自然数 n に対して

$$I_n = \int_0^1 x^2 |\sin n\pi x| dx$$

とおく．極限値 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

[解] 以下，

$$a_k = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^2 \, |\sin n\pi x| \, dx$$

とおく．$f(x) = x^2$ とおき，$\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ で $f(x)$ の最大，最小を与える x をそれぞれ M_k, m_k とすると，$|\sin n\pi x| \geq 0$ から，

$$f(m_k)|\sin n\pi x| \leq f(x)|\sin n\pi x| \leq f(M_k)|\sin n\pi x|$$

なる不等式を満たす．両辺を $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ で積分して

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(m_k)|\sin n\pi x| \, dx \leq a_k \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(M_k)|\sin n\pi x| \, dx \tag{1}$$

である．ここで両辺の積分は

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |\sin n\pi x| \, dx = \frac{2}{n\pi}$$

と実行できるから，eq. (1) に代入して

$$\frac{2}{n\pi} f(m_k) \leq a_k \leq \frac{2}{n\pi} f(M_k)$$

を得る．$k = 1, 2, \cdots, n$ について和をとって

$$\frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{n} f(m_k) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)$$

$$\therefore \frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{n} f(m_k) \leq I_n \leq \frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{n} f(M_k) \tag{2}$$

である．両辺の和は区分求積法によって評価でき，$n \to \infty$ のとき

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(m_k) = \int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{3} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(M_k) = \int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{3} \end{cases}$$

だから，eq. (2) に代入して，挟み撃ちの原理から求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{2}{3\pi}$$

である．$\cdots$(答)

[解説] 典型的な積分と極限の問題．類題として 1999 年の第 1 問が挙げられるが，解法はほぼ同じなので過去問演習を行なっていた人にとってはボーナス問題と思われる．