座標の定められた空間において，直線 l は 2 点 $(1,1,0)$，$(2,1,1)$ を通り，直線 m は 2 点 $(1,1,1)$，$(1,3,2)$ を通る．

(1) l を含み m に平行な平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ の形に表せ．

(2) 点 $(2,0,1)$ を通り l，m の両方と交わる直線を n とする．l と n の交点及び m と n の交点を求めよ．

[解] l，m の方向ベクトルは各々

$$\vec{l}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\vec{m}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

である．また n の方向ベクトル $\vec{n}$ とする．簡単のため

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

とおくと，l，m，n の方程式は

$$\begin{aligned}l&:\overrightarrow{OX}=\vec{p}+t\vec{l}\\ m&:\overrightarrow{OX}=\vec{q}+t\vec{m}\\ n&:\overrightarrow{OX}=\vec{r}+t\vec{n}\end{aligned}$$

である．

(1) 題意の平面 π は $(1,1,0)$ を通り $\vec{l}$，$\vec{m}$ と平行である．この 2 ベクトルに直交するベクトルに $(-2,-1,2)$ があるから，求める方程式は

$$\begin{aligned}&-2(x-1)-1(y-1)+2z=0\\ \therefore\ &-2x-y+2z+4=0\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

(2) 題意から $k=1,2$ に対し実数 t_k，s_k があって

$$\begin{cases}\vec{r}+t_1\vec{n}=\vec{p}+s_1\vec{l}\\ \vec{r}+t_2\vec{n}=\vec{q}+s_2\vec{m}\end{cases}$$

となる．このような実数 t_k，s_k の存在条件を考えればよい．そこで $\vec{n}=(x,y,z)$ とする．まず t_1，s_1 について

$$\begin{cases}2+xt_1=1+s_1 & \text{(1a)}\\ yt_1=1 & \text{(1b)}\\ 1+zt_1=s_1 & \text{(1c)}\end{cases}$$

(1a)，(1c) から s_1 を消して

$$(x-z)t_1=0$$

である．(1b) から $t_0\neq 0$ だから

$$x=z \tag{2}$$

が従う．逆にこの時実数 t_1，s_1 は存在．

次に t_2，s_2 について

$$\begin{cases}2+xt_2=1 & \text{(3a)}\\ yt_2=1+2s_2 & \text{(3b)}\\ 1+zt_2=1+s_2 & \text{(3c)}\end{cases}$$

である．(3b)，(3c) から s_2 を消去して

$$t_2(y-2z)=1$$

これと，(3a) において $x\neq 0$ に注意して t_2 を消去すれば

$$2z-y=x \tag{4}$$

逆にこの時 t_2，s_2 は存在する．

(2) 及び (4) から，$(x,y,z)=(x,x,x)$ であるから $\vec{n}=(1,1,1)$ としてよい．この時 (1b)，(3a) から $(t_1,t_2)=(1,-1)$ であるから，求める交点の座標は

$$\begin{cases}l \text{ と } n \text{ の交点 } (3,1,2)\\ m \text{ と } n \text{ の交点 } (1,-1,0)\end{cases}$$

である．$\cdots$(答)

[(2) **別解**]

実数 s，t を用いて，n 上の 3 点は

$$A(1+s,1,s), B(1,1+2t,1+t), C(2,0,1)$$

と表せる．ここで A は l と n の，B は m と n の，それぞれ交点である．$\overrightarrow{CA} \parallel \overrightarrow{CB}$ から $(s,t)=(2,-1)$ だから $A(3,1,2)$，$B(1,-1,0)$ である．$\cdots$ (答)