C を半径 1 の円とし，その周上に長さ θ の円弧 PQ をおく．C と P で接し C の内部にある円を A，C と Q で接し，A にも接する円を B とする．

1. A と B の面積の和の最小値 S_θ を θ で表せ．
2. θ が 0 から 2π まで動くとき，S_θ の最大値を求めよ．

[解] 座標平面で考える．円 C を原点中心とし，$x^2+y^2=1$ とおく．$P(1,0)$, $Q(\cos\theta,\sin\theta)$ とおく．対称性より

$$0 \le \theta < \pi$$

で考える．

(1) 円 A,B の半径 r_A,r_B，中心 O_A,O_B とする．まず，点 P で A と C が接するから，O_A は線分 OP 上にある．同様に点 Q で B と C が接するから，O_B は線分 OQ 上にある．従って，これらの円の概要は図のようになる．

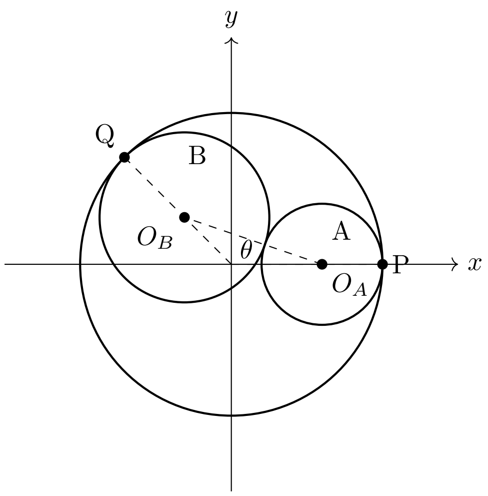

図 1: 円 A,B,C の概形

以下，円 A と B が接することから，r_A および r_B に関する条件を導く．まず，

$$0 < r_A, r_B < 1$$

のもとで，題意の条件より

$$\begin{cases} \overline{OO_A} = 1 - r_A \\ \overline{OO_B} = 1 - r_B \\ \overline{O_AO_B} = r_A + r_B \end{cases} \tag{1}$$

である．$\theta \neq \pi$ の時 $\triangle O_AOO_B$ に余弦定理を用いて，eq. (1) から

$$\overline{O_AO_B}^2 = \overline{OO_A}^2 + \overline{OO_B}^2 - 2\overline{OO_A}\overline{OO_B}\cos\theta$$

$$\therefore (r_A+r_B)^2 = (1-r_A)^2 + (1-r_B)^2 - 2(1-r_A)(1-r_B)\cos\theta$$

$$\therefore 2r_Ar_B = -2(r_A+r_B) + 2 - 2(1-r_A)(1-r_B)\cos\theta \tag{2}$$

を得る．一方 $\theta=\pi$ のとき，O, O_A, O_B は x 軸上にあり，

$$r_A + r_B = 1$$

となるが，これは eq. (2) に内包される．そこで以下，$0 < \theta \le \pi$ で eq. (2) を考える．

新しい変数 α, β を

$$\alpha = r_A + r_B$$
$$\beta = r_Ar_B$$

とおくと，eq. (2) は

$$\beta = -\alpha + 1 - (1+\beta-\alpha)\cos\theta$$
$$(1+\cos\theta)\beta = (1-\cos\theta)(1-\alpha) \tag{3}$$

となる．

また，r_A, r_B は x の 2 次方程式 $f(x) = x^2 - \alpha x + \beta = 0$ の $0 < x < 1$ をみたす 2 実解 (重解含む) だから，このような r_A, r_B が存在するような α, β の条件として

$$\begin{cases} \text{端点:} & f(0) > 0, f(1) > 0 \\ \text{判別式:} & D \ge 0 \\ \text{軸:} & 0 < \dfrac{\alpha}{2} < 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \text{端点:} & \beta \ge 0, 1-\alpha+\beta \ge 0 \\ \text{判別式:} & \alpha^2 - 4\beta \ge 0 \\ \text{軸:} & 0 < \dfrac{\alpha}{2} < 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < \beta, \alpha - 1 < \beta \\ \beta \le \dfrac{1}{4}\alpha^2 \\ 0 < \alpha < 2 \end{cases} \tag{4}$$

