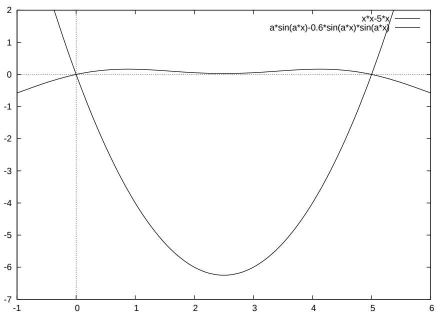
平面上の点 (x,y) で $x^2-5x<y<\dfrac{\pi}{5}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}\right)-\dfrac{3}{5}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{5}\right)$ をみたす範囲が，直線 $y=\alpha x$ によって面積の等しい二つの部分に分けられるように，α の値を求めよ．

[解] 簡単のため

$$\begin{cases} f(x)=x^2-5x \\ g(x)=\dfrac{\pi}{5}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}\right)-\dfrac{3}{5}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{5}\right) \end{cases}$$

とおく．$0<x<5$ では $f(x)<0$，$g(x)>0$ である．故にグラフの概形は下図．



これら二つのグラフの囲む面積 S とすると，

$$S=\int_0^5 (g(x)-f(x))dx \qquad (1)$$

である．各項計算すると，

$$\cdot\, S_1=-\int_0^5 f(x)dx=\frac{5^3}{6}=\frac{125}{6}$$

$$\cdot\, S_2=\int_0^5 g(x)dx=\int_0^\pi\left(\sin t-\frac{3}{\pi}\sin^2 t\right)dt$$

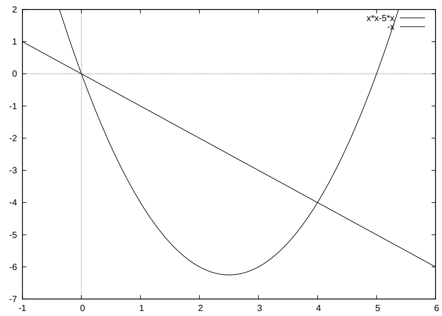
$$=\left[-\cos t-\frac{3}{2\pi}(t-2\sin 2t)\right]_0^\pi=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

である．故に (1) に代入して

$$S=S_1+S_2=\frac{64}{3} \qquad (2)$$

である．

また，$S_1>S_2$ であるから，題意より，$\alpha<0$ となることが必要で，このとき，$y=\alpha x$ と $y=f(x)$ が $0<x<5$ に交点をひとつ持つ．グラフの概形は右上図．



交点の x 座標を p とおく．つまり

$$\begin{cases} 0<p<5 \\ \alpha p=p^2-5p \end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} 0<p<5 \\ \alpha=p-5 \end{cases} \qquad (3)$$

とする．(2) に注意して，面積が等しい条件から

$$\frac{1}{2}S=\int_0^p(\alpha x-f(x))dx$$

$$\iff\frac{32}{3}=\frac{1}{6}p^3$$

$$\iff p=4$$

である．これを (3) に代入して

$$\alpha=-1$$

これは $\alpha<0$ を満たし，十分．以上から，求める値は $\alpha=-1$ である．$\cdots$(答)