第 1 問

[解] (1) $Y=X$ となる時 $(X=1,2,\cdots,8)$ Y以外のカードが $X+1,\cdots,9$ だから、求める確率は

$$\sum_{X=1}^{8}\left(\frac{9-X}{{}_9C_2}\right)^2=\left(\frac{1}{36}\right)^2\sum_{X=1}^{8}X^2=\left(\frac{1}{36}\right)^2\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17=\frac{17}{108}$$

(2) 与式を A とおく.

$$A=\int_0^{1/2}x\sqrt{1-2x^2}\,dx+\int_0^{1/2}\sqrt{1-2x^2}\,dx \quad \cdots ①$$

となる.

$$\int_0^{1/2}x\sqrt{1-2x^2}\,dx=-\frac{1}{6}\left[(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{1/2}=-\frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]= \quad \cdots ②$$

$$\int_0^{1/2}\sqrt{1-2x^2}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,d\theta \quad \left(x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$$

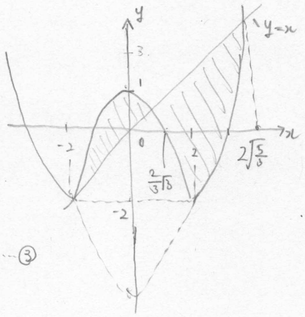
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \quad \cdots ③$$

②,③を①に代入して

$$A=\frac{1}{6}\left\{1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}$$

第 3 問

[解] グラフは右図である。



$\frac{3}{4}x^2-5=x$ …①の2解α, β $(\alpha<\beta)$

$-\frac{3}{4}x^2+1=x$ …②の2解γ, δ $(\gamma<\delta)$

とおく。もとめる面積Sとする。

$S=$  $+2$  -2  …③

であって、

 $=\frac{3}{4}\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{8}(\beta-\alpha)^3$

 $=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3 = \frac{1}{8}(\delta-\gamma)^3$

 $=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}(2+2)^3 = \frac{1}{8}(4)^3$

を③に代入して

$$S=\frac{1}{8}(\beta-\alpha)^3+\frac{2}{3}(\delta-\gamma)^3-16 \quad \cdots ④$$

ここで①②から

$$\beta-\alpha=\frac{10}{3}+2=\frac{16}{3}$$
$$\delta-\gamma=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

を④に代入して

$$S=\frac{1}{8}\left(\frac{16}{3}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}\right)^3-16$$
$$=\frac{8^3}{3^3}+\frac{2\cdot8^2}{3^3}-\frac{16\cdot3^3}{3^3}$$
$$=\frac{16}{3^3}(32+8-27)$$
$$=\frac{208}{27}$$

//

第 4 問

[解] $\frac{1}{2} < a_k < 1$ …① $A_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}}$ とおく。

[補題 P_1] $2^n(1-B_n) < 1$

(証明) ①から、$\frac{1}{2^k} < \frac{a_k}{2^{k-1}}$ だから、kについて足して

$$\frac{1}{2}\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} < B_n$$

$$1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n < B_n$$

だから、

$$2^n(1-B_n) < 2^n \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1$$

となり、P_1は示された ∎

任意の $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ に対し「$A_n > 1 - B_n$ … ◇」が成立すること …② を帰納的に示す。

1° $n=2$

◇は、

$$(1-a_1)(1-a_2) > 1 - a_1 - \tfrac{1}{2}a_2$$

となる。変形して、

$$\Leftrightarrow -a_2(1-a_1) > -\tfrac{1}{2}a_2$$

$$\Leftrightarrow a_2\left(\tfrac{1}{2}-a_1\right) < 0$$

で、これは成立するから、$n=2$ では◇は成立。

2° $n = k \geq 2$ での成立仮定

$A_k > 1 - B_k$ の両辺に $(1-a_{k+1})$ (>0) をかける。

$$A_{k+1} > (1-B_k)(1-a_{k+1}) \quad > 1 - B_k -$$

$$= (1-B_k) - (1-B_k)a_{k+1}$$

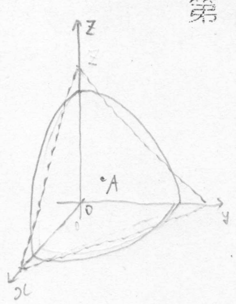
$$> (1-B_k) - \frac{a_{k+1}}{2^k} \quad = \quad (\because P_1)$$

$$= 1 - B_{k+1}$$

から、$n=k+1$ でも◇は成立。

以上から②は示された ∎

第 5 問



[解] 平面αの点Xとして

$$\alpha: x+y+z=4$$

だから. αとOの距離Lは

$$L = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3} < \sqrt{6}$$

だから. αとSは共有点を持つ。さらに. 共有円の中心 $A\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, 半径 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ だから. 共有円上の点は. 直交する単位ベクトル $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

を用いて.

$$\overrightarrow{OX} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{3}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{6}\sin\theta\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とかけるから. $X(x, y, z)$として

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sin\theta \\ y = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta - \frac{1}{3}\sin\theta \\ z = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta - \frac{1}{3}\sin\theta \end{cases}$$

以下 $S=\sin\theta$, $C=\cos\theta$ とすると

$$\begin{aligned} xyz &= \left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}S\right)\left\{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}S\right)^2 - \frac{1}{3}C^2\right\} \\ &= \frac{2}{3}(2+S)\left\{\frac{4}{9}S^2 - \frac{8}{9}S + \frac{13}{9}\right\} \\ &= \frac{2}{27}(4S^3 - 3S + 26) \end{aligned}$$

{ }の中身を$f(S)$とおく。

$$f'(S) = 3(4S^2-1)$$

から. 下表を得る.

S	−1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
f′		+	0	−		+	
f		↗		↘		↗	

ここで

- $f(-1) = 25$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 25$
- $f(1) = 27$ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 27$

から. もとめる値域は

$$\frac{50}{27} \leqq xyz \leqq 2$$
//

[解2] 共有面上の点(X, Y, Z)は

$$\begin{cases} X+Y+Z=4 \\ X^2+Y^2+Z^2=6 \end{cases}$$

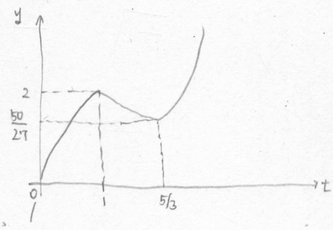
をみたす. $\alpha = XYZ$とする.

$$YZ+ZX+XY=5$$

から X, Y, Z は tの3次式

$$t^3-4t^2+5t=\alpha$$

の3実解。グラフは右図だから.

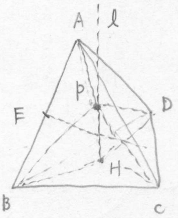


$$\frac{50}{27} \leqq \alpha \leqq 2$$
//

となる。

［解］ $\triangle BCD$の外心Hとおく。点Xに対し、$\overrightarrow{AX}=\vec{x}$とおく。$H$を通り、$\triangle BCD$に垂直な直線$l$上の点$P$とする。この時、外心の定義から

$$\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD} \quad \cdots ①$$



である。ABの中点Eとし、Eを通りABに垂直な平面πとする。$AB \nparallel$ 平面BCDから、πとlは必ず交点を持ち、これをP_1とすると、

$$\overline{AP_1}=\overline{BP_1} \quad \cdots ②$$

①、②から、P_1を中心とし、半径$\overline{AP_1}$の円はA,B,C,Dを全て通るので、題意は示された。■