$p > 0, q > 0$ であるような点 P(p,q) から双曲線 $y = -\frac{1}{x}$ へ引いた 2 本の接線の接点を A, B とする．pq を t とおいて，三角形 PAB の面積を t の式で表せ．また，この面積の最小値を求めよ．

[解] 双曲線と点 P は fig. 1 のような関係になる．

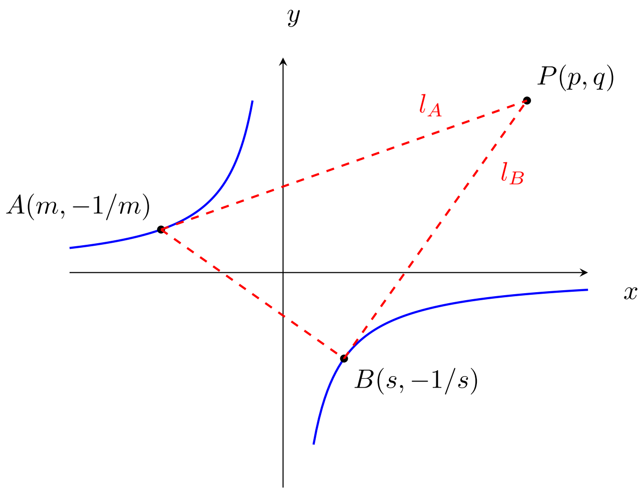

図 1: 三角形 PAB の様子

従って，接点 A, B の x 成分を m, s として，

$$m < 0 < s$$

と置いて良い．

この時，点 A, B での接線 l_A, l_B の方程式は

$$\begin{aligned} l_A : y &= \frac{1}{m^2}x - \frac{2}{m} \\ l_B : y &= \frac{1}{s^2}x - \frac{2}{s} \end{aligned}$$

である．この 2 本の直線の交点が $P(p,q)$ だから，l_A, l_B を連立して

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2}p - \frac{2}{m} &= \frac{1}{s^2}p - \frac{2}{s} \\ \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{s^2}\right)p &= -\frac{2}{s} + \frac{2}{m} \\ \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{s}\right)p &= -\frac{2}{s} + \frac{2}{m} \\ \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{s}\right)p &= 2 \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{s}\right)} \\ &= \frac{2ms}{m+s} \qquad (1) \end{aligned}$$

である．この時 q は l_A の式に代入して

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{m^2}p - \frac{2}{m} \\ &= \frac{1}{m^2} \cdot \frac{2ms}{m+s} - \frac{2}{m} \\ &= \frac{2s}{m(m+s)} - \frac{2}{m} \\ &= \frac{2s - 2(m+s)}{m(m+s)} \\ &= \frac{-2m}{m(m+s)} \\ &= \frac{-2}{m+s} \qquad (2) \end{aligned}$$

となる．

以下 eqs. (1) and (2) を用いて三角形 PAB の面積を求める．まず，

$$\begin{aligned} \vec{PA} &= \begin{pmatrix} m-p \\ -\frac{1}{m} - q \end{pmatrix} \\ \vec{PB} &= \begin{pmatrix} s-p \\ -\frac{1}{s} - q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であることに注意する．これら二つのベクトルの作る三角形の面積公式から，$\triangle PAB$ の面積 f として

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}\left|(m-p)\left(-\frac{1}{s} - q\right) - (s-p)\left(-\frac{1}{m} - q\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\left(m - \frac{2ms}{m+s}\right)\left(-\frac{1}{s} + \frac{2}{m+s}\right) - \left(s - \frac{2ms}{m+s}\right)\left(-\frac{1}{m} + \frac{2}{m+\right.\right. \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{m^2 - ms}{m+s} \cdot \frac{-m+s}{s(m+s)} - \frac{s^2 - ms}{m+s} \cdot \frac{-s+m}{m(m+s)}\right| \\ &= \frac{1}{2(m+s)^2}\left|\frac{m(m-s)(-m+s)}{s} - \frac{s(s-m)(-s+m)}{m}\right| \\ &= \frac{1}{2(m+s)^2}\left|\frac{-m(s-m)^2}{s} + \frac{s(s-m)^2}{m}\right| \\ &= \frac{1}{2(m+s)^2}\left|-(s-m)^2\left(\frac{m}{s} - \frac{s}{m}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2(m+s)^2}\left|-(s-m)^2\frac{m^2 - s^2}{ms}\right| \\ &= \frac{1}{2(m+s)^2}\left|\frac{(s-m)^3(m+s)}{ms}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{(s-m)^3}{ms(m+s)}\right| \qquad (3) \end{aligned}$$

となる．

次に，これを $t = pq$ を用いて書き直すため，

$$\begin{aligned}\alpha &= m + s \\ \beta &= s - m\,(>0)\end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}sm &= \frac{1}{4}\left[(m+s)^2 - (s-m)^2\right] \\ &= \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\end{aligned}$$

だから，eq. (3) に代入して

$$\begin{aligned}f &= \frac{1}{2}\left|\frac{\beta^3}{\frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2)\alpha}\right| \\ &= 2\left|\frac{\beta^3}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\right| \qquad (4)\end{aligned}$$

を得る．一方で，t を α, β で表すと

$$\begin{aligned}t &= pq \\ &= -4\frac{ms}{(m+s)^2} \\ &= -4\frac{\frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2} \\ &= -\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2} \\ &= -1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \qquad (5)\end{aligned}$$

$a = \alpha/\beta$ と置いて eqs. (4) and (5) に代入して f と t を表すと

$$\begin{aligned}f &= 2\left|\frac{1}{a(a^2-1)}\right| \\ t &= -1 + \frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

である．第二式から $|a| = \sqrt{\frac{1}{t+1}}$ だから，第一式に代入して

$$f = 2\left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t+1}}\left(\frac{1}{t+1} - 1\right)}\right| \qquad (6)$$

$$= 2\frac{\sqrt{t+1}(t+1)}{t} \quad (\because t > 0) \qquad (7)$$

を得る．これが三角形 PAB の面積を $t = pq$ で表したものである．$\cdots$(答)

次に，この三角形の面積の最小値を求める．点 P が第一章限にあることから $t > 0$ での eq. (7) の最小値を求めれば良い．新しく

$$x = t^{1/3} \quad (x > 0)$$

と置いて式を整理すると

$$\begin{aligned}f &= 2\sqrt{\frac{(t+1)^3}{t^2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{(x^3+1)^3}{x^6}} \\ &= 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^3} \\ &= 2\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2} \\ &\geq 2\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right)^{3/2} \\ &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

である．ただし下から 2 行目の不等式は相加相乗平均の不等式による．等号成立は

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} &= \frac{1}{x^2} \\ x &= \sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

の時，すなわち

$$t = 2$$

の時である．これは $t > 0$ を満たしているから，求める面積の最小値は

$$\min f = 3\sqrt{3}$$

である．$\cdots$(答)