xyz 空間において，条件

$$x^2+y^2 \leq z^2 \quad z^2 \leq x \quad 0 \leq z \leq 1$$

を満たす点 $P(x,y,z)$ の全体からなる立体を考える．この立体の体積を V とし，$0 \leq k \leq 1$ に対し，z 軸と直交する平面 $z=k$ による切り口の面積を $S(k)$ とする．

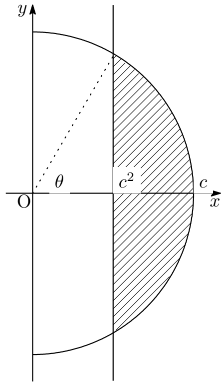
(1) $k=\cos\theta$ とおくとき $S(k)$ を θ で表せ．ただし $0 \leq \theta\pi/2$ とする．

(2) V の値を求めよ．

[解] $\cos\theta=c$，$\sin\theta=s$ とおく． $z=c$ での切断面は,

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq c^2 \\ c^2 \leq x \end{cases}$$

である．従って図示して下図.



$S(k)$ は斜線部の面積で

$$S(k)=\theta c^2 - c^3 s$$

である．$\cdots$((1) の答)
従って，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 S(k)dk \\
&= \int_{\pi/2}^0 (\theta c^2 - c^3 s)\frac{dk}{d\theta}d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} (c^2 s\theta - c^3 s^2)d\theta \\
&= -\left[\frac{1}{3}c^3\theta\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} c^3 d\theta - \int_0^{\pi/2} c^3 s^2 d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} c(1-s^2)\left(\frac{1}{3}-s^2\right)d\theta \\
&= \int_0^1 (1-x^2)\left(\frac{1}{3}-x^2\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{1}{3}x\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{45}
\end{aligned}$$

である．$\cdots$((2) の答)