

xy 平面上で原点から傾き a ($a > 0$) で出発し折れ線状に動く点 P を考える．ただし，点 P の y 座標はつねに増加し，その値が整数になるごとに動く方向の傾きが s 倍 ($s > 0$) に変化するものとする．

P の描く折れ線が直線 $x = b$ ($b > 0$) を横切るための a, b, s に関する条件を求めよ．

[解] 点 P の軌跡上で， y 座標が $k \in \mathbb{Z}$ の時の x 座標の値 x_k とする．すると， $x_0 = 0$ で，題意の設定から $k \geq 1$ の時

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \frac{1}{s^k a} \\ x_k - x_0 &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{s^i a} \\ \therefore x_k &= \begin{cases} \frac{1}{s} \frac{1 - (1/s)^k}{1 - 1/s} & (s \neq 1) \\ \frac{k}{a} & (s = 1) \end{cases} \end{aligned}$$

である．従って，この極限值は s の値によって以下ようになる．

$$\begin{cases} 0 < s \leq 1 & x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \\ 1 < s & x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \frac{1}{1 - 1/s} \end{cases}$$

従って，点 P は連続的に変化するもので，この極限值よりも b が小さければよい．

$$0 < s \leq 1 \quad \text{or} \quad b < \frac{1}{a} \frac{1}{1 - 1/s}$$

が求める条件である．・・・(答)