京大理系数学 2007 乙

60分/125分

第 1 問

[解]

(1) $\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx$ において $t=\sqrt{x^2+4}$ として.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{t} \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 2 \\ \hline t & 2 & \to & 2\sqrt{2} \end{array}$$

から

$$\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{2}{t}t\,dt = 2\Big[t\Big]_2^{2\sqrt{2}} = 4(\sqrt{2}-1) \quad \cdots ①$$

又.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\theta\cdot 2}{2\cos^2\theta}d\theta \quad (x=2\tan\theta) = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta=\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\frac{\cos\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\{-\log(1-\sin\theta)+\log(1+\sin\theta)\}\Big]_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\log\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\log\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \quad \cdots ②$$

①.②から.

$$(\text{与式}) = 4(\sqrt{2}-1)+\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \ \#$$

(2) $\boxed{1つ目}$ n段のぼるやり方のうち, 最後で1段のぼったものを a_n, 2段のぼったものを b_n と表す.

$$\begin{array}{ccc} n & & n+1 \\ \hline a_n & \xrightarrow{1つ} & a_{n+1} \\ b_n & \xrightarrow{1つ} & a_{n+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} n & n+1 & n+2 \\ \hline a_n & \xrightarrow{\quad 2つ \quad} & b_{n+2} \end{array}$$

上図から

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+2}=a_n \end{cases}$$

これと, $a_1=1$, $b_1=0$, $b_2=1$ から, a_n, b_n を書き出すと以下

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189
b_n	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88

よって求める場合の数は

$$189+88=277 \ \#$$

(2) $\boxed{2つ目}$ ...

A, B を, 以下の条件をみたすように1列にならべるやり方にひとしい

$$\begin{cases} \circ\ a+2b=15 \quad (a, b\text{はA, Bの個数}) & \cdots ① \\ \circ\ \text{Bはとなりあわない} & \cdots ② \end{cases}$$

$(a,b)=(15,0)\,(13,1)\,(11,2)\,(9,3)\,(7,4)\,(5,5)$ である. $a<5$ は②に反する.
　　—ア　—イ　—ウ　—エ　—オ　—カ

ア…1通り　ウ ${}_{12}C_2=66$通り　オ ${}_8C_4=70$通り

イ…14通り　エ ${}_{10}C_3=120$通り　カ ${}_6C_5=6$通り

よって

$$1+14+66+120+70+6=277 \ \#$$

第 2 問

[解] $0<x, y \cdots$, $y \neq x \cdots$ ①

$b_n = \dfrac{a_n}{y^n}$ によって $\{b_n\}$ を定めると, $b_1=0$ で:

$$b_{n+1} = \frac{x}{y} b_n + 1$$

①から.

$$b_{n+1} - \frac{y}{y-x} = \frac{x}{y}\left(b_n - \frac{y}{y-x}\right)$$

くり返し用いて.

$$b_n = \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\left(-\frac{y}{y-x}\right) + \frac{y}{y-x}$$

$$a_n = \frac{y}{y-x}\left\{y^n - x^{n-1}\cdot y\right\} = \frac{y^2}{y-x}\left\{y^n - x^n\right\}$$

これが収束する条件は, ①から, $y^n - x^n$ が収束する条件とひとしい

1° $y>x>0$ の時

$y^n - x^n = y^n\left\{1-\left(\frac{x}{y}\right)^n\right\}$ が収束するには, $0<y\leq 1$ が条件 ($\because$ ①)

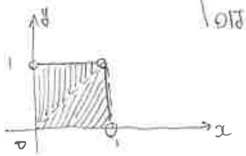
2° $x>y>0$

同じく, $0<x\leq 1$ が条件

以上まとめて

$0<x<y\leq 1$ or $0<y<x\leq 1$

だから, 図示して下図斜線部 (境界は $x=1$, $y=1$ は含み, $x=0$, $y=0$ は含まず, 0は含まず, $y=x$ は含まず)



