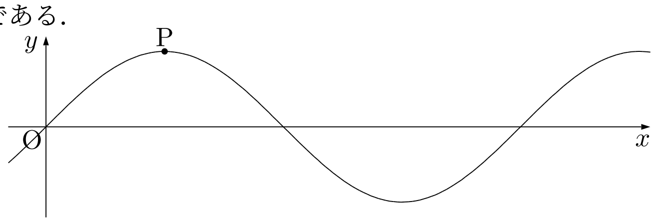
xy 平面上の曲線 $y = \sin x$ にそって，図のように左から右へ進む動点 P がある．P の速さが一定 V $(V > 0)$ であるとき，P の加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ の大きさの最大値を求めよ．ただし，P の速さとは P の速度ベクトル $\vec{v} = (v_1, v_2)$ の大きさであり，また t を時間として $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{dv_1}{dt}, \dfrac{dv_2}{dt}\right)$ である．



[解] 時刻 t での P の座標を $(x, \sin x)$ で表す．そこで以下

$$c = \cos x s = \sin x$$

とする．速度は

$$\vec{v} = (x', x'c)$$

であるから，題意より

$$V^2 = x'^2(1 + c^2) \qquad \cdots ①$$

となる．①の両辺 t で微分して

$$0 = 2x'x''(1 + c^2) - 2x'^3cs$$

$V > 0$ から $x' \neq 0$ だから

$$x''(1 + c^2) - x'^2cs = 0$$
$$x'' = \frac{x'^2cs}{1 + c^2} \qquad \cdots ②$$

さらに，

$$\vec{\alpha} = \left(x'', -x'^2s + x''c\right)$$

だから，加速度ベクトルの大きさ L として

$$\begin{aligned}
L^2 &= x''^2 + (-x'^2s + x''c)^2 \\
&= x''^2 + x'^4s^2 - 2x'^2x''cs + x''^2c^2 \\
&= x''^2(1 + c^2) - 2x'^2csx'' + x'^4s^2 \\
&= \left(\frac{x'^2cs}{1 + c^2}\right)^2(1 + c^2) - 2x'^2cs\frac{x'^2cs}{1 + c^2} + x'^4s^2 \\
&\qquad (\because ②) \\
&= \frac{-x'^4c^2s^2}{1 + c^2} + x'^4s^2 \\
&= \left(\frac{x'^4s^2}{1 + c^2}\right) \\
&= \frac{s^2}{1 + c^2}\frac{V^4}{(1 + c^2)^2} \qquad (\because ①) \\
&= \frac{1 - c^2}{(1 + c^2)^3}V^4
\end{aligned}$$

である．ここで $0 \leq c^2 \leq 1$ で，同区間内で L^2 は c^2 について単調減少．故に L^2 は $c^2 = 0$ で最大値 V^4 をとるので

$$\max L = V^2 (> 0)$$

である．$\cdots$(答)