京大理科数学 1987

100/120分

		計	思	総	
1	関数	A	A	A	20
2					
3	多変数	C	B	B	20
4	関数	B	B	B	20
5	多変数 *	C	B	B	20
6	確	C	B	B	困

第 1 問

[解] $\begin{cases} f(x) = (ax+b)h(x) + cx + a^2 - a \\ g(x) = (ax-b^2)h(x) + (a-1)x + c^2 \end{cases}$ $(a \neq 0)$

より

$\underline{f(x)\text{ が }h(x)\text{ でわり切れる}}$ —Ⓐ $\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a(a-1) = 0 \end{cases}$

$g(x)$ が 〃 $\Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = 0 \\ c^2 = 0 \end{cases}$

だから、Ⓐの時、$a \neq 0$ から $c = 0 \wedge a = 1$ で、たしかに $g(x)$ は $h(x)$ でわり切れる。一方、Ⓐでないとき つまり $c \neq 0$ or $a \neq 1$ の時、たしかに $g(x)$ も $h(x)$ ではわり切れない

よって示された。□

/20

第 2 問

/20

第 3 問

[解] $c=\cos\theta$ $(-1\le c\le 1)$ とおくと

(与式) ⇔ $a(2c^2-1)+bc-1<0$ …①

①の左辺 $f(c)$ とおき $f(c)<0$ となる条件をしらべる

$f'(c)=2ac+b$ である

1° $a=0$ の時 $f(c)$ は高々一次関数だから

$f(1)<0 \wedge f(-1)<0$

⇔ $-1<b<1$

2° $a>0$ の時

$f'(c)$ の軸 $c=-\frac{b}{4a}$ によらず $f(c)$ は $x=1$ or -1 で最大で

$f(1)<0 \wedge f(-1)<0$ ⇔ $a+b-1<0 \wedge a-b-1<0$

3° $a<0$ の時

㋐ $-1\le -\frac{b}{4a}\le 1$ の時 $f\left(-\frac{b}{4a}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{(a+1/2)^2}{1/4}+\frac{b^2}{2}<1$ ～A

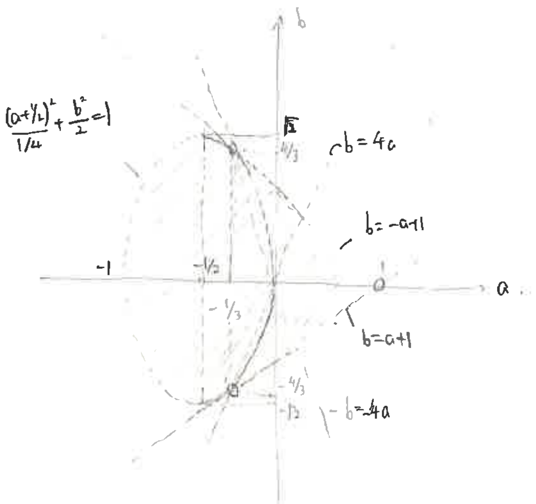
㋑ $-\frac{b}{4a}\le -1$ の時 $f(-1)<0$

㋒ $-\frac{b}{4a}\ge 1$ 〃 $f(1)<0$

以上まとめて

- $a\ge 0 \wedge a-1<b<a+1$
- $4a\le b\le -4a,\ a<0 \wedge \frac{(a+1/2)^2}{1/4}+\frac{b^2}{2}<1$
- $4a\ge b \wedge a<0 \wedge a-1<b$
- $-4a\le b \wedge a<0 \wedge b<-a+1$

これを図示して下図斜線部(境界含まず)



[$4(a+1/2)^2+\frac{b^2}{2}=1$, $b=\pm(a-1)$ を連立すると

$4(a+1/2)^2+\frac{1}{2}(a^2-2a+1)=1$

$9a^2+6a+1=0$ ∴ $a=-\frac{1}{3}$

から接している]

[本時のミス]

- 計ミス
- 軸についての勘違い

/20

第 4 問

[解]

(1) $f'(x)=3x^2+2ax+b$ かつ、3次関数では接点と接線が一対一対応するので、$f'(x)=m$ となる x の数にひとしい。

$f'(x)-m=0$ …① の判別式Dとして

$$\begin{cases} D>0 \Leftrightarrow a^2-3(b-m)>0 & \text{の時 } 2\text{つ} \\ D=0 \Leftrightarrow a^2-3(b-m)=0 & 〃 \quad 1\text{つ} \\ D<0 \Leftrightarrow a^2-3(b-m)<0 & 〃 \quad 0\text{つ} \end{cases}$$

