a は 0 でない実数とする．関数

$$f(x) = (3x^2 - 4)\left(x - a + \frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ．

[解] まず，

$$t = a - \frac{1}{a}$$

とおく．すると，

$$f'(x) = 9x^2 - 6tx - 4$$

である．$f'(0) < 0$ および 2 次係数正から，$f'(x) = 0$ は 2 異実解 α，$\beta(\alpha < \beta)$ を持ち，下表を得る．

x		α		β	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

従って，極大値と極小値の差 L として，

$$\begin{aligned} L =& f(\alpha) - f(\beta) \\ =& \int_{\beta}^{\alpha} f'(x)\,dx \\ =& \int_{\alpha}^{\beta} 9(x-\alpha)(\beta - x)\,dx \\ =& \frac{3}{2}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

である．故に $\beta - \alpha (> 0)$ の最小値を求めればよい．

ここで，α，β は $f'(x) = 0$ の 2 解であるから，

$$\beta - \alpha = \frac{2\sqrt{9t^2 + 36}}{9} = \frac{2\sqrt{t^2 + 4}}{3}$$

である．従って t^2 が最小の時 L は最小である．

$$t = 0 \Longleftrightarrow a = \pm 1$$

であるから，t^2 の最小値は 0 で，この時の値 $a = \pm 1$ が求める答えである．$\cdots$(答)