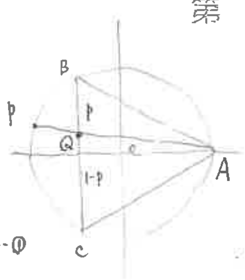
京大理科数学 2000

第 1 問

[解] 円が半径1として良い BCとAPの交点をQとする。題意から、点Xの位置ベクトルを$\vec{x}$と表すと、



$$\vec{q} = (1-p)\vec{b} + p\vec{c}$$

だから、AP // AQ より、$k \in \mathbb{R}$として、

$$\vec{p} - \vec{a} = k(-\vec{a} + (1-p)\vec{b} + p\vec{c}) \quad \cdots①$$

$$\vec{p} = (1-k)\vec{a} + k(1-p)\vec{b} + kp\vec{c}$$

$|\vec{p}|=1$をみたすので、$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = -\frac{1}{2}$より、

$$|\vec{p}|^2 = (1-k)^2|\vec{a}|^2 + k^2(1-p)^2|\vec{b}|^2 + k^2p^2|\vec{c}|^2 + 2\left[k(1-k)(1-p)\vec{a}\cdot\vec{b} + k^2p(1-p)\vec{b}\cdot\vec{c} + k(1-k)p\vec{a}\cdot\vec{c}\right]$$

$$= \{p^2 + (1-p)^2\}k^2 + k^2 - 2k + 1 - \{p(1-p)k^2 + k(1-k)p + (1-p)k(1-k)\}$$

$$= (p^2 - 2p + 2)k^2 - 2k + 1 - \{(-p^2+p-1)k^2 + k\}$$

$$= 3(p^2-p+1)k^2 - 3k + 1 = 1$$

$$\therefore \ k = 0, \ \frac{1}{p^2-p+1}$$

$k=0$はAに対応するからPに対応するのは$k = \frac{1}{p^2-p+1}$で、①から

$$\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{p^2-p+1}\vec{a} + \frac{1-p}{p^2-p+1}\vec{b} + \frac{p}{p^2-p+1}\vec{c}$$

$$= \frac{1-p}{p^2-p+1}\overrightarrow{AB} + \frac{p}{p^2-p+1}\overrightarrow{AC} \quad //$$

第 2 問

[解] $0<a\leqq 2$ …① $t=\dfrac{1}{a}$ とおくと ①から $\dfrac{1}{2}\leqq t$ …② である。

(1) 題意がみたされるのは、

$$\sqrt{x}=2tx+1-t \quad \cdots ③$$

が x について実解を持つこと。$x=\frac{1}{2}$ は $\sqrt{1/2}=1$ となり不適だから、以下 $x\neq 1/2$ とする。③より

$$\frac{\sqrt{x}-1}{2x-1}=t \quad \cdots ④$$

④の左辺 $f(x)$ とおく。

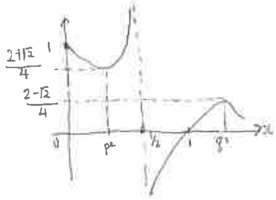
$$f'(x)=\frac{1/2\sqrt{x}\,(2x-1)-2(\sqrt{x}-1)}{(2x-1)^2}=\frac{-x+2\sqrt{x}-1/2}{\sqrt{x}(2x-1)^2}$$

だから、$p=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$、$q=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ とおくと、

$$f'(x)=\frac{-(\sqrt{x}-p)(\sqrt{x}-q)}{\sqrt{x}(2x-1)^2}$$

となるので、下表をうる。

x	0		p^2		1/2		q^2	
f'		−	0	+	/	+	0	−
f	1	↘		↗	/	↗		↘



これと、$f(x)\longrightarrow\pm\infty$ ($x\longrightarrow\frac{1}{2}\mp 0$)(複号同順)、$f(x)\longrightarrow 0$ ($x\to+\infty$) から グラフの概形は右上図。これと $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}<\dfrac{1}{2}<\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ 及び②から、④が x について実解を持つ条件は、

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4}\leqq t \iff a\leqq\frac{4}{2+\sqrt{2}}=2(2-\sqrt{2})$$
//

