東大理科数学　1967

		思	計	総
1	不等式	A	A	A
2	空間	B	B	B
3	多変数	B	B	B
4	関数	B	B	B
5	多変数	A	A	A
6	場合の数	A	A	A

第 1 問

[解] $x=0$ なら題意の成立は明らかなので、以下 $x>0$ とする。$a>0$ とあわせて、

AM-GM より、

$$ax^{n+1}+\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=a\cdot x^{n+1}+n\frac{1}{n\sqrt[n]{a}}\geqq(n+1)\sqrt[n+1]{ax^{n+1}\cdot\frac{1}{n^n}\frac{1}{a}}$$

$$=\frac{n+1}{n^{\frac{n}{n+1}}}x>x\quad\left(\because\ \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n+1}}}>1\right)$$ 図

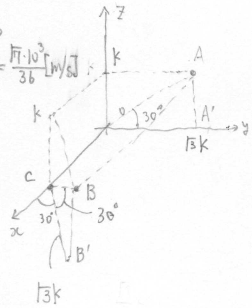
となる。

第 2 問

［解］題意の"ある時刻"に自動車が原点にいるとし、自動車はx軸正方向へ動くものとする。又、飛行機は平面$z=k$ [km] (>0)上をとぶとする。

$$\begin{cases} A \cdots \text{"ある時刻"における飛行機の座標。}yz\text{平面上にとる。} \\ B \cdots 36\,[\mathrm{s}]\text{後の} \quad 〃 \\ C \cdots \quad 〃 \quad \text{自動車の座標} \end{cases}$$

とする。又、点Xに対し、Xのxy平面への正射影をX'で表す。



まず、$\angle AOA' = 30°$から、$A(0, \sqrt{3}k, k)$である。

時速100 [km] $= \frac{10^3}{36}$ [m/s]、$\sqrt{7} \times 100$ [km/h] $= \frac{\sqrt{7}\cdot 10^3}{36}$ [m/s]

だから、$C(1, 0, 0)$となる。題意から、

$$B\left(1+\frac{3}{2}k, \frac{\sqrt{3}}{2}k, k\right)$$

である。したがって

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1+\frac{3}{2}k \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}k \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7}$ [km] だから、2乗してセイリして、

$$7 = \left(1+\frac{3}{2}k\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)^2$$

$$= 3k^2 + 3k + 1$$

$$\therefore k = 1 \quad (>0) \quad [\mathrm{km}]$$

したがって、もとめる高度は $k = 1000$ [m] // である。

第 3 問

[解] $C=\cos\theta,\ S=\sin\theta$とする。Aの周及び内部は、Aの中心$(C,S)$として、

$$\begin{cases} C-1 \leq x \leq C+1 \\ S-1 \leq y \leq S+1 \end{cases} \quad \cdots ①$$

で表される。一方、Bの周及び内部は、

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad \cdots ②$$

で表される。これらが共通部を持つ条件は$S \geq 0$ …③で、この時、共通部は

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq C+1 \\ 1 \leq y \leq S+1 \end{cases}$$

で表される。したがって、この面積$T(\theta)$として、

$$T(\theta) = S(C+1).$$

である。③及びC, Sの周期性から、$0 \leq \theta \leq \pi$で考えて良い。この時、

$$T'(\theta) = (2C-1)(C+1)$$

から下表を得る。

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		π
T'		$+$	0	$-$	0
T		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって、$\max T(\theta) = T\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ である。

第 4 問

[解] $C: x^2 - xy + y^2 = 3$ とする。C 上の点 (x, y) を原点中心に $-\frac{\pi}{4}$ 回転した点 (X, Y) とすると、

$$x + yi = (X + Yi)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)(X + Yi)$$

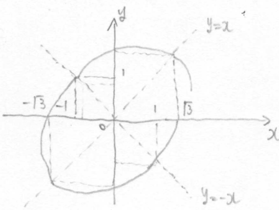
$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y),\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - X)$$

だから、C に代入して、

$$\frac{1}{2}(X+Y)^2 + \frac{1}{2}(-X+Y)^2 - \frac{1}{2}(X+Y)(Y-X) = 3$$

$$\therefore \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{6} = 1$$

だから、C は、楕円 $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}y^2 = 1$ を原点中心に $-\pi/4$ 回転した図形で、右下図のようになる。

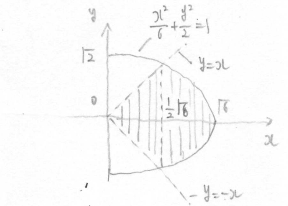


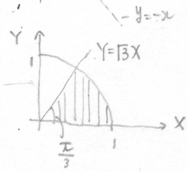
ここで、右下図の斜線部の面積をもとめれば良いので、この面積 T として、$(X, Y) = \left(\frac{x}{\sqrt{6}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$ なる変換をすると、

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot T = 2\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 1^2\right]$$

$$\therefore T = 2\sqrt{3}\,\frac{\pi}{3}$$

が得られる。





第 5 問

[解] $x=t\ (>0)$ で両者が接する時. $(\log x)'=\frac{1}{x}$, $(ax^2)'=2ax$ より.

$$\begin{cases} at^2=\log t & \cdots ① \\ 2at=\frac{1}{t} & \cdots ② \end{cases}$$

第2式より $at^2=\frac{1}{2}$ だから. ①に代入して

$$\log t=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ t=e^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots ③$$

②に代入して

$$a=\frac{1}{2t^2}=\frac{1}{2e} \qquad \cdots ④$$

となる。このとき. もとめる面積 S として

$$S=\int_0^t ax^2dx-\int_1^t \log x\,dx$$
$$=\frac{a}{3}t^3-\Big[x(\log x-1)\Big]_1^t$$
$$=\frac{a}{3}t^3-t(\log t-1)+1(-1)$$
$$=\frac{1}{6e}e\cdot e^{\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)-1 \qquad (\because ③,④)$$
$$=\frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}}-1$$

第 6 問

[解] 全てのとり出し方は ${}_9P_9$ 通りで同様にたしからしい。

一致する5枚のえらび方は ${}_9C_5$ 通りで. たとえばこれが5〜9だとすると、残りの4枚のならべ方は以下の通り) (以下は左端が2の時。3,4の時も同じく3通りずつある)

1	2	3	4
2	1	4	3
2	3	4	1
2	4	1	3

したがって. このような並べ方は

$${}_9C_5 \cdot 3 \times 3 = 9 \cdot {}_9C_4 \text{ 通り}$$

である。したがって. もとめる確率は

$$\frac{9 \cdot {}_9C_4}{{}_9P_9} = \frac{1}{\cancel{8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{\cancel{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{320}$$
//