数列 $\{a_m\}$ (ただし $a_m = m$ とする) に対し $b_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$ とおく．

1. $0 < r < 1$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ および $\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$ となることを証明せよ．
2. $S_m = a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_m r^m$, $T_n = b_1 r + b_2 r^2 + \cdots + b_n r^n$ とおくとき，$\lim_{m\to\infty} S_m$ および $\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ．

[解]

(1) $0 < r < 1$ の時，$r = \frac{1}{t}(t > 1)$ とおける．一般化二項定理より

$$
\begin{aligned}
t^n =& \{1 + (t-1)\}^n \\
=& 1 + (t-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(t-1)^2 + \cdots \\
&+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(t-1)^k + \cdots \\
>& \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(t-1)^k
\end{aligned}
$$

だから，$n > 0$ の時

$$
\begin{aligned}
0 < n^k \cdot r^n = \frac{n^k}{t^n} &< \frac{n^k}{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(t-1)^k} \\
&= \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)} \frac{(k+1)!}{(t-1)^{k+1}} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 0
$$

となるから，eq. (1) の右辺は 0 に収束する．したがってはさみうちの定理から，

$$
\lim_{n\to\infty} n^k \cdot r^n = 0
$$

である．$k = 1, 2$ として題意は示された．$\cdots$(答)

(2) まず，

$$
b_n = \frac{n(n+1)}{2}
$$

である．題意より

$$
\begin{aligned}
S_m &= \sum_{k=1}^{m} k \cdot r^k \\
T_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \cdot r^k
\end{aligned}
$$

である．先に S_m から考える．$S_m - rS_m$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
S_m - rS_m &= \sum_{k=1}^{m} k \cdot r^k - \sum_{k=1}^{m} k \cdot r^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{m} k \cdot r^k - \sum_{k=2}^{m+1} (k-1) \cdot r^k \\
&= \sum_{k=1}^{m} k \cdot r^k - \sum_{k=1}^{m} (k-1) \cdot r^k - mr^{m+1} \\
&= \sum_{k=1}^{m} r^k - mr^{m+1} \\
&= \frac{r(1-r^m)}{1-r} - mr^{m+1}
\end{aligned}
$$

と書けるから，

$$
S_m = \frac{1}{1-r}\left[\frac{r(1-r^m)}{1-r} - mr^{m+1}\right]
$$

を得る．(1) の結果を用いて $m \to \infty$ の極限では，

$$
\lim_{m\to\infty} S_m = \frac{r}{(1-r)^2} \qquad (2)
$$

となる．$\cdots$(答)

次に，T_n を考える．$T_n - rT_n$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
T_n - rT_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \cdot r^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \cdot r^{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \cdot r^k - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} (k-1)k \cdot r^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \cdot r^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (k-1)k \cdot r^k - \frac{n(n+1)}{2} r^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} [k(k+1) - (k-1)k] \cdot r^k - \frac{n(n+1)}{2} r^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot r^k - \frac{n(n+1)}{2} r^n \\
&= S_n - \frac{n(n+1)}{2} r^n
\end{aligned}
$$

だから，

$$T_n = \frac{1}{1-r}\left[S_n - \frac{n(n+1)}{2}r^n\right]$$

である．(1) から，二項目は $n \to \infty$ で 0 に収束する．従って，eq. (2) から

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T_n &= \frac{1}{1-r}\lim_{n\to\infty} S_n \\ &= \frac{r}{(1-r)^3}\end{aligned}$$

が求める極限値である．$\cdots$(答)

[解説]