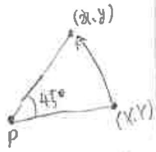
京大理科数学 2001

[解] $P(t, t^3)$ $(t\in\mathbb{R})$ とおく。Pにおける接線 l として

$$l: y-t^3=3t^2(x-t)$$

である。l 上の点 (X, Y) が L 上の点 (x, y) にうつったとすると、



$$\{(X-t)+i(Y-t^3)\}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\{(x-t)+i(y-t^3)\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\{(x-t)+(y-t^3)\}+i\{(y-t^3)-(x-t)\}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[(x+y-t-t^3)+i(-x+y+t-t^3)\right]$$

から

$$X-t=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-t-t^3),\ Y-t^3=(-x+y+t-t^3)\frac{\sqrt{2}}{2}\quad (x, y, X, Y, t\in\mathbb{R})$$

だから

$$L: (-x+y+t-t^3)=3t^2(x+y-t-t^3) \quad \cdots ①$$

これが $y=x^3$ と3異交点を持つ時、①に $y=x^3$ を代入した

$$(-x+x^3+t-t^3)=3t^2(x+x^3-t-t^3)$$

$$(x-t)\{\underline{3t^2(x^2+tx+t^2+1)-(x^2+tx+t^2-1)}\}=0 \quad \cdots ②$$

が x について3異実解を持つ。したがって〜部 $f(x)$ として、$f(x)=0$ が $x\neq t$ に2異実解を持てば良い。

$$f(x)=(3t^2-1)x^2+(3t^3-t)x+(3t^4+2t^2+1)$$

だから条件は、$f(x)=0$ の判別式 D として

$$\begin{cases} f(t)\neq 0,\ 3t^2-1\neq 0 \\ D>0 \end{cases} \quad \cdots *$$

である。

∘ $f(t)=9t^4+1\neq 0$ $(\because t\in\mathbb{R})$

∘ $D=t^2(3t^2-1)^2-4(3t^2-1)(3t^4+2t^2+1)$

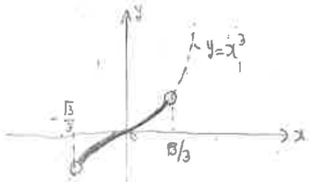
$$=(3t^2-1)\left[p(3p-1)-4(3p^2+2p+1)\right] \quad (p=t^2)$$

$$=-(3p-1)(3p+2)^2$$

だから*に代入して、$3p+2>0$ とあわせて

$$* \Leftrightarrow 3t^2<1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}<t<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

だからPのハンイは下図太線部



第 2 問

[解] $f(x)=x^5+x^4-x^3+x^2-(a+1)x+a$ とおく。$f(x)=0$ が $x=pi$ $(p\in\mathbb{R})$ を解に持つ時,

$$f(pi)=p^5 i+p^4+p^3 i-p^2-(a+1)pi+a$$
$$=(p^5+p^3-(a+1)p)i+(p^4-p^2+a)=0$$

$$\therefore\ p\{p^4+p^2-(a+1)\}=0 \wedge a=p^2-p^4 \quad \cdots ①$$

$(\because p, a\in\mathbb{R})$

だから、a を消して

$$p\{p^4+p^2-(p^2-p^4)-1\}=0$$
$$p(2p^4-1)=0$$
$$p=0, \pm\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

①に代入して

$$a=0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2} \quad /\!/$$

第 3 問

[解] $a_{n+k} = i^{f(n+k)} = i^{\frac{(n+k)(n+k-1)}{2}}$，$a_n = i^{\frac{n(n-1)}{2}}$ だから

$$a_{n+k} = a_n$$

$$i^{\frac{(n+k)(n+k-1)-n(n-1)}{2}} = 1$$

したがって任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し，$g(n) = [(n+k)(n+k-1) - n(n-1)]$ が8の倍数ならよい。

