

与えられた実数係数の整式 $f(x)$ について

$$\int_0^1 f(x)dx = 2$$

$$\int_0^1 xf(x)dx = 3$$

となるとする．そのとき，

$$\int_0^1 \{f(x) - ax - b\}^2 dx$$

の値を最小にする実数 a および b の値をもとめよ．

[解] 題意の式を $g(a, b)$ とおく．また，簡単のため

$$A = \int_0^1 f(x)dx = 2$$

$$B = \int_0^1 xf(x)dx = 3$$

$$C = \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$$

$$D = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$E = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

とおく．するとこれらの値に注意して F を定数として

$$\begin{aligned} g(a, b) &= Da^2 + 2Eab + b^2 - 2Ba - 2Ab + C \\ &= \frac{1}{3}a^2 + (b-6)a + b^2 - 4b + C \\ &= \frac{1}{3} \left\{ a + \frac{3}{2}(b-6) \right\}^2 + \frac{1}{4}(b+10)^2 + F \end{aligned}$$

したがって，求めるのは

$$b + 10 = 0$$

$$a + \frac{3}{2}(b-6) = 0$$

のとき，つまり $(a, b) = (24, -10) \cdots$ (答) のときである．