a を正の実数，θ を $0 \leq \theta \leq \pi/2$ をみたす実数とする．xyz 空間において，点 $(a,0,0)$ と点 $(a+\cos\theta, 0, \sin\theta)$ を結ぶ線分を，x 軸のまわりに一回転させてできる曲面を S とする，さらに S を y 軸のまわりに一回転させてできる立体の体積を V とする．

(1) V を a と θ で表せ．

(2) $a=4$ とする．V を θ の関数と考えて，V の最大値を求めよ．

[解] $\cos\theta = c$, $\sin\theta = s$ とおく． S は $A(a,0,0)$ を頂点とし，x 軸を軸とする円錐側面の一部である．S の方程式は，

$$\begin{cases} \sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}c = (x-a) \\ a \leq x \leq a+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((x-a)^2+y^2+z^2)c^2 = (x-a)^2 \\ a \leq x \leq a+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+z^2 = (x-a)^2\tan^2\theta \\ a \leq x \leq a+c \end{cases}$$

これは y 軸に関して対称だから，V のうち $y \geq 0$ の部分の体積 v として

$$V = 2v \tag{1}$$

である．S を $y = t(0 \leq y \leq s)$ で切ると

$$\begin{cases} \tan^2\theta(x-a)^2 - z^2 = t^2 \\ a \leq x \leq a+c \end{cases} \tag{2}$$

これは双曲線であり，概形は下図．

a

従って，上図の記号を用いて，この平面での立体の面積 $S(t)$ は，

$$\begin{aligned} \frac{S(t)}{\pi} &= |OA|^2 - |OB|^2 \\ &= \left\{(a+c)^2 + (s^2-t^2)\right\} - \left(a + \frac{c}{s}t\right)^2 \\ &= -\left(1+\frac{c^2}{s^2}\right)t^2 - 2a\frac{c}{s}t + c^2 + s^2 + 2ac \\ &= -\frac{1}{s^2}t^2 - \frac{2ac}{s}t + 1 + 2ac \end{aligned}$$

だから，求める体積は

$$\begin{aligned} v &= \int_0^s S(t)dt \\ &= \pi\left[\frac{-1}{3s^2}t^3 - \frac{ac}{s}t^2 + (2ac+1)t\right]_0^s \\ &= \pi\left(\frac{2}{3} + ac\right)s \end{aligned}$$

だから (1) に代入して，

$$V = 2\pi\left(\frac{2}{3}+ac\right)s$$

である．$\cdots$((1) の答)

$a=4$ として代入すると，

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi}{3}(6cs+s) \\ V' &= \frac{4\pi}{3}(6\cos 2\theta + c) \\ &= \frac{4\pi}{3}(12c^2+c-6) \\ &= \frac{4\pi}{3}(3c-2)(4c+3) \end{aligned}$$

だから，$0 \leq \theta \leq \pi/2$ に注意して，同区間内で $\cos\theta_0 = 2/3$ を満たす数を用いて下表を得る．

θ	0		θ_0		$\pi/2$
c	1		$2/3$		0
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

故に $c = 2/3$ のとき (このとき $s = \sqrt{5}/3$)

$$\max V = \frac{20\sqrt{5}}{9}\pi$$

をとる．$\cdots$((2) の答)