京大理系数学 2012

[解]

(1)

1° $0<a<1$

$a^n \to 0$ $(n\to\infty)$ から

$$(1+a^n)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1^0 = 1$$

2° $a=1$

$$(1+1)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$$

3° $1<a$

$$(1+a^n)^{\frac{1}{n}} = \left\{a^n\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= a\sqrt[n]{1+1/a^n} \longrightarrow a$$

以上から

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 1 & (0<a\leq 1) \\ a & (1<a) \end{cases}$$

//

(2) $A=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ とおく。

$$A=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log(x^2+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\log(x^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x}\,\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\log 4-\log 2\right\}+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-1\right)\log 2+\left[\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\log 2+\frac{1}{12}\pi$$

//

[解2]

(1)

1° $1<a$

$a^n<1+a^n<2a^n$ から $a<\sqrt[n]{1+a^n}<2^{\frac{1}{n}}\cdot a$

2° $0<a\leq 1$

$1<1+a^n\leq 2$ から $1<\sqrt[n]{1+a^n}<2^{\frac{1}{n}}$

ではさみうち. (以下略)

第 2 問

[解] 点Xに対し $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ とする。$\triangle OABC$ の一辺1として良く，

$$\vec{p}=\alpha\vec{a},\ \vec{q}=\beta\vec{b},\ \vec{r}=\gamma\vec{c} \quad (0<\alpha,\beta,\gamma<1)$$

とおく。$\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RP}$ から

$$|\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}|^2=|\beta\vec{b}-\gamma\vec{c}|^2=|\gamma\vec{c}-\alpha\vec{a}|^2$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ だから $k>0$ として

$$\begin{cases} \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=k & \cdots ① \\ \beta^2-\beta\gamma+\gamma^2=k & \cdots ② \\ \gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2=k & \cdots ③ \end{cases}$$

①,②から

$$\alpha^2-\alpha\beta=\gamma^2-\beta\gamma$$

$$(\alpha^2-\gamma^2)-\beta(\alpha-\gamma)=0$$

$$(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)=0 \quad \cdots ④$$

同様に

$$(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta)=0 \quad \cdots ⑤$$

$$(-\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\gamma)=0 \quad \cdots ⑥$$

④から $\alpha=\gamma$ 又は $\beta=\alpha+\gamma$ である。

1° $\alpha=\gamma$

⑤,⑥から $\beta=\alpha=\gamma$ であり，この時 $AB /\!/ PQ$, $BC /\!/ QR$, $CA /\!/ RP$ が成り立つ

(∵相似)

2° $\beta=\alpha+\gamma$

⑤及び $\alpha\neq 0$ から $\alpha=\beta$ となり，したがって $\gamma=0$ が従うから矛盾

以上から示された ∎

第 3 問

[解] $\alpha = x+y$, $\beta = xy$ とおくと、題意及び x, y の実数条件から.

$$\begin{cases} \alpha^2 - 4\beta \geq 0 & \cdots ① \\ \alpha^2 - \beta = 6 & \cdots ② \end{cases}$$

又、与式 $f(\alpha, \beta)$ とすると

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= xy(x+y) - (x+y)^2 + (x+y) \\ &= \beta\alpha - \alpha^2 + \alpha \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

となる。②から $\beta = \alpha^2 - 6$ だから ①.③に代入

$$\begin{cases} \alpha^2 - 4(\alpha^2 - 6) \geq 0 \\ f(\alpha, \beta) = \alpha^3 - \alpha^2 - 5\alpha \end{cases}$$

第1式から $-2\sqrt{2} \leq \alpha \leq 2\sqrt{2} \cdots ④$ である.

$$\frac{d}{d\alpha} f = 3\alpha^2 - 2\alpha - 5 = (3\alpha - 5)(\alpha + 1)$$

よって下表を得る。

α	$-2\sqrt{2}$		-1		$\frac{5}{3}$		$2\sqrt{2}$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-6\sqrt{2}-8$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	$6\sqrt{2}-8$

よって、$3 > 6\sqrt{2} - 8$ 及び $-6\sqrt{2} - 8 < -\frac{175}{27}$ から

$$-2(3\sqrt{2} + 4) \leq f \leq 3$$

第 4 問

[解]

(1) $\sqrt[3]{2}$が有理数だとする。この時 $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$; $a \perp b$ --- ① として

$$\sqrt[3]{2} = \frac{b}{a} \qquad \therefore\ 2a^3 = b^3$$

とかける。したがって b^3 が 2 を因数に持つ。2 は素数だから b は 2 の倍数。この時 $b = 2b'$ $(b' \in \mathbb{N})$

とかけるから

$$a^3 = 4b'^3$$

となり同じく a も 2 の倍数となり、$a \perp b$ に反する。よって矛盾し、$\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ ■

(2) $\alpha = \sqrt[3]{2}$ とおく。$Q(x)$ を有理数係数の整式として

$$P(x) = Q(x)(x^3-2) + ax^2+bx+c \qquad \cdots ☆$$

とおける。ただし、$a, b, c \in \mathbb{Q}$ である。$P(\alpha)=0$ から

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \qquad \cdots ①$$

ここで $a=0$ の時、$b=c=0$ なら①をみたすが その他の場合は (1) から $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{Q}$ に

