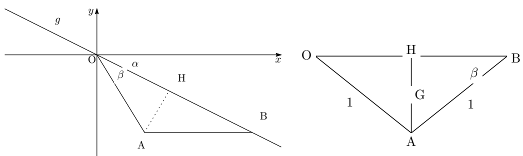
図で，g は水平面に対する傾き $\tan\alpha$ が $1/2$ であるような定直線とし，OA，AB は A で (ちょうつがいで) 連結された長さの等しい棒で，その端 O は g 上の定点に固定され，OA は g を含む円直面ないで自由に回転し，他の端 B は g 上を動くことができるようになっている．

このとき，折れ線 OAB の重心 G(OA，AB の中点を結ぶ線分の中点) が最低になるのは，OA の水平面となす傾き $\tan\theta$ がいくらになるときか．

[解] $\cos\theta = c$，$\sin\theta = s$ とおく． O を原点とし，水平線を x 軸とする下図のような座標系で考える．



$OA = 1$ として考えて一般性を失わない．また G が最低のときを考えるので，A は g の下側にあるとしてよい．簡単のため $\beta = \theta - \alpha$ とおく．A から g に下ろした垂足 H とすると，$OA = AB$ ゆえ，G は AH の中点である．$OH = \cos\beta$ ゆえ，

$$A(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$$
$$H(\cos\beta\cos(-\alpha), \cos\beta\sin(-\beta))$$

となるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{HA}} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{1}{2}\cos\beta\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ -\sin\alpha\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}c \\ -s\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．この y 座標 Y として

$$Y = \frac{-1}{2}(\sin\alpha\cos\beta + s)$$

だから，これが最小になる時の $\tan\theta$ を求めればよい．

$$\alpha + \beta = \theta$$

に注意して

$$\begin{aligned}-2Y &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) + s \\ &= \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}\sin(2\alpha - \theta) \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

題意から $\tan\alpha = 1/2$ であるから

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{5}$$
$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{3}{5}$$

が従う．①に代入して

$$\begin{aligned}Y &= \frac{-1}{4}[3s + c\sin 2\alpha - s\cos 2\alpha] \\ &= \frac{-1}{4}[3s + \frac{4}{5}c - \frac{3}{5}s] \\ &= \frac{-1}{5}(3s + c) \\ &\geqq \frac{-1}{5}\sqrt{3^2+1} \qquad (\because \text{コーシー})\end{aligned}$$

統合成立条件は

$$\begin{pmatrix}c \\ s\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1 \\ 3\end{pmatrix}$$
$$s - 3c = 0$$

の時で，この時

$$\tan\theta = 3$$

である．$\cdots$(答)