自然数 $n=1,2,3,\cdots\cdots$ に対して，$(2-\sqrt{3})^n$ という形の数を考える．これらの数はいずれも，それぞれ適当な自然数 m が存在して $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ という表示をもつことを示せ．

[解]

$a_n=(2-\sqrt{3})^n$ とおく。二項係数が整数であるから，A_n, B_n を自然数として

$$\begin{aligned}a_n =&(2-\sqrt{3})^n\\ =&(2^n+{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2^{n-2}\cdot 3+\dots)\\ &-\sqrt{3}({}_n\mathrm{C}_1\cdot 2^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_3\cdot 2^{n-3}\cdot 3+\dots)\\ =&A_n-\sqrt{3}B_n\end{aligned}$$

と表せる．A_n および B_n のみたす漸化式を求めるため，$a_{n+1}=(2-\sqrt{3})a_n$ を A および B で表すと

$$\begin{aligned}A_{n+1}-\sqrt{3}B_{n+1}&=(2-\sqrt{3})(A_n-\sqrt{3}B_n)\\ &=2A_n+3B_n-\sqrt{3}(A_n+2B_n)\\ &\therefore\begin{cases}A_{n+1}=2A_n+3B_n\\ B_{n+1}=A_n+2B_n\end{cases}\quad ①\end{aligned}$$

となる．初期条件は $n=1$ のとき

$$A_1=2 \qquad B_1=1 \tag{1}$$

となる．

以下, 条件式

$$A_n^2=3B_n^2+1 \tag{2}$$

が任意の $n\in\mathbb{N}$ で成り立つことを数学的帰納法で示す．この命題が示されれば $m=A_n^2$ とおくことで $a_n=\sqrt{m}+\sqrt{m-1}$ と表すことができる．

$n=1$ の時の成立は eq. (1) より明らかだから, $n=k\in\mathbb{N}$ での eq. (2) の成立を仮定し, $n=k+1$ での成立を示す。漸化式**??**より

$$\begin{aligned}A_{k+1}^2&=(2A_k+3B_k)^2\\ &=4A_k^2+9B_k^2+12A_kB_k\\ &=4(3B_k^2+1)+9B_k^2+12A_kB_k\quad(\because 仮定)\\ &=21B_k^2+4+12A_kB_k\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}3B_{k+1}^2+1&=3(A_k+2B_k)^2+1\\ &=3(A_k^2+4A_kB_k+4B_k^2)+1\\ &=3A_k^2+12A_kB_k+12B_k^2+1\\ &=3(3B_k^2+1)+12A_kB_k+12B_k^2+1\quad(\because 仮定)\\ &=21B_k^2+4+12A_kB_k\end{aligned}$$

だから，$A_{k+1}^2=3B_{k+1}^2+1$ が成り立つ．よって $n=k+1$ でも eq. (2) は成立．

以上から eq. (2) は示された．したがって $m=A_n^2$ とおくと $3B_n^2=m-1$ となり，

$$\begin{aligned}a_n&=A_n-\sqrt{3}B_n\\ &=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\end{aligned}$$

を得る．以上で題意は示された．$\cdots$(答)

[解説]

いわゆる二次体の問題である．二次体とは，平方数でない整数 d を用いて

$$q=A+B\sqrt{d}$$

と表されるような数の集合である．ここで $A,B\in\mathbb{Q}$ である．

a_n とペアとなる $(2-\sqrt{3})^n$ を同時に考えることでもっと綺麗に解けるので別解として示す．

$$b_n=(2+\sqrt{3})^n$$

と定義すると，a_n と同様に

$$b_n=A_n+\sqrt{3}B_n$$

とかける．a_n と b_n の積を計算すると

$$\begin{aligned}a_nb_n&=(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n\\ &=(4-3)^n\\ &=1\end{aligned}$$

である．一方この積は A_n と B_n を使うと

$$\begin{aligned}a_nb_n&=(A_n+\sqrt{3}B_n)(A_n-\sqrt{3}B_n)\\ &=A_n^2-3B_n2\end{aligned}$$

と書ける．従って

$$A_n^2=3B_n^2+1$$

をえる．これは eq. (2) であり，以下容易に題意が示される．