京大理系数学 2002

第 1 問

[解] $a_1=1$, $S_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$ …①

$n(n-2)a_{n+1}=S_n$ …②

②から、

$$n(n-2)(S_{n+1}-S_n)=S_n$$

$$n(n-2)S_{n+1}=(n-1)^2 S_n \quad \cdots③$$

一方、①から $a_1=1$, ②で $n=2$として $a_2=-1$ …④ である。$n\ge3$の時、③から

$$\frac{n}{n-1}S_{n+1}=\frac{n-1}{n-2}S_n=\cdots=\frac{3-1}{3-2}a_3$$

$$\therefore S_n=\frac{n-2}{n-1}\cdot 2a_3 \quad (n\ge3)$$

①から、$S_n=\dfrac{1-2/n}{1-1/n}\cdot 2a_3 \longrightarrow 2a_3=1$ ∴ $a_3=\frac{1}{2}$ であるから、

$$S_n=\frac{n-2}{n-1}$$

これは$n=2$でも成立(∵④)する。②から、$n\ge4$の時

$$a_n=\frac{1}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{n-3}{n-2}=\frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

これは$n=3$で成立。以上から

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ -1 & (n=2)\\ \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} & (n\ge3)\end{cases}$$

第2問

[解] 対称性から、$A(1,0)$ $B(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $C(\cos\beta, \sin\beta)$ $(0<\alpha\leqq\pi,\ \alpha<\beta<2\pi)$ として良い。

$$\overline{AB}^2 = (\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha = 2(1-\cos\alpha) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{BC}^2 = (\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2 = 2\{1-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\} = 2(1-\cos(\beta-\alpha))$$

$$\overline{CA}^2 = 2(1-\cos\beta) = 4\sin^2\frac{\beta}{2}$$

である。$P=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$ とおく。

(1) $P>8 \Leftrightarrow \cos\alpha+\cos\beta+\cos(\beta-\alpha)<-1 \Leftrightarrow 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\alpha<-1$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right) < -2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ …① である。$\alpha=\pi$ の時 ①$\Leftrightarrow 0<0$ となって不適だから、$0<\alpha<\pi$ である。この時 $\cos\frac{\alpha}{2}>0$ だから、

$$①\Leftrightarrow \cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right) < \cos\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)$$

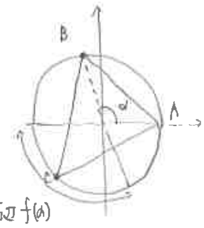
$$\Leftrightarrow \left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+2n\pi < \beta-\frac{\alpha}{2} < \left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+2n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \pi+2n\pi < \beta < (\pi+\alpha)+2n\pi$$

$0<\beta<2\pi$ から $n=0$ で

① $\Leftrightarrow \pi<\beta<\pi+\alpha \Leftrightarrow \triangle ABC$は鋭角三角形

より、示された □



(2) $P\leqq 9 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leqq \cos\alpha+\cos\beta+\cos(\beta-\alpha)$ …② である。この右辺 $f(\alpha)$ とおく。$t=\cos\frac{\alpha}{2}$ とすると、$0\leqq t<1$ で、

$$f(\alpha)=2t\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)+2t^2-1 \quad …③$$

であり、これは $\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)$ の単調増加関数で、$\beta=\pi+\frac{\alpha}{2}$ ($\alpha<\beta<2\pi$ をみたす) で最小値

$$f(\alpha)=2t^2-2t-1$$

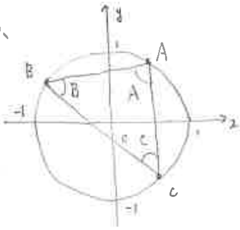
をとる。次に t を動かして

$$f(\alpha)=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\geqq -\frac{3}{2} \quad (\because t\in\mathbb{R})$$

だから ②は示された □ 等号成立は $t=\frac{1}{2}\wedge\beta=\pi+\frac{\alpha}{2}$ の時で、$0<\alpha\leqq\pi$ から $\alpha=\frac{2}{3}\pi,\ \beta=\frac{4}{3}\pi$

