$0 < c < 1$ とする．$0 \leq x < 1$ において連続な関数 $f(x)$ に対して

$$f_1(x) = f(x) + \int_0^c f(t)dt, f_2(x) = f(x) + \int_0^c f_1(t)dt$$

とおく．以下，関数 $f_3(x), f_4(x), \cdots$ を順次

$$f_n(x) = f(x) + \int_0^c f_{n-1}(t)dt \qquad (n = 3, 4, \cdots)$$

により定める．また，

$$g(c) = \int_0^c f(t)dt$$

とし，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し

$$g_n(c) = \int_0^c f_n(t)dt$$

とおく．このとき，$0 < x < 1$ を満たす任意の x に対し $xf(x) = g(x) + x \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ が成り立ち，さらに $f(0) = 1$ となるような $f(x)$ を定めよ．

[解] 題意より $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$f_{n+1}(x) = f(x) + g_n(c)$$

であるから，漸化式に代入して

$$\begin{aligned} g_{n+1}(c) &= \int_0^c \{f(x) + g_n(c)\}dt \\ &= cg_n(c) + g(c) \\ \therefore g_{n+1}(c) - \frac{g(c)}{1-c} &= c\left\{g_n(c) - \frac{g(c)}{1-c}\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

これは数列 $\{g_n(c) - \dfrac{g(c)}{1-c}\}$ が公比 c の等比数列であることをあらわす．また，初期条件について，漸化式より

$$\begin{aligned} g_1(c) &= \int_0^c \{f(t) + g(c)\}\, dt \\ &= (1+c)g(c) \end{aligned} \tag{2}$$

であるから，(1)，(2) から

$$\begin{aligned} g_n(c) &= c^{n-1}\left\{(1+c)g(c) - \frac{g(c)}{1-c}\right\} + \frac{g(c)}{1-c} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \frac{g(c)}{1-c} \end{aligned} \tag{3}$$

を得る ($\because 0 < c < 1$)．故に

$$\begin{cases} xf(x) = g(x) + x\dfrac{g(x)}{1-x} & \text{(4a)} \\ f(0) = 1 & \text{(4b)} \end{cases}$$

をみたす $f(x)$ をみつければよい．(4a) で $0 < x < 1$ だから，分母を払って

$$(1-x)xf(x) = g(x) \tag{5}$$

$g(x) = y$ とおけば $f(x) = dy/dx$ である．$y = 0$ なる x があれば $f(x) \equiv 0$ となって (4b) に反することから $y \neq 0$ である．従って (5) を書き換えると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x(1-x)} \\ y &= C\frac{x}{1-x} \\ \therefore f(x) &= C\frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned} \tag{6}$$

であり，(4b) および $f(x)$ の連続性から $\lim_{x\to+0} f(x) = 1$ であるので

$$\lim_{x\to+0} f(x) = C = 1$$

となる．これを (6) に代入して

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\cdots(\text{答})$$

である．

[**解注**] 問題文から g を関数と見たければ (すなわち $g_n(x)$ が出現するということは) c は与えられた定数ではなく，$0<c<1$ で動く変数と見るべきである．

$f_n(x)$ 自体に c が含まれているが，こちらでは変数は x のみであり，c は定数扱いなのに対し，$g_n(c)$ ではその c を変数扱いにしたいので，文字を変えたものと思われる．