京大理科数学 1988

50分/120分

		思	計	統
1	多変数	B	B	B
2	ベクトル	A	B	A
3				
4	空間	B	A	B
5	確率	A	A	A
6	多変数	B	B	B

第 1 問

[解]

(1) $g(x)-x = f(x)^2 + af(x) + b - x$

$= \{f(x)-x\}\{f(x)+a+x+1\}$ □

(2) $g(p)=p \wedge f(p) \neq p$ の時 $(p \in \mathbb{R})$ (1)から

$$\begin{cases} f(p)+a+p+1=0 \\ f(p) \neq p \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} p^2+(a+1)p+a+b+1=0 & \cdots ① \\ p^2+(a-1)p+b \neq 0 & \cdots ② \end{cases}$$

①をみたすpがある条件は判別式Dとして

$D=(a+1)^2-4(a+b+1) \geqq 0$. …④

このもとで「①の左辺と②の左辺が2つとも同じ解を持つ(重解含む)」

がみたされなければよい。

1° D>0の時

①は2実解を持つ。②も2次方程式だから①②が一致しなければよく、係数比較して

$a+1 \neq a-1$, $a+b+1 \neq b$

前者が常にみたされるから $D>0$ は — をみたさない

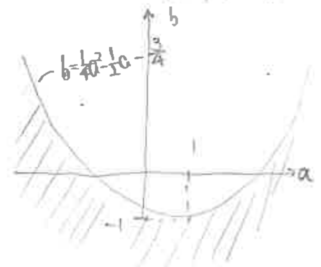
2° D=0の時

①は重解 $p=-\frac{a+1}{2}$ を持つから、これが②をみたさなければよい。代入して

$$-\frac{a+1}{2}\left(-\frac{a+1}{2}+a-1\right)+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}=0$$

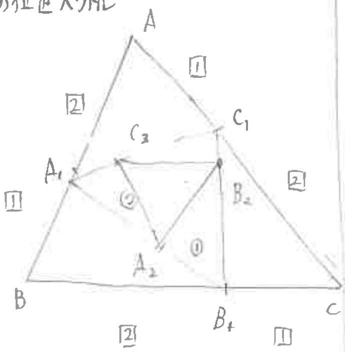
これはaについての恒等式だから $D=0$ の時、—が常にみたされ、不適.

以上から、条件は $D>0$ で、図示して下図斜線部(境界含まず)



第 2 問

[解] 原点Oを支点とし、点Xの位置ベクトルを $\vec{x}$ とする。



$$\begin{cases} \vec{a_1} = \frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b}) \\ \vec{b_1} = \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) \\ \vec{c_1} = \frac{1}{3}(\vec{c}+2\vec{a}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a_2} = \frac{1}{3}(\vec{a_1}+2\vec{b_1}) \\ \vec{b_2} = \frac{1}{3}(\vec{b_1}+2\vec{c_1}) \\ \vec{c_2} = \frac{1}{3}(\vec{c_1}+2\vec{a_1}) \end{cases}$$

から、

$$\vec{a_2} = \frac{1}{9}(\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c})$$

$$\vec{b_2} = \frac{1}{9}(4\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c})$$

$$\vec{c_2} = \frac{1}{9}(4\vec{a}+4\vec{b}+\vec{c})$$

より、

$$\overline{A_2B_2} = |\vec{b_2}-\vec{a_2}| = \frac{1}{3}|\vec{a}-\vec{b}| = \frac{1}{3}\overline{AB}$$

$$\overline{B_2C_2} = |\vec{c_2}-\vec{b_2}| = \frac{1}{3}|\vec{b}-\vec{c}| = \frac{1}{3}\overline{BC}$$

$$\overline{C_2A_2} = |\vec{a_2}-\vec{c_2}| = \frac{1}{3}|\vec{c}-\vec{a}| = \frac{1}{3}\overline{CA}$$

だから三辺相等より

$$\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$$ //

/20

第 3 問

/20

第4問

[解]

