xyz 空間において，xz 平面上の $0 \leq z \leq 2-x^2$ で表される図形を z 軸の周りに回転して得られる不透明な立体を V とする．V の表面上 z 座標 1 のところにひとつの点光源 P がある．

xy 平面上の原点を中心とする円 C の，P からの光が当たっている部分の長さが 2π であるとき，C の影の部分の長さを求めよ．

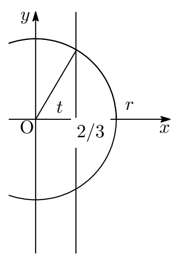
[解] 題意の図形は z 軸に関して対称だから，$V: 0 \leq z \leq 2-(x^2+y^2)$ である．対称性から $P(1,0,1)$ としてよい．P での V の接平面は $(2-x^2)' = -2x$ ゆえ，

$$z = -2x + 3$$

である．これと xy 平面の交線は，

$$x = \frac{3}{2}$$

である．然るに光が当たる部分は $3/2 \leq x$ である．C の半径 $r_{>0}$ とし，下図のように $t(0 < t < \pi/2)$ をおく．



題意の条件から，

$$\begin{cases} 2rt = 2\pi \\ r\cos t = \dfrac{3}{2} \end{cases} \tag{1}$$

r を消去して

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{t}{\cos t}$$

である．この右辺は $0 < t < \pi/2$ で単調増加な関数の積ゆえ，単調増加．加えて $t = \pi/3$ が解であることから，これが唯一の解である．この時 $r = 3$ となり，求める影の長さは

$$(2\pi - 2t)r = 4\pi$$

である．$\cdots$(答)