3 人で' ジャンケン' をして勝者を決めることにする．例えば，1 人が' 紙' を出し，他の 2 人が' 石' を出せば，ただ一回で丁度一人の勝者が決まることになる．3 人で' ジャンケン' をして，負けた人は次の解に参加しないことにして丁度 1 人の勝者がきまるまで' ジャンケン' を繰り返すことにする．この，k 回目に，はじめて丁度一人の勝者が決まる確率を求めよ．

[解]n 回目に 3 人，2 人でジャンケンする確率をそれぞれ a_n，b_n とおく．また，求める確率を c_n とおく．ジャンケンの推移する確率は以下の通り．

3 人 →3 人　1/3
3 人 →2 人　1/3
3 人 →1 人　1/3
2 人 →2 人　1/3
2 人 →1 人　2/3

よって，ジャンケンの推移から以下の漸化式を得る．

$$\begin{cases} c_n = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{2}{3}b_n & \text{(1a)} \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n & \text{(1b)} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{3}b_n & \text{(1c)} \end{cases}$$

さらに，初期条件は $a_1 = 1$，$b_1 = 0$ である．従って (1b) から

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \tag{2}$$

となる．さらにこれを (1c) に代入して

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{3}b_n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ d_{n+1} &= d_n + 1 \\ d_n &= n - 1 + d_1 \\ &= n - 1 + 3b_1 \\ &= n - 1 \qquad (\because b_1 = 0) \\ \therefore b_n &= (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

を得る．ただし $d_n = 3^n b_n$ である．これを (3) に代入すれば，求める確率は

$$c_k = (2k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \text{(答)}$$

である．

[解 2] まず $k \geq 2$ とする．事象 A，B を

$A\cdots$　3 人でジャンケンする．
$B\cdots$　2 人でジャンケンする．

と定める．k 回目に一人の勝者が決まるのは以下のいずれかである．

(i) $A \to \cdots \to \overset{a\text{ 回目}}{A} \to B \to \cdots \to \overset{k\text{ 回目}}{B}$

(ii) $A \to \cdots \to \overset{k\text{ 回目}}{A}$

(i) で A を行う回数 a，B を行う回数を b とすると，

$$a + b = k \tag{3}$$

が成り立つ．ただし $a, b > 0$ である．[解] でのジャンケンの推移の確率から，(i) となる確率は

$$p(a) = \left(\frac{1}{3}\right)^{a-1}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{b-1}\frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^k \qquad (\because (3))$$

同様に (ii) となる確率は

$$q = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

となる．故に求める確率は

$$\sum_{a=0}^{k-1} p(a) + q = (2k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \text{(答)}$$

となる．