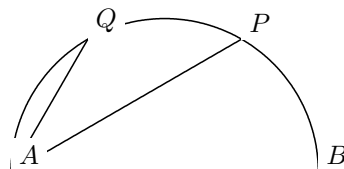
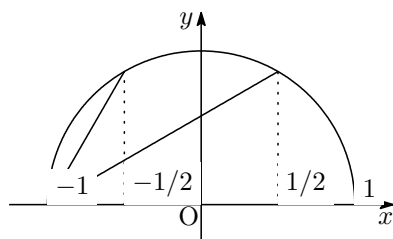


下の図は半径の長さ 1 の半円で、弦 AP 、 AQ と直径 AB のつくる角はそれぞれ 30° 、 60° である。

このとき、弦 AP 、 AQ と円弧 PQ とで囲まれる部分を直径 AB のまわりに一回転して得られる立体の体積を求めよ。



[解] $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$ となるように xy 座標をおく．すると原点 O がこの半円の中心である．故に $\angle AOQ = \pi/3$ 、 $\angle AOP = 2\pi/3$ である． P 、 Q から x 軸に下ろした垂足を、 L 、 H とする．



このとき、求める体積 V として

$$V_1 = (\triangle AQH \text{ の回転体})$$

$$V_2 = (PQHL \text{ の回転体})$$

$$V_3 = (\triangle APL \text{ の回転体})$$

とおけば、

$$V = V_1 + V_2 - V_3 \quad (1)$$

である．各項計算して、

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \pi = \frac{1}{8} \pi$$

$$V_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \pi(1-x^2)dx = \frac{11}{12} \pi$$

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \pi = \frac{3}{8} \pi$$

これらを (1) に代入して

$$V = \left(\frac{1}{8} + \frac{11}{12} - \frac{3}{8} \right) \pi = \frac{2}{3} \pi$$

である．…(答)