直線 $x+y=4$ に第一象限において接する放物線 $y=-ax^2+bx$ がある．この放物線と x 軸の正の部分とで囲まれる図形の面積が最大となる時の a，b の値とその場合の面積を求めよ．

[解] $a \neq 0$ である．まず，直線の式で $x, y > 0$ であるから，$0 < x < 4$ となる．方程式から y を消去した

$$4-x=-ax^2+bx \Longleftrightarrow ax^2-(b+1)x+4=0$$

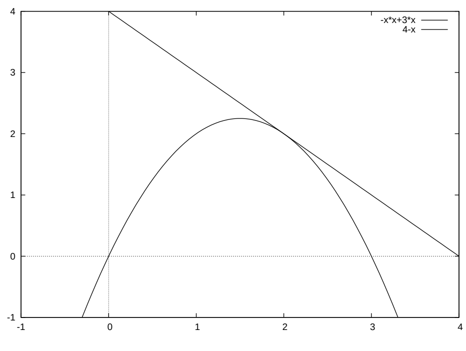
が $0<x<4$ に重解を持つ．判別式 D として

$$\begin{cases} D=0 \\ 0<\dfrac{b+1}{2a}<4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (b+1)^2=16a \\ 0<\dfrac{b+1}{2a}<4 \end{cases}$$

第一式から $a>0$ であるから，$(\because a \neq 0)$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (b+1)^2=16a \\ 0<b+1<8a \end{cases} \\ \Longleftrightarrow &\begin{cases} (b+1)^2=16a \\ 0<b+1<\dfrac{(b+1)^2}{2} \end{cases} \\ \Longleftrightarrow &\begin{cases} (b+1)^2=16a \\ 1<b \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

この時，放物線の概形は下図のようになる．



題意の面積 S として

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{b/a} (-ax^2+bx)dx \\ &= \frac{a}{6}\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{b^3}{6a^2} \end{aligned}$$

である．以下 (1) の下でこの最大値を考えれば良い．(1) を代入して

$$\begin{aligned} S &= \frac{b^3}{6}\frac{16^2}{(b+1)^4} \\ &= \frac{128}{3}\frac{b^3}{(b+1)^4} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで $b>1$ の時，AM-GM から

$$\begin{aligned} \frac{3b^3}{(b+1)^4} &\leq \left(\frac{1}{4}\left(\frac{3}{b+1}+3\frac{b}{b+1}\right)\right)^4 \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^4 \\ \therefore \frac{b^3}{(b+1)^4} &\leq \frac{3^3}{4^4} \end{aligned}$$

である．等号成立は $\dfrac{3}{b+1}=\dfrac{b}{b+1} \Longleftrightarrow b=3$ の時．これは (1) を満たす．従って (2) に代入して

$$S \leq \frac{128}{3}\frac{3^3}{4^4}=\frac{9}{2} \qquad \therefore \max S=\frac{9}{2}$$

である．等号成立は (1) から $(a,b)=(1,3)$ の時である．$\cdots$(答)