つまり $\triangle ABC$は正三角形 である。

[解2] 右のようにおく。$\triangle ABC$の外接円の半径は1だから、正弦定理から、



$$\begin{cases}\overline{AB}=2\sin C\\ \overline{BC}=2\sin A\\ \overline{CA}=2\sin B\end{cases}$$

だから $P=4(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)$ である。

(1) $\frac{1}{4}P=\sin^2A+\sin^2B+\sin^2(\pi-A-B)=$

$$=\frac{1-\cos2A}{2}+\frac{1-\cos2B}{2}+\frac{1-\cos2(A+B)}{2}$$

$$\frac{1}{2}P=3-\{\cos2A+\cos2B+\cos2(A+B)\}$$

$$=3-\{2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1\}$$

$$=4-2\cos(A+B)\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$$

$$=4-4\cos(A+B)\cos A\cos B$$

だから、

$$P>8 \Leftrightarrow \cos(A+B)\cos A\cos B<0 \Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C>0$$

となり、$\cos A \wedge \cos C$ のうち、1つ又は3つが正である。前者は $A+B+C=\pi,\ 0<A,B,C$ に反するので、$\cos A, \cos B, \cos C>0$ となり $\triangle ABC$は鋭角三角形 □

(2) $\frac{1}{2}P=3-\{\cos2A+\cos2B+\cos2C\}$

$$=3-\{2t^2-1+2\cos(A+B)\cos(A-B)\} \quad (t=\cos C)$$

$$=4-(2t^2-2\cos(A-B)\cdot t) \quad (\because A+B+C=\pi)$$

$$=-2\left\{t-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right\}^2+4+\frac{1}{2}\cos^2(A-B)$$

だから、

$$P=8+\cos^2(A-B)-2\left\{t-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right\}^2\leqq 9 \ □$$

等号成立は $\cos(A-B)=\pm1 \wedge t=\frac{1}{2}\cos(A-B)$ の時で、$-\pi<A-B<\pi$ から、

$\cos(A-B)=1,\ t=\frac{1}{2}$ $\therefore A=B=C=\frac{\pi}{3}$ □

[解] 2セイスウ解をα, β, 2虚数解を$z, \bar{z}$とおく。明らかに$\alpha\beta z\bar{z} \neq 0$.

$$a = -(\alpha+\beta+z+\bar{z}) \quad \cdots ①$$

$$1 = \alpha\beta z\bar{z} = \alpha\beta|z|^2 \quad \cdots ②$$

$$c = -\alpha\beta z\bar{z}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{z+\bar{z}}{|z|^2}\right) \quad (\because ②) \quad \cdots ③$$

$$b = \alpha\beta + (\alpha+\beta)(z+\bar{z}) + |z|^2 \quad \cdots ④$$

①から.

$$z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{Z}$$

となり($\because a, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$). $\mathrm{Re}(z) = \frac{t}{2}$ ($t \in \mathbb{Z}$)とおける。④から同様に$|z|^2 \in \mathbb{Z}$が従う。

したがって②から.

$$|z|^2 = 1,\ \alpha\beta = 1 \quad \therefore |z| = 1,\ (\alpha, \beta) = (1,1)\ (-1,-1) \quad \cdots ⑤$$

となる。したがって. $z \notin \mathbb{R}$, $|z|=1$から $\left|\frac{t}{2}\right|^2 < 1$ $\therefore t = 0, \pm 1$ より $z = \pm i, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ $\cdots ⑥$

1° $(\alpha, \beta) = (1, 1)$の時

①〜④に代入して

$$a = -(2+t) \quad b = 2+2t, \quad c = -(2+t),$$

となり.