//

(2) P_1, P_2のx座標α, βとおく（$\alpha<\beta$としてよい）と、これは①の2実解であり。$l_1: y=l_1(x)$, $l_2: y=l_2(x)$; Q_1, Q_2のx座標q_1, q_2として

$$f(x)-l_1(x)=(x-\alpha)^2(x-q_1) \quad \cdots ②$$

$$f(x)-l_2(x)=(x-\beta)(x-q_2) \quad \cdots ③$$

$f(x)$は3次、$l_1(x)$, $l_2(x)$は1次だから、2次の係数を比較して

$$a=-2\alpha-q_1=-2\beta-q_2$$

$a=-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$ だから 辺々たして代入

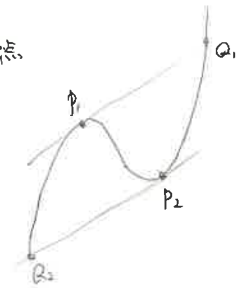
$$-3(\alpha+\beta)=-2(\alpha+\beta)-(q_1+q_2)$$

$$\alpha+\beta=q_1+q_2$$

$$\therefore |\alpha-q_1|=|q_2-\beta|$$

だから、P_1, Q_1のx座標の差とP_2, Q_2のそれがひとしく、さらにP_1Q_1, P_2Q_2の傾きも等しいので、$\overline{P_1Q_1}=\overline{P_2Q_2}$ である □

[解2] [例の対称性を用いる]



$P_1(x_1, f(x_1))$, $P_2(x_2, f(x_2))$ の中点、$M(p, q)$ とすると

$$\begin{cases} p=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ q=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \end{cases}$$

k.k.kから

$$q=\frac{1}{2}(x_1^3+x_2^3)+\frac{a}{2}(x_1^2+x_2^2)+\frac{b}{2}(x_1+x_2)+c$$

$$=\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c$$

$$f(p)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^3+\frac{a}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+c=\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c=q$$

より、Mは曲線上の点。。次にMが原点になるように$y=f(x)$を平行移動すると

$$y=x^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)x$$

これはキカンスウだから原点対称。よってMに関する対称移動によりP_2, Q_2をP_1, Q_1に重ねあわせることができるから

$$\overline{P_1Q_1}=\overline{P_2Q_2}$$ □

/20

第 5 問

[解] (1) $T: ax+y+z+a-2=0$ とする。Tの法線ベクトルの1つに $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がある。題意の点 P とすると、OP⊥T だから、$k\in\mathbb{R}$ として、

$$\overrightarrow{OP}=k\vec{n} \quad \cdots ①$$

とかける。これが T上の点だから、

$$a(ka)+(k)+(k)+a-2=0 \qquad \therefore k=\frac{2-a}{a^2+2}$$

となって ①から

$$P\left(\frac{(2-a)\cdot a}{a^2+2},\ \frac{(2-a)}{a^2+2},\ \frac{2-a}{a^2+2}\right)_{\#}$$

(2) 平面と点のキョリ公式から

$$|OP|=\frac{|a-2|}{\sqrt{a^2+1+1}}=\frac{|a-2|}{\sqrt{a^2+2}} \quad (\equiv f(a)とする)$$

である。まず $\{f(a)\}^2=\frac{(a-2)^2}{a^2+2}$ の値域をもとめる。

$$(\{f(a)\}^2)'=\frac{2(a-2)(a^2+2)-2a(a-2)^2}{(a^2+2)^2}=\frac{2(a-2)(2a+2)}{(a^2+2)^2}$$

から下表をうる。

a		-1		2		$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	
f^2	↗	3	↘	0	↗	1

したがって、$0\leq f(a)$ とあわせて、$\max f(a)=\sqrt{3}$ である。"$V(a)$ が min" ⇔ "$f(a)$ が max" だから、

$a=-1_{\#}$ の時、

$$\min V(a)=\pi\int_{\sqrt{3}}^{3}(9-x^2)\,dx=\pi\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\sqrt{3}}^{3}=\pi(18-8\sqrt{3})_{\#}$$

をとる。

27−9 ・ 3√3 −

本

第 6 問

[解] 赤玉 R, 白玉 W と表す. 人が R か W をえらぶかは確率 $\frac{1}{2}$ で同様にたしからしい。

(1)

	A	B	C	
(R, W)	(1.1)	(1 1)	(1.1)	F_0
(R, W)	(1.1)	(0.2)	(2.0)	F_1
(R, W)	(2.0)	(0.2)	(1.1)	F_2
(R, W)	(1.1)	(2.0)	(0.2)	F_3
(R, W)	(0.2)	(2.0)	(1.1)	F_4
(R, W)	(0.2)	(1.1)	(2.0)	F_5
(R, W)	(2.0)	(1.1)	(0.2)	F_6

(2)
$$\begin{cases} p_{00} = \frac{1}{4} \\ p_{0k} = \frac{1}{8} \ (k=1.2.\cdots 6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{1k} = 0 \quad (k=1.3.4.5.6) \\ p_{10} = p_{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{2k} = 0 \ (k=1,2,3,4,5) \\ p_{20} = p_{26} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{3k} = 0 \ (k=1,2,3,5.6) \\ p_{30} = p_{34} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{4k} = 0 \ (k=1.3.4.5.6) \\ p_{40} = p_{45} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{5k} = 0 \ (k=2.3.4.5.6) \\ p_{50} = p_{51} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{6k} = 0 \\ p_{610} = p_{63} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(3) (1)から

$$\begin{cases} q_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}(1-q_n) \\ \quad = -\frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2} \\ q_0 = 1 \end{cases}$$

だから 等比数列の公式から

$$q_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n\left(1-\frac{2}{5}\right)+\frac{2}{5}$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{2}{5}$$

/20