正数 $x$ を与えて,

$$2a_1 = x,\, 2a_2 = a_1^2 + 1, \cdots,\, 2a_{n+1} = a_n^2 + 1, \cdots$$

のように数列 $\{a_n\}$ を定める時,

(1) $x \neq 2$ ならば, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ となることを証明せよ.

(2) $x < 2$ ならば, $a_n < 1$ となることを証明せよ. このとき, 正数 $\epsilon$ を $1 - x/2$ より小となるようにとって, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ までが $1 - \epsilon$ 以下となったとすれば, 個数 $n$ について次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$2 - x > n\epsilon^2$$

**[解]**

(1) 与えられた漸化式より,

$$\begin{aligned} & a_n < a_{n+1} \\ \iff & 2a_n < a_n^2 + 1 \\ \iff & (a_n - 1)^2 > 0 \\ \iff & a_n \neq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①} \end{aligned}$$

である. $x \neq 2$ ならば, $a_1 \neq 1$ だから, 漸化式より帰納的に $a_n \neq 1$ である. これと①より題意は示された. □

(2) 漸化式および $x > 0$ から, $a_n > 0$ であることに注意すると, $a_{n+1}$ は $a_n$ の単調増加関数である. $x < 2$ ならば $a_1 < 1$ である. そこで以下 $k \in \mathbb{N}$ に対して $a_k < 1$ が成立すると仮定すると

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 1}{2} < \frac{1 + 1}{2} = 1$$

故に帰納法により $\forall n, a_n < 1$ となる. □

次に, 後半部分を考える. 題意より

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} > \epsilon \\ a_k < 1 - \epsilon \quad k = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

である. 第一式から, $a_1 < 1 - \epsilon$ が保証される.

ここで, 漸化式より, $k \leq n$ のとき,

$$2(a_{k+1} - a_k) = (a_k - 1)^2 > \epsilon^2 \quad (\because \text{②})$$

となる. $k$ について和をとって,

$$2(a_{n+1} - a_1) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - 1)^2 > n\epsilon^2$$

$$a_{n+1} - \frac{x}{2} > \frac{n\epsilon^2}{2}$$

前半部分から $a_{n+1} < 1$ だから,

$$1 - \frac{x}{2} > \frac{n\epsilon^2}{2}$$

$$2 - x > n\epsilon^2$$

となって, 題意の不等式を得る. □