京大理系数学 2011

第 1 問

[解] (1) Y=X となる時 (X=1,2,…,8) Y以外のカードが X+1, …, 9 だから、求める確率は

$$\sum_{X=1}^{8}\left(\frac{9-X}{{}_9C_2}\right)^2=\left(\frac{1}{36}\right)^2\sum_{X=1}^{8}X^2=\left(\frac{1}{36}\right)^2\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17=\frac{17}{108}$$ //

(2) 与式を A とおく。

$$A=\int_0^{1/2}x\sqrt{1-2x^2}\,dx+\int_0^{1/2}\sqrt{1-2x^2}\,dx \quad \cdots ①$$

となる。

$$\int_0^{1/2}x\sqrt{1-2x^2}\,dx=-\frac{1}{6}\left[(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{1/2}=-\frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]= \quad \cdots ②$$

$$\int_0^{1/2}\sqrt{1-2x^2}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,d\theta \quad \left(x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$$

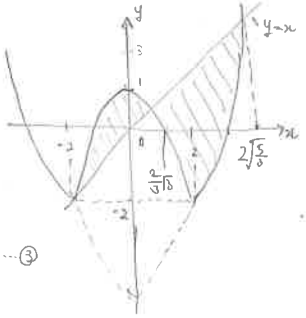
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \quad \cdots ③$$

②, ③を①に代入して

$$A=\frac{1}{6}\left\{1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}$$ //

第　　問

[解] グラフは右図である。



$\frac{3}{4}x^2-5=x$ …① の2解 α,β $(\alpha<\beta)$

$-\frac{3}{4}x^2+1=x$ …② の2解 γ,δ $(\gamma<\delta)$

とおく。もとめる面積Sとする。

$S=$  $+2$  -2  …③

であって.

 $=\frac{3}{4}\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{8}(\beta-\alpha)^3$

 $=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3=\frac{1}{8}(\delta-\gamma)^3$

 $=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}(2+2)^3=\frac{1}{8}(4)^3$

を③に代入して

$$S=\frac{1}{8}(\beta-\alpha)^3+\frac{2}{8}(\delta-\gamma)^3-16 \quad \cdots ④$$

ここで①②から

$$\beta-\alpha=\frac{10}{3}+2=\frac{16}{3}$$
$$\delta-\gamma=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

を④に代入して

$$S=\frac{1}{8}\left(\frac{16}{3}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}\right)^3-16$$
$$=\frac{8^3}{3^3}+\frac{2\cdot 8^2}{3^3}-\frac{16\cdot 3^3}{3^3}$$
$$=\frac{16}{3^3}(32+8-27)$$
$$=\frac{208}{27}$$
//

第 4 問

[解] $\frac{1}{2} < a_k < 1$ …① $A_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}}$ とおく。

[補題 P_1] $2^n(1-B_n) < 1$

(証明) ①から、$\frac{1}{2^k} < \frac{a_k}{2^{k-1}}$ だから、k について足して

$$\frac{1}{2}\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} < B_n$$

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n < B_n$$

だから

$$2^n(1-B_n) < 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

となり、P_1 は示された ■

任意の $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ に対し、「$A_n > 1-B_n$ …◇」が成立すること …② を帰納的に示す。

1° $n=2$

◇は、

$$(1-a_1)(1-a_2) > 1-a_1-\frac{1}{2}a_2$$

となる。変形して、

$$\Leftrightarrow -a_2(1-a_1) > -\frac{1}{2}a_2$$

$$\Leftrightarrow a_2\left(\frac{1}{2}-a_1\right) < 0$$

で、これは成立するから $n=2$ では◇は成立。

2° $n=k \geq 2$ での成立仮定

$A_k > 1-B_k$ の両辺に $(1-a_{k+1})$ (>0) をかける。

$$A_{k+1} > (1-B_k)(1-a_{k+1}) \quad > 1-B_k-$$

$$= (1-B_k)-(1-B_k)a_{k+1}$$

$$> (1-B_k)-\frac{a_{k+1}}{2^k} = \quad (\because P_1)$$

$$= 1-B_{k+1}$$

から、$n=k+1$ でも◇は成立。

以上から②は示された ■

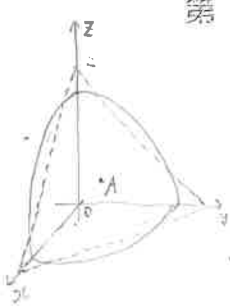
第 5 問

[解] 平面αの点Xとして

$$\alpha : x+y+z=4$$

だから、αとOの距離Lは

$$L=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}<\sqrt{6}$$



だから、αとSは共有点を持つ。さらに、共有円の中心 $A\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$、半径 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ だから、共有円上の点は、直交する単位ベクトル $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ を用いて、

$$\overrightarrow{OX}=\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{6}}{3}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{6}}{6}\sin\theta\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

とかけるから、$X(x,y,z)$として

$$\begin{cases} x=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sin\theta \\ y=\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta-\frac{1}{3}\sin\theta \\ z=\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta-\frac{1}{3}\sin\theta \end{cases}$$

以下 $S=\sin\theta$, $C=\cos\theta$ とすると

$$\begin{aligned} xyz&=\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}S\right)\left\{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}S\right)^2-\frac{1}{3}C^2\right\}\\ &=\frac{2}{3}(2+S)\left\{\frac{4}{9}S^2-\frac{8}{9}S+\frac{13}{9}\right\}\\ &=\frac{2}{27}\left(4S^3-3S+26\right)\end{aligned}$$

{ }の中身を$f(S)$とおく。

$$f'(S)=3(4S^2-1)$$

から、下表となる。

S	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
f'		$+$	0	$-$		$+$	
f		↗		↘		↗	

ここで

- $f(-1)=25$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=25$
- $f(1)=27$ $f\left(-\frac{1}{2}\right)=27$

から、求める値域は

$$\frac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$$

[解2] 共有面上の点 (X,Y,Z)は

$$\begin{cases} X+Y+Z=4 \\ X^2+Y^2+Z^2=6 \end{cases}$$

をみたす。$\alpha=XYZ$とする。

$$YZ+ZX+XY=5$$

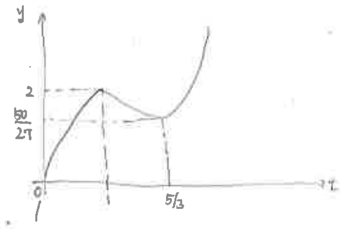
から X,Y,Z は tの3次式

$$t^3-4t^2+5t=\alpha$$

の3実解。グラフは右図だから、

$$\frac{50}{27}\leqq\alpha\leqq 2$$

となる。

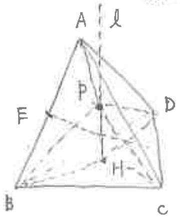


[解] $\triangle BCD$の外心Hとおく。点Xに対し、$\overrightarrow{AX}=\vec{x}$とおく。Hを通り、$\triangle BCD$に垂直な直線$l$上の点Pとする。この時、外心の定義から

$$\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD} \quad \cdots ①$$

である。ABの中点Eとし、Eを通りABに垂直な平面πとする。$AB \nparallel$ 平面BCDから、πとlは必ず交点を持ち、これをP_1とすると、

$$\overline{AP_1}=\overline{BP_1} \quad \cdots ②$$



①.②から、P_1を中心とし、半径$\overline{AP_1}$の円はA,B,C,Dを全て通るので、題意は示された。$\blacksquare$