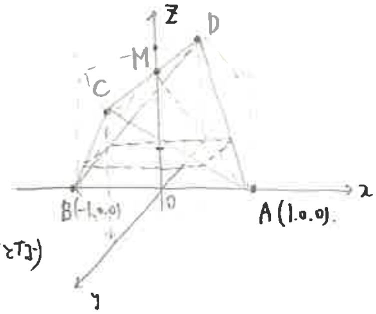
(1) C$(0,-1,\sqrt{2})$

D$(0,+1,\sqrt{2})$

とすると四面体ABCDは

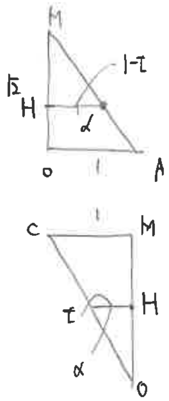
一辺2の正四面体となり

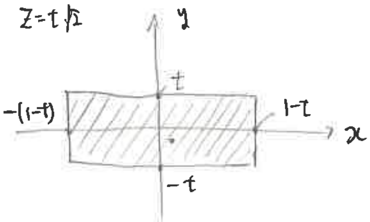
題意をみたす。



(2) α と z軸の交点Hは $OM=\sqrt{2}$ から $H(0,0,t\sqrt{2})$ である。

αで切断すると、切り口はz軸に垂直な四角形になり右の切断図から、下図のようになる





(3) (2)と同じくしてz=√2kにおける切り口の面積 $S(k)$ は $(0\leq k\leq\sqrt{2})$

$$S(k)=2(1-k)2k=4k(1-k)$$

だから、求める体積Vは

$$V=\int_0^{\sqrt{2}t}S(k)\,dz$$

$$=\int_0^{t}S(k)\frac{dz}{dk}\,dk$$

$$=\int_0^{t}4k(1-k)\sqrt{2}\,dk$$

$$=4\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{3}k^3\right]_0^t$$

$$=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\ //$$

[本時のミス]

◦ 1述の代入ミス ⇒ 検算でひっかからない系

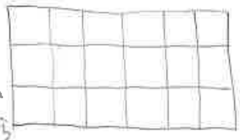
⇒ 1件戻りの大切さ

◦ また座標まちがえた…

/20

第 5 問

[解] $\begin{cases} \text{一辺1の正方形タイルを}A \\ 1,2 \quad 〃 \quad B \end{cases}$



と名付ける。A, Bのとりだされた枚数 a, b とすると $(a,b \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 面積から

$$a+4b=18$$

が必要で、

$$(a,b)=(2,4),(6,3),(10,2),(14,1),(18,0)$$

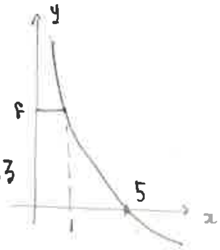
のいずれかである。又、長方形の形から、$b \leq 3$ も必要であるから $(a,b)=(2,4)$ は不適である。逆に、他の時は長方形をうまくうめることができて十分。

試行回数$(n)=a+b$に注目して求める確立 a_n とおくと

$$\begin{cases} a_9 = {}_9C_3 \cdot p^6 q^3 = 84p^6q^3 \\ a_{12} = {}_{12}C_2\, p^{10} \cdot q^2 = 66\,p^{10}q^2 \\ a_{15} = {}_{15}C_1 \cdot p^{14} \cdot q = 15\,p^{14}q \\ a_{18} = p^{18} \\ \text{otherwise} \quad a_n = 0 \end{cases}$$

第 6 問

[解] 題意から $y=\frac{a}{x}+b$ の
グラフは右のようである
(対称性から $a>0$ のみ考える)



よって、$y=\frac{a}{x}+b$ が $(1,8)(5,0)$ を通るから

$$\begin{cases} 8=a+b \\ a+5b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=10 \end{cases}$$

である. 以下 $f(x)=\frac{10}{x}-2$ とおく.

(1) 高さ h $(0\leqq h\leqq 8)$ の時の水の体積 $V(h)$ とおくと

$$V(h)=\int_0^h \pi\left(\frac{10}{y+2}\right)^2 dy$$
$$=100\pi\left[-\frac{1}{y+2}\right]_0^h$$
$$=100\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{h+2}\right)$$

だから

$$V(6)=\frac{75}{2}\pi \quad //$$

(2) $\frac{dh}{dt}\Big|_{h=3}$ を求めれば良い. 題意から. $\frac{dV}{dt}=k$ であって.

$\frac{dh}{dt}=h'$ とかくと.

$$k=100\pi\frac{1}{(h+2)^2}h'$$

だから $h=3$ として.

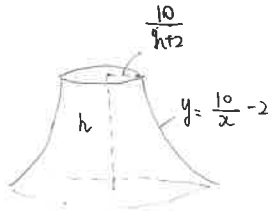
$$h'\Big|_{h=3}=\frac{25}{100\pi}k=\frac{k}{4\pi}\ \text{[cm/s]} \quad //$$

[解2(2)] エースを使ってみる

(2) ($y=\frac{10}{x}-2$ まで同じ) 時刻 t での表面積 S, 高さ h とすると

$$k=S\frac{dh}{dt} \quad \cdots ①$$

$$S=\pi\left(\frac{10}{h+2}\right)^2 \quad \cdots ②$$



②を①に代入

$$\frac{dh}{dt}=\frac{k}{\left(\frac{10}{h+2}\right)^2\cdot\pi}$$

$h=3$ として

$$\frac{dh}{dt}=\frac{k}{4\pi} \quad //$$

[エースのすばらしさ!! これはとんでもない]

/20