京大 理科数学 1964

150/150分

		計	思	総
[1]	不等式	A	A	A
[2]	整数	B	B	B
[3]	ベクトル ☆	B	B	B
[4]	多変数	B	B	B
[5]	関数	B	B	B
[6]	多変数 A	B	C	B

第 1 問

[解]

(イ) まず2正数 a, b に対し、$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ であることを示す。両辺正から2乗して良く、

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

より示された。$a=a_1+a_2$, $b=a_3+a_4$ として、($\because a_k>0$)

$$\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4) \geq \sqrt{(a_1+a_2)(a_3+a_4)} \quad \cdots ①$$

ここでさらに、

$$\sqrt{(a_1+a_2)(a_3+a_4)} \geq \sqrt{2\sqrt{a_1a_2}\cdot 2\sqrt{a_3a_4}} = 2\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \quad \cdots ②$$

だから ①, ② から

$$\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4) \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \quad \square$$

(ロ) $\dfrac{a_k}{b_k}>0$ だから (イ) で a_k に $\dfrac{a_k}{b_k}$ を代入して、

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{a_k}{b_k} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a_1a_2a_3a_4}{b_1b_2b_3b_4}} = 4 \quad (\because \{a_1,\cdots,a_4\}=\{b_1,b_2,b_3,b_4\})$$

よって示された。$\square$

第 2 問

[解] (i).(ii)から. 3つの組を $f(x).g(x).h(x)$として.

$$f(x)=(x+3)f'(x)$$
$$g(x)=(x+3)g'(x)$$
$$h(x)=(x+3)h'(x)$$

(f', g', h'はいずれも最高次係数1の2次式)

とおける. さて. (iii)の式を$t(x)$とおくと

$$t(x)=(x-1)(x^4+2x^3-39x^2-72x+108)$$
$$=(x-1)^2(x^3+3x^2-36x-108)$$
$$=(x-1)^2(x+3)(x^2-36)$$
$$=(x-1)^2(x+3)(x+6)(x-6)$$

だから. これらの項をf', g', h'に. $(x+3)$以外全てに共通な項がないようにふりわければよい. 簡単のため

$A:x-1$
$B:x+6$
$C:x-6$

とおく. まず. A^2が$t(x)$に含まれることと. f'〜h'が2次式であることから. このうちのいずれかがA^2となるが. 対称性から. $f'=A^2$…①とする. 以下 g', h'を決める. 対称性に注意し, B,Cは多くても1つしかg', h'には入らないことと全てに共通な因数がないこと. との2つも異なることから

$$(g', h')=(BC, AB) \quad (BC, AC)$$

の2つ.

以上から. 求める組は

$$((x+3)(x-1)^2,\ (x+3)(x-1)(x+6),\ (x+3)(x+6)(x-6))$$
$$((x+3)(x-1)^2,\ (x+3)(x-1)(x-6),\ (x+3)(x+6)(x-6))$$

//

[本番のミス]

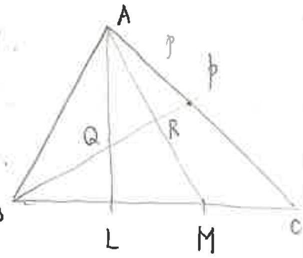
数えあげの手抜

⇒ 必ず条件とてらしあわせてかくにん

/20

第 3 問

[解]



$\overrightarrow{BX}=\vec{x}$ と定めると $\vec{a}$ と $\vec{c}$ は1次独立

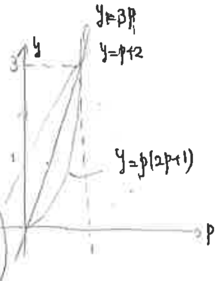
$\vec{q},\vec{r}$ を2通りで表して

$$\begin{cases} \vec{q} = k\left[(1-p)\vec{a}+p\vec{c}\right] = (1-t)\vec{a}+t\frac{1}{3}\vec{c} \\ \vec{r} = k'\left[(1-p)\vec{a}+p\vec{c}\right] = (1-t')\vec{a}+t'\frac{2}{3}\vec{c} \end{cases}$$

