京大理科数学 1994

90/120分

		計	思	総	
1					
2	数列	B	B	B	20
3	空間	B	B	B	20
4	多変数	B	B	B	20
5	確率	B	B	B	20
6	多変数	B	B	B	20

第 1 問

/20

第 2 問

[解] $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である

(1) 漸化式から, 法を3として $a_{n+2} \equiv a_{n+1} + a_n$ だから,

$b_0 = 1,\ b_1 = 2.\ b_2 = 0.\ b_3 = 2.\ b_4 = 2.\ b_5 = 1.\ b_6 = 0.$

$b_7 = 1.\ b_8 = 1$ $b_9 = 2$ //

(2) c_nの定義から

$$c_{n+8} - c_n = \underbrace{b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + b_{n+4} + b_{n+5} + b_{n+6} + b_{n+7} + b_{n+8}}_{A}$$

又, (1)から $\{b_n\}$は $\{1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1\}$の周期数列だから,

Aの中にはこれらの要素が1つずつ入っているので,

$$A = \sum_{k=1}^{7} c_k = c_7$$

だから

$$c_{n+8} = c_n + c_7 \ \text{図}$$

(3) $c_7 = 9$より $c_{n+8} = c_n + 9$である. 以下, 題意を帰納的に示す.

1° $n = 0 \sim 7$の時.

$1 \leq c_0 = 1 \leq \frac{3}{2}$ $\quad$ $5 \leq c_4 = 7 \leq 9$

$2 \leq c_1 = 3 \leq \frac{9}{2}$ $\quad$ $6 \leq c_5 = 8 \leq \frac{21}{2}$

$3 \leq c_2 = 3 \leq 6$ $\quad$ $7 \leq c_6 = 8 \leq 12$

$4 \leq c_3 = 5 \leq \frac{15}{2}$ $\quad$ $8 \leq c_7 = 9 \leq 15$

より成立.

2° $n = 8k, 8k+1, \cdots, 8k+7$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ での成立を仮定

漸化式と仮定より,

$$n+1+9 \leq c_{n+8} \leq \frac{3}{2}(n+1) + 9$$

$$n+9 \leq c_{n+8} \leq \frac{3}{2}(c+7) \leq \frac{3}{2}(n+9)$$

より nで成立するなら$n+8$でも成立するから, $n = 8(k+1) \sim 8(k+1)+7$

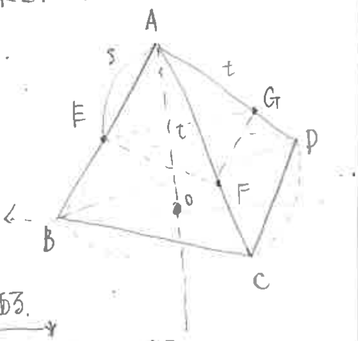
でも成立

以上から示された 図

/20

第 3 問

[解] 正四面体の一辺の長さ1として良い。座標空間において、

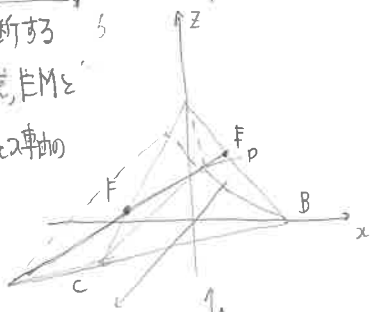


$A\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,0\right)$

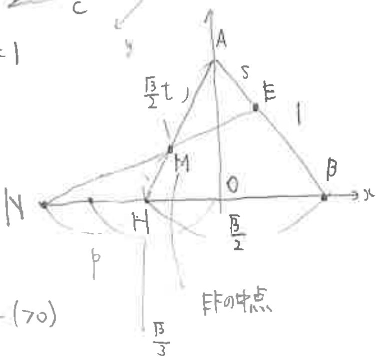
$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},0\right)$ $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{1}{2},0\right)$

とおける。するとB,C,Dを通る円は $z=0,\ x^2+y^2=\frac{1}{3}$ である。

x,z平面で立体を切断すると右下図で、例をGFの中点とEMとxy平面の交点N、AMとx軸の交点Hとすると、メネラウスの定理から



$$\frac{1-s}{s}\cdot\frac{NH}{BN}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$



$$BN=\frac{1-s}{s}\frac{t}{1-t}NH$$

だから $NH=p$ として、

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+p\right)=\frac{1-s}{s}\frac{t}{1-t}p$$

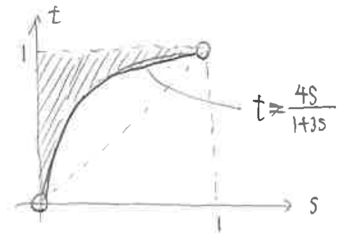
$$\therefore\ p=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{1-s}{s}\frac{t}{1-t}-1\right)}\ (>0)$$

だから、$N\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}-p,0,0\right)$ である 図形の対称性から、条件は

$$-\frac{\sqrt{3}}{6}-p \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}\quad(ON\leq 円の半径)$$

$$\Leftrightarrow\ 4s(1-t)\leq(1-s)t\quad\left(\because\ p>0から\ \frac{1-s}{s}\frac{t}{1-t}>1\Leftrightarrow t>s\right)$$

これと $0<t,s<1$ を図示して、下図(境界は $t=\frac{4s}{1+3s}$ のみ含む)



($t\leq s$ の時は明らかに条件をみたさない)

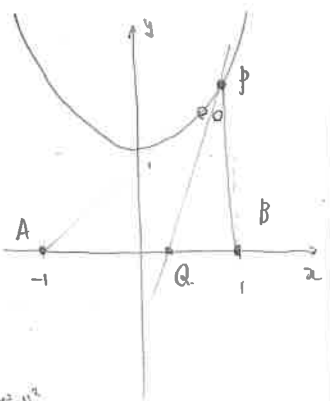
/20

第 4 問

[解] 題意から

$\overline{AQ}:\overline{QB}=\overline{PA}:\overline{PB}$ …①

である.



