> k を実数の定数とするとき，x の関数 $f(x)$ が $-1 \leq x \leq 1$ の範囲でとる最大値を $M(k)$ で表す．k が実数全体を動くとき，$M(k)$ が最小となる k の値および $M(k)$ の最小値を求めよ．

[解] $g(x) = x^3 - 3kx$ とおく．$g(x)$ は奇関数だから，$f(x)$ は偶関数．故に $0 \leq x$ で考える．

$$g'(x) = 3(x^2 - k)$$

であるから，k の値によって場合分けする．

(i)$k \leq 0$ の時

$g'(x) \geq 0$ だから $g(x)$ は単調増加で

$$g(0) = 0 \qquad g(1) = |1 - 3k| \geq 0$$

に注意して

$$M(k) = g(1) = |1 - 3k|$$

である．

(ii)$0 < k \leq 1$ の時

下表を得る．

x	0		$\sqrt{k}$		1
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

故に (i) と同様にして ($f(0)$ は最大値の候補から除外できて)

$$\begin{aligned} M(k) &= \max\{f(0), f(\sqrt{k}), f(1)\} \\ &= \max\{|1 - 3k|, 2k\sqrt{k}\} \end{aligned}$$

である．

(iii)$1 \leq k$ の時

下表を得る．

x	0		1
g'		$-$	
g		$\searrow$	

故に (i) と同様にして，

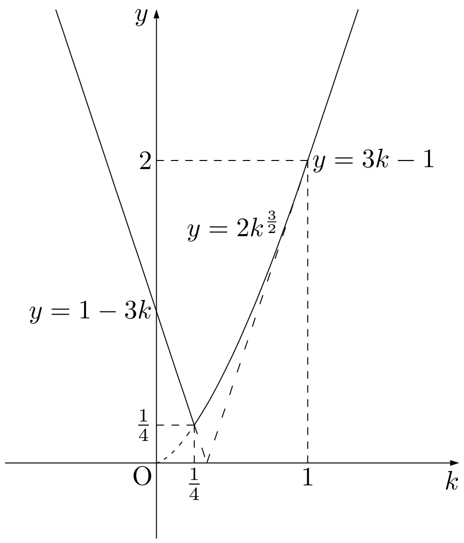
$$M(k) = f(1) = |1 - 3k|$$

以上をまとめて

$$M(k) = \begin{cases} |1 - 3k| & k \leq 0, 1 \leq k \\ \max\{|1 - 3k|, 2k\sqrt{k}\} & 0 < k \leq 1 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

であるから，図示して下図．



故に求める最小値は

$$M\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

である．$\cdots$(答)