京大理科数学 1972

70/150分

		計	思	総	
1	論理 ★	A	C	C	?
2	極限	A	A	A	20
3	多変数	B	B	B	20
4	図形 ★	B	C	C	20
5	多変数	A	A	A	20
6	確率	A	A	A	20

[解] ベクトルの2つの式を①②とする。すなわち、

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A} \quad \cdots①$$

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) \quad \cdots②$$

以下、$\vec{S_n}=\sum_{k=1}^{n}\vec{A_k}$, $\vec{T_n}=\sum_{k=1}^{n}\vec{B_k}$ とする。$\vec{S_n}=\vec{T_n}$…③を帰納的に示す。

[補題I]
任意のベクトル $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_n}$ に対し $(n\geq 2)$

$$\vec{a_1}+\cdots+\vec{a_n}=\vec{a_2}+\vec{a_3}+\cdots+\vec{a_n}+\vec{a_1} \quad \cdots★$$

(証) 帰納法による。$n=2$の時は★は①に他ならない。$n=k$での成立を仮定すると、$n=k+1$の時

$$\vec{a_1}+\cdots+\vec{a_{k+1}}=\vec{a_1}+\cdots+\vec{a_{k-1}}+(\vec{a_k}+\vec{a_{k+1}}) \quad (\because ②)$$

$$=\vec{a_2}+\cdots+(\vec{a_k}+\vec{a_{k+1}})+\vec{a_1} \quad (\because 仮定)$$

$$=\vec{a_2}+\cdots+\vec{a_k}+\vec{a_{k+1}}+\vec{a_1} \quad (\because ②)$$

ゆえに $n=k+1$ でも★は成立。
以上から★は示された。∎

まず、$n=1$の時 ③$\Leftrightarrow \vec{A_1}=\vec{B_1}$ で、これは定義から成立する。そこで、$T\in\mathbb{N}$ に対し、$n\leq T$での③の成立を仮定する。$n=T+1$の時、$k=0,1,\cdots,T$に対して、

$$\vec{A_{T+1}}=\vec{B_{k+1}}$$

なるkがあることに注意する。

1° $k=T$の時

$$\vec{T_{T+1}}=\vec{T_T}+\vec{B_{T+1}}$$

$$=\vec{S_T}+\vec{A_{T+1}} \quad (\because 仮定, \vec{A_{T+1}}=\vec{B_{T+1}})$$

$$=\vec{S_{T+1}}$$

となり、$n=T+1$でも③は成立。

2° $k\neq T$の時

$$\vec{T_{T+1}}=\vec{B_1}+\cdots+\vec{B_k}+\vec{B_{k+1}}+\vec{B_{k+2}}+\cdots+\vec{B_{T+1}}$$

$$=\vec{B_{k+1}}+\vec{B_1}+\cdots+\vec{B_k}+\vec{B_{k+2}}+\cdots+\vec{B_{T+1}} \quad (\because 仮定)$$

$$=\vec{B_1}+\cdots+\vec{B_k}+\vec{B_{k+2}}+\cdots+\vec{B_{T+1}}+\vec{B_{k+1}} \quad (\because 補題I)$$

$$=\vec{S_{T+1}} \quad (\because 1°に帰着)$$

ゆえに $n=T+1$ でも③は成立

以上1°, 2°から、$n=T+1$でも③は成立する。ゆえに③は示された。∎

第 2 問

[解]

$$F(x)=\int_0^x \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{3}{t+3}\right)dt$$

$$=\frac{-1}{2}\Big[\log(t+1)-3\log(t+3)\Big]_0^x$$

$$=\frac{-1}{2}\Big(\log(x+1)-3\log(x+3)+3\log 3\Big)$$

だから

$$F(x)-\log x=-\frac{3}{2}\log 3+\frac{3}{2}\log(x+3)-\frac{1}{2}\log(x+1)-\log x$$

$$=-\frac{3}{2}\log 3+\frac{1}{2}\log\frac{(x+3)^3}{(x+1)x^2}$$

$$=-\frac{3}{2}\log 3+\frac{1}{2}\log\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^3}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\longrightarrow \underline{-\frac{3}{2}\log 3}\ (x\to\infty)$$

$(\because \log x$ は連続$)$

/20

第 3 問

[解] $x'=x-a,\ y'=y-a,\ z'=z-a$とおく.与式をかきかえて

$$\begin{cases} x'+y'+z'=-2a \cdots ① \\ (x'+a)^3+(y'+a)^3+(z'+a)^3=a^3 \cdots ② \end{cases}$$

ここで.$p=x'^2+y'^2+z'^2$; $q=y'z'+z'x'+x'y'$とおく.①より

$a=-\frac{1}{2}(x'+y'+z')$だから.②に代入

$$r+\frac{3}{2}p(x'+y'+z')+\frac{3}{4}(x'+y'+z')^3-\frac{1}{4}(x'+y'+z')^3=0$$

$$(x'+y'+z')(p-q)+3x'y'z'+\frac{1}{2}(x'+y'+z')\left[(x'+y'+z')^2-3p\right]=0$$

$$(x'+y'+z')(p-q)+3x'y'z'+(x'+y'+z')(p+2q-3p)=0$$

$$x'y'z'=0$$

よって x', y', z'のうち少なくとも1つは 0,つまりx, y, zのうち少なくとも1つは$\underline{a}$である

[解2] (直接示す)

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3$$

展開する

$$3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz=0$$

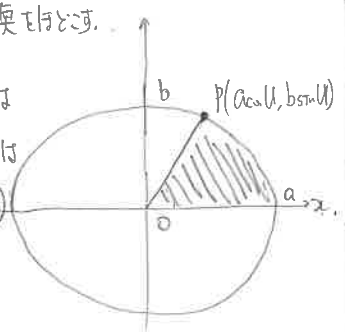
$$(y+z)(z+x)(x+y)=0$$

よってOK ■

/20

第5問

【解】 $X=\frac{x}{a}$, $Y=\frac{y}{b}$ なる変換をほどこす.



PはP'(cos u, b sin u)に、た円は

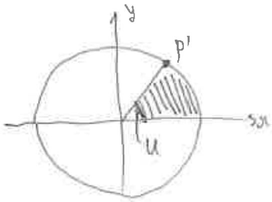
$x^2+y^2=1$ にうつり. OPのはいた部分は

下図斜線部(この面積Sとする)

にうつる. 変換の定義から

$$S = S'ab \quad \cdots ①$$

であり,



$$S' = \frac{1}{2}u$$

だから①に代入して

$$S = \frac{1}{2}abu$$

$\frac{dS}{dt}=1$ より

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab\frac{du}{dt} = 1$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = \frac{1}{ab}$$

$$du = \frac{1}{ab}dt$$

積分して

$$u = \frac{1}{ab}t + C \quad (C:定数)$$

$t=0$ で $u=0$ より $C=0$ だから. $u = \frac{1}{ab}t$ である.

/20

第 6 問

[解] まず. $A=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおいて. $\underline{\mathbb{E}=\frac{1}{n}A}_{①}$ である. 次に $\mathbb{F}$ について,

とり出した2枚を区別して考える. 1枚目の数 X, 2枚目の数 Y とおくと

$$\mathbb{F}=\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$$

である. 明らかに $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}$ …② である. 以下 $\mathbb{E}(Y)$ について.

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{A-a_k}{n-1}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-1}A=\frac{1}{n}A \quad \cdots ③$$

①.②.③から

$$\mathbb{F}=\frac{1}{n}A+\frac{1}{n}A=2\mathbb{E} \quad ∎$$

/20