# 京大理科数学 1999

[解] $P(\alpha, \alpha^2)$ $Q(\beta, \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とおく。題意から PQの方程式を $y=l(x)$ として

$$1=\int_\alpha^\beta (l(x)-x^2)dx$$
$$=\int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\therefore \beta-\alpha=\sqrt[3]{6} \quad \cdots ①$$

このもとで R(X, Y) の軌跡をもとめる。

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2},\ Y=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \quad \cdots ②$$

であり、$t=\alpha+\beta$, $s=\beta-\alpha$ とおくと、$\alpha\beta=\frac{1}{4}(t^2-s^2)$ …③で ①②に代入して

$$X=\frac{1}{2}t,\ Y=\frac{t^2+s^2}{4}=\frac{1}{4}(t^2+6^{\frac{2}{3}}) \quad \cdots ③$$

又、$\alpha, \beta$ は $x$ の2次方程式 $x^2-tx+\frac{1}{4}(t^2-6^{\frac{2}{3}})=0$ の2実解。この判別式をDとして $D=6^{\frac{2}{3}}>0$ だから、$\alpha, \beta$ は常に存在する。したがって③より $t$ を消去して、

$$Y=X^2+\frac{1}{4}6^{\frac{2}{3}}$$

#

第 2 問

[解1] A(t, 0) B(−t, 0) (t>0) となるよう座標平面をとる。P(x, y)とする。

$$\overrightarrow{PA}=\begin{pmatrix}t-x\\-y\end{pmatrix}\quad\overrightarrow{PB}=\begin{pmatrix}-t-x\\-y\end{pmatrix}$$

だから、

$$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{(t-x)^2+y^2},\ |\overrightarrow{PB}|^2=\sqrt{(t+x)^2+y^2},\ \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-(t^2-x^2)+y^2$$

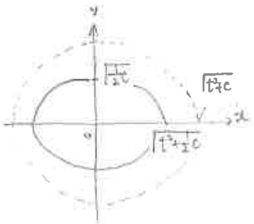
となるので、与式に代入して、

$$\sqrt{(t-x)^2+y^2}\sqrt{(t-x)^2+y^2}=c+t^2-(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\{(t-x)^2+y^2\}\{(t+x)^2+y^2\}=\{c+t^2-(x^2+y^2)\}^2\\ c+t^2\geqq x^2+y^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{t^2+\frac{1}{2}c}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}c}=1 & (\because c>0,\ t>0)\\ c+t^2\geqq x^2+y^2\end{cases}$$

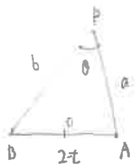
で、これを図示すると右図だから、もとめるキセキは




$$\frac{x^2}{t^2+\frac{1}{2}c}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}c}=1$$

//

[解2] $\overline{AB}=2t$, $\overline{PA}=a$, $\overline{PB}=b$, $\angle APB=\theta$とする。




A, B, Pが一直線上にない時 △ABPに余弦定理を用いて、

$$4t^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \quad \cdots①$$

これはA, B, Pが一直線上の時 ($\theta=0$) にも成立する。又、与式から、

$$ab(1+\cos\theta)=c$$

$$\therefore ab\cos\theta=c-ab$$

①及び $-1\leqq\cos\theta\leqq1$ に代入して、

$$\begin{cases}4t^2=a^2+b^2-2(c-ab)=(a+b)^2-2c\\ 0\leqq c\leqq 2ab\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\sqrt{4t^2+2c} & \cdots②\\ c\leqq 2ab & \cdots③\end{cases}\quad(\because a, b, c\geqq0)$$

②が[解1]の座標平面で表すのは、Oを中心、長半径 $\frac{1}{2}(a+b)=t^2+\frac{1}{2}c$，短半径 $t^2+\frac{1}{2}c-t^2=\frac{1}{2}c$ の

楕円：$\dfrac{x^2}{t^2+\frac{1}{2}c}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}c}=1$ である。この時 $a+b=A$ とすると $\frac{A}{2}-t\leqq a\leqq\frac{A}{2}+t$ で

$$ab=a(A-a)\geqq\left(\frac{A}{2}-t\right)\left(\frac{A}{2}+t\right)=\frac{A^2}{4}-t^2=\frac{1}{2}c \quad (等号成立は\ a=\frac{A}{2}\pm t)$$

