京大理科数学 1973

135/150分

		計	思	総	
1	整数	A	A	A	20
2	関数	A	A	A	20
3	図形	B	C	B	20
4	極限	C	B	B	20
5	関数	B	B	B	20
6	確立	A	A	A	20

第 1 問

[解](1) $\alpha = 100A + 10B + C$ (A,B,Cは 0~9までの整数)とおける。

この時. $\alpha' = 100C + 10B + A$ だから

$$\alpha - \alpha' = 100(A-C) + (C-A)$$
$$= 99(A-C)$$

ここに A,Cは 0以上9以下のセイスウだから. A−Cは −9以上9以下の

全てのセイスウをとるので: Aは $9-(-9)+1 = \underline{19コ}$, このうち正のものは

A−Cが 1~9 のものだから. Bは $\underline{9コ}$

(2) (1)から 総和Sとして

$$S = \sum_{k=1}^{9} 99k = \frac{99}{2} \cdot 9 \cdot 10 = \underline{4455}$$

/20

第 2 問

[解] $e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とする。1以外の2根 α, β とすると、

$$\alpha=e(\theta_1),\ \beta=e(\theta_2) \qquad (0\leq\theta_1\leq\theta_2<2\pi)$$

とおける。解と係数の関係から、

$$\begin{cases} p=-(1+e(\theta_1)+e(\theta_2)) & \cdots ① \\ q=e(\theta_1)+e(\theta_2)+e(\theta_1)e(\theta_2) & \cdots ② \\ r=-e(\theta_1)e(\theta_2)=-e(\theta_1+\theta_2) & \cdots ③ \end{cases}$$

1° $\alpha, \beta\in$ 実の時

$(\alpha, \beta)=(1,1)\ (1,-1)\ (-1,-1)$ で ①〜③より $(p,q,r)=(1,-1,-1)\ (-1,-1,1)\ (-3,3,-1)$

2° $\alpha, \beta\notin$ 実の時

$p, q, r\in$ 実から $\beta=\overline{\alpha}$ となり、$0\leq\theta_1\leq\theta_2<2\pi$ とあわせて、$\theta_2=2\pi-\theta_1,\ 0<\theta_1<\pi$ とできる。

この時

$$\begin{cases} r=-e(2\pi)=-1 \\ p=-(1+2\cos\theta_1) \\ q=1+2\cos\theta_1 \end{cases}$$

だから、

$$p=-q,\ r=-1,\ -1\leq q\leq 3$$

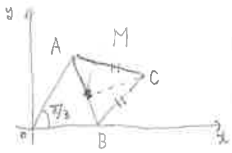
以上から

$$(p=-q,\ r=-1,\ -1\leq q\leq 3)\ \text{or}\ (p,q,r)=(-1,-1,1)$$

//

第 3 問

[解1] Oを原点とし、Bがx軸上，Aが第一象現になるようにxy平面をおく。



この時 $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$ とすると、$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ より、

$$\vec{b}=b\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{a}=\frac{a}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

とおける。ABの中点Mとする。

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}b-\frac{1}{2}a\\-\frac{\sqrt{3}}{2}a\end{pmatrix}$$

だから、$|MC|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$, $MC\perp AB$, CがOと反対側であることとあわせて

$$\overrightarrow{MC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}a\\b-\frac{1}{2}a\end{pmatrix}$$

となり、

$$\vec{c}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}$$

$$=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}b\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

一方、

$$\frac{b}{a}\vec{a}+\frac{a}{b}\vec{b}=b\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

