

京大数学理科後期 2006 年度

1 問題 1

正三角形 ABC の辺 AB 上に点 P_1, P_2 が, 辺 BC 上に点 Q_1, Q_2 が, 辺 CA 上に点 R_1, R_2 があり, どの点も頂点には一致していないとする. この時三角形 $P_1Q_1R_1$ の重心と三角形 $P_2Q_2R_2$ の重心が一致すれば, $P_1P_2 = Q_1Q_2 = R_1R_2$ が成り立つことを示せ.

2 問題 2

一辺の長さが 1 の正三角形 ABC の辺 AC 上に点 D をとり, 線分 BD に沿ってこの三角形を折り曲げ, 4 点 A, B, C, D を頂点とする四面体を作り, その体積を最大にすることを考える. 体積が最大になる時の D の位置と, その時の四面体の体積を求めよ.

3 問題 3

a, b を実数とする. 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ は 3 つの複素数からなる解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ をもち, 相異なる i, j に対し $|\alpha_i - \alpha_j| = \sqrt{3}$ を満たしている. このような a, b の組を全て求めよ.

4 問題 4

$\{a_n\}$ を正の数からなる数列とし, p を正の実数とする. このとき $a_{n+1} > \frac{1}{2}a_n - p$ を満たす番号 n が存在することを証明せよ.

5 問題 5

極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\frac{k}{2n} \right)^{100}$ を求めよ.

6 問題 6

7つの文字を並べた列 a_1, a_2, \dots, a_7 で, 次の3つの条件を満たすものの総数を求めよ.

- i a_1, a_2, \dots, a_7 は A, B, C, D, E, F のいずれかである.
- ii $i = 1, 2, \dots, 6$ に対し, a_i と a_{i+1} は相異なる.
- iii $i = 1, 2, \dots, 6$ に対し, a_i と a_{i+1} は右図において線分で結ばれている.

