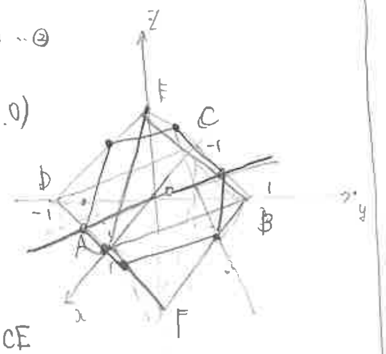
京大理科数学 1992

120/150分

		計	思	総	
[1]	空間	B	A	A	20
[2]	多変数	A	A	A	20
[3]	図形	B	B	B	20
[4]	確率	A	A	A	20
[5]	空間	B	B	B	20
[6]	場合の数	B	B	B	20

[解] $\begin{cases} a, b, c > 0 \cdots ① \\ \pi : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0 \cdots ② \end{cases}$



②の表式から、πは3点$(0, 0, 0)$

$(a, -b, 0)$ $(0, b, -c)$を通る

平面で、切り口は右のような

六角形になる。従って、

AD, AF, DE, BC, BF, CE

との交点

AD: $z=0, y=x-1$ より交点 $\left(\dfrac{a}{a+b}, \dfrac{-b}{a+b}, 0 \right)$

AF: $y=0, z=x-1$ より交点 $\left(\dfrac{a}{a+c}, 0, \dfrac{-c}{a+b} \right)$

DE: $x=0, z=y+1$ より交点 $\left(0, \dfrac{-b}{b+c}, \dfrac{c}{b+c} \right)$

BC: $z=0, y=x+1$ より交点 $\left(\dfrac{-a}{a+b}, \dfrac{b}{a+b}, 0 \right)$

BF: $x=0, z=y-1$ より交点 $\left(0, \dfrac{a}{b+c}, \dfrac{-c}{b+c} \right)$

CE: $y=0, x=z+1$ より交点 $\left(\dfrac{-a}{a+c}, 0, \dfrac{c}{a+c} \right)$ //

/20

第 2 問

[解] $\sin\theta = S$, $\cos\theta = C$ と書く. $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

(1) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ から $0<2\theta<\pi$, $0<3\theta<\frac{3}{2}\pi$ より

$\sin 3\theta = \sin 2\theta \Leftrightarrow 3\theta = 2\theta,\ 3\theta = \pi - 2\theta$

$\Leftrightarrow \underline{\theta = \frac{\pi}{5}}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

(2) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ に注意して

(与式) $\Leftrightarrow 4c^2 - 2mc - n - 1 = 0$

より これが解を持つ条件は, 左辺 $f(c)$ $(0<c<1)$, 判別式 D として

$f(0) = -(n+1) < 0$ に注意すると, $f(1) > 0 \Leftrightarrow 3 - 2m - n > 0$

である. m, n が非負整数であることから.

$(m, n) = \underbrace{(0,0)}_{①}\ \underbrace{(0,1)}_{②}\ \underbrace{(0,2)}_{③}\ \underbrace{(1,0)}_{④}$

である

1°の時

$f(c) = 4c^2 - 1 = 0$ ∴ $c = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

2°の時

$f(c) = 4c^2 - 2 = 0$ ∴ $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{4}$

3°の時

$f(c) = 4c^2 - 3 = 0$ ∴ $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

4°の時

(与式) $\Leftrightarrow \sin 3\theta = \sin 2\theta$ だから. (1) から $\theta = \frac{\pi}{5}$

以上に $0<c<1$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ を用いた. 従って解は

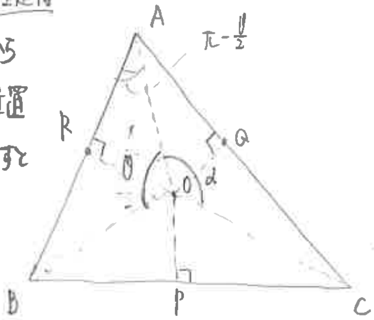
$(m, n, \theta) = \left(0, 0, \frac{\pi}{3}\right) \left(0, 1, \frac{\pi}{4}\right) \left(0, 2, \frac{\pi}{6}\right) \left(1, 0, \frac{\pi}{5}\right)$

/20

第 3 問

[解] 外心から下ろした垂足は各辺の中点になっているから*

Oを原点とする各点の位置ベクトルをその小文字で表すと



$$\begin{cases} \vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) \\ \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}) \\ \vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \end{cases}$$

これを与式に代入して

$$\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) + \frac{2}{2}(\vec{a}+\vec{c}) + \frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b}) = 0$$

$$\underline{5\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c}=0}_{(1)} \quad \cdots ①$$

である。変形して

$$\overrightarrow{AO} = \frac{4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{12}$$

$\overline{AB}=k$, $\overline{AC}=m$, $\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$のなす角θ $(0<k, m;\ 0<\theta<\pi)$として

*から

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=0 \\ \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} -2k+3m\cos\theta=0 & \cdots ② \\ -3m+4k\cos\theta=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