(2) (与式) $\iff 4x^2+\{4(a-1)-a^2\}x+(a-1)^2=0 \iff 4x^2-(a-2)^2x+(a-1)^2=0$ …⑤

この判別式 D として、

$$D=(a-2)^4-16(a-1)^2=\{(a-2)^2+4(a-1)\}\{(a-2)^2-4(a-1)\}=a^2(a^2-8a+8) \quad \cdots ⑥$$

だから、$t=4-2\sqrt{2}$ として、①とから、

$0<a\leqq t$ の時、$D\geqq 0$ から、⑤は実解を持つ。
$t<a\leqq 2$ 〃 $D<0$ 〃 ⑤は実解を持たない。 …⑦

となる。⑤の左辺 $g(x)$ とおく。

1° $0<a<t$ の時

⑤の2解は、$g(0)\geqq 0$、軸：$x=\dfrac{(a-2)^2}{8}\geqq 0$ から、いずれも非負だから、$|\alpha|\leqq|\beta|$ ∴ $\alpha\leqq\beta$ で、

$$|\beta|=\beta=\frac{1}{8}\{(a-2)^2+\sqrt{D}\} \quad \cdots ⑧$$

$$8\frac{d\beta}{da}=2(a-2)+\frac{4a(a^2-6a+4)}{2\sqrt{D}}$$

$$=2(a-2)+\frac{2(a^2-6a+4)}{\sqrt{a^2-8a+8}} \quad \cdots ⑨$$

だから、

$$\frac{d\beta}{da}\geqq 0\iff\frac{a^2-6a+4}{\sqrt{a^2-8a+8}}\geqq 2-a$$

$0<a\leqq 3-\sqrt{5}$ の時は両辺0以上、$3-\sqrt{5}<a\leqq t$ の時は左辺が負、右辺が正となり不適だから、

$0<a\leqq 3-\sqrt{5}$ のもとで2乗して、

$$(a^2-6a+4)^2\geqq(a-2)^2(a^2-8a+8)$$
$$\iff a^4-12a^3+44a^2-48a+16\geqq a^4-12a^3+44a^2-64a+32$$
$$\iff a\geqq 1$$

だが、$1>3-\sqrt{5}$ より、$\dfrac{d\beta}{da}\geqq 0$ をみたす a はなく、区間内で $\dfrac{d\beta}{da}<0$、つまり β は単調減少。

さらに、β は明らかに連続だから、$0<a\leqq t$ とすると、β は $a=t$ の時

$$\min|\beta|=\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})$$

をとる。

2° $t\leqq a\leqq 2$ の時

$|\beta|=\dfrac{1}{8}\sqrt{(a-2)^4-D}=\dfrac{1}{2}|a-1|$ で、$1<t$ から、$a=t$ で $\min|\beta|=\dfrac{1}{2}(3-2\sqrt{2})$ をとる。

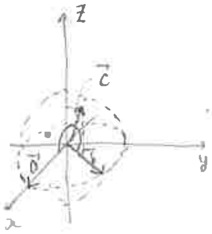
以上1°、2°から、もとめる $\min|\beta|=\dfrac{1}{2}(3-2\sqrt{2})$ // である。

第 3 問

[解]

(1) $\vec{c}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ とおく. $(\underbrace{p^2+q^2+r^2=1}_{①},\ p,q,r\in\mathbb{R})$. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ から. α,β は各々

$\vec{a}$ と $\vec{c}$, $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角にひとしい。



$$\cos\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}=p$$

$$\cos\beta=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}=\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q$$

だから

$$(与式左辺)=p^2-\frac{1}{2}p^2-\frac{\sqrt{3}}{2}pq+\frac{1}{4}(p+\sqrt{3}q)^2$$
$$=\frac{1}{2}p^2-\frac{\sqrt{3}}{2}pq+\frac{1}{4}p^2+\frac{\sqrt{3}}{2}pq+\frac{3}{4}q^2$$
$$=\frac{3}{4}(p^2+q^2)\leq\frac{3}{4}(p^2+q^2+r^2)=\frac{3}{4}\ 因\ (\because r\in\mathbb{R},①)$$

[(1)別] (r がキエルのでパラメータ表示でもOK)

(2) $t=\cos\alpha$, $S=\cos\beta$ とおく. (*) から

$$S^2-tS+t^2-\frac{3}{4}\leq 0$$

$$\frac{1}{2}\left(t-\sqrt{3}\,|\sin\alpha|\right)\leq S\leq\frac{1}{2}\left(t+\sqrt{3}\,|\sin\alpha|\right)$$