$\overline{AP}^2=(t+1)^2+(2t^2+1)^2$

$\overline{PB}^2=(t-1)^2+(2t^2+1)^2$

より. ①から

$$\left(\frac{\overline{QB}}{\overline{AQ}}\right)^2=\frac{\overline{BP}^2}{\overline{AP}^2}=\frac{(t-1)^2+(2t^2+1)^2}{(t+1)^2+(2t^2+1)^2}=f(t)$$

$\frac{QB}{AQ}>0$ から. $f(t)$が最大小値をとる時. $\frac{QB}{AQ}$も最大小値をとる.

$f'(t)$の符号は.以下の式と同じ

$$g(t)=\{2(t-1)+2(2t^2+1)\cdot 4t\}\{(t+1)^2+(2t^2+1)^2\}$$
$$-\{2(t+1)+2(2t^2+1)\cdot 4t\}\cdot\{(t-1)^2+(2t^2+1)^2\}$$

$$=-4(2t^2+1)^2+8t(2t^2+1)\cdot 4t+2(t-1)(t+1)^2-2(t+1)(t-1)^2$$

$$=-4(2t^2+1)\left[(2t^2+1)-8t^2\right]+2(t-1)(t+1)\cdot 2$$

$$=4(12t^4+5t^2-2)=4(3t^2+2)(4t^2-1)$$

従って. 下表を得る

t		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
f'	$+$		$-$		$+$
f	↗	$\frac{9}{5}$	↘	$\frac{5}{9}$	↗

これと $f(t)=\dfrac{\left(2+\frac{1}{t^2}\right)^2+\frac{1}{t^2}\left(1-\frac{1}{t}\right)^2}{\left(2+\frac{1}{t^2}\right)^2+\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^2}\to 1\ (t\to\pm\infty)$ から

$$\max\frac{QB}{AQ}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3}{5}\sqrt{5}$$ //

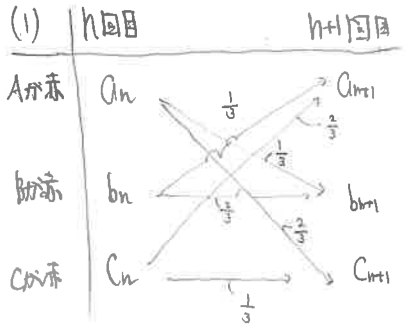
$$\min\frac{QB}{AQ}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$ //

/20

第 5 問

[解] $\frac{1}{3}$の確立でAとBが、$\frac{2}{3}$の確立でAとCが札を交換する

(1)



上図から

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{3}b_{n+1} + \frac{2}{3}c_{n-1} \\ b_n = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}b_{n-1} \\ c_n = \frac{1}{3}c_{n-1} + \frac{2}{3}a_{n-1} \end{cases}$$

//

(2) $a_n + b_n + c_n = 1$ から c_n を消し(1)に代入して

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(-2a_n - b_n + 2) & \cdots ① \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n & \cdots ② \end{cases}$$

①から $b_n = -3a_{n+1} - 2a_n + 2$ を②に代入

$$-3a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2 = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}(-3a_{n+1} - 2a_n + 2)$$

$$9a_{n+2} = 3a_n + 2$$

$$a_{n+2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$$

これと $a_0 = 1, a_1 = 0$ から、等比数列の公式から

$$a_{2k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

$$a_{2k+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

だから

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3}\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} + 1\right] & (n \in \text{even}) \\ \frac{1}{3}\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} + 1\right] & (n \in \text{odd}) \end{cases}$$

//

/20

第 6 問

[解] $P(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ とおく。又、以下 $\sin\theta = S$, $\cos\theta = C$ とする

(1) $x'(\theta) = -2S + 2\sin 2\theta$, $y'(\theta) = 2C - 2\cos 2\theta$ より

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\{x'(\theta)\}^2 + \{y'(\theta)\}^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi} |\sin t|\, 2\, dt \qquad \left(t = \frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 8\left[-\cos t\right]_0^{\pi} = \underline{16}$$

(2) (1)から

$$8\int_0^{\frac{1}{2}\theta_n} |\sin t|\, dt = \frac{16}{n}$$

$0 < \frac{1}{2}\theta_n < \pi$ から

$$8\left(1 - \cos\frac{\theta_n}{2}\right) = \frac{16}{n}$$

$$\therefore n = \frac{2}{1 - \cos\frac{\theta_n}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\frac{\theta_n}{4}}$$

だから $\sin\frac{\theta_n}{4} > 0$ から

$$\sqrt{n}\,\theta_n = \frac{\theta_n}{\sin\frac{\theta_n}{4}} = \frac{\frac{1}{4}\theta_n}{\sin\frac{1}{4}\theta_n} \cdot 4 \to \underline{4}$$

$(n \to \infty$ で $\theta_n \to 0)$

/20