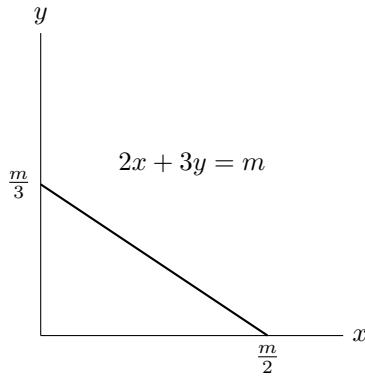


m を 0 以上の整数とする. 直線 $2x + 3y = m$ 上の点 (x, y) で, x, y がともに 0 以上の整数であるものの個数を $N(m)$ とする.

1. $N(m+6) = N(m) + 1$ を証明せよ.
2. $N(m) = 1 - m + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor$ を証明せよ. ただし, $[a]$ は a 以下の最大の整数を表すものとする.

[解] 題意の直線 $2x + 3y = m$ は図のようになる.



さて, x, y をパラメータ表示するため,

$$\begin{cases} 2x + 3y = m \\ -2m + 3m = m \end{cases}$$

を辺々引いて,

$$2(x + m) + 3(y - m) = 0$$

2 と 3 は互いに素だから, $k \in \mathbb{Z}$ として,

$$\begin{cases} x + m = 3k \\ y - m = -2k \end{cases} \\ \therefore (x, y) = (3k - m, -2k + m)$$

と表すことができる. x, y が非負だから, k に対する条件は

$$\frac{m}{3} \leq k \leq \frac{m}{2}$$

であり, 従って $N(m)$ は

$$N(m) = \left(\frac{m}{3} \leq k \leq \frac{m}{2} \text{をみたす } k \in \mathbb{Z} \text{ の数} \right) \quad (1)$$

と言い換えることができる.

(1) eq. (1) に注意して m を 6 で割ったあまりで場合分

ける. $t \in \mathbb{N}$ として,

$$\begin{cases} m = 6t \text{ の時, } & N(m) = 3t - 2t + 1 = t + 1 \\ m = 6t - 1 \text{ の時, } & N(m) = (3t - 1) - (2t - 1) = t \\ m = 6t - 2 \text{ の時, } & N(m) = (3t - 1) - (2t - 1) = t \\ m = 6t - 3 \text{ の時, } & N(m) = (3t - 2) - (2t - 2) = t \\ m = 6t - 4 \text{ の時, } & N(m) = (3t - 2) - (2t - 2) = t \\ m = 6t - 5 \text{ の時, } & N(m) = (3t - 3) - (2t - 2) = t + 1 \end{cases} \quad (2)$$

を得る. $N(m+6)$ は $t \rightarrow t+1$ とした時に該当し, このときいずれも $N(m)$ は 1 だけ増えるから, たしかに $N(m+6) = N(m) + 1$ が成立する. よって題意は示された.

(2) 簡単のため

$$f(m) = 1 - m + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor$$

とおく. (1) と同様に m を 6 で割った余りで場合わけすると,

$$\begin{cases} m = 6t \text{ の時, } f(m) = 1 - 6t + 3t + 4t = t + 1 \\ m = 6t - 1 \text{ の時, } f(m) = 1 - (6t - 1) + (3t - 1) + (4t - 1) = t \\ m = 6t - 2 \text{ の時, } f(m) = 1 - (6t - 2) + (3t - 1) + (4t - 2) = t \\ m = 6t - 3 \text{ の時, } f(m) = 1 - (6t - 3) + (3t - 2) + (4t - 2) = t \\ m = 6t - 4 \text{ の時, } f(m) = 1 - (6t - 4) + (3t - 2) + (4t - 3) = t \\ m = 6t - 5 \text{ の時, } f(m) = 1 - (6t - 5) + (3t - 3) + (4t - 4) = t + 1 \end{cases} \quad (3)$$

である. eqs. (2) and (3) を比較することで, たしかに $f(m) = N(m)$ であることがわかる. 以上から題意は示された.