サイコロが 1 の目を上面にしておいてある．向かい合った一組の面の中心を通る直線のまわりに 90° 回転する操作を繰り返すことにより，サイコロの置き方を変えていく．ただし，各回ごとに，回転軸及び回転する向きの選び方は，それぞれ同様に確からしいとする．

第 n 回目の操作のあとに 1 の目が上面にある確率を p_n，側面のどこかにある確率を q_n，底面にある確率を r_n とする．

(1) p_1，q_1，r_1 を求めよ．

(2) p_n，q_n，r_n を p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} で表せ．

(3) $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$，$q = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$，$r = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$ を求めよ．

[解] 軸の選び方が 3 通り，各々について 2 通り回転の選び方があるので，あわせて 6 通りの回転が同様に確からしい．まず,

$$p_1 = \frac{1}{3} \quad q_1 = \frac{2}{3} \quad r_1 = 0$$

である．$\cdots$(答)

次いで，漸化式は

$$\begin{cases} p_n = \dfrac{1}{3}p_{n-1} + \dfrac{1}{6}q_{n-1} \\ q_n = 2(p_{n-1} + q_{n-1} + r_{n-1})/3 = 2/3 \\ r_n = \dfrac{1}{6}q_{n-1} + \dfrac{1}{3}r_{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p_n = \dfrac{1}{3}p_{n-1} + \dfrac{1}{9} \\ q_n = 2/3 \\ r_n = \dfrac{1}{6}q_{n-1} + \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

である．$\cdots$(答)

変形して

$$\begin{cases} p_{n+1} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}\left(p_n - \dfrac{1}{6}\right) \\ r_{n+1} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}\left(r_n - \dfrac{1}{6}\right) \end{cases}$$

だから，繰り返し用いて，(1) と合わせて

$$\begin{cases} p_n = \dfrac{1}{6}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6} \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{6}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

である．また，$r = 2/3$ は明白である．$\cdots$(答)