円 $C : x^2 + y^2 = 1$ 上の 2 点 P(1,0) と Q$(\cos\theta, \sin\theta)$ を通り円 C と直交する円を C_θ とする．ただし，円 C と C_θ が直交するとは交点におけるそれぞれの接線が直交することをいう．このとき次の問いに答えよ．

1. $0 < \theta < \pi$ のとき C の内部と C_θ の内部の共通部分の面積 S_θ を求めよ．
2. C の内部にある C_θ の円弧 PQ の中点を A_θ とする．θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くとき A_θ の軌跡の方程式を求めよ．
3. A_θ の軌跡と x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ．

[解]

(1) C,C_θ の中心をそれぞれ O,O_θ とする．fig. 1 に概形を示す．題意より，点 P での接線 OD と $O'D$ が直交し，また点 Q での接線 OB と BO' が直交する．

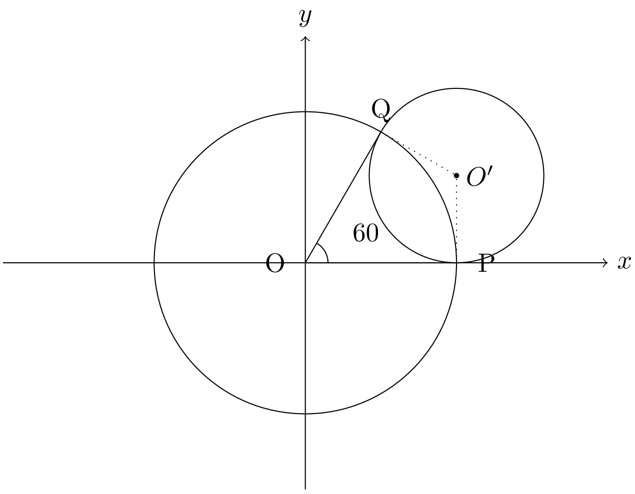


図 1　円 C と C_θ

したがって，$O'(X,Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} \vec{OP} \cdot \vec{PO'} = 0 \\ \vec{OQ} \cdot \vec{QO'} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\therefore \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X-1 \\ Y \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X-\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\therefore \begin{cases} X = 1 \\ Y = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \quad (\because 0 < \theta < \pi) \quad \cdots ② \end{cases} \tag{3}$$

である．したがって，C_θ の半径 R_θ は

$$\begin{aligned} R_\theta &= \mathrm{PO'} && (4)\\ &= Y && (5)\\ &= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} && (6)\\ &= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} && (7)\\ &= \tan\frac{\theta}{2} && (8) \end{aligned}$$

である．ただし，最後の行で倍角公式を利用した．したがって，

$$\begin{aligned} \tan\angle DOO' &= \frac{OD'}{OD} \\ &= \tan\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

となり，$\angle DOO' = \theta/2$ であることがわかる．

求める共通領域の面積 S_θ は, 扇形 OPQ と扇形 $O'PQ$ の面積の和から，四角形 $OPO'Q$ を引いたものに等しい．$\angle PO'Q = \pi - \theta$ に注意して，

$$\begin{aligned} \text{扇形}OPQ &= \frac{1}{2}\theta \\ \text{扇形}O'PQ &= \frac{1}{2}(\pi-\theta)\tan^2\frac{\theta}{2} \\ \text{四角形}OPO'Q &= 2\triangle ODO' \\ &= \tan\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

より，求める面積 S_θ は

$$\begin{aligned} S_\theta &= \text{扇形}OPQ + \text{扇形}O'PQ - \text{四角形}OPO'Q \\ &= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}(\pi-\theta) - \tan\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

である．$\cdots$(答)

(2) 線分 OO' の長さは，倍角公式より

$$\begin{aligned} OO' &= \sqrt{1 + \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{1+\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos\theta}{\sin^2\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{2-2\cos\theta}{\sin^2\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$
$$= \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

と表せる．

A_θ は線分 OO' 上にあって，線分 OA_{theta} の長さは

$$\begin{aligned} OA_\theta &= OO' - O'A_\theta \\ &= \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{OA_\theta}} &= \frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \end{aligned}$$

とかける．

$$x = 1 - \sin\frac{\theta}{2} \tag{9}$$
$$y = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}} \tag{10}$$

において，$0 < \theta < \pi$ より，$\cos\theta/2 > 0$ だから，

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}} \tag{11}$$

を代入して

$$x = 1 - \sin\frac{\theta}{2} \tag{12}$$
$$y = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}} \tag{13}$$

1 つ目の式から $\sin(\theta/2)$ を消去して

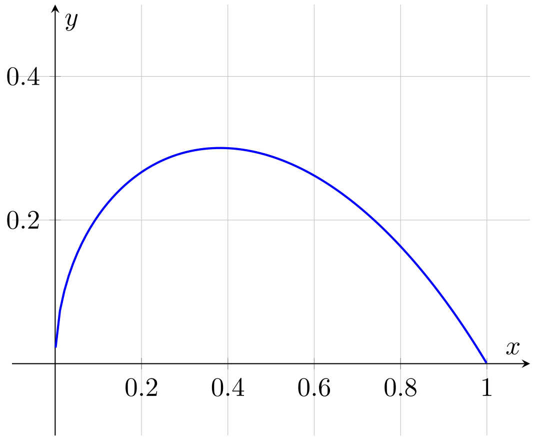
$$\sin\frac{\theta}{2} = 1 - x \qquad (0 < x < 1)$$

を 2 つ目の式に代入して

$$\begin{aligned} Y &= \frac{(1-x)\cdot x}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \\ &= \frac{x(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} \quad (0 < x < 1) \end{aligned}$$

がもとめる軌跡である．

(3) (2) でもとめたグラフは $0 < x < 1$ で $y > 0$ であり，??のようになる．



したがってもとめる体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1 y^2 dx \\ &= \pi\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{x(2-x)}dx \\ &= \pi\int_0^1 \left(-x^2 - 1 + \frac{2}{2-x}\right)dx \\ &= \pi\left[-\frac{1}{3}x^3 - x - 2\log|2-x|\right]_0^1 \\ &= \pi\left(2\log 2 - \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

となる．$\cdots$(答)

[解 説] 平面図形の問題．ポイントは対称性から $\angle POO' = \theta/2$ と，直線 OO' が $\angle POQ$ を半分に分割する直線になっていることである．本解答では座標からこの事実を導出したが，対称性からこの事実を認めてしまえば，O' の座標は直線

$$y = \tan\frac{\theta}{2}x$$

と $x = 1$ の交点であるから $O' = (1, \tan(\theta/2))$ と求まる．以降の計算も $\theta/2$ を用いて行ったほうが見通しが良い．