t は 1 より大きい実数とする．xy 平面上に置いて，不等式

(1) $0 < x$

(2) $\dfrac{t}{(1+t^2)x} \leqq y \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$

を同時に満たす点 (x, y) 全体のつくる図形の面積を t の関数と考えて $f(t)$ とおく．$f(t)$ の導関数 $f'(t)$ を求めよ．

[解] y の存在条件から，$(1 < t)$

$$\begin{aligned}
&\frac{t}{(1+t^2)x} \leqq \frac{1}{1+x^2} \\
\Longleftrightarrow &(x-t)\left(x-\frac{1}{t}\right) \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow &\frac{1}{t} \leqq x \leqq t
\end{aligned}$$

である．

従って，

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{1/t}^{t} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{t}{(1+t^2)x}\right) dx \\
&= \int_{1/t}^{t} \left(\frac{1}{1+x^2}dx - \frac{t}{1+t^2}\frac{1}{x}\right) dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

両辺 t で微分する．各項計算して，

$$\cdot \left[\int_{1/t}^{t} \left(\frac{1}{1+x^2}dx\right)\right]' = \frac{2}{1+t^2}$$

$$\cdot \left[\frac{t}{1+t^2}\int_{1/t}^{t} \frac{1}{x}dx\right]' = \frac{2}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}2\log t$$

であるから，(4) に代入して

$$f'(t) = \frac{-2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\log t$$

である．$\cdots$(答)