で、③は常に成立。したがってもとめるキセキは

$$\frac{x^2}{t^2+\frac{1}{2}c}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}c}=1$$

//

となる。

第 3 問

[解] (1) $a_0^2 = A_0$ などと表す。与式の分母を払って $(A_0, A_1, B_0, B_1 > 0)$

$$B_1(B_0+1) + A_1(A_0+1) > A_1(B_0+1) + B_1(A_0+1)$$

を示せば良い。

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = B_1(B_0 - A_0) + A_1(A_0 - B_0)$$
$$= (B_1 - A_1)(B_0 - A_0) > 0 \quad (\because A_0 < B_0,\ A_1 < B_1)$$

より示された 図

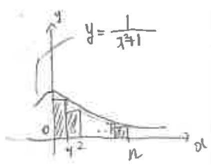
(2) $\{x_k\}$ は自然数列 $\{k\}$ の並びかえである。(1) から、$x_i, x_j$ $(i < j \in \mathbb{N})$ に対し $x_i > x_j$ なら

$$\frac{x_i^2}{i^2+1} + \frac{x_j^2}{j^2+1} > \frac{x_j^2}{i^2+1} + \frac{x_i^2}{j^2+1}$$

だから、$T(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k^2+1}$ の値は、$x_i$ と $x_j$ を入れかえた方が小さくなる。したがって、$k = 1, 2, \cdots$ の順に $x_k$ と $x_m$ $(m = k+1, \cdots, n)$ の大きさを比べ、$x_k < x_m$ ならそのまま、$x_k > x_m$ なる $m$ があるならそのような $x_m$ のうち min のものと $x_k$ を入れかえる作業をすることで、$\{x_k\} = \{k\}$ の時、$T(n)$ が min であることがわかる。 …☆

$$T(n) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2+1}\right) = n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} \quad \cdots ①$$

ここで、$y = \frac{1}{x^2+1}$ のグラフから、面積比較して、




$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} \leq \frac{1}{2} + \int_1^n \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$\tan\alpha_n = n$ なる $\alpha_n$ を定めると $(0 \leq \alpha_n < \pi/2)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} \leq \frac{1}{2} + \alpha - \pi/4$$

①から

$$T(n) \geq n - \frac{1}{2} - \alpha + \pi/4 > n - \frac{1}{2} - \pi/4 \quad (\because \alpha_n < \pi/2)$$

ここで $\pi < 3.15$ …② だから、

$$T(n) > n - \frac{1}{2} - \frac{3.15}{4} > n - \frac{8}{5} \quad \text{図}$$

$\left(32 > 25.75 \text{ から } \frac{5.15}{4} < \frac{8}{5}\right)$

[☆ $\sum \frac{1}{k^2+1}$ の評価]

$$① \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{2} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

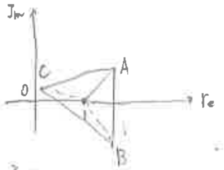
$$= \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) < \frac{5}{4}$$

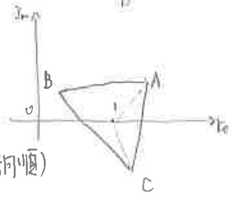
# 第4問

[解] (1) △ABCの重心Gとし、Gを表す複素数gとすると、2.から

$$g=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=1$$

だから、△ABCは右のようになっている。いずれの場合も、




$\beta-1,\ \gamma-1$は、$\alpha-1$を$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$回転させた複素数

で、$e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$とおくと、$z=\alpha-1$から

$$\begin{cases} e\left(\frac{2}{3}\pi\right)(\alpha-1)=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)z \\ e\left(\frac{4}{3}\pi\right)(\alpha-1)=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)z \end{cases}$$

より

$$(\beta,\gamma)=\left(\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}i)z+1,\ \frac{1}{2}(-1\mp\sqrt{3}i)z+1\right)\ (\text{複号同順})$$

//

(2) まず、1.から、$\overline{AG}=1$ ∴ $|z|=1$ …① である。(1)の結果を3.に代入して

$$|\alpha\beta\gamma|=\left|(z+1)\left\{e\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)z+1\right\}\left\{e\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)z+1\right\}\right|=1 \quad \cdots②$$

ここで①から$z=e(\theta)$とおく。一般に

$$e(\alpha)+1=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\,e\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \cdots *$$

