xy 平面において，点 A は原点 O を中心とする半径 1 の円周の第一象限にある部分を動き，点 B は x 軸上を動く．ただし線分 AB の長さは 1 であり，線分 AB は両端 A，B 以外の点 C で円周と交わるものとする．

(1) $\theta = \angle AOB$ の取りうる値の範囲を求めよ．

(2) BC の長さを θ で表せ．

(3) 線分 OB の中点を M とするとき，線分 CM の長さの範囲を求めよ．

[解]

(1) $\cos\theta = c$，$\sin\theta = s$ とおく．ただし，題意から $0 < \theta < \pi/2$ である．また $A(c, s)$ である．この時 $\triangle ABO$ は $OA = AB = 1$ の二等辺三角形だから $B(2c, 0)$ となる．故に線分 AB の方程式は，$c \neq 0$ に注意して，

$$
\begin{aligned}
&(2c - c)(y - s) - (0 - s)(x - s) = 0 \\
&sx + cy - 2sc = 0 \\
&y = \frac{s}{c}(-x + 2c) \quad (c \leq x \leq 2c) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

である．これが円周と交わるので，y を消した

$$
\begin{aligned}
&x^2 + \left(\frac{s}{c}\right)^2 (-x + 2c)^2 = 1 \\
&c^2x^2 + s^2(-x + 2c)^2 = c^2 \\
&x^2 - 4s^2cx + c^2(4s^2 - 1) = 0 \\
&(x - c)\left(x - c(4s^2 - 1)\right) = 0 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

が $c \leq x \leq 2c$ に解を持つ．従って $0 < \theta < \pi/2$ に注意して

$$
\begin{aligned}
c < c(4s^2 - 1) &< 2c \\
1 < 4s^2 - 1 &< 2 \\
\frac{1}{2} < s^2 &< \frac{3}{4} \qquad (3) \\
\frac{\pi}{4} < \theta &< \frac{\pi}{3} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

である．$\cdots$(答)

(2) (2) から C の x 座標は $c(4s^2-1)$ である．さらに AB の傾きは (1) から $\dfrac{-s}{c}$ であるから，

$$
|BC| = \sqrt{1 + \left(\frac{s}{c}\right)^2}(2c - c(4s^2 - 1)) = 3 - 4s^2
$$

である．$\cdots$(答)

(3) $M(c, 0)$ である．故に $|MB| = c$．これと前問の結果，及び二等辺三角形の性質より $\angle ABO = \angle AOB = \theta$ であることから，$\triangle BCM$ に余弦定理を用いて

$$
\begin{aligned}
&|MC|^2 \\
=&|MB|^2 + |BC|^2 - 2|MB||BC|\cos\angle MBC \\
=&c^2 + (3 - 4s^2)^2 - 2c(3 - 4s^2)\cos\angle ABO \\
=&c^2 + (3 - 4s^2)^2 - 2c(3 - 4s^2)c \\
=&c^2(-5 + 8s^2) + (3 - 4s^2)^2 \\
=&(1 - p)(8p - 5) + (4p - 3)^2 \qquad (p = s^2) \\
=&8p^2 + 11p + 4 \\
=&8\left(p - \frac{11}{16}\right)^2 + \frac{7}{32}
\end{aligned}
$$

である．(3) から $\dfrac{1}{2} < p < \dfrac{3}{4}$ であることを考慮すると，

$$
\begin{cases}
p = 11/16 \text{ で } \min 7/32 \\
p \to 1/2 \text{ で } \max 1/2
\end{cases}
$$

である．$|MC| > 0$ から，

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{7}{32}} \leq |MC| < \sqrt{\frac{1}{2}} \\
\therefore \frac{\sqrt{14}}{8} \leq |MC| < \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

である．$\cdots$(答)

[**別解**](1) について，$A(c, s)$ での円の接線

$$cx + sy = 1$$

の x 切片は $1/c$ であるから，円周と AB が交わるための条件は

$$1 < 2c < \frac{1}{c} \iff \frac{1}{2} < c < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

であり，これを解いて

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$$

となる．$\cdots$(答)