$0\leq\alpha\leq\pi$ から $\sin\alpha\geq 0$ だから

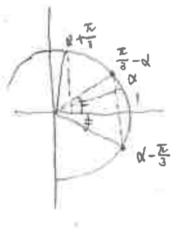
$$\frac{1}{2}(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha)\leq\cos\beta\leq(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)/2$$

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\leq\cos\beta\leq\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$$

$0\leq\beta\leq\pi$ では $\cos\beta$ は単調減少だから

1° $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{3}$ の時

$$\frac{\pi}{3}-\alpha\leq\beta\leq\alpha+\frac{\pi}{3}$$

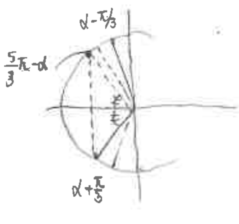


2° $\frac{\pi}{3}\leq\alpha\leq\frac{2}{3}\pi$ の時

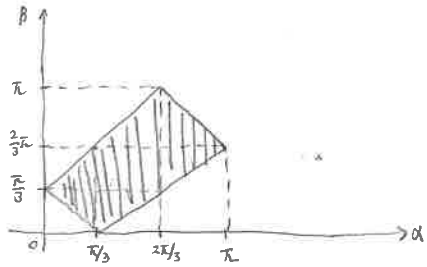
$$\alpha+\frac{\pi}{3}\geq\beta\geq\alpha-\frac{\pi}{3}$$

3° $\frac{2}{3}\pi\leq\alpha\leq\pi$ の時

$$\alpha-\frac{\pi}{3}\leq\beta\leq-\alpha+\frac{5}{3}\pi$$



図示して下図斜線部(境界含む)



第 4 問

[解] $p \in \text{prime}$, $a, b \in \mathbb{N}$ $(a \perp b)$ …①

$A = (a+bi)^p$ とおく。

$$A = \left(a^p - {}_pC_2\, a^{p-2} \cdot b^2 + \cdots\right) + i\left({}_pC_1 \cdot a^{p-1} \cdot b - {}_pC_3\, a^{p-3} \cdot b^3 + \cdots\right)$$

①から、Aの虚部は 〜部である。これをBとおく。

$$B = {}_pC_1 \cdot a^{p-1} \cdot b - {}_pC_3 \cdot a^{p-3} \cdot b^3 + {}_pC_5\, a^{p-5} \cdot b^5 - \cdots$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}}^{2k-1 \leq p} {}_pC_{2k-1} \cdot a^{p-(2k-1)} \cdot b^{2k-1}$$

$A \in \mathbb{R}$, つまり $B = 0$ とカテイする。

1° $p = 2$ の時

$A = a^2 - b^2 + 2abi$ より $B = 2ab \neq 0$ で矛盾 (∵①)

2° $p \geq 3$ の時

p はキスウだから

$$B = (a\text{の倍}) \pm b = 0$$

の形でかけるが、これは b が a の倍数であることを表し、$a \perp b$ に矛盾。

以上から示された 図

第 5 問

[解] $C_n=(n+1)\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx$ ‥①

(1) $C_{n+2}=(n+3)\int_0^1 x^{n+2}\cos\pi x\,dx$

$$=(n+3)\left\{\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\cdot x^{n+2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{n+2}{\pi}x^{n+1}\sin\pi x\,dx\right\}$$

$$=-\frac{1}{\pi}(n+3)(n+2)\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}(n+3)(n+2)\left\{\left[\frac{-1}{\pi}\cos\pi x\cdot x^{n+1}\right]_0^1+\frac{1}{\pi}C_n\right\}$$

$$=-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi}\left\{\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}C_n\right\}$$ //

(2) ①から

$$\frac{C_n}{n+1}=\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\cos\pi x\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{n+1}x^{n+1}(-\pi\sin\pi x)\,dx$$

$$=-\frac{1}{n+1}+\frac{\pi}{(n+1)}\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx$$

$$C_n=-1+\pi\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx$$ ‥②

又,

$$\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx=\frac{1}{n+2}\left[x^{n+2}\sin\pi x\right]_0^1-\frac{\pi}{n+2}\int_0^1 x^{n+2}\cos\pi x\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{n+2}\int_0^1 x^{n+2}\cos\pi x\,dx\quad\left(=\frac{-\pi}{(n+2)(n+3)}C_{n+2}\right)$$ ‥③

