次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

(i) α が $0<\alpha<1$ を満たす有理数ならば，区間 $0\leq x\leq 1$ の上で不等式 $1+\dfrac{\alpha}{2}x\leq(1+x)^{\alpha}$ が成り立つことを示せ．

(ii) 2^{200} の桁数はいくつか．またその最上位の数は何か．その理由を述べよ．

注１．例えば $2^{10}=1024$ の桁数は 4，最上位の数は 1 である．なおこの数が 10^3 に近いことに注意せよ．

注２．$\log_{10}2=0.3010$ であるが，この数値を証明に用いてはならない．

(iii) $0.300<\log_{10}2<0.302$ であることを示せ．

[解]

(i) $f(x)=(1+x)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{\alpha}{2}x\right)$ とおく．

$$f'(x)=\alpha\left[\left(\frac{1}{1+x}\right)^{1-\alpha}-\frac{1}{2}\right]$$

である．

$$0\leq x\leq 1\qquad 0<\alpha<1$$

から，$\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{1+x}\leq 1$，$0<1-\alpha<1$ であることより，

$$\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\leq\left(\frac{1}{1+x}\right)^{1-\alpha}$$

従って $f'(x)>0$ だから，$f(x)$ は単調増加．これと $f(0)=0$ から，区間内で $f(x)\geq 0$ である．故に示された．□

(ii) $2^{200}=(2^{10})^{20}$ だから，$2^{10}>10^3$ ゆえ，

$$2^{200}>10^{60}\tag{1}$$

である．

また，(1) で $(x,\alpha)=(1,1/20)$ とすることにより，(これらは条件を満たす．)

$$2^{1/20}\geq 1+\frac{1}{40}>1+\frac{24}{1000}$$
$$\Longleftrightarrow 2^{10}<2^{1/20}10^{3}$$

$$\therefore\ 2^{200}<2\times 10^{60}\tag{2}$$

を得る．(1)，(2) より，

$$10^{60}<2^{200}<2\times 10^{60}\tag{3}$$

であるから，61 桁で，最高位は 1 である．$\cdots$(答)

(iii) (3) の各辺正より，常用対数を取る．以下 $\log_{10}2=a$ とする．

$$60<200a<60+a$$
$$\Longleftrightarrow\frac{3}{10}<a<\frac{60}{199}$$
$$\therefore\ 0.300<a<0.3015\cdots$$

であるから，題意は示された．□