京大理科数学 1976

第 1 問

[解] (1) $f'(x) = nx^{n-1}$ と $f(x)$ が偶関数あるいは奇関数なこと

より．$|f(x)| < \frac{1}{1000}$ $\left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$ をみたすには

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{1000}$$

であれば良い．代入して

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{1000} \quad \cdots ①$$

ここで．$2^{10} = 1024 > 1000$ から．$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} < \frac{1}{1000}$．同様に $\left(\frac{1}{2}\right)^9 > \frac{1}{1000}$

だから ① をみたす n は $n \geq 10$ である $\left(\because y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ は $0 < x$ で 単調減少$\right)$

(2) (1) で $x = \frac{X}{2}$ とおきかえると．$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n X^n$ $(n \geq 10)$ は

$-1 \leq X \leq 1$ で $|f(x)| < \frac{1}{1000}$ をみたす．そこで $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n$ と

おき．$10 \geq n \in \mathbb{N}$ のうちで $10^4 < g(3) < 10^5$ であるようなnをさがす．—②

ここで．

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{11} \leq 10^2 \quad (\because 3^5 = 243.\ 2^5 \cdot 10 = 320)$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \geq 10 \quad (\because 3^6 - 2^6 \cdot 10 = 829 - 640 > 0)$$

の両辺 $\log_{10}$ をとって．

$$b < \frac{1}{6} < \log_{10}\frac{3}{2} < \frac{1}{5} < x \quad \cdots ③$$

さらに．② の両辺 $\log_{10}$ をとって

$$4 < n\log_{10}\frac{3}{2} < 5 \quad \cdots ④$$

$\log_{10}\frac{3}{2} > 0$ から．

$$\frac{4}{\log\frac{3}{2}} < n < \frac{5}{\log\frac{3}{2}} \quad \cdots ⑤$$

⑤をみたすようなnは ②をみたし．④から．⑤ をみたすnは

$$24 > \frac{4}{1/6} \leq n \leq \frac{5}{1/5} = 25$$

をみたす．したがって．たとえば $n = 25$ とした $g(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{25}$ は

解の1つ ($\because 25 > 10$) 圄

[別解]

(1)から $g(x) = f(x - 1/2) = (x - 1/2)^n$ $(n \geq 10)$ とすると前半の条件

第 2 問

[解] (1) S のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 θ とすると $(0 \leq \theta \leq \pi)$. 条件から

$$2\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\cos\theta \in \mathbb{Z}$$

又, $\vec{a}, \vec{b}$ を逆にした

$$2\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cos\theta \in \mathbb{Z}$$

も成り立つ. したがって, 辺々かけあわせて

$$4\cos^2\theta \in \mathbb{Z} \quad \cdots ①$$

$0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ だから ①がみたされるのは

$$4\cos^2\theta = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\theta = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$$

より題意は示された ■

(2) ∘角が 0 の時. $2\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, $2\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \in \mathbb{Z}$ から,

$$2\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = k, \quad 2\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = m \quad (k, m \in \mathbb{N})$$

とおける. 辺々かけあわせて $4 = km$ より $(k, m) = (1, 4)(2, 2)(4, 1)$

だが, このうち $|\vec{a}| : |\vec{b}| = k : 2 = 2 : m$ をみたすのは $k = 1, 2$ の時で

$|\vec{a}| : |\vec{b}| = 1 : 1,\ 1 : 2$ //

∘角が $\pi/6$ の時. 同様に $k, m \in \mathbb{N}$ として

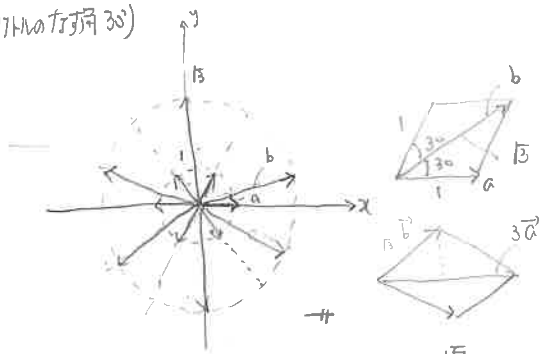
$$\frac{\sqrt{3}|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = k, \quad \frac{\sqrt{3}|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = m$$

辺々かけて $3 = km$ より $(k, m) = (1, 3)(3, 1)$ でこれらは

$|\vec{a}| : |\vec{b}| = k : \sqrt{3} = \sqrt{3} : m$ をみたすから, 2ベクトルの比は $1 : \sqrt{3}$ //

∘角が $\pi/3$ の時. $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \in \mathbb{Z}$ から 2ベクトルの比は $1 : 1$ //

(3) まず. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \sqrt{3}\begin{pmatrix} \cos\pi/6 \\ \sin\pi/6 \end{pmatrix}$ とおける. なす角が 120°, 150° の時の2ベクトルの比は (2) の 60°, 30° の場合に等しく, 90° の時は任意であることから, 下図のようにとれば これらは集合Sになる. (となり同士のベクトルのなす角 30°)



//

これらを $\vec{a}, \vec{b}$ で表すと, a, b から反時計回りに順に

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}, -3\vec{a} + 2\vec{b}, -2\vec{a} + \vec{b}, -3\vec{a} + \vec{b}$,

$-\vec{a}, -\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}$ //

/20

第3問

[解] $f(x)$の最高次をa_nx^n ($a_n\neq0$, $n\in\mathbb{Z}_{\geq0}$)とおくと.

