1 辺の長さが 1 の正四面体 $A_0A_1A_2A_3$ がある．点 P はこの正四面体の辺上を毎秒 1 の速さで動き，各頂点にたっしたとき，そこから出る 3 辺のうちの 1 辺を $\frac{1}{3}$ ずつの確率で選んで進む，P は時刻 0 において頂点 A_0 にあるとする．また n を 0 または正の整数とし，点 P が時刻 $t=n$ において頂点 A_i にある確率を $p_i(n)$ で表す．$(i=0,1,2,3)$.

(1) 数学的帰納法を用いて，$p_1(n)=p_2(n)=p_3(n)$ を証明せよ．

(2) $p_0(n)$ と $p_1(n)$ の値を求めよ．

[解] まず，題意から以下の漸化式を得る．

$$p_i(n+1)=\frac{1}{3}(1-p_i(n)) \qquad (1)$$

(1) 題意から $p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)$ であるから $n=0$ では成立．次に $n=k$ での成立を仮定すれば (1) から $n=k+1$ でも成立．以上から示された．□

(2) (1) から，

$$p_i(n+1)-\frac{1}{4}=\frac{-1}{3}\left(p_i(n)-\frac{1}{4}\right)$$

だから，繰り返し用いて

$$p_i(n)=\left(\frac{-1}{3}\right)^n\left(p_i(0)-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}$$

となる．初期条件 $p_1(0)=0$，$p_0(1)=1$ から

$$\begin{cases} p_0(n)=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{4} \\ p_1(n)=\dfrac{1}{4}\left\{1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right\} \end{cases}$$

が求める値である．$\cdots$(答)