xy 平面上，x 座標，y 座標がともに整数であるような点 (m, n) を格子点とよぶ．各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており，傾き $2/5$ の任意の直線はこれらの円のいずれかと共有点を持つという．このような性質を持つ実数 r の最小値を求めよ．

[解] a を実数として，題意の直線は

$$2x - 5y + a = 0$$

と書ける．これと中心 (m, n)，半径 r の円が共有点をもつので

$$\frac{|2m - 5n + a|}{\sqrt{4 + 25}} \leq r \qquad \cdots ①$$

である．従って，r の条件式は

$$\forall a \exists m \exists n, ①$$

である．ここで，$2 \perp 5$ だから，$2m - 5n$ は全ての整数値のみをとる．従って a の小数部分 α とすれば，a を固定した時,

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 1/2 & \min |2m - 5n + a| = \alpha \\ 1/2 \leq \alpha < 1 & \min |2m - 5n + a| = |1 - \alpha| \end{cases}$$

である．故に α を動かした時，これらの値が常に r より小さければよいので，条件は

$$\frac{1/2}{\sqrt{29}} \leq r$$
$$\frac{\sqrt{29}}{58} \leq r$$

である．求める最小値は

$$\min r = \frac{\sqrt{29}}{58}$$

である．

a