b+c)t^2 - 3(b+c)t + (b+c)\right|$$

$$= \frac{1}{2}a(b+c)\left|3t^2 - 3t + 1\right|$$

$$= \frac{1}{2}a(b+c)\left|3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right|$$

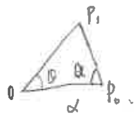
より、$S(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ の時 min で、この時 △ABC の面積 S として

$\dfrac{S(1/2)}{S} = \dfrac{1}{4}$ 倍 である。

第 5 問

[解] $\triangle OP_nP_{n+1}$ と $\triangle OP_{n+1}P_{n+2}$ の相似比は、

$|OP_0|:|OP_1|$ である。 …① ここで $\triangle OP_0P_1$ に



正弦定理を用いて、

$$\frac{|OP_1|}{\sin a} = \frac{\alpha}{\sin(a+\theta)} \quad \therefore |OP_1| = \frac{\sin\theta}{\sin(a+\theta)}\cdot\alpha \quad \cdots ②$$

だから。$\alpha \neq 0$ より。①から

$$|OP_0|:|OP_1| = 1:\frac{\sin a}{\sin(a+\theta)}$$

したがって。$0 < \frac{\sin a}{\sin(a+\theta)} < 1$ ならば P_n は O に収束する。

$/\!/$ (イ)

さて。$\triangle OP_nP_{n+1}$ の面積 S_n とする。まず。

$$S_0 = \frac{1}{2}|OP_0||OP_1| = \frac{1}{2}\frac{\sin a}{\sin(a+\theta)}\alpha^2 \quad \cdots ③$$

であり。①から。$p = \frac{\sin a}{\sin(a+\theta)}$ として

$$S_{n+1} = p^2\cdot S_n$$

くり返し用いて。③から。

$$S_n = (p^2)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}p\alpha^2 = \frac{1}{2}p^{2n-1}\cdot\alpha^2$$

したがって。$0<p<1$ とあわせて。

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} S_k = \frac{1}{2}p\alpha^2\,\frac{1}{1-p^2}$$

だから。S は $\triangle OP_0P_1$ の

$$\frac{1}{1-p^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{\sin a}{\sin(a+\theta)}\right)^2} \ (\text{倍}) \ /\!/$$

である。(以上 (ロ))

ここで。$a_n = P_nP_{n+1}$ とおく。①から

$$a_{n+1} = pa_n \quad \cdots ④$$

であり。$\triangle OP_0P_1$ に正弦定理を用いて。

$$\frac{|P_0P_1|}{\sin\theta} = \frac{\alpha}{\sin(a+\theta)} \quad \therefore a_0 = \frac{\sin\theta}{\sin(a+\theta)}\alpha$$

だから。④をくり返し用いて。

$$a_n = \frac{\sin\theta}{\sin(a+\theta)}\alpha\cdot p^{n-1}$$

となるので。

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_n = \frac{\sin\theta\cdot\alpha}{\sin(a+\theta)}\,\frac{1}{1-p} \quad (\because |p|<1)$$

$$= \frac{\sin\theta\cdot\alpha}{\sin(a+\theta)}\,\frac{\sin(a+\theta)}{\sin(a+\theta)-\sin a} = \frac{\sin\theta}{\sin(a+\theta)-\sin a}\alpha \ /\!/$$

である。$\theta \to +0$ として

$$L = \frac{\theta}{\sin(a+\theta)-\sin a}\,\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\alpha \longrightarrow \frac{\alpha}{\cos a} \ /\!/$$

第 6 問

[解] $f(x)=\int_0^x \cos t\,dt-2\int_0^x \sin t\,dt$ とおく.

$f'(x)=\cos x-2\sin x$ で.これは区間 $[0,\pi/4]$ で単調減少かつ.

$f'(\pi/6) \fallingdotseq 0$ より.下表をえる

x	0		$\pi/6$		$\pi/4$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

これと.$f(0)=0$, $f(\pi/4)=\left[\sin t+2\cos t\right]_0^{\pi/4}=\frac{3}{2}\sqrt{2}-2>0$

から.$f(x)>0$ $(0<x<\pi/4)$ なので.題意は示された 図

/20