n を自然数とする．

1. 実数 x に対して，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}-\frac{1}{1+x^2}$ を求めよ．
2. 不等式 $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right|\leq\frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ．
3. 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ を求めよ．

[解]

(1) $x\in\mathbb{R}$ だから $-x^2\neq 1$ なので，第一項は公比 $-x^2$ の等比数列の和である．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}-\frac{1}{1+x^2}\\
&= \frac{-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

となり題意は示された．

(2) (1) の両辺を $[0,1]$ で積分して絶対値をとると

$$
\left|\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k dx-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right|=\left|\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx\right| \tag{1}
$$

である．以下各項を評価する．まず左辺第一項は先に積分を処理することで

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k dx &= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

であり，右辺は積分区間内で $0\leq x\leq 1$ より $1+x^2\geq 1$ だから

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx &\leq \int_0^1 x^{2n+2}dx\\
&= \frac{1}{2n+3} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となる．eqs. (2) and (3) を eq. (1) に代入して

$$
\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right|\leq\frac{1}{2n+3} \tag{4}
$$

となり，題意は示された．

(3) (2) で示した eq. (4) の右辺は $n\to\infty$ で 0 に収束するから，挟み撃ちの定理より

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx \tag{5}
$$

である．右辺の積分は $x=\tan\theta$ と置換すると

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx &= \int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{dx}{d\theta}d\theta\\
&= \int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\
&= \int_0^{\pi/4}d\theta\\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

だから，eq. (5) に代入して

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}
$$

である．$\cdots$(答)

[解説] 有名な無限級数の一つである，ライプニッツの公式を証明する問題．式をあらわにかくと，これは交代級数になっていて

$$
1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}
$$