$[0,1]$で $x^n\ge 0$, $-1\le\cos\pi x\le 1$ だから

$$-x^{n+2}\le x^{n+2}\cos\pi x\le x^{n+2}$$

同区間で積分して

$$-\frac{1}{n+3}\le\int_0^1\cos\pi x\cdot x^{n+2}\,dx\le\frac{1}{n+3}$$

したがって③から

$$-\frac{\pi}{(n+2)(n+3)}\le\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx\le\frac{\pi}{(n+2)(n+3)}$$

…をAとして はさみうちから $A\to 0\ (n\to\infty)$ なので、②から

$$C_n\to -1\ (n\to\infty)\equiv C$$ //

(3) ②及び $C=-1$ から

$$C_n-C=C_n+1=\pi\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx$$

だから、$G_n=\frac{C_{n+1}+1}{C_n+1}$ とおくと、

$$G_n=\frac{\int_0^1 x^{n+2}\sin\pi x\,dx}{\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx}$$ ‥④

である。③を④に代入して

$$G_n=\frac{\dfrac{C_{n+3}}{(n+3)(n+4)}}{\dfrac{C_{n+2}}{(n+2)(n+3)}}$$

$$=\frac{n+2}{n+4}\cdot\frac{C_{n+3}}{C_{n+2}}$$

$$=\frac{1+2/n}{1+4/n}\cdot\frac{C_{n+3}}{C_{n+2}}$$

$$\longrightarrow 1\ (n\to\infty)\quad(\because C_n\to -1)$$ //

第 6 問

[解] $2 \le n,\ 0 \le k \le 4,\ n, k \in \mathbb{Z}$ …①

1, 2 … 6 の中には, 5でわって1あまるものが2つ, 他が1つずつある.

(1)
$$\begin{cases} P_{n+1}(0) = \frac{1}{6}\{P_n(0) + \cdots + P_n(3)\} + \frac{1}{3}P_n(4) = \frac{1}{6}(1 + P_n(4)) \\ P_{n+1}(1) = \frac{1}{6}\{P_n(1) + \cdots + P_n(4)\} + \frac{1}{3}P_n(0) = \frac{1}{6}(1 + P_n(0)) \\ P_{n+1}(2) = \frac{1}{6}\{P_n(0) + P_n(2) + \cdots + P_n(4)\} + \frac{1}{3}P_n(1) = \frac{1}{6}(1 + P_n(1)) \\ P_{n+1}(3) = \frac{1}{6}\{P_n(0) + P_n(1) + P_n(3) + P_n(4)\} + \frac{1}{3}P_n(2) = \frac{1}{6}(1 + P_n(2)) \\ P_{n+1}(4) = \frac{1}{6}\{P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + P_n(4)\} + \frac{1}{3}P_n(3) = \frac{1}{6}(1 + P_n(3)) \end{cases}$$

(2) $\sum_{k=0}^{4} P_n(k) = 1$ だから. $m_n \le P_n(k) \le M_n$ を k について足して

$$5m_n \le 1 \le 5M_n$$

$$\therefore\ m_n \le \frac{1}{5} \le M_n \quad (イ)$$

又, (1)の表式から,

$$\frac{1}{6}(1 + m_n) \le P_{n+1}(k) \le \frac{1}{6}(1 + M_n)$$

だから.

$$P_{n+1}(k) - P_{n+1}(l) \le \frac{1}{6}(M_n - m_n) \quad (ロ)$$

(3) (2)から. $a_n = M_n - m_n$ として.

$$0 \le a_{n+1} \le \frac{1}{6}a_n$$

が成り立つ。くり返し用いて,

$$0 \le a_n \le \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdot a_1$$

はさみうちの定理より. $a_n \to 0\ (n \to \infty)$ だから (2) (イ) より.

$$m_n, M_n \to \frac{1}{5} \quad (n \to \infty)$$

さらに $m_n \le P_n(k) \le M_n$ だから. はさみうちより

$$P_n(k) \to \frac{1}{5} \quad (n \to \infty)$$