$$g(n) = 2kn + k^2 - k$$

まず $n=0, 1$ での成立が必要で，以下合同式の法を8として

$$g(0) = k(k-1) \equiv 0$$

$$g(1) = k(k+1) \equiv 0$$

kと$k-1$，kと$k+1$は互いに素で，この中に8の倍数は多くとも1つしかないから，

$k \equiv 0$ が必要。逆にこの時 $g(n) \equiv 0$ で十分。以上から

$$k = 8m \ (m \in \mathbb{Z}) \quad //$$

第 4 問

[解] 題意の正八面体の一頂点とする。P_1を始点とするベクトル$\vec{v}$の終点をVとする。

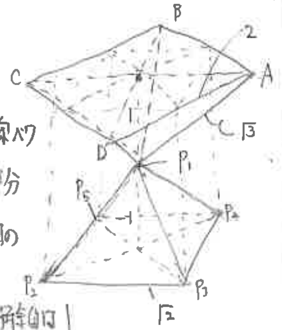
任意のm ($m=2,\cdots,5$)に対し

$$\overrightarrow{P_1P_m}\cdot\vec{v}\leqq 0$$

をみたすVの存在範囲は、右図で$\overrightarrow{P_1P_m}$を法線ベクトルとする($m=2,3,4,5$) 4平面で囲まれた部分

(αとおく)である。ところで、この4平面は、右下図のように空間を対称に6等分するので、

(立方体の各面を底面, P_1を頂点とする6つの四角錐は合同)



対称性からVがαにある場合のみをかんがえれば良い。

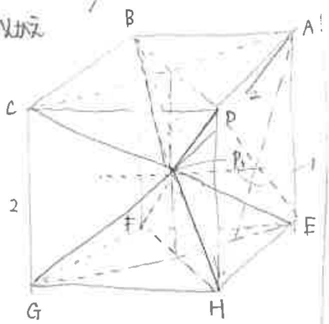
又、題意から

$$\overrightarrow{P_1P_m}\cdot\vec{v}\neq 0$$

である。以上から

$$\overrightarrow{P_1P_m}\cdot\vec{v}<0$$

となり、題意は示された 図



[解2] 正八面体の中心Oとし、$\overrightarrow{OX}=\vec{v}$となる点Xをとる。$P_1,\cdots,P_6$の中で点Xから最も近い点を$P_k$とする。$\overline{P_kX}\leqq\overline{P_mX}$ より

$$|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP_k}|\leqq|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP_m}|$$

各辺0以上だから2乗して、

$$2(\overrightarrow{OP_m}-\overrightarrow{OP_k})\cdot\overrightarrow{OX}\leqq|\overrightarrow{OP_m}|^2-|\overrightarrow{OP_k}|^2=0$$

$$\therefore\ \overrightarrow{P_kP_m}\cdot\vec{v}\leqq 0$$

$\overrightarrow{P_kP_m}\cdot\vec{v}\neq 0$から

$$\overrightarrow{P_kP_m}\cdot\vec{v}<0 \quad 図$$

第5問

[解] (イ)から $|z_k|^p=1$ ∴ $|z_k|=1$ …①. 又 $z_k\neq1$ …②

①②から $e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0<\theta<2\pi)$ とおくと、$z_k=e(\theta_k)$ $(0<\theta_k<2\pi)$ とおける。(イ),(ロ)から

$$\begin{cases} e(p\theta_k)=1 \\ e\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)=1 \end{cases} \quad \cdots ③$$

したがって③をみたす$\{\theta_k\}$の個数がa_nである。③の第一式から適当な自然数m_kを用いて

$$\theta_k=\frac{2\pi}{p}m_k \quad (m_k=1,2,\cdots,p-1) \quad \cdots ④$$

とおける。したがって$\{\theta_k\}$の個数は$\{m_k\}$の数にほかならない。③の第2式に④を代入してせいりして

$$\sum_{k=1}^{n}m_k\equiv0 \pmod p \quad \cdots ⑤$$

又、題意のnを$n\in\mathbb{N}$に拡張してかんがえる。

$$a_1=0,\quad a_2=p-1,\quad a_3=(p-1)(p-2) \quad /\!/ \ (1)$$

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}m_k$とおく。$m_k=1,2,\cdots,p-1$から

$S_n\equiv0 \pmod p$の時、$S_{n+1}\not\equiv0$
$S_n\not\equiv0 \pmod p$の時、対応するm_{n+1}がただ1つあって、$S_{n+1}\equiv0$となりうる。

S_nの値のとり方は、$(p-1)^n$通りだからしたがって、$S_{n+1}\equiv0$となる場合の数は

$$a_{n+1}=(p-1)^n-a_n \quad /\!/$$

(3) $b_n=\frac{a_n}{(p-1)^n}$とおく。(2)から

$$b_{n+1}=-\frac{1}{p-1}b_n+\frac{1}{p-1}$$

$$b_{n+1}-\frac{1}{p}=-\frac{1}{p-1}\left(b_n-\frac{1}{p}\right)$$

$b_1=0$だから、くり返し用いて

$$b_n=\left(-\frac{1}{p-1}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}$$

$$a_n=\frac{1}{p}\left[(p-1)^n+(-1)^n(p-1)\right] \quad /\!/$$

[解2] (法pとする)

