$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $a_n = \tan(11n)$ とおく．このとき，次の (1)〜(4) を示せ．ただし，$\pi = 3.14159265\ldots$ は円周率である．

1. $\dfrac{\pi}{711} < 11 - \dfrac{7\pi}{2} < \dfrac{\pi}{709}$.
2. $a_1 < 0 < a_2$.
3. $a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots, a_{707}, a_{709}$ は増加数列である．
4. 無限数列 $a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots$ は増加数列ではない．

[解]

(1) 与式を同値変形すると

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{711} < 11 - \frac{7\pi}{2} < \frac{\pi}{709} \\ \iff &\frac{15598}{4965} < \pi < \frac{15642}{4979} \end{aligned} \tag{1}$$

だから，これを示す．両辺計算すると

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{15598}{4965} = 3.141591... < \pi \\ \text{RHS} &= \frac{15642}{4979} = 3.141594... > \pi \end{aligned}$$

となり，eq. (1) は示された．$\cdots$(答)

(2) まず $a_1 = \tan(11)$ について考える．$\tan\theta$ は周期 π の周期関数だから $\tan 11 = \tan(11 - 3\pi)$ である．(1) で示された不等式の各辺に $\pi/2$ を足して

$$\frac{\pi}{711} + \frac{\pi}{2} < 11 - 3\pi < \frac{\pi}{709} + \frac{\pi}{2}$$

であり，従って

$$\frac{\pi}{2} < 11 - 3\pi < \pi$$

が成り立つ．この範囲では $\tan\theta$ は負であるから，

$$a_1 = \tan(11) = \tan(11 - 3\pi) < 0 \tag{2}$$

である．

次に $a_2 = \tan(22)$ について考える．同様に (1) で示した不等式の各辺 2 倍して

$$\frac{2\pi}{711} < 22 - 7\pi < \frac{2\pi}{709}$$

であり，従って

$$0 < 22 - 7\pi < \frac{\pi}{2}$$

を得る．この範囲では $\tan\theta$ は正であり，$\tan\theta$ の周期性より $\tan 22 = \tan(22 - 7\pi)$ だから，

$$a_2 = \tan(22) = \tan(22 - 7\pi) > 0 \tag{3}$$

を得る．以上 eqs. (2) and (3) より

$$a_1 < 0 < a_2$$

であり題意は示された．$\cdots$(答)

(3) 簡単のため

$$\theta_n = 22n - 11 - 7n\pi$$

とおく．$\tan\theta$ の周期性より

$$a_{2n-1} = \tan\theta_n \tag{4}$$

となることに注意する．

(1) で示した式の各辺 $2n - 1$ (> 0) 倍して，

$$\begin{aligned} &\frac{2n-1}{709}\pi < 22n - 11 - \frac{\pi}{2}(2n-1)\pi < \frac{2n-1}{709}\pi \\ &\frac{2n-1}{711}\pi + \frac{7}{2}\pi < 22n - 11 - 7n\pi < \frac{2n-1}{709}\pi + \frac{7}{2}\pi \end{aligned} \tag{5}$$

である．$n = 1, 2, \cdots, 355$ の時，

$$0 < \frac{2n-1}{711}\pi < \frac{2n-1}{709}\pi \leq \pi$$

である．従って，

$$\frac{7}{2}\pi < \theta_n < \frac{9}{2}\pi$$

である．この区間では $\tan\theta_n$ は単調増加である．

さらに，θ_n は短調増加であることが以下のように示せる．eq. (5) より，$n = 1, 2, \cdots, 354$ に対して

$$\begin{aligned} &\theta_n < \frac{2n-1}{709}\pi + \frac{1}{2}\pi < \frac{2n+1}{711}\pi + \frac{1}{2}\pi < \theta_{n+1} \\ &\therefore \theta_n < \theta_{n+1} \end{aligned} \tag{6}$$

である．ただし

$$\frac{2n-1}{711} - \frac{2n-1}{709} = \frac{(2n-1)(-4n+1420)}{711 \cdot 709} \geq \frac{709 \cdot 0}{711 \cdot 709} = 0$$

を利用した．

以上 eqs. (5) and (6) より，

$$\frac{7\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{355} < \frac{9\pi}{2}$$

が成り立つ．この区間内で $\tan\theta_n$ は単調増加だから，

$$\tan\theta_1 < \tan\theta_2 < \cdots < \tan\theta_{355}$$

が成り立つ．従って eq. (4) より $n = 355$ のとき $2n+1 = 709$ に注意して

$$a_1 < a_3 < \cdots < a_{709}$$

となる．よって題意は示された．$\cdots$(答)

(4)

$a_{711} < 0 < a_{709}$ であることを示せば，題意は示される．(3) の eq. (5) で $n = 355$ として

$$\begin{aligned}&\frac{709}{711}\pi + \frac{7}{2}\pi < \theta_{355} < \frac{709}{709}\pi + \frac{7}{2}\pi\\ \therefore\ &4\pi < \theta_{355} < 4\pi + \frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

この区間で $0 < \tan\theta$ だから，

$$0 < \tan\theta_{355} = a_{709}$$

だから $0 < a_{709}$ である．

次に a_{711} について，eq. (5) で $n = 356$ として

$$\begin{aligned}&\frac{711}{711}\pi + \frac{7}{2}\pi < \theta_{356} < \frac{711}{709}\pi + \frac{7}{2}\pi\\ \therefore\ &4\pi + \frac{1}{2}\pi < \theta_{356} < 4\pi + \pi\end{aligned}$$

である．この区間で $\tan\theta$ は負だから

$$a_{711} = \tan\theta_{356} < 0$$

である．以上より $a_{711} < 0 < a_{709}$ であり，$a_{2n-1}, (n = 1, 2, \cdots)$ が増加列ではないことが示された．$\cdots$(答)

[解説]