一辺の長さが 2 の立方体 C がある．S_0 を C の 6 つの面に内接する球とする．次に S_0 に外接し，C の 3 つの面と内接する球 S_1 を取る．S_1 に外接し，C の 3 つの面に内接する球 S_2 を S_1 の外側（S_0 と反対側）に取る．以下帰納的に，$S_0, \dots, S_n$ まで取れたとして，S_n に外接し，C の 3 つの面に内接する球 S_{n+1} を S_n の外側に取る．

1. S_n の半径を n の式で表せ．
2. 立方体 C の中でどの S_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ にも含まれない部分の体積を求めよ．

[解]

(1) fig. 1 のように，立方体の頂点 A, B, C, D, E, F, G, H に対し題意の 3 面を ABCD, AEFB, AEHD とする．各球の中心は立方体及び球の対称性から対角線 AG 上にある．S_n の中心を O_n，半径を r_n とおく．断面 AEGC を fig. 2 に示す．$AC = 2\sqrt{2}$,$AE = 2$ より，$\angle \mathrm{GAC} = |theta$ と置くと

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AG}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{1}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AG}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

が成り立つことに注意する．

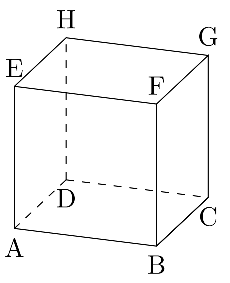

図 1　立方体と頂点の定義

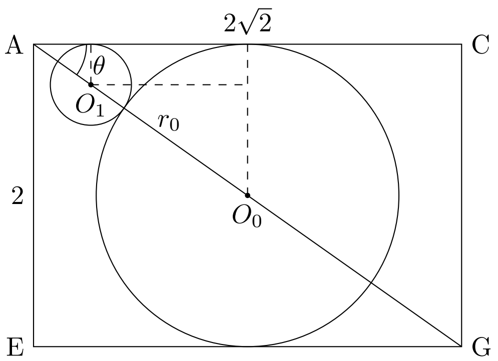

図 2　断面 AEGC

半径 r_n に関する漸化式を導出することで r_n の一般項を求める．円 S_n と S_{n+1} に着目して fig. 3 を考える．

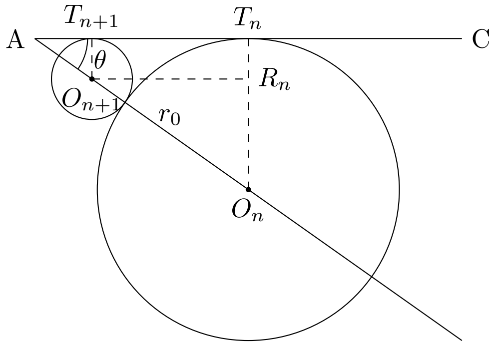

図 3　S_n と S_{n+1} の関係

O_n から AC に引いた垂線と AC との交点を T_n と置くと，その定義より O_nT_n の長さは r_n に等しい．一方で，O_{n+1} から O_nT_n に引いた垂線と O_nT_n の交点を R_n と置くと，

$$\begin{aligned} O_nT_n &= O_{n+1}T_{n+1} + O_nR_n \\ &= O_{n+1} + O_nO_{n+1}\sin\theta \\ &= r_{n+1} + (r_n + r_{n+1}\sin\theta) \end{aligned}$$

と表されるので，r_n と r_{n+1} の関係は

$$r_n = r_{n+1} + (r_n + r_{n+1}\sin\theta) \tag{3}$$

$$\therefore r_{n+1} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} r_n \tag{4}$$

となる．$r_0 = 1$ と合わせると，この等比級数の解は

$$r_n = \left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^n \tag{5}$$

$$= (2-\sqrt{3})^n \tag{6}$$

となる．ただし，eq. (1) を用いた．$\cdots$(答)

(2) 立方体 C の中でどの S_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ にも含まれない部分の体積を V_n とする．求めるべき値は $V = \lim_{n\to\infty} V_n$ である．$S_k\,(k = 0, 1, \cdots, n)$ 同士は互いに体積を共有することはないから，体積 V_n は立方体 C の

体積から，$S_k\,(k=0,1,\cdots,n)$ の体積を減じたものに等しく，

$$\begin{aligned}V_n &= 8-\frac{4}{3}\pi\sum_{k=0}^{n} r_k^3\\ &= 8-\frac{4}{3}\pi\sum_{k=0}^{n}(2-\sqrt{3})^{3k}\\ &= 8-\frac{4}{3}\pi\frac{1-(2-\sqrt{3})^{3(n+1)}}{1-(2-\sqrt{3})^3}\end{aligned}$$

となる．

$(2-\sqrt{3})^3<1$ だから求める体積 V として

$$\begin{aligned}V &= \lim_{n\to\infty} V_n\\ &= 8-\frac{4}{3}\pi\frac{1}{1-(2-\sqrt{3})^3}\\ &= 8-\frac{6\sqrt{3}+10}{15}\pi\\ &= \underline{8-\frac{6\sqrt{3}+10}{15}\pi}\end{aligned}$$

[解説]