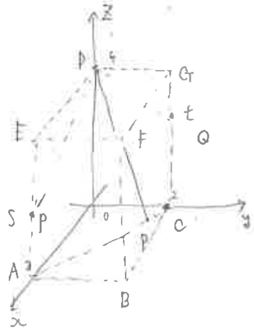
京大理系数学 2009 - 乙

第 1 問

[解] $\begin{cases} \overrightarrow{OP} = (1-s)\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OQ} = (1-t)\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \end{cases}$



だから．AC上の点Rを

$$\overrightarrow{OR} = \alpha\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

で定めると，$DR \perp OP$ かつ $DR \perp OQ$ なる α の

存在条件をもとめれば良い

$$\overrightarrow{DR} = \begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{cases} \overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}3\\0\\4s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\alpha\\2-2\alpha\\-4\end{pmatrix} = 0 \\ \overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}0\\2\\4t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\alpha\\2-2\alpha\\-4\end{pmatrix} = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 9\alpha - 16s = 0 \\ 1-\alpha = 4t \end{cases}$$

だから．$\alpha = \frac{16}{9}s = 1-4t$ だから，$0<s<1$，$0<t<1$ から この時常に $0<\alpha<1$ となるので

$$\frac{16}{9}s + 4t = 1$$

//

第 3 問

[解] 題意のようになるのは、n回目にnのカードを引くか、nの1つ上におかれているカードを引く時。

1° n回目にnのカードを引く時

各回の試行で、引いたカードをnより下の位置におくので

$$\frac{1}{n}\ \frac{2}{n}\ \frac{3}{n}\cdots\frac{n-1}{n}$$

さらに、nのカードは1番上に戻すので

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n^n}$$

2° n回目にnの1つ上におかれたカードを引く時

1〜n-1回目の試行のうち1回だけ、nの上にカードをおく。これをk回目の試行として

$$\frac{1}{n}\cdots\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdots\frac{n-2}{n}$$

さらに、n回目に引いたカードはnのカードの下におくので

$$\frac{1}{n}\cdots\frac{k-1}{n}\,\frac{n-k}{n}\,\frac{k}{n}\cdots\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{(n-1)!(n-k)}{n^n}$$

kについて足して

$$\frac{(n-1)!}{n^n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\frac{(n-1)!}{n^n}\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{(n-1)!}{n^n}\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$$

以上から

$$\frac{(n-1)!\left\{1+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right\}}{n^n}=\frac{(n-1)!\,(n^2-n+2)}{2n^n}$$

//

第　問

第 5 問

[解] $C=\cos\theta$, $S=\sin\theta$ とおく。C上の点 $P(X, Y)$ とすると

$$\begin{cases} X=(2+C)C \\ Y=(2+C)S \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} X'=-2CS-2S=-2S(C+1) \\ Y'=2C+\cos 2\theta=2C^2+2C-1 \end{cases}$$

から、$[0, \pi]$ で $X'\leqq 0$ かつ $Y\geqq 0$ だから $\theta=0$ で $P(3, 0)$, $\theta=\pi$ で $P(-1, 0)$ に注意して求める体積 V として

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{3} \pi Y^2 dX \\ &= \int_{\pi}^{0} \pi \cdot \{(2+C)S\}^2 \frac{dX}{d\theta} d\theta \\ &= \pi \int_0^{\pi} (2+C)^2 S^2 \cdot 2S(C+1)\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} (2+C)^2 (1-C^2)(C+1)\, S\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} (-C^5-5C^4-7C^3+C^2+8C+4) S\, d\theta \\ &= -2\pi \left[-\frac{1}{6}C^6 - C^5 - \frac{7}{4}C^4 + \frac{1}{3}C^3 + 4C^2 + 4C \right]_0^{\pi} \\ &= -2\pi \cdot 2\left(1-\frac{1}{3}-4\right) \\ &= \frac{40}{3}\pi \end{aligned}$$