これをといて. $k=\frac{1}{2p+1}$, $k'=\frac{2}{p+2}$ だから

$$\overline{BQ}:\overline{QR}:\overline{RP} = \frac{1}{2p+1}:\frac{2}{p+2}-\frac{1}{2p+1}:1-\frac{2}{p+2}$$

$$= p+2 : 3p : p(2p+1)$$



これと右のグラフから $0\leqq p\leqq 1$ のとき

$$p(2p+1)\leqq 3p\leqq p+2$$

$\therefore \overline{RP}\leqq\overline{QR}\leqq\overline{BQ}$ (等号成立は, P=C又は P=A (この時一番右は不成立))

(ロ) 3辺の長さ $a=p+2$, $b=3p$, $c=2p^2+p$ としてよい. (イ)から

$a\geqq b\geqq c\geqq 0$ だから. a, b, c を3辺に持つ三角形の存在条件は

$$a<b+c$$

$$\Leftrightarrow\ p+2<2p^2+4p$$

$$\Leftrightarrow\ (2p-1)(p+2)>0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}<p\leqq 1\quad(\because 0\leqq p\leqq 1)$$

だから. ACの中点Dとして. Pが線分DC上にある時 (Dは含まず)

[本番時のミス]

- 時をベクトルのけたして面倒がってやらなかった.

/20

第 4 問

[解1] $P(a, b)$ とし、2接点 $Q(\alpha, \alpha^2)$ $R(\beta, \beta^2)$ とおく。ただし、$\alpha < \beta$ …① とする。

Q、Rにおける接線は、各々、

$$\begin{cases} y = 2\alpha x - \alpha^2 \\ y = 2\beta x - \beta^2 \end{cases}$$

だから、これらの交点がPであり、

$$a = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad b = \alpha\beta \qquad \cdots ②$$

となる。したがって

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \alpha - a \\ \alpha^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{+\alpha-\beta}{2} \\ \alpha(\alpha-\beta) \end{pmatrix} = (\beta-\alpha)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\alpha \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} \beta - a \\ \beta^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha+\beta}{2} \\ \beta(\beta-\alpha) \end{pmatrix} = (\beta-\alpha)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \beta \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

である。2接線のなす角θとして、$\theta = \pi/3$ or $\frac{2}{3}\pi$ だから、

$$\tan\theta = \pm\tan\pi/3 = \pm\sqrt{3} \qquad \cdots ③$$

となる。一方、

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{|PQ||PR|\sin\theta}{|PQ||PR|\cos\theta} = \frac{2\triangle PQR}{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}} \quad (\because |PQ||PR| \neq 0)$$

だから、(*)から

$$\tan\theta = \frac{\left|-\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right|}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \alpha\cdot\beta} = \frac{-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\frac{1}{4}+\alpha\beta} \quad (\because ①) \qquad \cdots ④$$

となる。②から α, β が x の2次方程式 $x^2 - 2ax + b = 0$ の2実解であることから、

$$\beta - \alpha = 2\sqrt{a^2-b} \qquad (a^2 - b \geq 0)$$

に注意して、③④から、

$$\pm\sqrt{3} = \frac{-\sqrt{a^2-b}}{\frac{1}{4}+b}$$

2乗して良く、

$$3(b+1/4)^2 = a^2 - b$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3\left(b+\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{1}{9} \qquad \cdots ⑥$$

以上から もとめる軌跡は

$$a^2 - b \geq 0 \wedge ⑥$$

だが ⑥の時、$a^2 - b \geq 0$ はみたされるので、もとめるのは

$$x^2 - 3(x+5/12)^2 = 1/9$$

[解2] 2接線の傾き θ_α, θ_β とする。これらの正負で、以下のようになる。
([解1]を流用、$-\frac{\pi}{2} < \theta_\alpha, \theta_\beta < \frac{\pi}{2}$)

いずれの場合にも、これらのなす角 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ は、

$$\theta = \pi - (\theta_\beta - \theta_\alpha), \quad \theta = \theta_\beta - \theta_\alpha$$

で与えられ、いずれの場合も

$$\tan\theta = \pm\tan(\theta_\beta - \theta_\alpha)$$

となる。$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ だから、

$$\pm\sqrt{3} = \pm\tan(\theta_\beta - \theta_\alpha) \qquad \cdots ⑦$$

ここで

$$\tan\theta_\alpha = 2\alpha \quad \tan\theta_\beta = 2\beta$$

より、

$$\tan(\theta_\beta - \theta_\alpha) = \frac{2(\beta-\alpha)}{1+4\alpha\beta}$$

だから、⑦より

$$\pm\sqrt{3} = \pm\frac{2(\beta-\alpha)}{1+4\alpha\beta}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 = \frac{4(\beta-\alpha)^2}{(1+4\alpha\beta)^2} \qquad (⑥に合流)$$