第 3 問

[解]

$$\begin{cases} a+d=-(b+c) & \cdots ① \\ ad-bc=-p & \cdots ② \\ d\leq c\leq b\leq a & \cdots ③ \end{cases}$$

$a+d=\alpha$, $ad=\beta$ とおく。($\alpha,\beta\in\mathbb{Z}\cdots④$) ①②から、

- a,d は $x^2-\alpha x+\beta=0$ の2解
- b,c は $x^2+\alpha x+\beta+p=0$ の 〃

だから

$$\begin{cases} a^2-\alpha a+\beta=0 \\ d^2-\alpha d+\beta=0 \\ c^2+\alpha c+\beta+p=0 \\ b^2+\alpha b+\beta+p=0 \end{cases} \cdots *$$

である。aとbの式を辺々引いて、

$$a^2-b^2-\alpha(a+b)=p$$
$$(a+b)(a-b-\alpha)=p$$
$$-(a+b)(b+d)=p$$

ここで、$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $p\in\text{prime}$, 及び③から $b+d\leq a+b$ であることより、

$$(b+d,a+b)=(-1,p),\ (-p,1) \quad\cdots④$$

同じことをaとcの式を用いて行えば

$$-(a+c)(c+d)=p$$

から

$$(c+d,a+c)=(-1,p),\ (-p,1) \quad\cdots⑤$$

④⑤及び③から $c+d\leq b+d\leq a+c\leq a+b$ だから

$$(c+d,b+d,a+c,a+b)=\underbrace{(-1,-1,p,p)}_{㋐},\ \underbrace{(-p,-1,1,p)}_{㋑}\ \underbrace{(-p,-p,1,1)}_{㋒}$$

である。

㋐の時

$$\begin{cases} c=-1-d=p-a \\ b=-1-d=p-a \end{cases}$$

となるから $a-d=p+1$ となる。①~③に代入して

$$\begin{cases} (d+p+1)+d=2(1+d) \\ d(d+p+1)-(1+d)^2=-p \\ d\leq -1-d\leq -1-d\leq d+p+1 \end{cases}$$

第1式から $p=1$ となって不適。

㋑の時

$$\begin{cases} c=-p-d=1-a \\ b=-1-d=p-a \end{cases}$$

から、$a=d+p+1$ となる。①へ③

$$\begin{cases} 2d+p+1=2d+p+1 \\ d(d+p+1)-(p+d)(1+d)=-p \\ d\leq -p-d\leq -1-d\leq d+p+1 \end{cases}$$

したがって d を $-2-p\leq 2d\leq -p$ をみたす、つまり $d=\frac{-(p+1)}{2}$ とすれば ($\because p\in\text{prime}$) 全ての条件がみたされる。この時

$$a=\frac{p+1}{2},\quad b=\frac{p-1}{2},\quad c=\frac{-p+1}{2}$$

㋒の時

$$\begin{cases} c=-p-d=1-a \\ d=-p-d=1-a \end{cases}$$

から $a=p+d+1$ となる。①に代入して

$$2d+p+1=+2p+2d$$

から $p=1$ となって矛盾。

以上から

$$(a,b,c,d)=\left(\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2},\frac{-p+1}{2},-\frac{(p+1)}{2}\right) \quad //$$

[*㋐㋑㋒において]
与式から $a+b=-(c+d)$ だから、㋑のみにしぼり込めた

[別] 普通に文字消去でもとける。というかこっちの方が早かった…

第 4 問

[解] Oを始点とする点Xの位置ベクトルを$\vec{x}$と表す。題意から$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ …①
として良い。

$$\begin{cases} \vec{p}=\frac{1}{5}(2\vec{b}+3\vec{a}) \\ \vec{q}=\frac{1}{5}(2\vec{c}+3\vec{b}) \\ \vec{r}=\frac{1}{5}(2\vec{a}+3\vec{c}) \end{cases} \quad \cdots *$$

