k, l, m, n は負でない整数とする．0 でないすべての x に対して等式 $\dfrac{(x+1)^k}{x^l}-1=\dfrac{(x+1)^m}{x^n}$ を成り立たせるような k, l, m, n の組を求めよ．

[解] $k,m \geq 1$ と仮定すると，与式に $x=-1$ を代入して $0-1=0$ となり不適．故に

$$km=0 \tag{1}$$

である．さらに $x=1$ を代入して

$$2^k-1=2^m \tag{2}$$

である．$k=0$ とすると $2^m=0$ となり不適だから，(1) より $m=0$ が従う．この時 (2) から $k=1$ となる．

以上を与式に代入して

$$\begin{aligned}&\frac{x+1}{x^l}-1=\frac{1}{x^n}\\&(x+1)x^n-x^{(n+l)}=x^l\\&x^{(n+l)}-x^{(n+1)}-x^n+x^l=0 \qquad (3)\end{aligned}$$

である．($\because x\neq 0$) これが $\forall x_{\neq 0}$ で成立するので，(3) は x の恒等式である．故に係数比較する．

まず左辺には $x^{(n+1)}$ と x^n という次数の違う 2 つの項が存在するので，残りの 2 つの項の次数がどちらかに一致することが必要である．$n+l\geq l$ だから，$n+l=n+1$，$n=l$ が従い，これをといて $(n,l)=(1,1)$ である．逆にこの時 (3) は成立し，十分．

以上より，求めるのは

$$(k,l,m,n)=(1,1,0,1)$$

である．$\cdots$(答)