京大理系数学 2008 乙

60分/150分

第 1 問

[解] $f(x)=px+q-\log x$ とおく。$p\leqq 0$ の時 f は連続で

$$\begin{cases} f(x) \longrightarrow +\infty & (x\to +0) \\ f(x) \longrightarrow -\infty & (x\to +\infty) \end{cases}$$

から、$f(x)=0$ なる x が存在し不適。よって $p>0$ として良い。

$$f'(x)=p-\frac{1}{x}$$

より下表をうる。

x	0		$1/p$	
f'		$-$		$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

よって、$f(x)>0 \Leftrightarrow f(1/p)>0 \Leftrightarrow \underline{1+q+\log p>0}_{\#}\ (p>0)$

[解] n秒のあいだに、2頂点A,Bにしかおとずれない確率 a_n
　　　〃　　　3頂点A,B,C　〃　　　b_n

と定める。a_nについて、PはA→B→A→B→…の移動をくり返すので、

$$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots ①$$

である。対称性から、(A,C)，(A,D)にしか訪れない確率もa_nである。b_nについて、常に3頂点のうちDをのぞく2頂点のみに移動をつづけ、かつA,B,C全てに訪れることから

$$b_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-2a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots ②$$

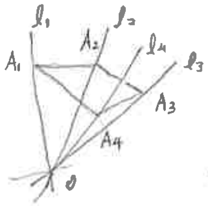
対称性から、(A,B,D)(A,C,D)のみを訪れる確率もb_n。以上から、求める確率をc_nとして、排反から

$$c_n=1-3a_n-3b_n=1-3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

//

[解] 4直線 l_k $(k=1,2,3,4)$ とし、l_k の方向ベクトルを $\overrightarrow{l_k}$ で表す。

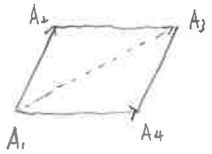
又、O を支点とした点 X の位置ベクトルを $\vec{x}$ と表す。



l_k 上に点 A_k $(A_k \neq 0)$ をとり、

$$\overrightarrow{a_k} = t_k \overrightarrow{l_k} \quad (t_k \neq 0)$$

と表す。この時 t_k を適当に定めれば $A_1 \sim A_4$ が題意をみたすことを示す。



$$\begin{cases} \overrightarrow{A_1A_2} = t_2\overrightarrow{l_2} - t_1\overrightarrow{l_1} \\ \overrightarrow{A_1A_4} = t_4\overrightarrow{l_4} - t_1\overrightarrow{l_1} \\ \overrightarrow{A_1A_3} = t_3\overrightarrow{l_3} - t_1\overrightarrow{l_1} \end{cases} \quad \cdots ①$$

$A_1' \sim A_4'$ が条件をみたす時、$\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_4}$ から、① を代入して

$$t_3\overrightarrow{l_3} = t_2\overrightarrow{l_2} + t_4\overrightarrow{l_4} - t_1\overrightarrow{l_1} \quad \cdots ②$$

ところで、$\overrightarrow{l_k}$ $(k=1,2,3)$ は互いに一次独立だから、a, b, c を定数として、

$$\overrightarrow{l_3} = a\overrightarrow{l_1} + b\overrightarrow{l_2} + c\overrightarrow{l_3} \quad \cdots ③$$

とかける。どの3直線も同一平面上にないので a, b, c ≠ 0 だから、②③より、

$$a = \frac{t_2}{t_3}, \quad b = \frac{t_4}{t_3}, \quad c = -\frac{t_1}{t_3}$$

となるよう t_k を定めれば良い。よって示された ■

第 4 問

[解] $f(x)=x^2-2$, $g(x)=2x^2+ax-1$ とおく。$g(0)=-1<0$ かつ g の二次係数正から $g(x)=0$ は必ず2異実解を持ち.

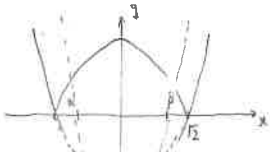
$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8}}{4}$$

である。これを α, β $(\alpha<\beta)$ とおく。

1° $-\frac{3}{2}\sqrt{2}<a<\frac{3}{2}\sqrt{2}$ の時

$-\sqrt{2}\leq\alpha<\beta\leq\sqrt{2}$ となるから,

$-\sqrt{2}\leq x\leq\alpha$, $\beta\leq x\leq\sqrt{2}$ に各々1つずつ解を持つ.



① $|x|>\sqrt{2}$ の時

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+ax+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$ である。ここで,

$|a|\leq\frac{3}{2}\sqrt{2}$ から

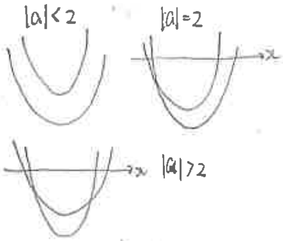
- $-\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}>-\sqrt{2}$
- $\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}<\sqrt{2}$

なので. $|\sqrt{2}|\leq x$ の区間には解なし.