$f(x)\cdot f'(x)$の最高次は$na_n^2\cdot x^{2n-1}$, $\int_1^x f(t)dt$の最高次は$\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

である

<u>1° $n\geq3$の時</u>

$2n-1>n+1$から. 与式左辺の最高次は$na_n^2\cdot x^{2n-1}$だから.

比較して

$$n\cdot a_n^2\cdot x^{2n-1}=\frac{4}{9}x$$

しかしこれをみたす$n\in\mathbb{N}_{\geq3}$は存在せず. 不適.

<u>2° $n\leq1$の時</u>

$2n-1<n+1$から. 1°と同様にして

$$\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=\frac{4}{9}x$$

より. $(a_n, n)=(\frac{4}{9}, 0)$, つまり $f(x)=\frac{4}{9}$が必要. 与式に

代入して

$$(\text{左辺})=\frac{4}{9}(x-1)$$

となり. 十分.

<u>3° $n=2$の時</u>

この時. $na_n^2+\frac{a_n}{n+1}\neq0$の時. 与式左辺の最高次は$x^3$となり

矛盾. 従って $na_n^2+\frac{a_n}{n+1}=0$ が必要で. $n=2$; $a_n\neq0$とあ

わせて$a_n=-\frac{1}{6}$ だから. $f(x)=-\frac{1}{6}x^2+ax+b$とおける. 代入

して

$$\left(-\frac{1}{6}x^2+ax+b\right)\left(-\frac{1}{3}x+a\right)+\frac{1}{18}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx+\frac{1}{18}-\frac{a}{2}-b$$

$$=\frac{4}{9}(x-1)$$

$$\left(a^2+\frac{2}{3}b\right)x+ab-\frac{1}{2}a-b+\frac{1}{18}=\frac{4}{9}(x-1)$$

係数比較して

$$\begin{cases} a^2+\frac{2}{3}b=\frac{4}{9} & \cdots① \\ (a-1)b-\frac{1}{2}a+\frac{1}{18}=-\frac{4}{9} & \cdots② \end{cases}$$

①を②に代入し整理して $(a-1)\left(\frac{1}{3}-a^2\right)=0$ だから.

$(a, b)=\left(1, -\frac{5}{6}\right)\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{6}\right)$ だから.

$$f(x)=-\frac{1}{6}x^2+x-\frac{5}{6},\ -\frac{1}{6}x^2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{6}$$

以上から

$$f(x)=\frac{4}{9},\ -\frac{1}{6}x^2+x-\frac{5}{6},\ -\frac{1}{6}x^2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{6}\ /\!/$$

/20

第４問

[解] $\begin{cases} a_n > 0 \\ a_n^3 + 3a_n^2 - \left(9 + \frac{1}{n}\right)a_n + 5 < 0 \end{cases}$ …①

①を変形して

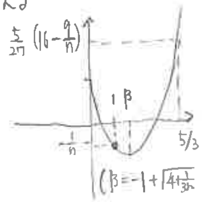
$$(a_n - 1)^2 < \frac{1}{n}\,\frac{a_n}{a_n+5} \quad (\because a_n > 0) \quad \cdots ②$$

又、$f_n(x) = x^3 + 3x^2 - \left(9 + \frac{1}{n}\right)x + 5$ とおくと

$$f_n'(x) = 3x^2 + 6x - \left(9 + \frac{1}{n}\right)$$

より、$f_n'(x) = 0$ の2解 α, β $(\alpha < \beta)$ として下表を える

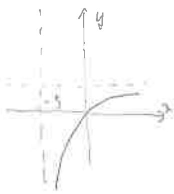
x		α		β	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗		↘		↗



従ってグラフは右上図のようになる。から、$\beta < x$ では x は単調増加

$0 < x < \beta$ では x は単調減少 である。よって明らかに $0 < a_n < \frac{5}{3}$。

$y = \frac{x}{x+5}$ のグラフを考えて この時



$$0 < \frac{1}{n}\,\frac{a_n}{a_n+5} < \frac{1}{n}\,\frac{1}{4}$$

だから②より

$$(a_n - 1)^2 < \frac{1}{4n}$$

//

従ってはさみうちの定理から

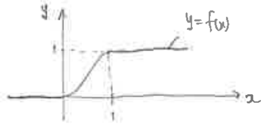
$$a_n \to 1 \quad (n \to \infty)$$

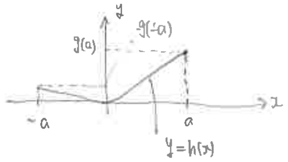
//

/20

第 5 問

[解] $\begin{cases} (イ)\ f'(x)\text{が存在} \\ (ロ)\ x\leq 0\text{の時}f(x)=0,\ 1\leq x\text{の時}f(x)=1 \end{cases}$





