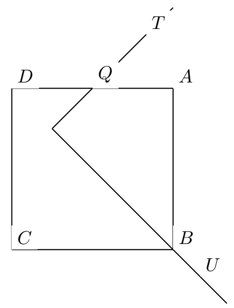
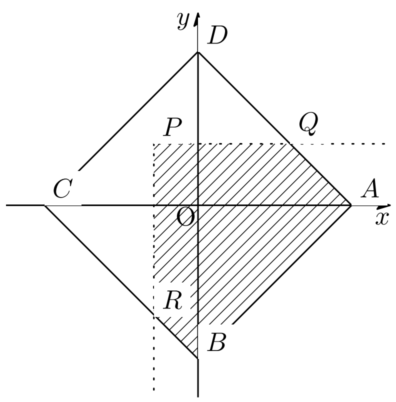
一辺の長さ a の正方形 $ABCD$ の内部の動点 P で直交する折れ線 TPU がある (図参照)．PT は辺 AD と Q で交わり，$\angle AQT$ は 45° に保たれている．正方形 $ABCD$ の面積を二等分しつつ折れ線 TPU が動く時，線分 PQ の通過する部分の面積を求めよ．



[解] まず，一辺の長さ $\sqrt{2}$ として考える．

このとき，$A(1,0)$，$B(0,-1)$，$C(-1,0)$ となるような座標を定める．すると，$AD: x+y=1$ であるから，$Q(1-t,t)$ と置ける．$(0 \leq le1)$ すると，$P(x,t)$ である．



$0 \leq x$ の時，明らかに折れ線は正方形の面積を二等分しないから

$$t-1 \leq x < 0 \qquad (1)$$

である．この時，折れ線と BC の交点は $R(x,-x-1)$ である．PR と x 軸の交点 T とすれば，題意の面積についての条件から，

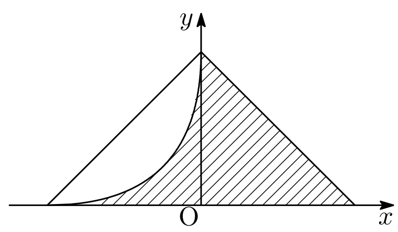
$$\begin{aligned}
&\triangle CRT = \square AQPT \\
&\frac{1}{2}(1+s)^2 = \frac{1}{2}\left((1-t-x)+(1-x)\right) \\
&= \frac{1}{2}t(2-2x-t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x^2+2x+1 = 2t-2xt-t^2 \\
&x^2+t^2+2xt+2x-2t+1=0 \\
&x^2+2(t+1)x+(t-1)^2=0 \\
&x=-(t+1)\pm\sqrt{(t+1)^2-(t-1)^2} \\
&x=-(t+1)\pm 2\sqrt{t}
\end{aligned}$$

P は $(0,1)$ を通るので，複合正をとって

$$x=-t-1+2\sqrt{t}=-(\sqrt{t}-1)^2$$

である．よってグラフの概形は下図．



求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 (1-t+(\sqrt{t}-1)^2)dt \\
&= \int_0^1 2(1-\sqrt{t})dt \\
&= 2\left[t-\frac{2}{3}t^3/2\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

である．一辺 a とすると，これの $a^2/2$ 倍ゆえ

$$S = \frac{1}{3}a^2$$

である．$\cdots$(答)