座標平面上で $y = (\log x)^2\ (x > 0)$ の表す曲線を $C$ とし，$\alpha > 0$ に対し，点 $(\alpha, (\log \alpha)^2)$ における $C$ の接線を $L(\alpha)$ で表す．

1. $C$ のグラフの概形を掛け．
2. $C$ と $L(\alpha)$ との共有点の個数を $n(\alpha)$ とする．$n(\alpha)$ を求めよ．
3. $0 < \alpha < 1$ とし，$C$ と $L(\alpha)$ および $x$ 軸とで囲まれる領域の面積を $S(\alpha)$ とする．$S(\alpha)$ を求めよ．

**[解]** 関数を

$$f(x) = (\log x)^2 (x > 0)$$

とおく．

(1) 一階，二階微分は

$$f'(x) = 2\frac{\log x}{x} \tag{1}$$

$$f''(x) = 2\frac{1 - \log x}{x^2} \tag{2}$$

であるから，増減表は table 1 となる．

表 1: $f(x)$ の増減表

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f''$ | | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $(\infty)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $(\infty)$ |

従って，グラフの概形は fig. 1 となる．

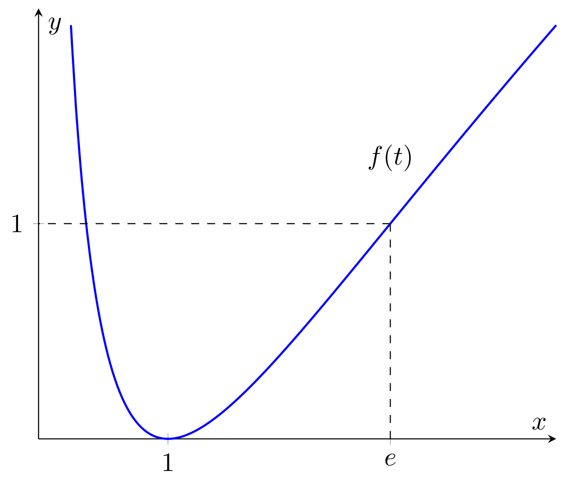


図 1: $f(x)$ の概形.$x = e$ が変曲点となる．

$\cdots$(答)

(2) $P(\alpha, f(\alpha))$ での接線 $L(\alpha)$ は,eq. (1) から

$$\begin{aligned} y &= l(x) \\ &= f'(x)(x - \alpha) + f(\alpha) \\ &= 2\frac{\log \alpha}{\alpha}(x - \alpha) + f(\alpha) \end{aligned}$$

であるから，$L(\alpha)$ と $C$ の共有点の個数は

$$l(x) = f(x)$$

$$(\log x)^2 - (\log \alpha)^2 - 2\frac{\log \alpha}{\alpha}(x - \alpha) = 0 \quad \cdots ①$$

の $x > 0$ の解の個数にひとしい．① の左辺を $g(x)$ とおく：

$$g(x) = (\log x)^2 - (\log \alpha)^2 - 2\frac{\log \alpha}{\alpha}(x - \alpha)$$

$g(x)$ の一階微分は

$$g'(x) = 2\left(\frac{\log x}{x} - \frac{\log \alpha}{\alpha}\right)$$

であるから，この符号は

$$h(x) = \frac{\log x}{x}$$

の挙動による．eq. (1) より $h(x) = f'(x)/2$ だから，

$$h'(x) = \frac{f''(x)}{2}$$

であり，$h(x)$ の増減表は table 2 となる．

表 2: $h(x)$ の増減表

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $(-\infty)$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $(0)$ |

従ってグラフの概形は fig. 2 となる．

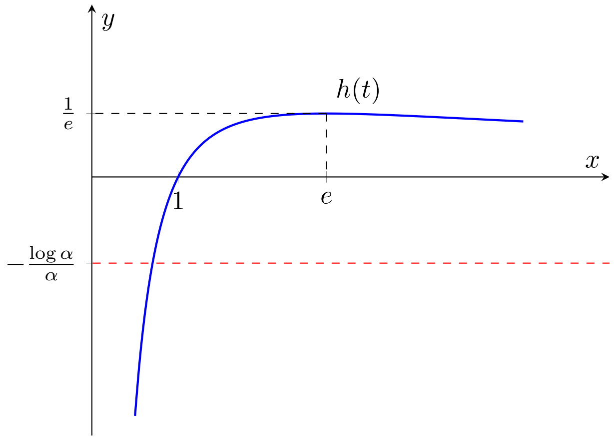


図 2: $h(x)$ の概形.$x = e$ で最大値をとり，$\alpha$ の値によって $g'(x)$ の零点の数が変化する．

以下 $\alpha$ の値によって場合わけする．

## 0.1 $0 < \alpha \leq 1$ の時

$g'(x) = 0$ となる $x$ は $x = \alpha$ ただ一つである．$x < \alpha$ では $g'(x) < 0$, $\alpha < x$ では $g'(x) > 0$ である．また，$g(x)$ の極限値は