(i) $h(x)=\begin{cases} g(x)f\left(\frac{x}{a}\right) & (0\leq x) \\ g(x)f\left(-\frac{x}{a}\right) & (x\leq 0) \end{cases}$ が(ハ),(ニ)をみたすことを示す。まず,(ロ)から,

$h(0)=0$となって(ハ)をみたす。次に、(ニ)について.

$a<x$の時 $f\left(\frac{x}{a}\right)=1$から $h(x)=g(x)$

$x<-a$の時 $f\left(-\frac{x}{a}\right)=1$から $h(x)=g(x)$

となって(ニ)もみたす。又,g,f共に微分可能だから,$h(x)$も$x\neq 0$では微分可能である。ここで,(イ)から,$f'(0)=0$だから

$$\lim_{x\to+0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\left(g(x)f\left(\frac{x}{a}\right)\right)'\Big|_{x=0}=\left(g'(x)f\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{a}g(x)f'\left(\frac{x}{a}\right)\right)\Big|_{x=0}=0$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\left(g(x)f\left(-\frac{x}{a}\right)\right)'\Big|_{x=0}=\left(g'(x)f\left(-\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{a}g(x)f'\left(\frac{x}{a}\right)\right)\Big|_{x=0}=0$$

となって左右極限が一致し,$x=0$でも$h(x)$は微分可能。以上からこの$h(x)$は題意をみたす。■

$$h(x)=\begin{cases} g(x)f\left(\frac{x}{a}\right) & (0\leq x) \\ g(x)f\left(-\frac{x}{a}\right) & (x\leq 0) \end{cases}$$ //

(ii) $f(x)=\begin{cases} 0 & (x\leq 0) \\ 2x^2 & (0\leq x\leq \frac{1}{2}) \\ -2(x-1)^2+1 & (\frac{1}{2}\leq x\leq 1) \\ 1 & (1\leq x) \end{cases}$ が(イ)(ロ)をみたすことをしめす。この関数は全区間で連続である。又,$x\neq 0,\frac{1}{2},1$ではビブンカノウ。

まず,$g(x)=2x^2$, $h(x)=-2(x-1)^2+1$ とおく。$g'(x)=4x$, $h'(x)=-4(x-1)$であり、

$$\begin{cases} \lim_{x\to+0} f(x)=g'(0)=0=\lim_{x\to-0} f(x) \\ \lim_{x\to\frac{1}{2}+0} f(x)=h'\left(\frac{1}{2}\right)=2=g'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}-0} f(x) \\ \lim_{x\to1-0} f(x)=h'(1)=0=\lim_{x\to1+0} f(x) \end{cases}$$

から,$f(x)$は$x=0,\frac{1}{2},1$でも微分カノウ。以上から示された■

/20

第 6 問

[解] $\begin{cases} U_1 \cdots 4n\text{コの赤と}\ n\text{コの白} \\ U_2 \cdots 2n\text{コの赤と}\ 3n\text{コの白} \end{cases}$

誤った判断を下すのは「U_1が手渡されてU_2と判断する…A」か「U_2が手渡されてU_1と判断する…B」のいずれか.

1° Aの時

U_1から(赤,白)=(1,2)(0,3)をとり出した時で,確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{{}_{4n}C_1\cdot{}_{n}C_2+{}_{n}C_3}{{}_{5n}C_3}$$

(全ての玉を区別し,そのうちから3つをとり出す${}_{5n}C_3$通りが同様に確か)

2° Bの時

U_2から(赤,白)=(3,0)(2,1)をとり出した時で,確率は

$$\frac{1}{3}\times\frac{{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_2\cdot{}_{3n}C_1}{{}_{5n}C_3}$$

以上から

$$P_n=\frac{1}{3\,{}_{5n}C_3}\left[2\,{}_{4n}C_1\cdot{}_{n}C_2+{}_{n}C_3+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_2\cdot{}_{3n}C_1\right]$$

$$=\frac{6}{15n(5n-1)(5n-2)}\cdot\frac{1}{6}\left[24n^2(n-1)+n(n-1)(n-2)+2n(2n-1)(2n-2)+18n^2(2n-1)\right]$$

$$=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{(5-\frac{1}{n})(5-\frac{2}{n})}\left[24(1-\tfrac{1}{n})+(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})+2(2-\tfrac{1}{n})(2-\tfrac{2}{n})+18(2-\tfrac{1}{n})\right]$$

$$\to\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{25}\left[24+8+36\right]=\frac{68}{375}\quad(n\to\infty)$$

/20