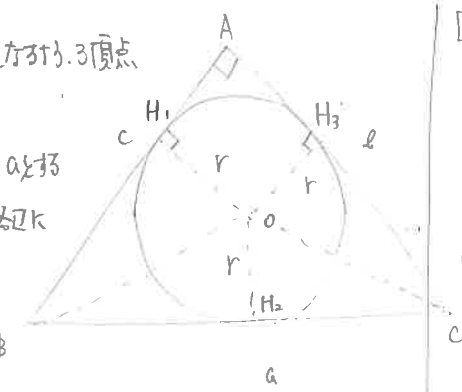
京大理科数学 1998

110/150

第 1 問

[解] $\angle BAC = \angle R$ となるよう3頂点 A,B,C, を定める.
$\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$ とする
内接円の中心Oから各辺に下ろした垂足を $H_1 \sim H_3$ とする. 題意から

$2r+a+b+c=2$ …①



(1) □AH_1OH_3 が正方形だから.

$$\begin{cases} BH_2 = BH_1 = c-r \\ CH_2 = CH_3 = b-r \end{cases} \quad \therefore\ a = b+c-2r$$

①に代入して

$b+c=1$ …②

だから $a = 1-2r$ //

(2) △ABCの面積 $S(r)$ とする

$$S(r) = \frac{1}{2}bc$$

以下このmaxをもとめる。$a,b,c,r>0$ であり. △ABCの存在条件から

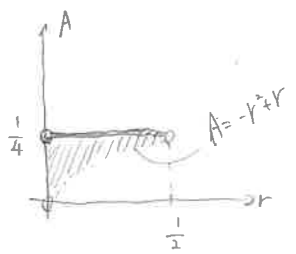
$$\begin{cases} b+c > b+c-2r \\ 2b+c-2r > c \\ 2c+b-2r > b \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 2r>0 \\ b-r>0 \\ c-r>0 \end{cases}$$

$A=bc$ とおくと b,c は t の2次方程式 $t^2-t+A=0$ (∵②)の r より大なる2実解。判別式D, 左辺 $f(t)$ として

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ f(r)>0 \\ r<\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 1-4A \geq 0 \\ r^2-r+A>0 \\ 0<r<\frac{1}{2} \end{cases}$$

これを図示すると左図斜線部
(境界は $A=\frac{1}{4}$ のみ含む)
したがって

$$\max S(r) = \frac{1}{2}\max A = \frac{1}{8}$$ //



[別] … a,bを消す。完全に
内接円と三角形のカンケイから

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\cdot r\cdot(2-2r)$$

$$ab = 2r(1-r)$$

(本解)から $a+b=1$ でもあるから a,b は

$$t^2-t+2r(1-r)=0$$

の2実解。これが $r<t$ に2実解をもつので.

$$\begin{cases} r<\frac{1}{2} \\ 1-8r(1-r)\geq 0 \\ r^2-r+2r(1-r)>0 \end{cases}$$

⇒とくと $0<r\leq\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ となり. 代入してオワリ.

第 2 問

[解] $f(x)=x^2+7$

(1) a^2+7が2^nの倍数の時.$(a\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}\geq 3)$ …①

$$f(a)=a^2+7$$
$$f(a+2^{n-1})=(a+2^{n-1})^2+7=(a^2+7)+2^n\cdot a+2^{2n-2}$$

$f(a)$が2^{n+1}の倍数の時題意は成立。$f(a)$が2^{n+1}の倍数でない時,
①から$f(a)=a^2+7=2^n\cdot A$ $(A\in\mathrm{odd})$とかける.

$$f(a+2^{n-1})=2^n\cdot A+2^n(2^n\cdot A-7)+2^{2n-2}$$
$$=\underset{\sim\sim\sim}{2^n(A-7+2^nA)}+\underset{\sim}{2^{2n-2}}$$

ここで.$A\in\mathrm{odd}$から$A-7+2^n\cdot A\equiv 0 \pmod 2$, 又$n\geq 3$から$2n-2\geq n+1$
だから〜〜はいずれも2^{n+1}でわり切れる.つまり$f(a+2^{n-1})$は2^{n+1}でわり切れる 以上から示された.図

(2) nについてのキノウ法で示す.