だから、②に代入して、

$$\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|\left|e\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right|\left|e\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right|\left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)\right|\left|e\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)\right|=1$$

$$8\left|\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)\right|\left|e\left(\frac{3}{2}\theta+\pi\right)\right|=1 \quad \cdots③$$

$\left|e\left(\frac{3}{2}\theta+\pi\right)\right|=1$だから③から

$$\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)=\pm\frac{1}{8} \quad \cdots④$$

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left[\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\frac{2}{3}\pi\right]=\pm\frac{1}{8}$$

$t=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$として

$$t\left(2t^2-1-\frac{1}{2}\right)=\pm\frac{1}{4}$$

$$4t^3-3t=\pm\frac{1}{2} \quad \cdots⑤$$

ここで、一般に$p=\cos\alpha$とすると$\cos3\alpha=4p^3-3p$だから⑤より

$$\cos\left(\frac{3}{2}\theta+\pi\right)=\pm\frac{1}{2} \quad \cdots⑥$$

argの条件から$0\le\theta\le\frac{2}{3}\pi$として良く、$\pi\le\frac{3}{2}\theta+\pi\le2\pi$だから

1° ⑥で複号正、つまり④で複号正の時

$$\frac{3}{2}\theta+\pi=\frac{5}{3}\pi$$

である。③からこの時

$$\alpha\beta\gamma=e\left(\frac{3}{2}\theta+\pi\right)$$

で、この虚部$\sin\left(\frac{3}{2}\theta+\pi\right)$が正になることはなく不適。

2° ④⑥で複号負の時

$\frac{3}{2}\theta+\pi=\frac{4}{3}\pi$, で④に代入して

$$\alpha\beta\gamma=-e\left(\frac{3}{2}\theta+\pi\right)$$

この虚部は正になり適する。したがって$\theta=\frac{2}{9}\pi$で、これから

$$\begin{cases} \alpha=z+1=e\left(\frac{2}{9}\pi\right)+1=2\cos\frac{\pi}{9}\,e\left(\frac{\pi}{9}\right) \\ \beta=e\left(\frac{2}{3}\pi\right)\cdot z+1=e\left(\frac{8}{9}\pi\right)+1=2\cos\frac{4}{9}\pi\,e\left(\frac{4}{9}\pi\right) \\ \gamma=e\left(\frac{4}{3}\pi\right)z+1=e\left(\frac{14}{9}\pi\right)+1=2\cos\frac{7}{9}\pi\,e\left(\frac{7}{9}\pi\right)=2\cos\frac{2}{9}\pi\,e\left(\frac{16}{9}\pi\right) \end{cases}$$

となり、

$$(\arg\alpha,\arg\beta,\arg\gamma)=\left(\frac{\pi}{9},\frac{4}{9}\pi,\frac{16}{9}\pi\right)$$

//

[別解]

(2) $|\alpha\beta\gamma|=1$に(1)を代入し計算する。

$$(z+1)\left(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)z+1\right)\left(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)z+1\right)$$

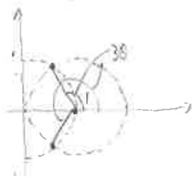
$$=(z+1)\left\{\left(1-\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}z^2\right\}$$

$$=(z+1)(z^2-z+1)$$

$$=z^3+1$$

したがって、

$$|\alpha\beta\gamma|=1 \Leftrightarrow |z^3+1|=1$$




$z=e(\theta)$として、*から

$$2\left|\cos\frac{3}{2}\theta\right|\left|e\left(\frac{3}{2}\theta\right)\right|=1$$

(以下同様)

# 第 5 問

[解]

(1) $p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=-p$ だから両辺2乗して

$$(2q^2+3r^2-p^2)+2qr\sqrt{6}=0$$

$p,q,r \in \mathbb{R}$ から

$$\begin{cases} 2q^2+3r^2-p^2=0 & \cdots ① \\ qr=0 & \cdots ② \end{cases}$$

②から「$q=0$ 又は $r=0$」である。

1° $q=0$ の時

①から $3r^2=p^2$ である。$p=\pm\sqrt{3}r$ となって $r \neq 0$ の時 $p \notin \mathbb{Q}$ となり矛盾。したがって