反する。 $\cdots$ ②

又、$a \neq 0$ の時 x^3-2 を $R(x) = ax^2+bx+c$ でわった商 $S(x)$、あまり $T(x)$ として

$$x^3 - 2 = R(x)S(x) + T(x) \qquad \cdots ★$$

ただし $T(x)$ は 1次以下の整数で、$x = \alpha$ として

$$T(\alpha) = 0$$

だが、これは上記の $a=0$ の場合と同様にして、$T(x) \equiv 0$ となる。よって

$$x^3 - 2 = R(x)S(x) = (x^2+\alpha x+\alpha^2)(x-\alpha)$$

で、$R(x)$ は 2次式だから

$$R(x) = x^2 + \alpha x + \alpha^2$$

となり、$R(x)$ の係数が有理数であることに反し矛盾。 $\cdots$ ③

②③から、$a=b=c=0$ で、この時 $P(x)$ は x^3-2 で割り切れる ■

[解2]

(★以下)

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \qquad \cdots ④$$

両辺に α をかけて $\alpha^3 = 2$ から

$$b\alpha^2 + c\alpha + 2a = 0 \qquad \cdots ⑤$$

④ × b − ⑤ × a より

$$(b^2 - ac)\alpha + bc - 2a^2 = 0$$

$\alpha \notin \mathbb{Q}$ から

$$\begin{cases} b^2 - ac = 0 \\ bc - 2a^2 = 0 \end{cases}$$

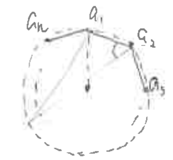
c を消して、$a \neq 0$ とすると

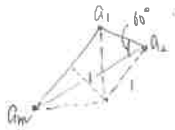
$$b^3 = 2a^3 \qquad \therefore\ \alpha = \frac{b}{a}$$

から $\alpha \in \mathbb{Q}$ に反し矛盾。よって $a=b=c=0$ となり、示された ■

[解]

(p) 正n角形の頂点を右のように$a_1 \sim a_n$とする。$\angle a_1 a_l a_m$ ($l<m$) が60°に等しい時、正n角形は円に内接することと円周角の定理から. $l=2$の時を考えれば良い。正n角形の内接する円の中心Oとし、この半径1として良い。$\triangle a_1 a_2 a_m$に正弦定理を用いて.





$$\frac{\overline{a_1 a_m}}{\sin 60^\circ} = 2 \qquad \therefore \overline{a_1 a_m} = \sqrt{3} \qquad \cdots ①$$

一方. $\angle a_1 O a_m = 2\pi \frac{n-m+1}{n}$ だから.

$$\overline{a_1 a_m} = 2\sin \pi \frac{n-m+1}{n} \qquad \cdots ②$$

①②から

$$\sin \frac{n-m+1}{n}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\pi - \frac{m-1}{n}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{m-1}{n}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

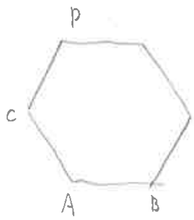
$3 \leq m \leq n$ から. $0 < \frac{m-1}{n} < 1$ だから.

$$\frac{m-1}{n}\pi = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi$$

$$n = 3(m-1) \text{ or } 3\frac{m-1}{2}$$

$m \in \mathbb{N}$ 及び $2 \perp 3$ から. nは3の倍数である。よって(p)は正しい #

(q) 右図のような正六角形内にA, B, C, Dをとる



この時. (p)の議論から. $\angle ACB = \angle ADB \cdots ③$ であり かつ $AC < AD$, $BC < BD \cdots ④$となる。したがって ③. ④から このような4点 A, B, C, Dは(q)の反例になる。よって (q) は正しくない #

第 6 問

[解] $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \le y_{n+1} \le 1+\sqrt{3}$ となる時. 漸化式から ……①

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} - X_{n+1} \le \frac{1}{Y_n} \le 1+\sqrt{3} - X_{n+1}$$

となり. $\frac{1}{Y_n} > 0$ から. 右側の不等式より. $1+\sqrt{3} - X_{n+1} > 0$ $\therefore$ $X_{n+1} = 1, 2$ が必要.

また $Y_1 = X_1$ も条件をみたすことから, $X_1 = 1, 2$。以上あわせて. 任意のnで $X_n = 1, 2$ となる。この時. X_{n+1} で場合分け.

1° $X_{n+1} = 1$

①から

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1 \le \frac{1}{Y_n} \le 1+\sqrt{3} - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \le Y_n \le 1+\sqrt{3}$$

ならば良い。

2° $X_{n+1} = 2$

①から

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 2 \le \frac{1}{Y_n} \le 1+\sqrt{3} - 2$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \le Y_n$$

だから. ①となる時

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} \le Y_n < \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \text{の時.} \quad X_{n+1} = 1 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \le Y_n \le 1+\sqrt{3} & \text{の時.} \quad X_{n+1} = 1 \text{ or } 2 \\ 1+\sqrt{3} < Y_n & \text{の時} \quad X_{n+1} = 2 \end{cases}$$

である。ここで, $Y_1 \ge 1$ と $X_n \ge 1$ から 帰納的に $Y_n \ge 1$ であることから.

$$p_{n+1} = \frac{2}{6} p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n)$$

$$= \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6}$$

ここで $p_1 = \frac{1}{6}$ から.

$$p_n = \frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

//