東大理科数学 1971

		思	計	総
1	多変数	A	B	A
2	数列	C	B	C
3	多変数	A	B	B
4	関数	A	B	A
5	多変数	A	A	A
6	場合の数	A	A	A

71

第 1 問

[解] $C=\cos t,\ S=\sin t$ とする。$(0\leq t\leq\pi)$

$$\begin{cases} x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C+\frac{1}{2}S\right)=\sqrt{3}C+S \\ y = \frac{1}{2}C-\frac{\sqrt{3}}{2}S \end{cases}$$

だから、題意のキョリ L として

$$\begin{aligned} L^2 = x^2+y^2 &= (3C^2+S^2+2\sqrt{3}SC)+\left(\frac{1}{4}C^2+\frac{3}{4}S^2-\frac{\sqrt{3}}{2}SC\right) \\ &= \frac{13}{4}C^2+\frac{7}{4}S^2+\frac{3}{2}\sqrt{3}SC \\ &= \frac{7}{4}+\frac{3}{2}C^2+\frac{3}{4}\sqrt{3}\sin 2t \\ &= \frac{5}{2}+\frac{3}{4}\{\cos 2t+\sqrt{3}\sin 2t\} \\ &= \frac{5}{2}+\frac{3}{2}\sin(2t+\pi/6) \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{3}$

より、

$2t+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$

$$\begin{cases} t=\frac{2}{3}\pi \text{ で } \min L = 1 \\ t=\frac{\pi}{6} \text{ で } \max L = 2 \end{cases}$$

$t=\frac{\cancel{8}\,4}{\cancel{2}\cdot 6}\pi$

0

第 2 問

[解] $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2+1) \\ a_1 = \frac{1}{2}x \end{cases}$ …①

(1) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n-1)^2$ に注意する。漸化式から帰納的に $a_n>0$ である。したがって、$a_n=1$ なる $n \in \mathbb{N}$ があったと仮定すると、①から $a_{n-1}=1$ となり、以下帰納的に $a_0=1 \Leftrightarrow x=2$ となる。これは $x \neq 2$ に反し矛盾。よって $a_n \neq 1$ だから、任意の n に対し $a_{n+1}-a_n = \frac{1}{2}(a_n-1)^2>0$ となるから、$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ となる。圏

(2) 題意を帰納法で示す。$n=1$ の時 $a_1<\frac{1}{2}\cdot 2=1$ から成立。($\because x<2$) するから以下 $n=k \in \mathbb{N}$ での成立を仮定すると、①から

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k^2+1) < \frac{1}{2}(1+1) = 1 \quad (\because 0<a_k<1)$$

となって $n=k+1$ でも成立する。以上から任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n<1$ となる。圏

次に後半部について考える。

$$\varepsilon < 1-\frac{1}{2}x \ , \ x<2 \quad \cdots ②$$

で、題意及び(1)から

$$a_n < 1-\varepsilon < a_{n+1} \quad \cdots ③$$

(1)及び③から

$$a_{k+1}-a_k = \frac{1}{2}(a_k-1)^2 > \frac{1}{2}\left((1-\varepsilon)-1\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

$k=1,2,\cdots,n$ として足して

$$a_{n+1}-a_1 > \frac{1}{2}n\varepsilon^2$$

$1>a_{n+1}$, $a_1=\frac{1}{2}x$ を代入して

$$n\varepsilon^2 < 2-x \text{ 圏}$$

を得る。

$a_{n+1} < 1$

$\frac{a_n^2+1}{2} < 1$

$a_n^2 < 1$

$a_n < 1-\varepsilon < \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{2}x$

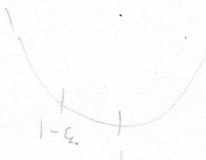
$\varepsilon < 1-a_1$

$a_1 < a_2 <$

$a_1 < 1-\varepsilon$

$a_n - 0 < 0$

$a_1 + \cdots + a_n < n(1-\varepsilon)$



第 3 問

[解] $A=\int_0^1 \{f(x)\}^2dx$ とする。又、与式を I とおく。

$$I = A - 2\int_0^1 f(x)\,(ax+b)\,dx + \int_0^1 (ax+b)^2dx$$

$$= A - 2(3a+2b) + \frac{1}{3}a^2 + ab + b^2$$

$$= b^2 + ab - 4b + \frac{1}{3}a^2 - 6a + A$$

$$= \left(b+\frac{a-4}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}a^2 - 4a + A - 4$$

$$= \left(b+\frac{a-4}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}(a-24)^2 - 52 + A$$

だから、$(a, b) = (24, -10)$ で I は min となる。

第4問

[解] $f_n'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ $(n \geqq 2)$ だから.

