

年

番

i を虚数単位とし $a = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ とおく . また n はすべての自然数にわたって動くとする . このとき ,

- (1) a^n は何個の異なる値をとり得るか .
- (2) $\frac{(1-a^n)(1-a^{2n})(1-a^{3n})(1-a^{4n})(1-a^{5n})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)}$ の値を求めよ

[解] ドモアブルの定理から $a^n = 1$ だから ,
 $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ に対して

$$a^{6n+k} = a^k \quad (1)$$

となる .

- (1) (1) から a^k についてのみ考えればよいが ,
 このとき $0 \leq i < j \leq 5$ に対して $a^i = a^j$
 と仮定すると $a^{j-i} = 1$ となって矛盾 . 故に
 $a^i \neq a^j$ だから a^k はすべて異なり , 求める
 のは 6 個である .

- (2) 合同式の法を 6 とする .

(i) $n \equiv \pm 1$ の時

$$\{n, 2n, 3n, 4n, 5n\} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

であるから , (1) から (与式) = 1 である .

(ii) otherwise

$\{n, 2n, 3n, 4n, 5n\}$ の中に合同式で 0 に
 等しいものがあるので , (与式) = 0 と
 なる .

以上から

$$(\text{与式}) = \begin{cases} 1 & (n \equiv \pm 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

となる .