1 から 6 までの目がそれぞれ $\frac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを 3 回振って出た目を順に n_1, n_2, n_3 とし, 次の 3 次方程式を考える.

$$x^3 - n_1 x + (-1)^{n_2} n_3 = 0$$

1. この方程式が相異なる 3 個の実数解をもつ確率を求めよ.
2. この方程式が自然数解をもつ確率を求めよ.

[解] 表記の簡潔さのため

$$f(x) = x^3 - n_1 x + (-1)^{n_2} n_3$$

とおく．方程式 $f(x) = 0$ について考える．

(1)

$f(x)$ のグラフの概形を調べるため，一階微分を計算すると

$$f'(x) = 3x^2 - n_1$$

だから，$n_1 > 0$ より $f(x)$ の増減表は table 1 となる．

表 1: $f(x)$ の増減表

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{n_1}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{n_1}{3}}$	$\cdots$	∞
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$(-\infty)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	(∞)

したがって，$f(x) = 0$ が 3 実数解を持つ条件は

$$\begin{aligned}
&f(\sqrt{n_1/3})f(-\sqrt{n_1/3}) < 0 \\
&\left(-\frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}} + (-1)^{n_2}n_3\right)\left(\frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}} + (-1)^{n_2}n_3\right) < 0 \\
&-\frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}} < (-1)^{n_2}n_3 < \frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}} \\
&n_3 < \frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}} \qquad (1)
\end{aligned}$$

と表せる．ただし，最終行で $n_3 > 0$ を利用した．以下，eq. (1) を満たす整数 (n_1, n_2, n_3) を考える．まず，n_2 については任意であり，n_1 と n_3 のみ考えれば良い．表記の簡潔さのため

$$A = \frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}}$$
$$B = (-1)^{n_2}n_3$$

とおくと，$n_1 = 1, 2, \cdots, 6$ に対して値は以下のようになる．

表 2: A の n_1 による値の変化

n_1	1	2	3	4	5	6
A	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\frac{4}{9}\sqrt{6}$	2	$\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\frac{10}{9}\sqrt{15}$	$4\sqrt{2}$

これらの値は

$$\frac{2}{9}\sqrt{3} < 1 < \frac{4}{9}\sqrt{6} < 2 < \frac{16}{9}\sqrt{3} < 3 < \frac{10}{9}\sqrt{15} < 4 < 4\sqrt{2} < 6$$

という大小関係にあるから，n_1 に対応して eq. (1) を満たす n_3 をリストアップすると table 3 のようになる．

表 3: eq. (1) を満たす n_1, n_3 の一覧

n_1	1	2	3	4	5	6
n_3	無し	1	1	$1 \sim 3$	$1 \sim 4$	$1 \sim 5$
n_3 の数	0	1	1	3	4	5

したがって求める確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{7}{18}$$

である．$\cdots$(答)

(2) 題意の自然数解を $k \in \mathbb{N}$ とおくと，$f(k) = 0$ ゆえ

$$k(k^2 - n_1) = (-1)^{n_2+1}n_3$$

だから，k と $|k^2 - n_1|$ の積が n_3 であることが必要である．まずはこの必要条件を満たす $(k, k^2 - n_1)$ を n_3 に応じてリストアップする．k に対して，$n_1 = 1, 2, \cdots, 6$ より

$$|k^2 - n_1| \leq |k^2 - 1|$$
$$|k^2 - n_1| \leq |k^2 - 6|$$

であるから，この上限によって一定の制限があることに注意すると，一覧は table 4 となる．

表 4: $k|k^2-n_1|=n_3$ を満たす (n_3,k,k^2-n_1) の組

n_3	1	2	3	4	5	6
$\begin{pmatrix} k \\ k^2-n_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

これを満たす (k,n_1) を一覧化すると

n_3	1	2	3	4	5	6
(k,n_1)	$(1,2)$	$(1,3)$ $(2,3)$ $(2,5)$	$(1,4)$	$(1,5)$ $(2,2)$ $(2,6)$	$(1,6)$	$(2,1)$

である．それぞれの組に対して n_2 は 3 通り（偶数か奇数）が対応するので，(n_1,n_2,n_3) の場合の数は

$$10*3=30$$

通りであり，求める確率は

$$\frac{30}{6^3}=\frac{5}{36}$$

である．$\cdots$(答)

[解説]