(以下略)

第 5 問

[解] (イ) $f_n(x) = \cos\left(x + \frac{a_{n+1}+a_n}{2}\right)\sin\frac{a_{n+1}-a_n}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[\sin(x+a_{n+1}) - \sin(x+a_n)\right]$

だから $h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ とおくと

$h_n(x) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+a_{n+1}) - \sin(x+a_1)\right]$ …☆

$= \frac{1}{2}\left[\sin x\cos a_{n+1} + \sin a_{n+1}\cos x - \sin(x+a_1)\right]$

だから $h_n(x)$ が $n\to\infty$ で収束する条件は

$\sin a_n$, $\cos a_n$ が収束すること

(ロ) (イ) がみたされる時 $\sin a_n \to \alpha$, $\cos a_n \to \beta$ とおくと $(n\to\infty)$

$F(x) = \frac{1}{2}\left(\beta\sin x + \alpha\cos x - \sin(x+a_1)\right)$

より

$A = \int_0^{\pi/2} F(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\left[\cos(x+a_1)\right]_0^{\pi/2}}_{P} - \underbrace{\left[\alpha\sin x - \beta\cos x\right]_0^{\pi/2}}_{Q}\right]$

である.

一方,

$B = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{\pi/2} f_k(x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[-\cos(x+a_{k+1})\right]_0^{\pi/2} + \left[\cos(x+a_k)\right]_0^{\pi/2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left[\left[\cos(x+a_1)\right]_0^{\pi/2} - \left[\cos(x+a_{n+1})\right]_0^{\pi/2}\right]$

$\longrightarrow \frac{1}{2}\left[P - Q\right]$

だから $A = B$ であり. 2つの値は等しい

[本時のミス]

・三角は. 位相がずれた すれてれば OK!

第 6 問

[解] $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ で考える。以下 $c = \cos t$, $s = \sin t$ とする。

まずAについて、面積が最大になるのは明らかに4頂点が $(\pm t, 0)$ $(\pm t, \cos t)$ で与えられる時で $(0 < t < \pi/2)$ この時

$$A = 2tc \quad (0 < t < \pi/2)$$

である。

$$\frac{dA}{dt} = 2(c - ts) = 2c(1 - t \cdot \tan t)$$

より、下表をうる。(t_0 は $t_0 \tan t_0 = 1$ をみたす)

t	0		t_0		$\pi/2$
A'		$+$	0	$-$	
A		$\nearrow$		$\searrow$	

($\frac{\pi}{4} \cdot \tan\frac{\pi}{4} < 1$ より、 $\frac{\pi}{4} < t_0$ である。) …(*)

したがって

$$A = 2t_0 \cos t_0 = 2\frac{\cos^2 t_0}{\sin t_0} \quad \cdots ①$$

となる。

次にBについて、$c'' = -c \le 0$ $(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2})$ より、$y = c$ のグラフは上に凸なので、Bは、3頂点が $(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$, $(1, 0)$ の時の△の面積で、

$$B = \frac{1}{2}\pi \quad \cdots ②$$

最後にCについて、中心は原点である。半径 r とすると、対称性から、$0 \le t \le \pi/2$ で

$$t^2 + \cos^2 t \ge r^2 \quad \cdots ③$$

となれば良い。この左辺 $f(t)$ とする。

$$f'(t) = 2t - 2c \cdot s = 2t - \sin 2t \ge 0 \quad (\because 0 \le t \text{ で } t \ge \sin t)$$

より、f は単調増加だから、③をみたす max r は、$r = \sqrt{0 + \cos^2 0} = 1$ となり、

$$C = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{1}{2}\pi \quad \cdots ④$$

である。

以下これらの大小を比べる。(*)及び①から A が区間内で単調減少であることから

$$A < 2\frac{\cos^2\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} < \frac{1}{2}\pi \quad (\because 8 < \pi^2 \text{ より } 2\sqrt{2} < \pi)$$

だから②、④とあわせて

$$A < B = C$$

//