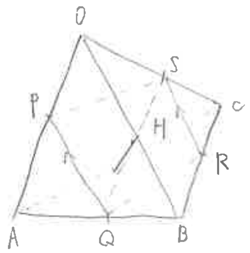
$n=1,2,3$の時.$a_1=1, a_2=1, a_3=1$とすれば成立。
$n=k\in\mathbb{N}$での成立をかていすると.(1)から$f(a_k)$又は$f(a_k+2^{k-1})$のいずれかは2^{k+1}でわり切れるから.そのわり切れる方をとって$a_{k+1}=a_k$ or a_k+2^{k-1}とすれば良く, $n=k+1$でも成立

以上から示された。

第 3 問

[解] 点Xに対し $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ と定めると

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は1次独立…①. 題意から



$$\begin{cases}\vec{p}=p\vec{a}\\ \vec{q}=q\vec{a}+(1-q)\vec{b}\\ \vec{r}=r\vec{b}+(1-r)\vec{c}\\ \vec{s}=s\vec{c}\end{cases}$$

とおける. $p\sim s$ はいずれも $0<p,q,r,s<1$ をみたす実数。

$$\begin{cases}\overrightarrow{PQ}=(q-p)\vec{a}+(1-q)\vec{b}\ \equiv\vec{A}\\ \overrightarrow{PS}=\ -p\vec{a}+s\vec{c}\ \equiv\vec{B}\\ \overrightarrow{PR}=\ -p\vec{a}+r\vec{b}+(1-r)\vec{c}\\ \overrightarrow{PH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PQ})\quad (\text{Hは}PR,SQ\text{の交点})\end{cases}\quad\cdots *\ \cdots ②$$

ただし最後の式は□PQRSが平行四辺形であることによる。PQRSは同一平面上にあることと、$\vec{A},\vec{B}$ が1次独立であることから $\overrightarrow{PR}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}$ の形で一意に表せる. これと②から

$$\overrightarrow{PR}=\vec{A}+\vec{B}$$

*を代入して

$$-p\vec{a}+r\vec{b}+(1-r)\vec{c}=(q-2p)\vec{a}+(1-q)\vec{b}+s\vec{c}$$

①から

$$\begin{cases}-p=q-2p\\ r=1-q\\ 1-r=s\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}q=s=p\\ r=1-p\end{cases}$$

②に代入して

$$\vec{h}=\frac{1}{2}\left(p\vec{a}+(1-p)\vec{b}+p\vec{c}\right)\quad\cdots③$$

一方. 題意の線分上の点Xは t として $(0<t<1)$

$$\vec{x}=t\,\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+(1-t)\frac{\vec{b}}{2}\quad\cdots④$$

と表せる. $0<p<1$ とあわせて. ④で $t=p$ としたものが③だからたしかに

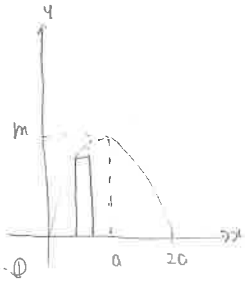
Hは題意の線分上にある図

第 4 問

[解] 題意の放物線は

$$y=f(x)=\frac{m}{a^2}x(2a-x)$$

である.



$$S_m=\int_0^{2a} f(x)dx$$

$$=\frac{1}{6}\frac{m}{a^2}(2a)^3=\frac{4}{3}ma \cdots ①$$

又, $L_m=\sum_{k=0}^{2a}\{[f(k)]+1\}$ だから. $f(k)-1<[f(k)]\le f(k)$ より

$$\sum_{k=0}^{2a} f(k) < L_m \le \sum_{k=0}^{2a} f(k)+2a+1$$

①より

$$\frac{3}{4ma}\sum_{k=0}^{2a} f(k) < \frac{L_m}{S_m} \le \frac{3}{4ma}\sum_{k=0}^{2a} f(k)+\frac{3(2a+1)}{4ma} \cdots ②$$