であり、△PQRの外心がOの時、$|\vec{p}|=|\vec{q}|=|\vec{r}|=k$とかける。*の両辺絶対値とって2乗して、$|\vec{p}|^2=|\vec{q}|^2=|\vec{r}|^2=k^2$及び①から ($k>0$)

$$\begin{cases} 25k=4+9+12\vec{a}\cdot\vec{b} \\ 25k=13+12\vec{b}\cdot\vec{c} \\ 25k=13+12\cdot\vec{c}\cdot\vec{a} \end{cases}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{25k-13}{12} \quad \cdots ②$$

ここで対称性から、Oを原点とする座標平面で、A(1,0) B($\cos\alpha$, $\sin\alpha$)

C($\cos\beta$, $\sin\beta$)とおく。($0<\alpha<\beta<2\pi$) ②から、

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos(\beta-\alpha)$$

$0<\alpha<\beta<2\pi$から左側の等号から$\beta=2\pi-\alpha$とかける。

$$0<\alpha<2\pi-\alpha<2\pi \quad \therefore \quad 0<\alpha<\pi \quad \cdots ③$$

したがって右側の等号から

$$\cos\alpha=\cos(2\pi-2\alpha)=\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$(2\cos\alpha+1)(\cos\alpha-1)=0$$

③から$\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=2\pi-\alpha=\frac{4}{3}\pi$。したがって △ABCは正三角形 //

[☆] (②以下)

$\overline{AB}^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$, などから $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$ となる。(∵ $a\cdot b=b\cdot c=c\cdot a$)
この方が早い。

第　　問

第 6 問

[解] $f(0)=0,\ f'(0)=1$ …① である。任意の $a, b\in\mathbb{R}$ に対し

$$\begin{cases} f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)} & \cdots ② \\ 1+f(a)f(b)\neq 0 & \cdots ③\end{cases}$$

②で $b=-a$ とすると、①から、

$$f(a)+f(-a)=0 \quad \cdots ④$$

だから、③で $b=-a$ として

$$1+f(a)f(-a)=1-f(a)^2\neq 0$$

$$\therefore f(a)\neq\pm 1 \quad \cdots ⑤$$

が任意の $a\in\mathbb{R}$ で成り立つ。$f(x)$ は連続かつ $f(0)=0$ から、$-1<f(x)<1$ で、

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\frac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)}-f(x)\right] \quad (\because ②)$$

$$=\frac{f(h)}{h}\,\frac{1-(f(x))^2}{1+f(x)f(h)} \xrightarrow{h\to 0} \{1-(f(x))^2\}\cdot f'(0)=f'(x)$$

で、①から

$$f'(x)=1-(f(x))^2 \quad \cdots ⑥$$

したがって $y=f(x)$ として ⑥とあわせて微分方程式

$$\frac{1}{1-y^2}\,dy=dx$$

が成り立つ。これをといて、$-1<y<1$ から

$$\log\frac{1+y}{1-y}=2x+C$$

$x=0$ で $y=0$ ($\because$①) から $C=1$ で、

$$\frac{1+y}{1-y}=e^{2x} \qquad \therefore y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

逆にこの時 ①③はみたされ、②については

$$\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}=\frac{(e^{2a}+1)(e^{2b}-1)+(e^{2a}-1)(e^{2b}+1)}{(e^{2a}+1)(e^{2b}+1)+(e^{2a}-1)(e^{2b}-1)}$$

$$=\frac{2(e^{2a+2b}-1)}{2(e^{2a+2b}+1)}=f(a+b)$$

から成立し、十分。以上から $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ であり、

$$f''(x)=\{1-(f(x))^2\}'=-2f(x)f'(x)$$

これは $x>0$ で $f(x)>0$, $f'(x)>0$ から、$f''(x)<0$ となり、たしかに上に凸である。■