が課せられる．

eqs. (3) and (4) を $\alpha\beta$ 平面に図示すると，figs. 2 and 3 の太線部となる．

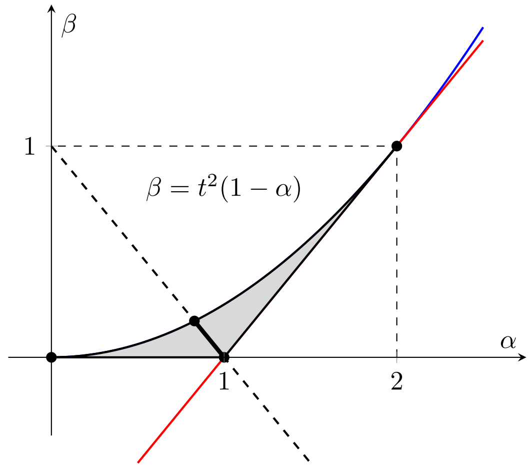

図 2: $\theta \neq \pi$ の時に r_A, r_B が存在するための α, β の条件

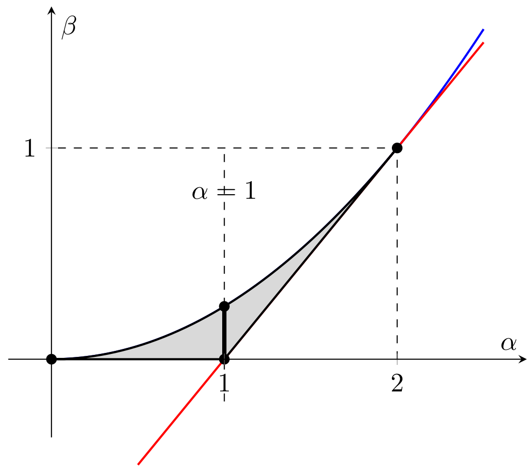

図 3: $\theta = \pi$ の時に r_A, r_B が存在するための α, β の条件

これは数式に起こすと $t = \tan\frac{\theta}{2}$,$c = \cos\frac{\theta}{2}$, $s = \sin\frac{\theta}{2}$ として，として

$$\begin{cases} 0 < \theta < \pi\text{の時.} & \beta = t^2(1-\alpha) \quad \left(2\dfrac{(1-s)t}{c} \leq \alpha < 1\right) \\ \theta = \pi\text{の時.} & \alpha = 1, 0 < \beta \leq \dfrac{1}{4} \end{cases} \tag{5}$$

である．

さて，A と B の面積和を T として，

$$T = \pi(r_A^2 + r_B^2) = \pi(\alpha^2 - 2\beta) \tag{6}$$

だから，eq. (5) の条件のもとで，eq. (6) を最小化する．

0.1　$0 < \theta < \pi$ の時

eq. (6) に eq. (5) を代入して β を除去すると

$$\begin{aligned} \frac{T}{\pi} &= \alpha^2 - 2\beta \\ &= \alpha^2 - 2t^2(1-\alpha) \\ &= \alpha^2 + 2t^2\alpha - 2t^2 \\ &= (\alpha + t^2)^2 - t^4 - 2t^2 \end{aligned}$$

で $t > 0$ と eq. (5) から

$$\alpha = \frac{2(1-s)t}{c}$$

で T は最小で，この時の最小値は

$$\begin{aligned} \frac{\min T}{\pi} &= \left[4\frac{(1-s)^2}{c^2} + 4\frac{s(1-s)}{c^2} - 2\right]t^2 \\ &= \frac{2(s-1)^2s^2}{c^4} \\ &= \frac{2(1-s)^2s^2}{(1-s^2)^2} \\ &= \frac{2s^2}{(1+s)^2} \end{aligned} \tag{7}$$

を得る．

0.2　$\theta = \pi$ の時

eq. (5) から $\min T$ は $(\alpha, \beta) = (1, \frac{1}{4})$ の時の $\frac{1}{2}$ で，この時も eq. (7) で良い．

又，$\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の時も対称性よりこれで良いので，($0 \to 2\pi - \theta$ ととりかえて同じになる) 求める最小値は $0 < \theta < 2\pi$ に対して

$$S_\theta = 2\pi\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1 + \sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

である．$\cdots$(答)

(2) $x = 1 + s$ とすると，$0 \leq x < 2\pi$ で $0 \leq x \leq 2$ であり，

$$\begin{aligned} S_\theta &= 2\pi\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \\ &= 2\pi\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \end{aligned}$$

で．これば $x = 2$ すなわち $\theta = \pi$ の時最大値

$$S_\theta = \frac{\pi}{2}$$

をとる．$\cdots$(答)

[解説] (1) はもっと直接的に，O_A および O_B の座標を置いても良さそう．