(2) a_{n+2}についてかんがえる。

1° $m_{n+1}+m_{n+2}\equiv0$の時

このような(m_{n+1},m_{n+2})のくみあわせは$1\le m_n\le p-1$から、m_{n+1}を定めればただ1通りに定まり、$p-1$通り。又、$S_{n+2}\equiv0\Leftrightarrow S_n\equiv0$だから、$m_1\sim m_n$の定め方は$a_n$通り、あわせて

$(p-1)a_n$通り

2° $m_{n+1}+m_{n+2}\equiv r$ $(r=1,2,\cdots,p-1)$の時

m_{n+1}のえらび方は$1,2,\cdots,p-1$からrをのぞいた$p-2$通り。

m_{n+2}は、

$m_{n+1}<r$ならば $m_{n+2}=r-m_{n+1}$
$m_{n+1}>r$ならば $m_{n+2}=p+r-m_{n+1}$

と各々1通りに定まる。又、$S_{n+2}\equiv0\Leftrightarrow S_n+r\equiv0$だから、$m_1\sim m_n$の定め方は$a_{n+1}$通り。あわせて

$(p-2)a_{n+1}$

以上で全ての場合がつくされ、1°,2°は排反だから

$$a_{n+2}=(p-2)a_{n+1}+(p-1)a_n \quad /\!/$$

第 6 問

[解] $k\in\mathbb{N}$に対し, $a_k=\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$ とおく。$A_n=\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$ と

おくと,

$$A_n=\sum_{k=1}^{n^2} a_k \quad \cdots ①$$

である。

$$a_{k+1}=\int_{\frac{k}{n}\pi}^{\frac{k+1}{n}\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$$

$$=\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} e^{-t-\frac{\pi}{n}}\left|\sin n\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|dt \quad \left(t=x-\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=e^{-\frac{\pi}{n}}a_k \quad \cdots ②$$

又,

$$a_1=\int_0^{\frac{\pi}{n}} e^{-x}\sin nx\,dx$$

$$=\left[\frac{e^{-x}}{1+n^2}(-\sin nx-n\cos nx)\right]_0^{\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{1}{1+n^2}\left\{e^{-\frac{\pi}{n}}(n)-1(-n)\right\}$$

$$=\frac{n}{1+n^2}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right) \quad \cdots ③$$

だから②をくり返し用いて,

$$a_k=e^{-\frac{(k-1)}{n}\pi}a_1$$

①に代入して

$$A_n=\sum_{k=0}^{n^2-1} a_1\cdot e^{-\frac{\pi}{n}k}$$

$$=a_1\frac{1-e^{-\frac{\pi}{n}\cdot n^2}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}=\frac{n}{1+n^2}\left(1+e^{-\frac{\pi}{n}}\right)\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}$$

$$=\frac{n}{1+n^2}\frac{\frac{\pi}{n}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}\left(\frac{n}{\pi}\right)\left(1+e^{-\frac{\pi}{n}}\right)\left(1-e^{-n\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{1+1/n^2}\frac{\frac{\pi}{n}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}\left(1-e^{-n\pi}\right)\left(\frac{1}{\pi}\right)\left(1+e^{-\frac{\pi}{n}}\right)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 1\cdot1\cdot1\cdot\left(\frac{1}{\pi}\right)\cdot2=\frac{2}{\pi} \quad /\!/$$

[解2] (①まで同じ)

$\left[\frac{k-1}{n}\pi,\frac{k}{n}\pi\right]$において $e^{-\frac{k}{n}\pi}\le e^{-x}\le e^{-\frac{k-1}{n}\pi}$ だから $|\sin nx|\ge0$とあわせて.

$$e^{-\frac{k}{n}\pi}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\,dx\le a_k\le e^{-\frac{k-1}{n}\pi}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\,dx$$

$$\frac{2}{n}e^{-\frac{k}{n}\pi}\le a_k\le\frac{2}{n}e^{-\frac{k-1}{n}\pi}=e^{\frac{\pi}{n}}\left(\frac{2}{n}e^{-\frac{k}{n}\pi}\right) \quad \cdots ②$$

ここで $B_n=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{2}{n}e^{-\frac{k}{n}\pi}$ とすると,

$$B_n=\frac{2}{n}e^{-\frac{\pi}{n}}\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}$$

だから①,②より,

$$B_n\le A_n\le e^{\frac{\pi}{n}}B_n$$

はさみうちから

$$A_n\to B_n$$

で

$$B_n=\frac{\frac{\pi}{n}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}\cdot\frac{2}{\pi}e^{-\frac{\pi}{n}}\left(1-e^{-n\pi}\right)$$

$$\to\frac{2}{\pi}$$

から

$$A_n\to\frac{2}{\pi} \quad /\!/$$