辺の長さ 2 の正方形 A が，その中心を円 $x^2+y^2=1$ の周上におきながら，かつその辺を座標軸に平行に保ち真柄動く．一方，同じ大きさの正方形 B が固定されていて，辺が座標軸に平行でありその中心が点 $(1,2)$ にある．このとき，二つの正方形 A，B の共通部分の面積の最大値を求めよ．

注．正方形の中心とは，その二つの対角線の交点をいう．

[解]$\cos\theta=c$，$\sin\theta=s$ とおく． ただし $0\leq\theta<2\pi$ とする．A の中心 (c,s) とすると，A の周及び内部の点は不等式

$$\begin{cases} c-1\leq x\leq c+1 \\ s-1\leq y\leq s+1 \end{cases} \tag{1}$$

となる．一方 B の周及び内部は，不等式

$$\begin{cases} 0\leq x\leq 2 \\ 1\leq y\leq 3 \end{cases} \tag{2}$$

で表される．(1)，(2) が共通部分を持つための条件は $s\geq 0$ つまり $0\leq\theta\leq\pi$ で，このもとで共通部分は

$$\begin{cases} 0\leq x\leq c+1 \\ 1\leq y\leq s+1 \end{cases} \tag{3}$$

で表される長方形である．故にこの面積 $S(\theta)$ は

$$S(\theta)=s(c+1)$$

である．このとき $S'(\theta)=(2c-1)(c+1)$ より下表を得る．

θ	0		$\pi/3$		π
c	1		$1/2$		-1
S'		$+$	0	$-$	0
S		$\nearrow$		$\searrow$	

従って $\max S(\theta)=S(\pi/3)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ である．$\cdots$(答)