

東工大理系後期 2003 年度

July 1, 2025

1 問題 1

xyz 空間の 2 点 P, Q を, $\triangle OPQ$ (O は原点) の面積が正の一定値 S となるように動かす. P, Q から xy 平面に引いた垂線をそれぞれ P', Q' とし, $\triangle OP'Q'$ の面積を S_1 とする. ただし, O, P', Q' が同一線上にあるときは $S_1 = 0$ とする. 同様に P, Q から yz 平面, zx 平面に垂線を引いて作った三角形の面積を S_2, S_3 とする.

1. $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ を証明せよ.
2. $S_1 + S_2 + S_3$ の最大値, 最小値を求めよ.

2 問題 2

m を 0 以上の整数とする. 直線 $2x + 3y = m$ 上の点 (x, y) で, x, y がともに 0 以上の整数であるものの個数を $N(m)$ とする.

1. $N(m+6) = N(m) + 1$ を証明せよ.
2. $N(m) = 1 - m + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{2m}{3} \right\rceil$ を証明せよ. ただし, $[a]$ は a 以下の最大の整数を表すものとする.