xyz 空間において，平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点 $(0,0,1)$ を頂点とする円錐を A とする．

次に平面 $z=0$ 上の点 $(1,0,0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z=1$ 上の点 $(1,0,1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする．H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする．

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする．

$0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく．

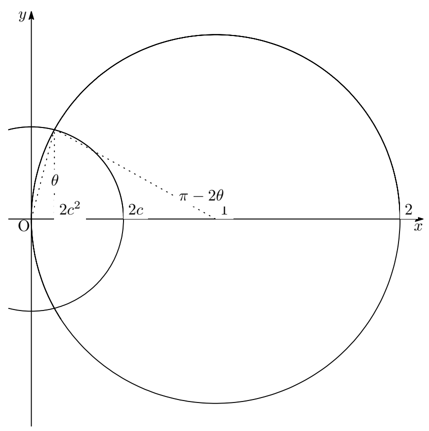
(1) $0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする．$t = 1-\cos\theta$ のとき，$S(t)$ を θ で表せ．

(2) C の体積 $\displaystyle\int_0^1 S(t)dt$ を求めよ．

[解] $\cos\theta = c$，$\sin\theta = s$ とおく． 円錐 A の側面の方程式は，$x^2+y^2=(1-z)^2$，円柱 B の側面は $(x-1)^2+y^2=1$ であるから，C の $z=1-c$ での切り口は，

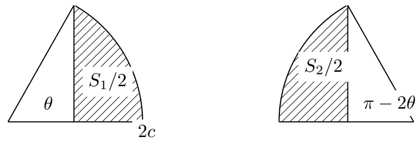
$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq (2c)^2 \\ (x-1)^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

である．これを図示すると下図．ここで，断面の 2 円の交点は $(2c^2, \pm\sin 2\theta)$ であるから，円の中心と交点を結ぶ直線と x 軸のなす角は，順に θ，$\pi-2\theta$ である．



この面積 $S(t)$ は，下の斜線部の面積 S_1 と S_2 の合計である．すなわち，

$$S(t) = S_1 + S_2 \qquad (1)$$



各々計算すると，

$$S_1 = \theta(2c)^2 - (2c)^2cs = 4c^2\theta - 4c^3s$$

$$\begin{aligned} S_2 &= (\pi-2\theta) - \sin(\pi-2\theta)\cos(\pi-2\theta) \\ &= \pi - 2\theta + 2cs(1+2c^2) \\ &= \pi - 2\theta + 2cs + 4c^3s \end{aligned}$$

であるから，(1) に代入して，

$$\begin{aligned} S &= (4c^2-2)\theta - 4c^3s + \pi + 2cs + 4c^3s \\ &= 2\theta(1-2s^2) + \pi - 2cs \qquad (2) \end{aligned}$$

である．$\cdots$((1) の答)

従って求める体積 V として，

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(t)dt \\ &= \int_0^{\pi/2} S(t)\frac{dt}{d\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} S(t)sd\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (2s\theta - 4s^3\theta + \pi s - 2cs^2)d\theta \quad (\because (2)) \end{aligned}$$

である．各項計算する．

$$A = \int_0^{\pi/2} s\theta d\theta = 2\left[-c\theta + s\right]_0^{\pi/2} = 1$$

$$4\int_0^{\pi/2} s^3\theta d\theta = \int_0^{\pi/2}(3s - \sin 3\theta)\theta d\theta$$
$$= 3A - \left[\frac{-1}{3}\theta\cos 3\theta + \frac{1}{9}\sin 3\theta\right]_0^{\pi/2}$$
$$= 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9}$$
$$\int_0^{\pi/2} s d\theta = 1$$
$$\int_0^{\pi/2} cs^2 d\theta = \left[\frac{1}{3}s^3\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

これを代入して

$$V = 2 - \frac{28}{9} + \pi - \frac{2}{3} = \pi - \frac{16}{9}$$

である．$\cdots$((2) の答)