直方体の一つの頂点 O から出る三つの辺を OA，OB，OC とし，O から最も遠い頂点を D とする．$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とするとき，OD の長さを a，b，c で表せ．また，$a=5$，$b=3$ のとき，c のとりうる値の範囲を求めよ．

[解] $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$ とする．$\triangle OAB$ に三平方の定理を用いて

$$c^2=x^2+y^2 \tag{1}$$

同様にして

$$b^2=x^2+z^2 \tag{2}$$
$$a^2=y^2+z^2 \tag{3}$$

であるから，

$$\begin{aligned} OD &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

となる．

次に後半部分について考える．(1)，(2)，(3) を x，y，z について解いて a，b の値を代入して

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}} = \sqrt{\frac{c^2-16}{2}} \\ y &= \sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}} = \sqrt{\frac{c^2+16}{2}} \\ z &= \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}} = \sqrt{\frac{-c^2+34}{2}} \end{aligned}$$

このような正の実数 x，y，z が存在すれば良いので，求める条件は平方根の中身が非負であること．故に

$$\begin{aligned} &\frac{c^2-16}{2}>0 \land \frac{c^2+16}{2}>0 \land \frac{-c^2+34}{2}>0 \\ \Longleftrightarrow\, &4<c<\sqrt{34}\cdots\text{(答)} \qquad (\because c>0) \end{aligned}$$

が求める条件である．