t を正の数とし，次の条件 (A)，(B) によって定まる x の 3 次式を $f(x)$ とする．

(A) 曲線 $y=f(x)\cdots(1)$ は直線 $y=x\cdots(2)$ の上の 2 点 $\mathrm{P}(-t,-t)$，$\mathrm{O}(0,0)$ を通る．

(B) $f'(0)=0$，$f''(0)=2$

さて，曲線 (1) と曲線 (2) との交点のうちで，x 座標が最大のものを Q とし，曲線 (1) の点 O から点 Q までの部分と，線分 OQ とで囲まれた領域の面積を $S(t)$ とする．このとき $\lim_{t\to\infty} S(t)$ を求めよ．

[解] 条件 (A) から $a,\alpha\in\mathbb{R}$ として，

$$\begin{aligned} f(x)-x &= a(x+t)x(x-\alpha) \\ f(x) &= x(ax^2+a(t-\alpha)x-at\alpha+1) \end{aligned}$$

と書ける．従って

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2+2a(t-\alpha)x+(1-at\alpha) \\ f''(x) &= 6ax+2a(t-\alpha) \end{aligned}$$

となるので，条件 (B) から，

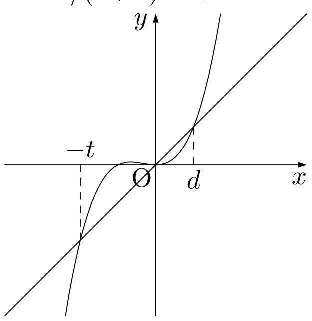
$$\begin{cases} f'(0)=(1-at\alpha)=0 \\ f''(0)=2a(t-\alpha)=2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha=\dfrac{t}{1+t} \\ a=\dfrac{t^2}{t+1} \end{cases}$$

である．以上から，

$$f(x)-x=\frac{t^2}{t+1}(x+t)x\left(x-\frac{t}{t+1}\right)$$

となる．$t>0$ からグラフの概形は下図．ただし $d=t/(t+1)$ とした．



従って，

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^d (f(x)-x)\,dx \\ &= \int_0^d \left(\frac{t^2}{t+1}(x+t)x\left(x-\frac{t}{t+1}\right)\right)dx \\ &= \left[-\frac{t+1}{4t^2}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^d \\ &= \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)d^4-\frac{1}{3}d^3+\frac{1}{2}d^2 \\ &\xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる．$\cdots$(答)