xy 平面上の動点 P の座標 (x, y) は，時刻 t を用いて

$$\begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = k\sin^2 t\cos^2 t \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

と表されるものとする．ただし k は正の定数である．このとき原点と P との距離の二乗の最大値及び最小値を，k を用いて表せ.

[解] $\cos t = c$，$\sin t = s$ とおく． ただし，周期性から $0 \leq t < 2\pi$ としてよい．$f(t) = |OP|^2$ とすると

$$\begin{aligned} f(t) &= x^2 + y^2 \\ &= (s+c)^2 + (ks^2c^2)^2 \\ &= k^2p^4 + 2p + 1 \equiv g(p) \end{aligned}$$

である．ただし $p = sc$ とした．このとき $\left(\frac{-1}{2} \leq p \leq \frac{1}{2}\right)$ である．ここで $a = \sqrt[3]{\frac{1}{2k^2}}$ とおけば

$$\begin{aligned} g'(p) &= 4k^2p^3 + 2 \\ &= 4k^2(p+a)(p^2 - ap + a^2) \end{aligned}$$

から下表を得る．$(\because k > 0)$

(i) $\frac{1}{2} \geq a$ つまり $2 \leq k$ の時

p	$-1/2$		$-a$		$1/2$
g'		$-$	0	$+$	
g	$\frac{k^2}{16}$	$\searrow$	$-\frac{3a}{2} + 1$	$\nearrow$	$\frac{k^2}{16} + 2$

従って

$$\begin{cases} \max g = \frac{k^2}{16} + 2 \\ \min g = 1 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2k^2}} \end{cases}$$

である.

(ii) $\frac{1}{2} \leq a$ つまり $2 \geq k > 0$ の時

$g'(p) \geq 0$ より，$g(p)$ は単調増加だから

$$\max g = g\left(\frac{1}{2}\right) \quad \min g = g\left(\frac{-1}{2}\right)$$

である.

以上から求める最大小値は,

$$\begin{cases} 0 < k \leq 2 \text{ の時} & \max g = \frac{k^2}{16} + 2 \quad \min g = \frac{k^2}{16} \\ 2 \leq k \text{ の時} & \max g = \frac{k^2}{16} + 2 \quad \min g = 1 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2k^2}} \end{cases}$$

である.