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

である．従って $g(x)$ の増減表は table 3 のようになる．

表 3: $g(x)$ の増減表

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g$ | $(\infty)$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $(\infty)$ |

従って，$g(x) = 0$ の解の数は $x = \alpha$ ただ一つ．

## 0.2 $\alpha = e$ の時

$g'(x) = 0$ となる $x$ は $x = \alpha$ ただ一つである．それ以外のとき，$g'(x) < 0$ である．また，$g(x)$ の極限値は

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$$

である．従って $g(x)$ の増減表は table 4 のようになる．

表 4: $g(x)$ の増減表

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | 0 | $-$ | |
| $g$ | $(\infty)$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $(-\infty)$ |

よって，$g(x) = 0$ の解の数は $x = \alpha$ ただ一つ．

## 0.3 $1 < \alpha$, $\alpha \neq e$ の時

この時は $x = \alpha$ 以外にもう一つ $g'(x) = 0$ となる $x$ がある．これを $x = \beta$ とする．また，$g(x)$ の極限値は

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$$

である．よって $g(x)$ の増減表は table 5 となる．

表 5: $h(x)$ の増減表

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $g$ | $(\infty)$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $(-\infty)$ |

従って，$g(x) = 0$ の解の数は二つである．

以上三つの場合わけにより全ての場合は尽くされた．従って求める共有点の個数は

$$\begin{cases} 0 < \alpha \leq 1, \alpha = e & \cdots 1 \text{つ} \\ 1 < \alpha(\alpha \neq e) & \cdots 2 \text{つ} \end{cases}$$

である．$\cdots$(答)

(3) $P$ から $x$ 軸に下ろした垂足 $Q(\alpha, 0)$, $L(a)$ と $x$ 軸の交点 $R$, また $T(1,0)$ とおく．すると $R$ の $x$ 座標は

$$2\frac{\log\alpha}{\alpha}(x-\alpha) + (\log\alpha)^2 = 0$$
$$x = \alpha - \frac{\alpha}{2}\log\alpha$$

となる．題意の領域の概形は fig. 3 のようになる．

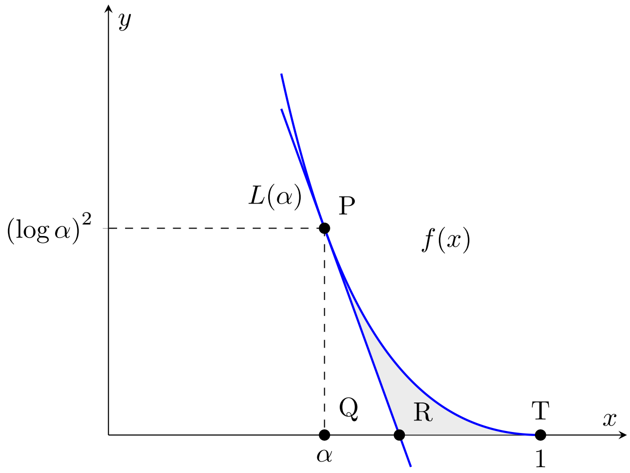


図 3: 求める面積の概形

求める面積 $S(\alpha)$ は，図形 $PQT$ の面積 $A(\alpha)$ から，三角形 $PQR$ の面積 $B(\alpha)$ を減じたものに等しい．すなわち

$$S(\alpha) = A(\alpha) - B(\alpha) \tag{3}$$

まず，$\triangle PQR$ について，

$$\begin{aligned}|QR| &= \alpha - \frac{1}{2}\alpha\log\alpha - \alpha \\ &= -\frac{1}{2}\alpha\log\alpha\end{aligned}$$

および

$$|PQ| = (\log\alpha)^2$$

だから，

$$\begin{aligned}B(\alpha) &= \frac{1}{2}|QR||PQ| \\ &= \frac{-1}{4}\alpha\,(\log\alpha)^3 \qquad (4)\end{aligned}$$

である．次に $A(\alpha)$ は部分積分法を繰り返し用いて

$$\begin{aligned}A(\alpha) &= \int_\alpha^1 (\log x)^2 dx \\ &= \left[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\right]_\alpha^1 \\ &= (0-0+2) - (\alpha(\log\alpha)^2 - 2\alpha\log\alpha + 2\alpha) \\ &= 2 - \alpha(\log\alpha)^2 + 2\alpha\log\alpha - 2\alpha \qquad (5)\end{aligned}$$

だから，eqs. (4) and (5) を eq. (3) に代入して

$$S(\alpha) = 2 - \alpha(\log\alpha)^2 + 2\alpha\log\alpha - 2\alpha + \frac{1}{4}\alpha(\log\alpha)^3$$

が求める面積である．$\cdots$(答)