

自然数 a, b, c が

$$3a = b^3, \quad 5a = c^2$$

を満たし, d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限るとする.

1. a は 3 と 5 で割り切れることを示せ.
2. a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ.
3. a を求めよ.

[解] 自然数 a, b, c に対して

$$\begin{cases} 3a = b^3 \\ 5a = c^2 \end{cases} \quad (1)$$

とおく.

(1) eq. (1) および 3, 5 は素数であることから, b, c は各々 3, 5 でわり切れる. したがって, $b' = \frac{1}{3}b, c' = \frac{1}{5}c (\in \mathbb{N})$ として eq. (1) に代入して

$$\begin{cases} a = 9b'^3 \\ a = 5c'^2 \end{cases} \quad (2)$$

と書ける. 従って a は $3^2 5^1$ でわり切れる. …(答)

(2) 背理法を用いて示す. a の素因数として, 3, 5 以外の素数 $p \in \mathbb{N}_{\neq 1}$ があると仮定する. すると (1) と同様に, eq. (1) から

$$\begin{aligned} a &= pa' \\ b &= 3pb'' \\ c &= 5pc'' \end{aligned}$$

なる $a', b'', c'' \in \mathbb{N}$ が存在する. eq. (1) に代入すると

$$a' = 9p^2 b''^3 = 5pc''^2 \quad (3)$$

である.

したがって, a' が p^2 でわり切れるので, $a' = p^2 a''$ なる $a'' \in \mathbb{N}$ が存在する. これを eq. (3) に代入して

$$a'' = 9b''^3 = \frac{5c''^2}{p}$$

を得る. $5c''^2/p$ が整数であるためには, p が 5 と互いに素であることから, c'' が p を因数に持つて,

$$c'' = pc'''$$

なる $c''' \in \mathbb{N}$ がある. eq. (3) に代入すると,

$$a'' = 9b''^3 = 5pc'''^2$$

p は 9 と互いに素だから, b'' は p を因数に持つ. 従って a'' が p^3 を因数に持つ. $a = p^3 a''$ だったから, 結局 a が p^6 を因数に持つ.

一方, 題意から a^t ($t \in \mathbb{N}_{\geq 6}$) の形の素因数 a はもたない. これは矛盾. 従って背理法より, $p = 1, 3, 5$ となり, 題意は示された. …(答)

(3) (1), (2) から, $a = 3^k \cdot 5^l$ ($k, l \in \mathbb{N}$) とおける. ただし

$$\begin{cases} 2 \leq k \leq 5 \\ 1 \leq l \leq 5 \end{cases} \quad (4)$$

である. eq. (2) に代入して

$$a = 3^k \cdot 5^l = 9 \cdot b'^3 = 5 \cdot c'^2 \quad (5)$$

だから, b' および c' も同じく 3, 5 のみ素因数にもち,

$$\begin{aligned} b' &= 3^n \cdot 5^m, \\ c' &= 3^x \cdot 5^y, \\ n, m, x, y &\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

と書ける. 変数の範囲は eq. (4) より

$$0 \leq n, m, x, y \leq 5 \quad (6)$$

である. eq. (5) に代入して

$$\begin{aligned} 3^k \cdot 5^l &= 3^{3n+2} \cdot 5^{3m} = 3^{2x} \cdot 5^{2y+1} \\ \therefore \begin{cases} k = 3n + 2 = 2x \\ l = 3m = 2y + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

である. これをみたとす (k, l) は eqs. (4) and (6) の条件では (k, l) = (2, 3) のみであり, この時

$$a = 3^2 \cdot 5^3 = 1125$$

である. …(答)