①②から

$$\vec{c}=\frac{b}{a}\vec{a}+\frac{a}{b}\vec{b}$$

となる。□

[解2] a, bと平行な単位ベクトル$\vec{x}$, $\vec{y}$とするとこれらは一次独立で、又 $\vec{x}\cdot\vec{y}=\frac{1}{2}$ となる。さらに

$$\vec{c}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$$

とおける。

$$\overrightarrow{AB}=|b|\vec{y}-|a|\vec{x}$$

$$\overrightarrow{AC}=(\alpha-|a|)\vec{x}+\beta\vec{y}$$

$$\overrightarrow{BC}=\alpha\vec{x}+(\beta-|b|)\vec{y}$$

これらの大きさが全て等しいので、$k\geq 0$ として

$$\begin{cases}|b|^2+|a|^2-|a||b|=k\\(\alpha-|a|)^2+\beta^2+\beta(\alpha-|a|)=k\\\alpha^2+(\beta-|b|)^2+\alpha(\beta-|b|)=k\end{cases} \quad \cdots (*)$$

$(\alpha,\beta)=(|b|,|a|)$ とすると $(*)$ は成立する。$\vec{x}$, $\vec{y}$ が1次独立であることから、これが解に他ならず、

$$\vec{c}=|b|\vec{x}+|a|\vec{y}$$

$$=|b|\frac{a}{|a|}+|a|\frac{b}{|b|}$$

である。□

$a_n =$

第 4 問

[解] $a=\sqrt{n}$, $b=\sqrt{n+1}$ とする。

$$n^2\left[\frac{(\sqrt{n(n+1)}-n)^3}{n} - \frac{(\sqrt{n(n+1)}-(n+1))^3}{n+1}\right]$$

$$= a^2\left[\frac{(ab-a^2)^3}{a^2} - \frac{(ab-b^2)^3}{b^2}\right]$$

$$= a^2\left[a(b-a)^3 - b(a-b)^3\right]$$

$$= a^2(a+b)(b-a)^3$$

$$= a^2(b-a)^2 \quad (\because (a+b)(b-a) = b^2-a^2 = 1)$$

$$= \frac{a^2}{(a+b)^2}(b-a)^2(b+a)^2$$

$$= \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+\sqrt{1+1/n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} \quad /\!\!/$$

第 5 問

[解] $f'(x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$

$f''(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$

であり、$x=1$の時 $f''(x) = n > 0$, $x \neq 1$の時 $f''(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ だから

$-1 \leq x \leq 1$では $f''(x) > 0$, つまり $f'(x)$は単調増加. これと $f'(0)=0$から

下表をえる

x	-1		0		1
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

従って, $-1 \leq x \leq 1$では $1 \leq f(x) \leq \max\{f(1), f(-1)\}$ …① である.

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n+1} < 2 \quad (\because n > 0)$$

$$f(-1) = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

より $n=1$の時 $f(-1) = \frac{3}{2}$, $n \geq 2$の時

$$f(-1) = f(1) - 2\left(\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots\right) < f(1)$$

だから①より.

$$1 \leq f(x) < 2$$ //

/20

第 6 問

[解] Aの期待値は1 …①

Bのキタイチ E(b)は、表面があたるかどうかで場合分けして

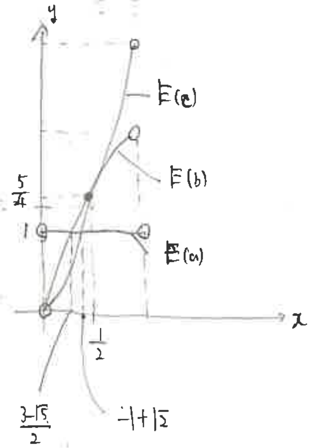
$$E(b) = 2p + p(1-p) = -p^2+3p \quad \cdots②$$

CのキタイチE(c)も同様に

$$E(c) = 3p^2 + 2p(1-p) = p^2+2p \quad \cdots③$$

$0<p<1$ と右のグラフから

- $0<p<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ の時　A
- $p=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$　〃　A, B
- $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<p<\frac{1}{2}$　〃　B
- $p=\frac{1}{2}$　B, C
- $\frac{1}{2}<p<1$　C　//



$p^2-3p+1=0$

$3\pm\sqrt{5}$

[本番のミス]
・修正を全てに活かせなかった (おしい)

/20