実数 a, b に対し $x_n = \dfrac{1}{n^b}\left\{\dfrac{1}{n^a} + \dfrac{1}{(n+1)^a} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)^a}\right\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ とおく．$n \to \infty$ のとき x_n が収束するための a, b の条件およびそのときの極限値を求めよ．

[解]

まずは x_n の一般項を求める．

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{n^b}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+k)^a} \\
&= \frac{1}{n^b}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(1+k)^a} \\
&= \frac{1}{n^{a+b-1}}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^a} \qquad \cdots①
\end{aligned}
$$

ここで

$$
A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^a}
$$

とおくと，これは区分求積の形になっており，$n \to \infty$ の時以下のように収束する．

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A_n &= \int_1^2 \frac{1}{x^a}dx \\
&= \begin{cases} \log 2 & (a = 1) \\ \dfrac{1}{1-a}(2^{1-a} - 1) & (a \neq 1) \end{cases} \quad (\neq 0)
\end{aligned}
$$

次に x_n の残りの部分を考えると，

$$
\frac{1}{n^{a+b-1}} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & (a+b-1 > 0) \\ 1 & (a+b-1 = 0) \\ \infty & (a+b-1 < 0) \end{cases}
$$

である．以上をまとめると，$a+b-1 \geq 0$ の時収束し，その収束値は以下のようになる．

$$
\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0 & (n \to \infty) \\ \log 2 & (a+b=1, a=1) \\ \dfrac{2^{1-a}-1}{1-a} & (a+b=1, a\neq 1) \end{cases}
$$

$\cdots$(答)

[解説]