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) \quad ■$$

となる。後半部について. $n=1, 2$ のとき.

$$\begin{cases} f_1(x) = 1+x \\ f_2(x) = 1+x+\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

だから. $n=1, 2$ では題意は成立する。そこで. $n=2k-1, 2k\ (\in \mathbb{N})$ での成立を仮定する。

$$f_{2k+1}'(x) = f_{2k}(x) > 0 \quad (\because 仮定)$$

から. $f_{2k+1}(x)$ は単調増加で. かつ $f_{2k+1}(x) \xrightarrow{x \to \pm\infty} \pm\infty$ だから. 中間値の定理より. $f_{2k+1}(x)=0$ なる x がただ1つある。これを α とする。$(\alpha \neq 0)$ ⋯ ①

$$f_{2k+2}'(x) = f_{2k+1}(x)$$

から. 下表をうる。

x		α	
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

したがって.

$$f_{2k+2}(x) \geqq f_{2k+2}(\alpha) = \frac{\alpha^{2k+2}}{(2k+2)!} > 0 \quad (\because \alpha \neq 0,\ f_{2k+1}(\alpha) = 0)$$

だから. $f_{2k+2}(x)=0$ は実根をもたない ⋯ ②

以上①. ②から. $n=2k+2, 2k+1$ でも成立。よって示された。■

第 5 問

[解] $L(k)=|PQ_k|^2$ とおく。$a_k=\frac{2k}{n}\pi$ とおくと、

$$L(k)=(\cos a_k-a)^2+(\sin a_k-b)^2$$
$$=a^2+b^2+1-2(a\cos a_k+b\sin bk)$$

だから、

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^2+b^2+1-2(a\cos a_k+b\sin bk)\right)$$
$$\xrightarrow{n\to+\infty} a^2+b^2+1-2\int_0^1(a\sin 2\pi x+b\cos 2\pi x)\,dx$$
$$=a^2+b^2+1$$

より、

$$\lambda_p=a^2+b^2+1$$

で、これは $a=b=0$ の時 min となる。

第 6 問

[解] まず. $k\geq 2$とする。 A… 3人でじゃんけんをする。 B… 2人でじゃんけんをする。 とおくと.

k回目に1人の勝者が決まるのは以下の時.

$$\circ\ \overset{1回目}{A} \to A \to \cdots \overset{a回目}{A} \to B \cdots \to \overset{k回目}{B} \to 1人 \quad \cdots ①$$

$$\circ\ A \to \qquad\qquad \to A \to 1人 \quad \cdots ②$$

Aを行う回数 a, Bを行う回数 bとする。この時

$$a+b=k \quad \cdots ③$$

である。

ここで, じゃんけんの推移についての確率を算出する。

$$\begin{cases} \circ\ 3人 \longrightarrow 2人 \cdots \underbrace{{}_3C_1}_{負ける人} \cdot \underbrace{{}_3C_1}_{負ける手} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{3} \\ \circ\ 3人 \longrightarrow 1人 \cdots {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \frac{1}{27} = \frac{1}{3} \\ \circ\ 3人 \longrightarrow 3人 \cdots 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \ (余事象に注目) \\ \circ\ 2人 \longrightarrow 1人 \cdots {}_2C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \\ \circ\ 2人 \longrightarrow 2人 \cdots 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

したがって. ①となる確率は.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{a-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{b-1} \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad (\because ③)$$

②となる確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

だから. $a=1,2\cdots k-1$として足して.

$$\sum_{a=1}^{k-1} 2\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k = (2k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k \quad (k=1でも成立)$$

[解2] n回目に3人, 2人でジャンケンする確率を a_n, b_nとする。又. もとめる確率C_kとすると.

$$C_k = \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{3}b_k \quad \cdots ①$$

$$\begin{array}{ccc} n & & n+1 \\ a_n & \xrightarrow{\frac{1}{3}} & a_{n+1} \\ & \searrow^{\frac{1}{3}} & \\ b_n & \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} & b_{n+1} \end{array}$$

である。又. n, $n+1$回目の推移から.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \end{cases}$$

$a_1=1$. $b_1=0$だから. これをといて.

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \quad b_n = (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

だから①に代入して

$$C_k = (2k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k$$