ここで,

$$\sum_{k=0}^{2a} k(2a-k) = -\frac{1}{6}2a(2a+1)(4a+1)+a\cdot 2a(2a+1)$$

$$=-\frac{1}{3}a(2a+1)(4a+1)+2a^2(2a+1)$$

$$=\frac{1}{3}a(4a^2-1) \quad \frac{m}{a^2}$$

だから $\sum_{k=0}^{2a} f(k)=\frac{m}{3}\frac{4a^2-1}{a}$ だから. ②に代入

$$\frac{1}{4ma}m\frac{4a^2-1}{a} < \frac{L_m}{S_m} \le \frac{1}{4ma}m\frac{4a^2-1}{a}+\frac{3(2a+1)}{4ma}$$

$$1-\frac{1}{4a^2} < \frac{L_m}{S_m} \le 1-\frac{1}{4a^2}+\frac{3(2a+1)}{4ma}$$

はさみうちから

$$\frac{L_m}{S_m} \longrightarrow 1-\frac{1}{4a^2} \quad (m\to\infty)$$

第 5 問

[解] 青、赤、白をB, R, Wとし、たとえば青球の1番をB-1と表す.

(1) 3点となるのは、色も番号も異なる3つの玉をとりだしたときで

$$A(3) = 3 \times 2 \times 1 = 6_{\#}$$

2点となることはありえず. $A(2) = 0_{\#}$ 1点となるのは、2つの玉のみ色又は番号が被る時で、全く被らない1つの選び方から

$$A(1) = 9 \times ({}_4C_2 - 2) = 36_{\#}$$

余事象から

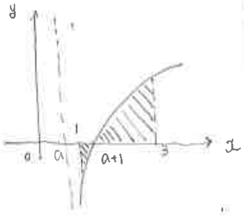
$$A(0) = {}_9C_3 - (6 + 0 + 36) = 42_{\#}$$

(2) $$E = 3 \times \frac{6}{{}_9C_3} + 2 \times 0 + 1 \times \frac{36}{{}_9C_3}$$

$$= \frac{18 + 36}{84} = \frac{9}{14}_{\#}$$

第 6 問

[解] $0<a<1$ …① より、グラフは右図。$f(x)=\log(x-a)$ とする。



(1) $V(a)=\int_1^3 \pi\{f(x)\}^2 dx$

$= \pi\int_{1-a}^{3-a}(\log x)^2 dx$ …②

$= \pi\left[x(\log x)^2 - 2x(\log x - 1)\right]_{1-a}^{3-a}$

$= \pi\{(3-a)\{(\log(3-a))^2 - 2\log(3-a)+2\} - (1-a)\{(\log(1-a))^2 - 2\log(1-a)+2\}\}$ //

(2) ②から

$\frac{1}{\pi}V'(a) = -(\log(3-a))^2 + (\log(1-a))^2$

$= \{\log(1-a)+\log(3-a)\}\{\log(1-a)-\log(3-a)\}$

$= \log(1-a)(3-a)\cdot\log\frac{1-a}{3-a}$

から下表をうる。

a	0		$2-\sqrt{2}$		1
V'		$-$	0	$+$	
V		↘		↗	

$\left((1-a)(3-a) \geqq 1 \Leftrightarrow a \leqq 2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2} \leqq a \right.$

①から $\left. \frac{1-a}{3-a} \leqq 1 \right.$ である。)

したがって、$a=2-\sqrt{2}$ の時 V は min で、この時、

$\begin{cases} 1-a = -1+\sqrt{2} \\ 3-a = 1+\sqrt{2} \end{cases}$

から、$B=\log(-1+\sqrt{2})$, $A=\log(1+\sqrt{2})$ として、$B=-A$ だから

$V(a)\cdot\frac{1}{\pi} = (1+\sqrt{2})\{A^2-2A+2\} - (-1+\sqrt{2})\{B^2-2B+2\}$

$= (1+\sqrt{2})\{A^2-2A+2\} + (1-\sqrt{2})\{A^2+2A+2\}$

$= 2A^2 - 4\sqrt{2}A + 4$

$\therefore \bar{V}(a) = 2\pi\{(\log(1+\sqrt{2}))^2 - 2\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})+2\}$ //