$\dfrac{10^{210}}{10^10+3}$ の整数部分の桁数と，1 の位の数字を求めよ．ただし，$3^{21} = 10460353203$ を用いてよい．

[解] $t = 10^{10} + 3$ とおく．又，与式を A とする．まず A の桁数について

$$\frac{10^{210}}{10^{11}} < A < \frac{10^{210}}{10^{10}}$$
$$\therefore\ 10^{199} < A < 10^{200}$$

だから，A は 200 桁である．$\cdots$(答)

次に 1 位の数を求める．合同式の法を 10 とする．

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(t-3)^{21}}{t} \\
&= \sum_{k=1}^{21} {}_{21}C_k t^{k-1}(-3)^{21-k} - \frac{3^21}{t} \\
&\equiv \sum_{k=1}^{21} {}_{21}C_k 3^{k-1}(-3)^{21-k} - \frac{3^21}{t} \quad (\because t \equiv 3) \\
&= \sum_{k=1}^{21} (-1)^{21-k} {}_{21}C_k 3^{20} - \frac{3^21}{t} \\
&= -3^{20} \sum_{k=1}^{21} (-1)^k {}_{21}C_k - \frac{3^21}{t} \qquad (1)
\end{aligned}$$

ここで，$(1+x)^{21} = \sum_{k=0}^{21} {}_{21}C_k x^k$ に $x = -1$ を代入して

$$0 = {}_{21}C_0 + \sum_{k=1}^{21} {}_{21}C_k (-1)^k$$

だから，(1) に代入して

$$A \equiv {}_{21}C_0 3^{20} - \frac{3^21}{t} \qquad (2)$$

である．$3^{21} = 10460353203$ を代入して

$${}_{21}C_0 3^{20} = 73^{21} \equiv 1\frac{3^21}{t} = 1.04\ldots$$

だから (2) に代入して

$$A \equiv 9$$

である．$\cdots$(答)

[別解] 後半部分について考える．

$$C = \frac{10^{210} + 3^{21}}{t} \qquad D = \frac{3^21}{t}$$

とすれば，

$$A = C - D$$

である．

$$C = 10^{200} + 310^{190} + \cdots + 3^{19}10^{10} + 3^{20} \equiv 3^{20}$$

であり，題意から $3^{20} \equiv 1$，[解] より $D = 1.04\ldots$ だから

$$A \equiv C - D \equiv 9$$

である．$\cdots$(答)