

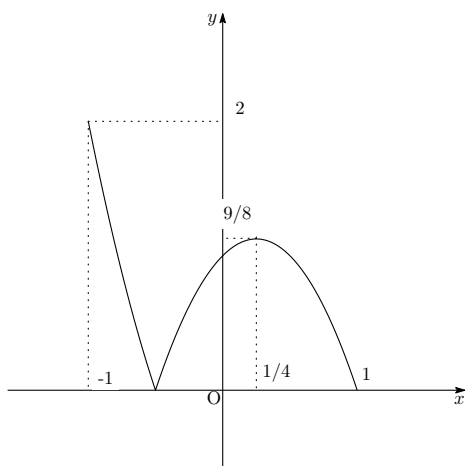
$xy$  平面において,  $O$  を原点,  $A$  を定点  $(1,0)$  とする. また,  $P, Q$  は円周  $x^2 + y^2 = 1$  の上を動く 2 点であって, 線分  $OA$  から正の向きにまわって線分  $OP$  に至る角と, 線分  $OP$  から正の向きにまわって線分  $OQ$  に至る角が等しいという関係が成り立っているものとする.

点  $P$  を通り  $x$  軸に垂直な直線と  $x$  軸との交点を  $R$ , 点  $Q$  を通り  $x$  軸に垂直な直線と  $x$  軸の交点を  $S$  とする. 実数  $l$  を与えた時, 線分  $RS$  の長さが  $l$  と等しくなるような点  $P, Q$  の位置は何通りあるか.

[解]  $\cos t = c, \sin t = s$  とおく. ただし,  $0 \leq t < 2\pi$  とする. すると  $P(c, s), Q(\cos 2t, \sin 2t)$  となる. 故に  $R(c, 0), Q(\cos 2t, 0)$  であるから,

$$\begin{aligned} l &= |c - \cos 2t| = |2c^2 - c - 1| \\ &= |(2c + 1)(c - 1)| \equiv f(t) \end{aligned}$$

である. グラフは下図.



故に,  $t$  と  $c$  の関係に注意し,  $t$  と  $P, Q$  の位置関係が一対一対応であることより, 求める場合の数は以下の通り. ... (答)

$l$	$c$	$t$	位置
0	2	3	3
$0 < l < 9/8$	3	6	6
$9/8$	2	4	4
$9/8 < l < 2$	1	2	2
2	1	1	1
$2 < l$	0	0	0