直線 l は双曲線 $xy=1$ の第一象限にある部分に接し，l と x 軸との交点の x 座標は 2 より小さくないとする．

この条件のもとで l が変動するとき，四直線 l，$y=0$，$x=1$ および $x=2$ で囲まれる部分の面積の最大値を求めよ．

[解] 題意の接点を $P(t, 1/t)$ とする．ただし $t>0$ とする．このとき $(1/x)'=-1/x^2$ だから

$$l : y = \frac{-1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}$$
$$\therefore l : y = \frac{-1}{t^2}x+\frac{2}{t} \equiv f(x)$$

となるので，これと x 軸の交点は $Q(2t, 0)$ となる．題意の条件より

$$1 \leq 2t \tag{1}$$

となる．題意の面積を $S(t)$ とすると，t の値で場合分けして以下のようになる．

(i)$1 \leq 2t \leq 2$ つまり $1/2 \leq t \leq 1$ の時

グラフが右図のようになるので

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_1^{2t} f(x)dx \\ &= \left[\frac{-1}{2t^2}x^2+\frac{2}{t}x\right]_1^{2t} \\ &= \frac{-1}{2t^2}(4t^2-1)+\frac{2}{t}(2t-1) \\ &= 2-\frac{2}{t}+\frac{1}{2t^2} \\ &= \frac{1}{2}(s-2)^2 \end{aligned}$$

となる．ただし $s=1/t$ として，$1 \leq s \leq 2$ である．この時の最大値は，$s=1$ のときの $\frac{1}{2}$ である．

(ii)$2 \leq 2t$ つまり $1 \leq t$ の時

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_1^{2} f(x)dx \\ &= \left[\frac{-1}{2t^2}x^2+\frac{2}{t}x\right]_1^{2} \\ &= \frac{-3}{2t^2}+\frac{2}{t} \\ &= \frac{-3}{2}\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる．この時は $0<s\leq 1$ だから $s=2/3$ で最大値 $2/3$ をとる．

以上から $\max S(t) = S(3/2) = 2/3 \cdots$(答) である．