$$f(x) = x^4 - (2+t)x^3 + 2(1+t)x^2 - (2+t)x + 1$$

$$= (x-1)^2(x^2 - tx + 1)$$

⑥から. $t = 0, \pm 1$いずれも十分で

$$(a, b, c) = (-2, 2, -2),\ (-3, 4, -3)\ (-1, 0, -1)$$

2° $(\alpha, \beta) = (-1, -1)$の時

$$a = -(-2+t) \quad b = (2-2t) \quad c = -(-2+t)$$

で; 1°と同様にしていずれも十分で

$$(a, b, c) = (2, 2, 2)\ (1, 0, 1)\ (3, 4, 3)$$

以上から 以下複号同順として

$$(a, b, c) = (\pm 2, 2, \pm 2)\ (\pm 1, 0, \pm 1)\ (\pm 3, 4, \pm 3) \ //$$

第 4 問

[解] (1) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ //

(2) 題意の曲線C上の点は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\theta\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ と表されるから. もとめる長さLとして

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}+\log\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)\right\}$$ //

[解] $f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ とおき,

$$A: y=f(x)$$
$$B: y=c$$

とする。$f'(x)=3x^2+6ax+3b$ で題意のようになるには,$f(x)=0$ が異2実解を持つ。

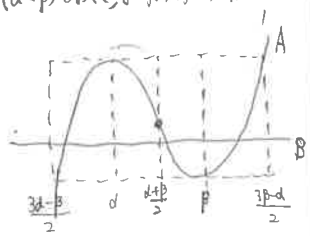
つまり判別式 D として

$$\frac{1}{3}\cdot D/4=a^2-b>0 \iff a^2>b \quad 図$$

が必要。このもとで $f'(x)=0$ の2実解 α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと,$y=f(x)$ のグラフ概形は

右図。$\alpha<\beta$ から

$$\alpha=-a-\sqrt{a^2-b}$$
$$\beta=-a+\sqrt{a^2-b}$$

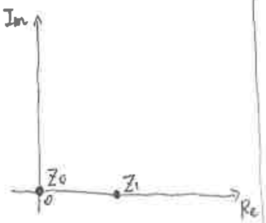


だから,

$$\frac{3\alpha-\beta}{2}=-a-2\sqrt{a^2-b}$$
$$\frac{-\alpha+3\beta}{2}=-a+2\sqrt{a^2-b}$$

となり,たしかに題意は成立。図

[解] $0<\theta<\pi/2$ …①. $a>0\ (a\in\mathbb{R})$ …②



(ii) から $e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと,

$$Z_{n+1}-Z_n=e(\theta)(Z_n-Z_{n-1})$$

$Z_0=0,\ Z_1=a$ とあわせて, くり返し用いて,

$$Z_{n+1}-Z_n=\{e(\theta)\}^n a$$

$\alpha_n=\dfrac{Z_n}{\{e(\theta)\}^n}$ とすると,

$$\alpha_{n+1}=\frac{1}{e(\theta)}\alpha_n+\frac{a}{e(\theta)}$$

$$\alpha_{n+1}-\frac{a}{e(\theta)-1}=\frac{1}{e(\theta)}\left\{\alpha_n-\frac{a}{e(\theta)-1}\right\} \quad (\because ①から e(\theta)\neq 1)$$

$\alpha_0=0$ とから, くり返し用いて.

$$\alpha_n=\left\{\frac{1}{e(\theta)}\right\}^n\left(0-\frac{a}{e(\theta)-1}\right)+\frac{a}{e(\theta)-1}$$

$$Z_n=\frac{a}{e(\theta)-1}\left\{e(n\theta)-1\right\}$$

これが $Z_0=0$ に一致する n が存在する条件は,

"$e(n\theta)=1$ なる n が存在する"

$\Leftrightarrow$ $n\theta=2m\pi$ なる $n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{Z}$ が存在する。

$\Leftrightarrow$ $\theta=\dfrac{m}{n}\cdot 2\pi=\dfrac{m}{n}\cdot 360°$ なる $n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{Z}$ が存在する。

$\Leftrightarrow$ θ が有理数

よって示された■