$f(x)=\pi x^2\sin\pi x^2$ とする．$y=f(x)$ のグラフの $0\leq x\leq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V は $V=2\pi\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$ で与えられることを示し，この値を求めよ．

[解] 区間内で $f(x)\geq 0$ に注意する．区間内に X，$X+\Delta x$ をとり，$(\Delta x>0)$ $0\leq x\leq X$ の範囲での回転体の体積を $V(X)$ と書く．また，同区間での $f(x)$ の最大小値をそれぞれ $M(X)$，$m(X)$ とおくと，

$$0\leq m(X)\leq f(x)\leq M(X)$$

ゆえ，これを y 軸の周りに回転させれば，

$$\begin{aligned}P&=\left\{(X+\Delta x)^2-X^2\right\}\\&=2X\Delta x+(\Delta x)^2\\&=\Delta x(2X+\Delta x)\\Q&=2X+\Delta x\end{aligned}$$

として

$$\pi Pm(X)\leq V(X+\Delta x)-V(X)\leq \pi PM(X)$$
$$\pi Qm(X)\leq \frac{V(X+\Delta x)-V(X)}{\Delta x}\leq \pi QM(X) \tag{1}$$

である．ここで $\Delta x\to 0$ とすれば

$$M(X),m(x)\to f(X)$$
$$\frac{V(X+\Delta x)-V(X)}{\Delta x}\to V'(X)$$

だから，(1) の両辺は $2\pi Xf(X)$ に，真ん中は $V'(X)$ に，それぞれ収束する．挟み撃ちの定理から

$$V'(X)=2\pi Xf(X)$$

となるので，両辺積分して $V(0)=0$ より

$$V=2\pi\int_0^1 xf(x)dx$$

である．□

次に値を計算する．$t=\pi x^2$ とすれば $\dfrac{dt}{dx}=2\pi x$，$t:0\to\pi$ だから

$$\begin{aligned}V&=\int_0^\pi t\sin t dt\\&=\left[-t\cos t+\sin t\right]_0^\pi\\&=\pi\end{aligned}$$

である．$\cdots$(答)