第 1 問

[解] $Q(x)=0$ は重解を持たないと仮定する。$Q(x)=A(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha \neq \beta)$ とおく。$(A \neq 0)$

$P(x)$	$P^2(x)$
$(x-\alpha)$ を因数に持たない	$(x-\alpha)$ を因数に持たず, Q でわり切れない。
$(x-\beta)$ 〃	$(x-\beta)$ 〃

から、矛盾. よって $Q(x)$ は重解を持つ。

第 2 問

[解] AB: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-s)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(0 \leq s \leq 1)$ とおける。この時、$k \in \mathbb{R}$ $(0 \leq k \leq 1)$ に対し、

$$s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-s)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 5+t \\ 9+2t \\ 5+3t \end{pmatrix}$$

なる k があることを示せば良い.

$$\begin{cases} 2s = k(5+t) \\ 2s+1 = k(9+2t) \\ -2s+2 = k(5+3t) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} t = -1 \\ k = 1/3 \\ s = 2/3 \end{cases}$$

だから、$t = -1$ // で $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$ //

第 3 問

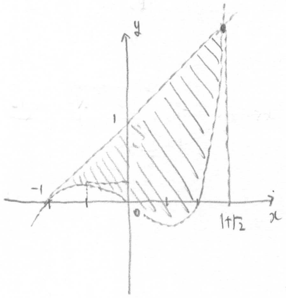
[解] $\begin{cases} x \leq 0 \text{の時.} f(x) = -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, \\ x \geq 0 \text{の時.} f(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{cases}$

である。$x \leq 0$ の時. $f'(x) = -2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ だから.

$x=-1$ の接線は

$$y = x+1$$

であるから. $x \geq 0$ での交点は $x = 1+\sqrt{2}$ である。



よって. 求める面積Sとして

$$S = \int_{-1}^{0} \left\{(x+1) + (x^2+x)\right\} dx + \int_{0}^{1+\sqrt{2}} \left\{(x+1) - (x^2-x)\right\} dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x+1)^2 dx + \int_{0}^{1+\sqrt{2}} (-x^2+2x+1) dx$$

$$= \frac{1}{3} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{0}^{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{3} + (1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{3}(1+\sqrt{2})^3$$

$$= \frac{6+4\sqrt{2}}{3}$$ //

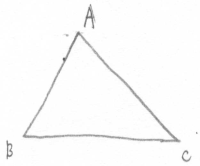
第 4 問

[解] $n>3$の時, $n\not\equiv 0 \pmod 3$であり, $n^2+2\equiv 0 \pmod 3$となり, n^2+2は素数ではない。

$n=3$の時, $n^2+2=11 \in \text{prime}$, $n=2$の時$n^2+2=6 \notin \text{prime}$. したがって, 示された. ■

[解] 点Xに対し、$\overrightarrow{AX}=\vec{x}$ とおく。s, t, u を $0<s, t, u<1$ をみたす実数として

$$\vec{p}=s\vec{b},\ \vec{q}=t\vec{c}+(1-t)\vec{b},\ \vec{r}=u\vec{c}$$

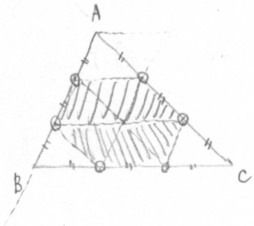


とかける。△PQRの重心Gとする。

$$3\vec{g}=(t+u)\vec{c}+(1+s-t)\vec{b}$$

$$\vec{g}=\frac{t}{3}(\vec{c}-\vec{b})+\frac{s}{3}\vec{b}+\frac{u}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

だから、下図斜線部(境界含まず)



第 6 問

[解] $F'(\theta) = \theta\cos(\theta+\alpha)$ だから. 下表をうる.

θ	0		$\frac{\pi}{2}-\alpha$		$\pi/2$
F'		$+$	0	$-$	
F		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって、$F(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ …① で最大。

$$F(\theta) = \Big[x\sin(x+\alpha) + \cos(x+\alpha)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \quad (\because ①)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\alpha$$

〃