正の実数 t に対して，座標空間における 4 点 O$(0,0,0)$，A$(t,0,0)$，B$(0,1,0)$，C$(0,0,1)$ を考える．このとき，次の問に答えよ．

1. 四面体 OABC のすべての面に内接する球 P の半径 r を t を用いて表せ．
2. t が動くとき，球 P の体積を四面体 OABC の体積で割った値の最大値を求めよ．

[解]

(1)

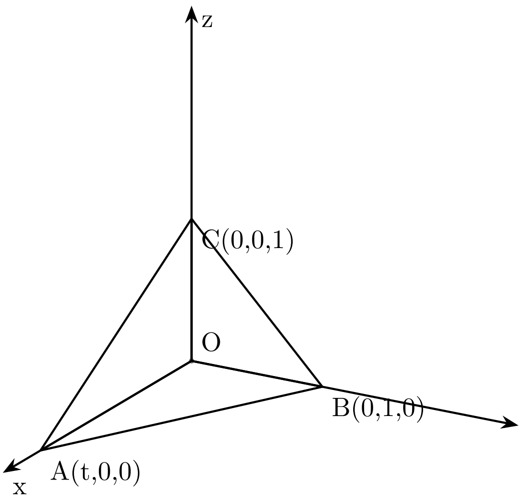

図 1: 四面体 $OABC$ の様子

四面体 $OABC$ の様子を fig. 1 に示す．四面体 $OABC$ の体積 V をふた通りで表すことで r と t の関係を導く．まず，底面 $\triangle OAB = t/2$，高さ CO の四面体と見なすことで，V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\triangle \mathrm{OAB}\cdot \mathrm{CO} \\ &= \frac{1}{3}\frac{t}{2}\cdot 1 \\ &= \frac{t}{6} \end{aligned} \tag{1}$$

と表せる．

次に，内接円の半径 r，中心 P とすると，

$$V = \triangle \mathrm{POAB} + \triangle \mathrm{POBC} + \triangle \mathrm{POAC} + \triangle \mathrm{PABC} \tag{2}$$

と，4 つの四面体の体積の和として表せる．底面の三角形の面積はそれぞれ

$$\begin{aligned} \triangle \mathrm{OBC} &= \frac{1}{2} \\ \triangle \mathrm{OAC} &= \frac{t}{2} \\ \triangle \mathrm{OAB} &= \frac{t}{2} \\ \triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{AB}|^2\vec{AC}^2 - (\vec{AB}\cdot\vec{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(t^2+1)^2 - t^4} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1} \end{aligned}$$

だから，eq. (2) に代入して

$$V = \frac{r}{3}\left[\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1}\right] \tag{3}$$

である．従って，eq. (1) と eq. (2) が等しいので

$$\begin{aligned} \frac{t}{6} &= \frac{r}{3}\left(\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1}\right) \\ t &= r(1 + 2t + \sqrt{2t^2+1}) \\ \therefore r &= \frac{t}{1+2t+\sqrt{2t^2+1}} \end{aligned}$$

と表せる．$\cdots$(答)

(2) P の体積 V_1，四面体 OABC の体積 V_2，その比 $f(t) = \frac{V_1}{V_2}$ とおく．(1) から

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ V_2 &= \frac{1}{6}t \end{aligned}$$

だから，$f(t)$ は

$$\begin{aligned} f(t) &= 8\pi\frac{r^3}{t} \\ &= 8\pi\frac{1}{t}\left(\frac{t}{1+2t+\sqrt{2t^2+1}}\right)^3 \\ &= 8\pi\frac{t^2}{(1+2t+\sqrt{2t^2+1})^3} \end{aligned} \tag{4}$$

t を $t>0$ で動かした時の $f(t)$ の最大値を求めれば良い．そこで $f(t)$ の増減表を得るため，$f'(t)$ を求める．

まず，

$$g(t) = 1 + 2t + \sqrt{2t^2+1} \tag{5}$$

とおくと $g'(t) = 2 + \frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}$ で，

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= 8\pi \frac{2tg(t)^3 - 3t^2 g(t)^2 g'(t)}{g(t)^6} \\
&= \frac{8\pi t}{g(t)^4} \left[2g(t) - 3tg'(t)\right]
\end{aligned}
$$

よって $f'(t)$ の符号は $h(t) = 2g(t) - 3tg'(t)$ の符号にひとしい．eq. (5) を代入して具体的に $h(t)$ の形を求めると

$$
\begin{aligned}
h(t) &= 2(1 + 2t + \sqrt{2t^2+1}) - 3t\left(2 + \frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}\right) \\
&= 2 - 2t + 2\sqrt{2t^2+1} - \frac{6t^2}{\sqrt{2t^2+1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2t^2+1}}\left[(1-t)\sqrt{2t^2+1} + (1-t^2)\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{2t^2+1}}(1-t)\left(1 + t + \sqrt{2t^2+1}\right)
\end{aligned}
$$

である．符号が反転するのは $(1-t)$ の部分のみである．従って $f(x)$ の増減表は table 1 のようになる．

表 1: f の増減表

t	0		1		(∞)
f'		$+$	0	-	
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって求める最大値は $t = 1$ の時で，この時 eq. (5) より

$$g(1) = 3 + \sqrt{3}$$

だから

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \frac{8\pi}{(3+\sqrt{3})^3} \\
&= \frac{18 - 10\sqrt{3}}{9}\pi
\end{aligned}
$$

が求める最大値である．$\cdots$(答)

[解説] 求めた $f(t)$ の $t = 0, \infty$ で $f(t) = 0$ というのは幾何学的に考えても自然なので，それらしい結果が出ていると安心できる．また，答えが $t = 1$ の時なのは最もらしく，この時三角形 ABC が正三角形になっている．

参考までに $f(t)$ は fig. 2 のようになる．

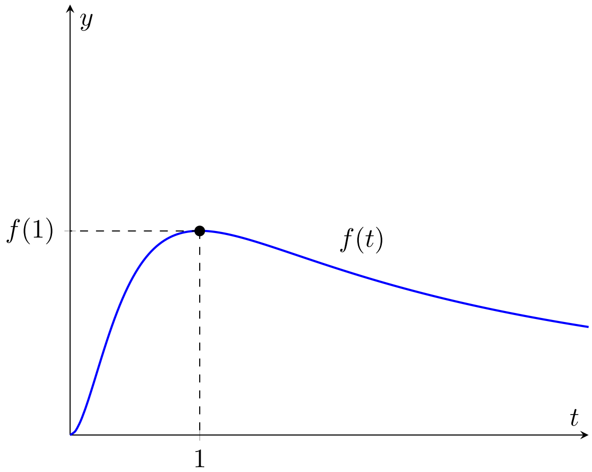

図 2: $f(t)$ の概形.$t = 1$ で最大値をとる．