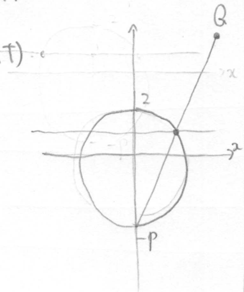
[解] $C: x^2+\left(y-\frac{2-p}{2}\right)^2=\left(\frac{2+p}{2}\right)^2$

だから、これと $y=1$ の交点の x座標は

$x=\pm\sqrt{p+1}$ である。従って、$Q(s,t)$ に対し $s\geqq 0$ から



$$\begin{cases} \frac{s}{2}=\sqrt{p+1} \\ \frac{t-p}{2}=1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $s=2\sqrt{p+1},\ t=2+p$ ……(1)

である。よって

$s^2=4(p+1)$ $\therefore p=\frac{s^2}{4}-1$ ($p>0$ から $s>2$)

だから代入して

$t=2+\frac{s^2}{4}-1=\frac{1}{4}s^2+1$

より、求めるキセキは

$y=\frac{1}{4}x^2+1$ $(x>2)$

であり、$x=2\sqrt{p+1}$ での接線は

$l: y=\sqrt{p+1}\,x-p$

であり

$PQ: y=\frac{2(p+1)}{2\sqrt{p+1}}x-p$

$=\sqrt{p+1}\,x-p$

と一致するから題意は示された。□

/20

第 1 問

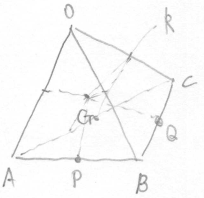
/20

第 2 問

/20

[解] 4頂点 O,A,B,C とし、点Xに対し $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ とすると

$\vec{a}$ と $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立…① である。題意から



$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ …②

$\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$ …③

$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$ …④

OXの中点X', 四面体 OABCの重心G, とAB, BC, CAの中点 P, Q, R として

$$\overrightarrow{GA'}=\frac{1}{4}(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

$$\overrightarrow{GB'}=\frac{1}{4}(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$$

$$\overrightarrow{GC'}=\frac{1}{4}(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{GP}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$$

$$\overrightarrow{GQ}=\frac{1}{4}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{GR}=\frac{1}{4}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

である。②~④から

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}\equiv A$$

だから $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=B$ とおけば

$$|\overrightarrow{GX'}|^2=|\overrightarrow{GP}|^2=|\overrightarrow{GQ}|^2=|\overrightarrow{GR}|=\frac{1}{16}(B-2A)\quad (X'=A',B',C')$$

となり、たしかに これらは Gを中心とする円周上にある 図

/20

第 4 問

[解] $0 \leq a < \pi/4,\ 0 \leq b < \pi/4$ …①

[補題1] $0 \leq x < \pi/4$ において. $f(x) = \tan x$ は下に凸

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0,\ f''(x) = 2\dfrac{\tan x}{\cos^2 x} > 0$ から示された. 口

[補題2] $0 < x < \pi/4$ において $g(x) = \log(\tan x)$ は上に凸

$g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x \cdot \tan x} > 0,\ g''(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2\sin^2 x - 1}{\sin^2 x \cos^2 x} < 0$

から示された 口

[補題1] から凸不等式 より右側の不等式は示された 口.

次に左側について

1° $a > 0,\ b > 0$ の時.

両辺 log をとることができて [補題2] から凸不等式から示された.

2° $ab = 0$ の時

$\begin{cases} \sqrt{\tan a \cdot \tan b} = 0 \\ \tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq 0 \end{cases}$

から明らかに成立

より. 左側も示された 口

/20

第 5 問

[解] n回目の試行前後共に赤玉がiコ入っている確立$Q_{i,n}$とおく.

(1) $n+1$回目の試行前に赤玉が1コ … $Q_{1,n}+P_{2,n}$

〃 2コ … $Q_{2,n}+P_{3,n}$

〃 3コ … $Q_{3,n}$

又.

$$Q_{1,n}=(N+2)P_{1,n} \quad Q_{2,n}=\frac{N+1}{2}P_{2,n} \quad Q_{3,n}=\frac{N}{3}P_{3,n}$$

だから.

$$\begin{cases} P_{1,n+1}=\dfrac{1}{N+3}\left((N+2)P_{1,n}+P_{2,n}\right) \\ P_{2,n+1}=\dfrac{2}{N+3}\left(\dfrac{N+1}{2}P_{2,n}+P_{3,n}\right) \\ P_{3,n+1}=\dfrac{3}{N+3}\cdot\dfrac{N}{3}P_{3,n}=\dfrac{N}{N+3}P_{3} \end{cases}$$