$p=r=0$

2° $r=0$ の時

①から $2q^2=p^2$ であり $p=\pm\sqrt{2}q$ となって 1° と同様に $p=q=0$

以上からいずれの場合も $p=q=r=0$ である □

(2) $f(1)=a+b+1$, $f(1+\sqrt{2})=(a+b+3)+(a+2)\sqrt{2}$, $f(\sqrt{3})=3+b+a\sqrt{3}$ がいずれも有理数とカテイすると、有理数 $\alpha, \beta, \gamma$ を用いて.

$$\begin{cases} a+b=\alpha & \cdots ③ \\ (a+2)\sqrt{2}=\beta & \cdots ④ \\ b+a\sqrt{3}=\gamma & \cdots ⑤ \end{cases}$$

とかける。又. $f(x)$ の係数は実数由, $a,b,c \in \mathbb{R}$ …⑥ である。③,⑤から $b$ をけして

$$a(1-\sqrt{3})=\alpha-\gamma \qquad \therefore a=(\gamma-\alpha)\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

だから④に代入して

$$\frac{1}{2}\left[(\gamma-\alpha)(1+\sqrt{3})+4\right]\sqrt{2}=\beta$$

$$\frac{1}{2}(\gamma-\alpha+4)\sqrt{2}-\beta+\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sqrt{6}=0$$

したがって $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ 及び(1)から

$$\begin{cases} \gamma-\alpha+4=0 & \cdots ⑦ \\ \beta=0 \\ \gamma-\alpha=0 & \cdots ⑧ \end{cases}$$

となるが, ⑦⑧から $4=0$ となり矛盾。したがって題意は示された □

# 第 6 問

[解] $p=t+1$とおいて全て書きかえる

$$\begin{cases} x = \dfrac{(p-1)(4-p)}{p} \equiv x(p) \\[2ex] y = \dfrac{(p-1)^2(4-p)}{p} \equiv y(p) \end{cases} \qquad (1 \leq p \leq 4)$$

より

$$\begin{cases} x'(p) = x(p)\,\dfrac{4-p^2}{(p-1)(4-p)p} = \dfrac{4-p^2}{p^2} \\[2ex] y'(p) = y(p)\,\dfrac{-2(p^2-2p-2)}{(p-1)(4-p)p} = \dfrac{-2(p-1)(p^2-2p-2)}{p^2} \end{cases}$$

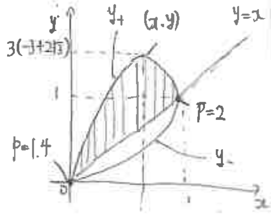
区間内で $x, y \geq 0$ より、下表を得る

| $p$ | $1$ | | $2$ | | $1+\sqrt{3}$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | | $+$ | | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $y'$ | | $+$ | | $+$ | | $-$ | |
| $(x, y)$ | $(0,0)$ | $\nearrow$ | $(1,1)$ | $\nwarrow$ | $\left(\frac{3}{2}(1-\sqrt{3})^2, \frac{3\sqrt{3}}{2}(1-\sqrt{3})^2\right)$ | $\swarrow$ | $(0,0)$ |

これと $x(p) \leq y(p) \Leftrightarrow 2 \leq p$ ($\because 1 \leq p \leq 4$) から、グラフは右下図

したがって

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 3(-3+2\sqrt{3}) \end{cases} \quad /\!/$$




$3(2-\sqrt{3}) < 1$

又、右図斜線部の面積 $S$ は

$$S = \int_0^1 y_+\,dx - \frac{1}{2}$$

$$S + \frac{1}{2} = \int_4^1 \frac{(p-1)^2(4-p)}{p} \cdot \frac{4-p^2}{p^2}\,dp$$

$$= \int_4^1 \frac{p^5 - 6p^4 + 5p^3 + 20p^2 - 36p + 16}{p^3}\,dp$$

$$= \int_4^1 \left(p^2 - 6p + 5 + \frac{20}{p} - \frac{36}{p^2} + \frac{16}{p^3}\right) dp$$

$$= \left[\frac{1}{3}p^3 - 3p^2 + 5p + 20\log p + \frac{36}{p} - \frac{8}{p^2}\right]_4^1$$

$$= -\frac{63}{3} + 3\cdot 15 - 15 - 40\log 2 + 27 - \frac{15}{2}$$

$$= 36 - 40\log 2 - \frac{15}{2}$$

$$S = 28 - 40\log 2 \quad /\!/$$