$h(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で 2 回微分可能なある関数で，$f(x)$ がどのような一次関数であっても，$u(x)=\displaystyle\int_o^x h(t)f(t)dt+h(x)\int_x^1 f(t)dt$ とおけば，

(1) $\dfrac{d^2u}{dx^2}=f(x)$

および

(2) $u(0)=0$

が成り立つ．このとき，$h(x)$ を求めよ．

[解] $f(x)$ を f などと略記する．題意の条件から

$$\begin{cases} u=\displaystyle\int_o^x hfdt+h\int_x^1 fdt & (1)\\ u''=f & (2)\\ u=0 & (3)\end{cases}$$

まず，(1) で $x=0$ として,(3) から

$$0=h(0)\int_x^1 fdt$$

ここで f は任意の一次関数だから $\displaystyle\int_x^1 fdt\equiv 0$ とはならないので (例えば $f=x$)

$$h(0)=0 \tag{4}$$

である．

(1) の両辺を x で微分する．

$$\begin{aligned} u'&=hf+h'\int_x^1 fdt-hf\\ &=h'\int_x^1 fdt\end{aligned}$$

さらに微分して

$$u''=h''\int_x^1 fdt-h'f$$

(2) を代入して

$$\{1+h'\}f=h''\int_x^1 fdt \tag{5}$$

$f(x)$ は任意の一次関数で，$a_{\neq 0}, b\in\mathbb{R}$ として，(5) に $f(x)=ax+b$ を代入したとき両辺 a で割ることにより，$f(x)=x+b$ のみ考えれば良いことがわかる．実際に代入して

$$\begin{aligned} \{1+h'\}(x+b)&=\left[\frac{1}{2}t^2+bt\right]_x^1 h''\\ &=\{\frac{1}{2}(1-x^2)+b(1-x)\}h''\end{aligned}$$

これが b についての恒等式だから係数比較して，

$$\begin{cases} 1+h'-(1-x)h''=0 & (6a)\\ (1+h')x-\dfrac{1}{2}h''(1-x)(1+x)=0 & (6b)\end{cases}$$

となる．(6a) を (6b) に代入して

$$\begin{aligned} &(1+h')x-\frac{1}{2}(1+h')(1+x)=0\\ \Longleftrightarrow &(1+h')(x-1)=0\end{aligned}$$

これが x についての恒等式だから，$h'=-1$ が従う．(4) と合わせて

$$h(x)=-x$$

である．これが (1)，(2)，(3) を満たすことは容易に確かめられる．ゆえに求める関数は

$$h(x)=-x$$

である．$\cdots$(答)