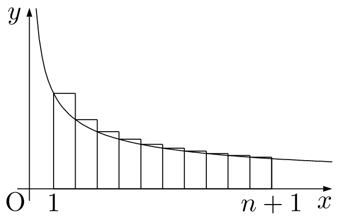
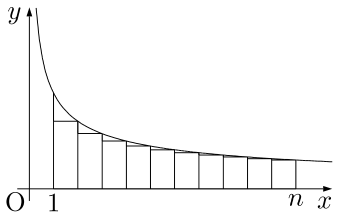
$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$，$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$ を求めよ.

[解] グラフの概形は以下のようになる.





ここで簡単のため，

$$A = \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x+1/2}}\,dx$$

とおく．グラフの面積を比較して，n が十分大きい時，

$$A + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq a_n \leq A+1$$
$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2 \leq a_n \leq 2\sqrt{n} - 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

簡単のためこの左辺を C とおく.

同様にして b_n についても，

$$B + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \leq b_n \leq B + \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sqrt{2n+1} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \sqrt{3} \leq b_n \leq \sqrt{2n+1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる．この左辺を D とおく.

①の両辺は ∞ に発散するから，挟み撃ちの定理から

$$a_n \to \infty$$

である．$\cdots$(答)

次に n が十分大きい時，①，②の両辺は正であることから，

$$\frac{D}{2\sqrt{n}-1} \leq \frac{b_n}{a_n} \leq \frac{\sqrt{2n+1}}{C}$$

である.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{D}{2\sqrt{n}-1} \\
&= \frac{\sqrt{2n+1} + 1/\sqrt{2n+3} - \sqrt{3}}{2\sqrt{n}-1} \\
&= \frac{\sqrt{2+1/n}}{2-1/\sqrt{n}} + \frac{1/\sqrt{2n+3} - \sqrt{3}}{2\sqrt{n}-1} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{\sqrt{2n+1}}{C} \\
&= \frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n} + 1/\sqrt{n+1} - 2} \\
&= \frac{\sqrt{2+1/n}}{2 + 1/\sqrt{n^2+n} - 2/\sqrt{n}} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

から，挟み撃ちの定理より

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である．$\cdots$(答)