平面上のある直線 l の上の任意の点 (x, y) に対し，点 $(4x+2y, x+3y)$ がふたたび l の上にあるという．このような直線 l を全て求めよ．

[解] まず，l が y 軸平行な時を考える．この時は $l : x = const$ となるから，題意より

$$\forall y, x = 4x+2y \Longleftrightarrow \forall y, 3x+2y = 0$$

となって矛盾．故に l は y 軸平行ではなく，$a, b \in \mathbb{R}$ に対して $y = f(x) = ax + b$ とおける．故に任意の x に対し

$$\begin{aligned} & f(x+3y) = 4x+2y \\ \Longleftrightarrow & x + 3(ax+b) = a(4x+2(ax+b)) + b \\ \Longleftrightarrow & (3a+1)x + 3b = (2a^2+4a)x + (2ab+b) \end{aligned} \tag{1}$$

が成り立つ．つまり (1) が x についての恒等式なので

$$\begin{cases} 3a+1 = 2a^2+4a \\ 3b = 2ab+b \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow (a, b) = \left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0)$$

である．従って求めるのは $y = -x$ と $y = \dfrac{1}{2}x$ である．$\cdots$(答)