東大理科数学　1966

第 1 問

[解] $a=0.1\alpha,\ b=0.1\beta$ とおく。$(\alpha,\beta\in\mathbb{N})$ キョリ x の時の運賃を $f(x)$ とする。

$$\begin{cases} f(319)=970 \\ f(349)=1010 \end{cases} \quad \cdots☆$$

であり、後半の文章から、

- $f(319)$ は $300a+19b=30\alpha+1.9\beta$ の10円未満を切り上げたもの
- $f(349)$ は $300a+49b=30\alpha+4.9\beta$ の 〃

でもある。したがって

$$\begin{cases} 960<30\alpha+1.9\beta\leqq 970 \\ 1000<30\alpha+4.9\beta\leqq 1010 \end{cases} \quad \cdots①$$

辺々引いて

$$30<3\beta<50 \qquad \therefore 10<\beta<16.6\cdots$$

だから $\beta\in\mathbb{N}$ とあわせて $\beta=11,12,13,14,15,16$ である。以下 $A=f(349)-f(319)$ とする。

$A=40$ となることが必要である。又、30α は10の倍数である。

1° $\beta=11$

$1.9\beta=20.9,\ 4.9\beta=53.9$ より、$A=60-30=30$ で不適。

2° $\beta=12$

$1.9\beta=22.8,\ 4.9\beta=58.8$ より $A=60-30=30$ 〃

3° $\beta=13$

$1.9\beta=24.7,\ 4.9\beta=63.7$ より $A=70-30=40$ だが、☆に代入して

$$970=30\alpha+30 \quad \therefore \alpha=\frac{94}{3}\notin\mathbb{N}$$

で不適。

4° $\beta=14$

$1.9\beta=26.6,\ 4.9\beta=68.6$ より、3° と同じく不適。

5° $\beta=15$

$1.9\beta=28.5$ より、3° と同じく不適。

6° $\beta=16$

$1.9\beta=30.4,\ 4.9\beta=78.4$ より、☆に代入して $\alpha=31$ を得て適。

以上から、$(\alpha,\beta)=(31,16)$、つまり $(a,b)=(3.1,1.6)_{//}$ である。

第 2 問

[解] まず ℓ が y 軸平行の時. $x=k$ $(k\in\mathbb{R})$ とおける。この時 $(X, Y)=(4x+2y, x+3y)$ とおくと、

$$X=4k+2y$$

となり. 題意をみたさず不適。そこで. $\ell: y=mx+n$ とおける。$(m, n\in\mathbb{R})$ この時

$$\begin{cases} X=4x+2(mx+n)=(4+2m)x+2n \\ Y=x+3(mx+n)=(1+3m)x+3n \end{cases}$$

で表される点 (X, Y) が再び ℓ 上にあるので,

$$(1+3m)x+3n=m\{(4+2m)x+2n\}+n \quad \cdots ①$$

が x についての恒等式で

$$\begin{cases} 1+3m=m(4+2m) \\ 3n=2mn+n \end{cases} \qquad \therefore (m, n)=\left(\frac{1}{2}, 0\right)\ (-1, 0)$$

だから. $\ell: y=\frac{1}{2}x$, $y=-x$ である

[解2-略] $\ell: y=f(x)$ とおく。$x=0$ での成立が必要で, $(2f(0), 3f(0))$ も ℓ 上にある。そこで $f(0)=0$ か否かで場合分けして答えが求まる。

第 3 問

[解] x軸を実軸，y軸を虚軸とするガウス平面を考える。

また．$e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく。$\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$の表す複素数$a_n$とする$(n\in\mathbb{N})$と、

$$\begin{cases} a_{n+1}=2e\left(\frac{2}{3}\pi\right)a_n \\ a_1=1 \end{cases}$$

だから．くり返し用いて．

$$a_n=2^{n-1}\cdot e^{n-1}\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

であるから．$\overrightarrow{OP_{3n}}$の表す複素数Pとして

$$\begin{aligned} P&=\sum_{k=1}^{3n}a_k \\ &=\frac{1-2^{3n}e^{3n}\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{1-2e\left(\frac{2}{3}\pi\right)} \\ &=\frac{1-2^{3n}e(2n\pi)}{1-2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \\ &=\frac{2+\sqrt{3}i}{7}\left(1-2^{3n}\right) \end{aligned}$$

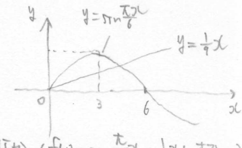
だから．

$$P_{3n}\left(\frac{2}{7}\left(1-2^{3n}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{7}\left(1-2^{3n}\right)\right) \quad /\!/$$

である。

第 4 問

［解］与方程式の解は、xy平面での $y=\frac{1}{9}x$，$y=\sin\frac{\pi x}{6}$ の交点のx座標に他ならない。これらのグラフの概形は右図。



まず、$6\leq x$ の時与方程式が解を持たないことを示す。

$$\left\{\begin{array}{ll} 6\leq x\leq 12 \text{の時} & \sin\frac{\pi x}{6}\leq 0<\frac{1}{9}x \text{から明らか} \\ 12\leq x \text{の時} & \frac{1}{9}x\geq\frac{12}{9}>1\geq\sin\frac{\pi x}{6} \text{から明らか} \end{array}\right.$$

$\left(\begin{array}{l} f(x)=\sin\frac{\pi}{6}x-\frac{1}{9}x \text{とすると} \\ f(3)=\frac{2}{3}>0,\ f(6)=-\frac{2}{3}<0 \text{から} \\ 3<x<6 \text{に解を持つ} \end{array}\right)$

以上から、与式の最大の解は $3<x<6$ にある。$f(x)$は同区間で単調減少で、

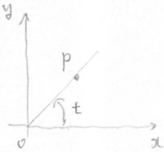
$$f(3)=\frac{2}{3},\quad f(4)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{9}\ (>0)$$

$$f(4.5)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\ (>0),\quad f(5)=-\frac{1}{18}\ (<0)$$

だから、$4.5<x<5$ にもとめる解があるので、最も近いセイスウ解は $\underline{5}_{H}$ である。

第 5 問

[解] 時刻0でのOXをx軸正方向とし、OXがx軸からy軸正方向へと動くよう座標をおく。この時、時刻tでのPの座標



(X、Y)として

$$X=e^{2t}\cos t,\ Y=e^{2t}\sin t$$

だから

$$X'=e^{2t}(-\sin t+2\cos t)$$

$$Y'=e^{2t}(\cos t+2\sin t)$$

となり、もとめる長さLとして、(Pは$0\leq t\leq 2\pi$では重ならないので)

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(X')^2+(Y')^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{5}\,e^{2t}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left[e^{2t}\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(e^{4\pi}-1\right)$$ //

第 6 問

[解] 4ケタの数のつくり方は $_9P_4$ 通りで同様にたしからしい。このうち、1966より小さいのは、以下の2つである。

$$\begin{cases} 1^\circ \ 1900\text{未満} \\ 2^\circ \ 1900\text{以上}\ 1965\text{以下} \end{cases}$$

1°となるのは

$$\underset{4位}{1} \times \underset{3位}{7} \times 7 \times 6 = 6 \times 7^2 \text{通り} \quad \cdots ①$$

である。一方、2°となるのは、

$$\underbrace{4 \times 6}_{1960\text{未満}} + \underbrace{4}_{1960\text{以上}} = 28\text{通り} \quad \cdots ②$$

①、②から、もとめる確率 p は

$$p = \frac{6 \times 7^2 + 28}{_9P_4} = \frac{322}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{161}{1512} = \frac{23}{216}$$