東大理科数学 1970

70

第1問

[解] (1) $a^6=1$ から、$k=0,1,2,3,4,5$ に対し、$a^{6n+k}=a^k$ $(n\in\mathbb{N})$ だから、$k=0,1,2,\cdots,5$ のみしらべれば良い。しかし、a^k はいずれも異なるので、6コ//

(2) 合同式の法を6とする。与式をIとする。

$n\equiv 0,\pm2,3$ の時 I=0
$n\equiv \pm1$ の時 I=1//

である。

170

第 2 問

[解]

(1) 4回操作した時、$x=\pm1, \pm3$ にある確率は明らかに0である。 …①

又、$x=\pm2$ にいる確率は等しく、 $\dfrac{{}_4C_1}{2^4}$ (表が3回) $= \dfrac{1}{4}$ …②

$x=\pm4$ 〃 $\dfrac{{}_4C_0}{2^4}$ (表が4回) $= \dfrac{1}{16}$ …③

①〜③より、余事象から、$x=0$ にいる確率は $1-2\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{3}{8}$ となる。

以上をまとめて、

$$\begin{cases} x=\pm1, \pm3 & \cdots 0 \\ x=0 & \cdots 3/8 \\ x=\pm2 & \cdots 1/4 \\ x=\pm4 & \cdots 1/16 \end{cases}$$
//

(2) $x=n-2$ にいるのは、$n-1$ 回表が出た時で、 $\dfrac{{}_nC_{n-1}}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}$ //

$x=n-4$ 〃 $n-2$ 回表が出た時で、 $\dfrac{{}_nC_{n-2}}{2^n}=\dfrac{n(n-1)}{2^{n+1}}$ //

$n-1$

$\frac{1}{4}t-\frac{3}{2}=0$ $\quad t-6$

第 3 問

[解] 時刻 t での A, B の P からのキョリ $A(t)$, $B(t)$ は、$A(0)=0$, $B(0)=25$ より、

$$\begin{cases} A(t)=\int_0^t u\,dt + A(0) = ut \\ B(t)=\int_0^t v\,dt + B(0) = \frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+25 \end{cases}$$

とかける。$B(t) \leqq 25 \iff 0 \leqq t \leqq 6$ だから、($\because t \geqq 0$) A が B においつくには、

$y=A(t)$, $y=B(t)$ のグラフが $0<t<6$ で少なくとも1回交われば良い。

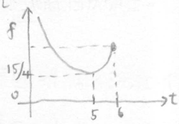
y を消して、

$$A(t)=B(t)$$

$$\therefore u=\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{25}{t} \equiv f(t) \quad (\because t>0) \quad \cdots ①$$

とすると、$f'(t)=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}-\frac{25}{t^2}=\frac{(t-5)(t^2+2t+10)}{2t^2}$ より下表をうる。

t	0		5		6
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{15}{4}$	$\nearrow$	$\frac{25}{6}$



よって $f(t) \to +\infty$ ($t \to +0$) とあわせて、グラフは右上図。したがって、① かつ

$0<t<6$ をみたす t が存在する u の条件は

$$\frac{15}{4} \leqq u$$

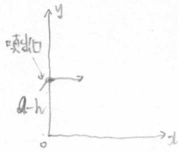
よって、もとめる min $u=\frac{15}{4}$ [m/s] $_{//}$ である。

第 4 問

[解]

(1) 時刻 $t=0$ に穴をとび出した水の、時刻 t でのイチを (X, Y) とする。

ただし、右のように xy 平面をとる。



$$\begin{cases} X=\sqrt{2gh}\,t \\ Y=a-h-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$\sqrt{2gh} \neq 0$ から、t をけして

$$Y=-\frac{1}{2}g\,\frac{X^2}{2gh}+a-h$$

$$=\frac{-1}{4h}X^2-h+a \quad \cdots ①$$

したがって、水平到達キョリは $X=2\sqrt{h(a-h)}$ //

(2) (1)の値を最大にするのは $h=\frac{1}{2}a$，つまり 水槽の中点 //

(3) ①で $0<h<a$ とするときの (X, Y) のとる値を考える。

$$Y'=-1+\frac{X^2}{4h^2}$$

だから、下表をうる。($\because$ (2)から $0\leq X<a$)

h	0		$\frac{X}{2}$		a
Y'		$+$	0	$-$	
Y	$(-\infty)$	$\nearrow$	$a-X$	$\searrow$	$-\frac{X^2}{4a}$

これと $0<Y$ から、

$$0<Y\leq a-X$$ //

がもとめる領域である。