xyz 空間の原点と点 $(1, 1, 1)$ を通る直線を l とする．

(1) l 上の点 $(t/3, t/3, t/3)$ を通り l と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ．

(2) 不等式 $0 \leq y \leq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする．l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ．

[解] 題意の平面 Π として，

$$\left(x-\frac{t}{3}\right)+\left(x-\frac{t}{3}\right)+\left(x-\frac{t}{3}\right)=0$$

$$x+y+z=t$$

であるから，$z=0$ との交線は，

$$x+y=t,\ z=0$$

である．$\cdots$((1) の答)

D と (1) で求めた交線の共有部分を考える．y を消去して，

$$0 \leq t-x \leq x(1-x) \quad (1)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq t \\ 1-\sqrt{1-t} \leq x \leq 1+\sqrt{1-t} \end{cases} \quad (2)$$

である．ただし，第 2 の不等式での x の存在条件から，

$$1-t \geq 0 \Longleftrightarrow t \leq 1 \quad (3)$$

である．このもとで，

$$t \leq 1+\sqrt{1-t}$$

であるから，x の範囲は，(2) から，

$$1-\sqrt{1-t} \leq x < t$$

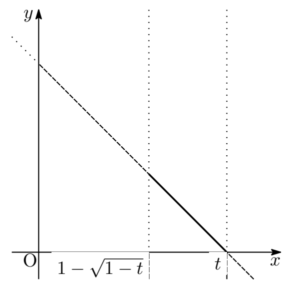
である．再び x の存在条件から，

$$1-\sqrt{1-t} \leq t \Longleftrightarrow 0 \leq t \quad (\because (3)) \quad (4)$$

である．以上から，共有部分は，

$$E: \begin{cases} x+y=t \\ 1-\sqrt{1-t} \leq x \leq t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (5)$$

である．(右上図)



題意の回転体を Π で切断した断面の面積 $S(t)$ とする．E 上の点 $P(x, t-x, 0)$ に対して，$Q(t/3, t/3, t/3)$ との距離の 2 乗は，

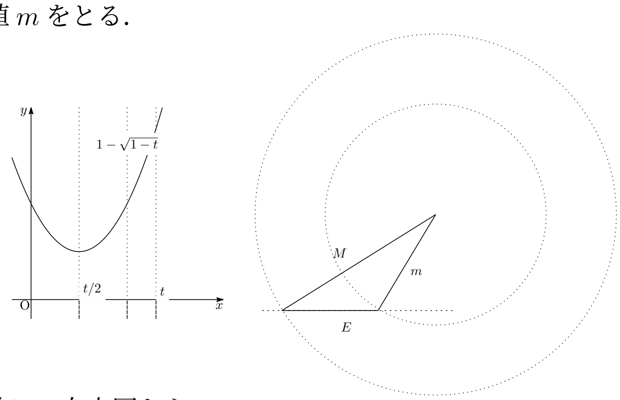
$$|PQ|^2=\left(x-\frac{t}{3}\right)^2+\left(t-x-\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2$$

$$=2\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+(x \text{ に寄らない定数項})$$

である．これは，(5) の範囲内では，

$$\frac{t}{2} \leq 1-\sqrt{1-t} \leq t$$

ゆえ，$x=t$ で最大値 M，$x=1-\sqrt{1-t}$ で最小値 m をとる．



故に，右上図から，

$$\frac{S(t)}{\pi}=M-m$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(t - \frac{t}{2}\right)^2 - 2\left(1 - \sqrt{1-t} - \frac{t}{2}\right)^2 \\
&= 4(1-t) + (2-t)\sqrt{1-t} \\
&= 2[2(1-t) + \sqrt{1-t} + (1-t)\sqrt{1-t}]
\end{aligned}
$$

である．

さて，$|(t/3, t/3, t/3)| = \sqrt{3}/3$ に注意すれば，求める体積 V は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{V}{\pi} = \int_0^1 S(t)\frac{\sqrt{3}}{3}dt \\
&\therefore \frac{\sqrt{3}V}{2\pi} = \frac{1}{2}\int_0^1 S(t)dt \\
&\quad = \int_0^1 \{2(t-1) + \sqrt{1-t} + (1-t)\sqrt{1-t}\}dt
\end{aligned}
$$

である．各項計算すれば，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 2(t-1)dt = \left[(t-1)^2\right]_0^1 = -1 \\
&\int_0^1 \sqrt{1-t}dt = \left[\frac{-2}{3}(1-t)^3/2\right]_0^1 = \frac{2}{3} \\
&\int_0^1 (1-t)\sqrt{1-t}dt = \left[\frac{-2}{5}(1-t)^5/2\right]_0^1 = \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

であるから，代入して，

$$
V = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\left[-1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right] = \frac{2\sqrt{3}\pi}{45}
$$

である．$\cdots$((2) の答)