//

(2) $P_n=P_{1,n}+P_{2,n}+P_{3,n}$だから(1)より

$$P_{n+1}=\frac{N+2}{N+3}P_n \quad \cdots ①$$

又. $P_1=\dfrac{3}{N+3}$だから. ①と等比数列の公式から

$$P_n=\left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1}\cdot\frac{3}{N+3}$$

//

第 6 問

[解]

(1) ②の両辺 x で微分し, $y=f(x)$ を代入して

$$y^{-a}=\left(e^{-\frac{y^2}{2}}+y^{-a}\right)\cdot\frac{dy}{dx}$$

又.②に $x=0$ を代入して

$$0=\int_a^{f(0)}\underset{\sim\sim\sim}{\left(e^{-\frac{t^2}{2}}+t^{-a}\right)}dt \quad \cdots③$$

〜〜は $t>0$ で正だから.③が成り立つのは $\underline{f(0)=a}$ の時である

($\because f(x)>0$)

(2) (イ) (1)から

$$y'=\frac{1}{y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+1} \quad (\because y>0) \quad \cdots④$$

である. $g(y)=y^a\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$ とおくと. $g'(y)=e^{-\frac{y^2}{2}}y^{a-1}(a-y^2)$ から下表を得る.

y	0		$\sqrt{a}$	
g'		$+$	0	$-$
g	0	$\nearrow$	$a^{\frac{a}{2}}\cdot e^{-\frac{a}{2}}$	$\searrow$

($y\to\infty$ の時. $g(y)\to 0$)

従って④から. $0<y$ の時

$$0<\frac{1}{a^{\frac{a}{2}}\cdot e^{-\frac{a}{2}}+1}\leq y'\leq 1$$

だから $b=\dfrac{1}{a^{\frac{a}{2}}\cdot e^{-\frac{a}{2}}+1}$ とおけば $(b>0)$ $b\leq y'\leq 1$ なる b が存在する固

(ロ) ④から

$$y\left(\frac{1}{y'}-1\right)=y^{a+1}e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \cdots⑤$$

この右辺は. $g(y)$ において a を $a+1$ におきかえたものだから. $y>0$ の時

$$0<y\left(\frac{1}{y'}-1\right)\leq (a+1)^{\frac{a+1}{2}}e^{-\frac{a+1}{2}}$$

だから. $C=(a+1)^{\frac{a+1}{2}}e^{-\frac{a+1}{2}}$ とおけば. $0\leq y\left(\frac{1}{y'}-1\right)\leq C$ なる C が存在固

(3) (2)(イ)の両辺を積分して

$$\left[bt\right]_0^x\leq\left[f(t)\right]_0^x\leq\left[t\right]_0^x$$

$$bx\leq f(x)-f(0)\leq x$$

$$bx+a\leq f(x)\leq x+a$$

$b>0$ から. はさみうちの定理から. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$。従って. (イ)の増減表から

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+1}=1$$

(もしくは. (ロ)から

$$0\leq\frac{1}{f'(x)}-1\leq\frac{c}{f(x)}\to 0$$

$\Rightarrow$ はさみうち)

$f'(x)>0$ から. $f(x)$ は単調増加. これと $f(0)=a$ から. $a\leq f(x)$ である.

これと $f(x)\to\infty$ $(x\to\infty)$ に注意して. (イ)の増減表から

1° $a\leq\sqrt{a}$ $\Leftrightarrow$ $0<a\leq 1$ の時

$$\min y'=\frac{1}{g(\sqrt{a})+1}=\frac{1}{a^{\frac{a}{2}}\cdot e^{-\frac{a}{2}}+1}$$

2° $\sqrt{a}\leq a$ $\Rightarrow$ $1\leq a$ の時

$$\min y'=\frac{1}{g(a)+1}=\frac{1}{a^a\cdot e^{-\frac{a^2}{2}}+1}$$

以上まとめて

$$\begin{cases} 0<a\leq 1 \text{ の時} & \dfrac{e^{\frac{a}{2}}}{a^{\frac{a}{2}}+e^{\frac{a}{2}}} \\ 1\leq a \text{ の時} & \dfrac{e^{\frac{a^2}{2}}}{a^a+e^{\frac{a^2}{2}}} \end{cases}$$

/20