あるスポーツにおいて，A，B 二チームが試合をして，先に三回勝った方を優勝とする．一回の試合で A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q $(p+q=1, p>0, q>0)$ とする．このとき，A が優勝する確率を P，B が優勝する確率を Q とし，また，優勝チームが決まるまでの試合数を N として，次の問に答えよ．

(1) $p>q$ のとき，$P-Q$ と $p-q$ とはどちらが大きいか．

(2) $P-p$ を最大にする p の値を求めよ．

(3) N の期待値を最大にする p の値およびそのときの N の期待値を求めよ．

[解] A が優勝する場合は以下のいずれか．

$$\begin{cases} A \text{ の 3 連勝} & p^3 \\ A \text{ の 3 勝 1 敗} & 3p^3q \\ A \text{ の 3 勝 2 敗} & 6p^3q^2 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

以上から

$$\begin{aligned} P &= p^3 * 3p^3q + 6p^3q^2 \\ &= p^3(1+3q+6q^2) \\ &= p^3(6p^2-15p+10) \quad (\because p+q=1) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

同様に対称性から

$$Q = q^3(1+3p+6p^2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$= (1-p)^3(1+3p+6p^2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

である．

(1) $p>q \Longleftrightarrow 1/2<p<1$ のとき，$P+Q=1$ に注意して，

$$\begin{aligned} f(p) &= P+Q-(p-q) \\ &= (2P-1)-(2p-1) \\ &= 2(P-p) \qquad (\because ②) \\ &= 2p\left(p^2(6p^2-15p+10)-1\right) \\ &= 4p\left(p-\frac{1}{2}\right)(p-1)(3p^2-3p-1) \end{aligned}$$

である．$1/2<p<1$ から，

$$p>0 \qquad p-1<0$$

$$p-\frac{1}{2}>0 \qquad 3p^2-3p-1<0$$

だから，$f(p)>0$ すなわち

$$P-Q>p-q$$

である．$\cdots$(答)

(2) 前問の過程から，$f(p)$ を最大にする p を求めればよい．

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f'(p) &= 30p^4-60p^3+30p^2-1 \\ &= 30p^2(p-1)^2-1 \end{aligned}$$

だから，$0<p<1$ に注意して

$$\begin{aligned} f'(p) \geq 0 &\Longleftrightarrow p^2(p-1)^2 \geq \frac{1}{30} \\ &\Longleftrightarrow p(1-p) \geq \frac{\sqrt{30}}{30} \\ &\Longleftrightarrow \alpha \leq p \leq \beta \end{aligned}$$

ただし，α，β は

$$p^2-p+\frac{\sqrt{30}}{30}=0$$

の 2 解で，かつ $\alpha<\beta$ である．これは $0<p<1$ の範囲にあるので，下表を得る．

p	0		α		β		1
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

従って，$f(p)$ を最大にするのは $p=0$ または $p=\beta$ である．前問から，

$$f(0)=0$$

であり，また，

$$\beta = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{15}\sqrt{30}}\right) > \frac{1}{2}$$

だから，$f(\beta) > 0$．故に $f(\beta) > f(0)$ で，求める p の値は

$$p = \beta = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{15}\sqrt{30}}\right)$$

である．$\cdots$(答)

(3) N の期待値を $N(p)$ とする．①および対称性から，

$$\begin{aligned} N(p) =& 3(p^3 + q^3) + 4(3p^3q + 3pq^3) \\ &+ 5(6p^3q^2 + 6p^2q^3) \\ =& 3(p^3 + q^3) + 12(p^3q + pq^3) \\ &+ 30(p^3q^2 + p^2q^3) \end{aligned}$$

となる．$p + q = 1$ に注意して，$t = pq$ とおいて変形すると

$$\begin{aligned} N(p) &= 3(p^3 + q^3) + 12pq(p^2 + q^2) + 30p^2q^2 \\ &= 3(1 - 3t) + 12t(1 - 2t) + 30t^2 \\ &= 3 + 3t + 6t^2 \end{aligned}$$

である．$t = p(1 - p)$ は正で，この範囲で $N(p)$ は t について単調増加．また AM-GM から

$$t = p(1 - p) \leq \frac{1}{4} \quad (\text{等号成立は } p = 1/2)$$

であるから，$N(p)$ は $p = 1/2$ で最大値 $33/8$ をとる．$\cdots$(答)