平面上で，曲線 $x+y^2-5=0$ を，x 軸に平行なある直線 l_1 に関して折り返し，さらに別の直線 l_2 に関して折り返せば，曲線 $x^2-y+1=0$ に重なるという．直線 l_1，l_2 の方程式を求めよ．

[解] 題意より $l_1 : y = k$ とおける．$C_2 : x^2-y+1=0$ とする．$C : x+y^2-5=0$ を l_1 に関して折り返したグラフを C_1 とすれば C 上の点 (x,y) は C_1 上の点 $(x,2k-y)$ に移るので

$$C_1 : x+(y-2k)^2-5=0$$

である．次に l_2 について，C_1 の軸は $y=2k$，C_2 の軸は $x=0$ だから，l_2 はこれらの垂直 2 等分線で，傾き ±1 で，$(x,y)=(0,2k)$ を通るので $l_2 : y=\pm x+2k$ である．又，頂点は頂点に移るので $A(0,1)$ が $B(5,2k)$ に移る．故に以下複合同順として

$$\begin{cases} \text{線分 } AB \text{ の中点 } M \text{ が } l_2 \text{ 上} \\ \overrightarrow{PQ} \perp l_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \dfrac{2k+1}{2} = \pm\dfrac{5}{2}+2k \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 2k-1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ \pm1 \end{pmatrix} \end{cases}$$
$$\iff (\text{複合負}), k=3$$

以下十分条件を求める．

C_1 上の点 $P(x,y)$ が C_2 上の点 $Q(x+2X, y+2Y)$ に移るとすると，(X,Y) は

$$\begin{cases} \text{線分 } PQ \text{ の中点 } M \text{ が } l_2 \text{ 上} \\ \overrightarrow{PQ} \perp l_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (y+Y) = -(x+X)+6 \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$
$$\iff 2X=2Y=-x-y+6$$

である．この時 Q が C_2 上にある条件から

$$(x+2X)^2-(y+2Y)+1=0$$
$$(6-y)^2-(6-x)+1=0$$
$$x+(y-6)^2-5=0$$

これは Q が l_2 の折り返しにより P に移動することを示し，十分である．以上から

$$\begin{cases} l_1 : y=6 \\ l_2 : y=-x+6 \end{cases}$$

である．$\cdots$(答)