② $\alpha<x<\beta$ の時

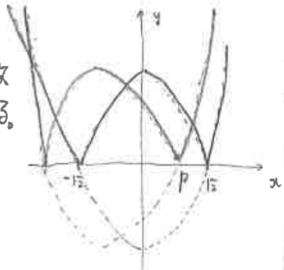
$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ であり, ①からグラフの形は下のようになっているので,

$|a|<2$ の時 0つ
$|a|=2$ 〃 1つ
$|a|>2$ 〃 2つ



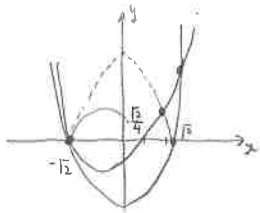
2° $\frac{3}{2}\sqrt{2}<a$ の時

$\alpha<-\sqrt{2}<\beta<\sqrt{2}$ となるから. 2次係数に注目してグラフは右のようになり4解ある。



3° $a=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$ の時

$g(x)=2x^2+\frac{2}{3}\sqrt{2}x-1$ でグラフは右図で.
解は3つ



対称性から $a\leq-\frac{3}{2}\sqrt{2}$ についても同様だから.

$a<-\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{3}{2}\sqrt{2}<a<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<a<\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}\sqrt{2}<a$ の時 4つ
$a=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}, \pm2$ の時 3つ
$-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ の時 2つ

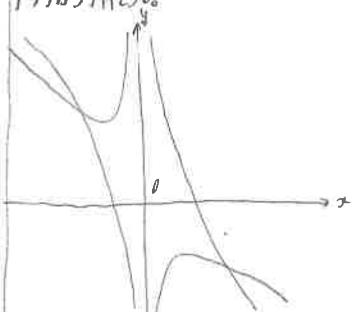
//

[別] $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow 2x^2+ax-1=\pm(x^2-2)$

$\Leftrightarrow a=\frac{-2x^2+1\pm(x^2-2)}{x}$ ($x=0$ は解でない)

$\Leftrightarrow a=-\left(x+\frac{1}{x}\right)$ or $\left(-3x+\frac{3}{x}\right)$

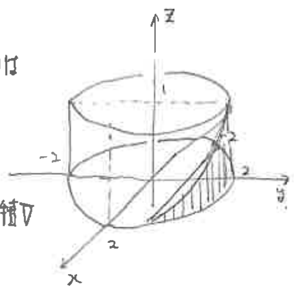
グラフから解とる。

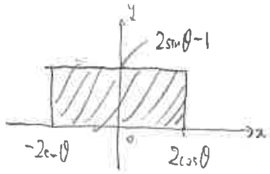


[解] Hの方程式は $z=y-1$ である。

$y=2\sin\theta$ $\left(\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$ で切断する。切り口は右下図で、この面積 $S(\theta)$ として

$$S(\theta)=4\cos\theta(2\sin\theta-1)$$





だから、以下 $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ として、もとめる体積 V は

$$V=\int_1^2 S(\theta)\,d(2s)$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2} S(\theta)\frac{d(2s)}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\{4c(2s-1)\}\cdot 2c\,d\theta$$

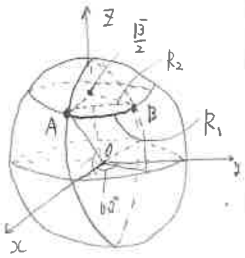
$$=8\int_{\pi/6}^{\pi/2}(2c^2s-c^2)\,d\theta$$

$$=8\left[-\frac{2}{3}c^3\right]_{\pi/6}^{\pi/2}-8\cdot\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$=2\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3-4\left[\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

第 6 問

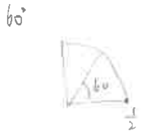


[解] 地球の半径1として良い。

経路R_1は、半径$\cos\pi/3 = \frac{1}{2}$の円弧のうち中心角$\pi/3$の扇形の弧長で、

$$R_1 = \theta r = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi \qquad \cdots ①$$

一方、R_2について、地球の中心Oとして右のような座標をとれば、



$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\sqrt{3}/4\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$$

だから$\angle AOB = \theta$として、

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\2\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{7}{8} = 0.875$$

で、3角表から、$28.5° < \theta < 29.0°$ $\cdots ②$

$$R_2 = \theta r = \theta \qquad \cdots ③$$

である。したがって①~③より

$$\frac{R_2}{R_1} < \frac{29.}{30} = 0.96\cdots < 0.97 \qquad \therefore R_2 < 0.97R_1$$

から示された■