

二つの一次式 $3ax + 2$, $2x + b$ に対して, $\int_0^1 (3ax + 2)(2x + b)dx = 0$ が成り立つ時, $a + b$ はどのような範囲にあるか.

[解] 題意の積分 S として

$$\begin{aligned} S &= \left[2ax^3 + \frac{4 + 3ab}{2}x^2 + 2bx \right]_0^1 \\ &= 2(a + b) + \frac{3}{2}ab + 2 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

が成り立つ. そこで $p = a + b$, $q = ab$ において, a, b の存在条件を調べる. まず (1) から

$$q = -\frac{4}{3}(1 + p) \quad (2)$$

となる. さて, a, b は x の 2 次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の 2 実解であるからこの判別式 D として,

$$\begin{aligned} D \geq 0 &\iff p^2 - 4q \geq 0 \\ &\iff p^2 + \frac{16}{3}(1 + p) \geq 0 \iff p \leq -4, \frac{4}{3} \leq p \end{aligned}$$

となる. 故に求める範囲は

$$a + b \leq -4, \frac{4}{3} \leq a + b \quad (\text{答})$$

である.