②から $k=\frac{3}{2}m\cos\theta$ だから、③に代入して $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$ $(\because m\neq 0)$

$k>0$, $m>0$ から $\cos\theta>0$ で $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore$ $\underline{\angle BAC=\frac{\pi}{4}}_{(2)}$ である。

[別 − 円周角を考えて…]

①から$\vec{a}$を消去して $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ がすぐ出ると予想しがち。

/20

第 4 問

[解] (1) Xが3でわり切れないのは、n回とも1,2,4,5のいずれかがでる確立だから、排反を考えて、もとめるのは

$$1-\left(\frac{4}{6}\right)^n = \underline{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

(2) $\begin{cases} A \cdots X\text{が}3\text{でわり切れる} \\ B \cdots X\text{が}2\text{でわり切れる} \end{cases}$ と事象を定めると、もとめる確立は

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) \quad \cdots ①$$

である。P(A)は(1)でもとまっており、B, A∪Bは排反を考えて

$$P(B) = 1-\left(\frac{3}{6}\right)^n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(A\cup B) = 1-\left(\frac{2}{6}\right)^n = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

だから、①に代入

$$P(A\cap B) = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

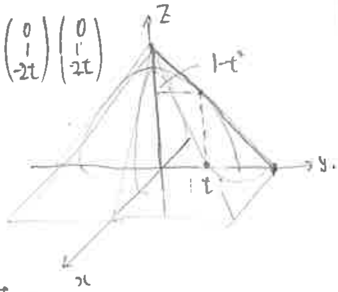
$$= \underline{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

/20

第 5 問

[解] 題意の曲面は $z=1-(x^2+y^2)$ だから各接平面の接線ベクトルは順に $\begin{pmatrix}-1\\0\\-2t\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\2t\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\-2t\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\2t\end{pmatrix}$

となり、接平面の方程式は



$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\0\\1-t^2\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}1\\0\\-2t\end{pmatrix}$$

などとなり、x,y軸との交線は

$$x=\pm\frac{t^2+1}{2t},\quad y=\pm\frac{t^2+1}{2t}\qquad \cdots☆$$

となるから、4接平面とxy平面で囲まれる立体は (z軸との交点 $(0,0,t^2+1)$)

底面が一辺 $\frac{t^2+1}{t}$ の正方形、高さ $1+t^2$ の四角錐で、体積 $V(t)$ は

(1) $V(t)=\frac{1}{3}(t^2+1)\frac{(t^2+1)^2}{t^2}=\underline{\frac{1}{3}\frac{1}{t^2}(t^2+1)^3}$ //

(2) $V(t)>0$ から $(\because 0<t<1)$ (1)の両辺自然対数とって、微分して

$$\log V(t)=-\log 3+3\log(t^2+1)-2\log t$$

$$\frac{V'(t)}{V(t)}=\frac{6t}{t^2+1}-\frac{2}{t}=\frac{2(2t^2-1)}{t^2+1}$$

$V(t)>0$ から表を得る

t	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
V'		$-$		$+$	
V		↘		↗	

従って $\underline{t=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ の時 $\underline{\min V(t)=\frac{9}{4}}$ をとる.

☆論述がムズかしい…

/20

第 6 問

[解]

(1) $n=1$では成立しているので、$n=k\in\mathbb{N}$での成立を仮定すると、

$$a_{k+1}^2+b_{k+1}^2=4a_k^2+4b_k^2+9c_k^2-2(4a_kb_k-6a_kc_k-6b_kc_k) \quad (\because カテイ)$$
$$=c_{k+1}^2$$

より$n=k+1$でも成立。以上から示された。■

(2) まず、$c_n>0$を帰納的に示す。$n=1$では成立するので$n=k\in\mathbb{N}$での成立を仮定する。

$$c_{k+1}>0 \Leftrightarrow 3c_k>2(a_k+b_k) \Leftrightarrow 9c_k^2>4(a_k+b_k)^2 \quad (\because 両辺0以上)$$
$$\Leftrightarrow 9(a_k^2+b_k^2)>4(a_k+b_k)^2 \Leftrightarrow 4(a_k-b_k)^2+c_k^2>0$$

だが、カテイより最後の不等式は成立するので、$n=k+1$でも成立。以上から$c_n>0$である。■

次に、

$$c_n\geq c_{n+1} \Leftrightarrow a_n+b_n\geq c_n \Leftrightarrow (a_n+b_n)^2\geq c_n^2 \quad (\because 両辺0以上)$$
$$\Leftrightarrow 2a_nb_n\geq 0$$

で最後の不等式は成立するから、$c_n\geq c_{n+1}$である。■

(3) (2)から

$$\begin{cases} a_nb_n\neq 0 \Rightarrow c_n>c_{n+1} \\ a_nb_n=0 \Rightarrow c_n=c_{n+1} \end{cases}$$

だから、

$$a_mb_m\neq 0,\ a_{m+1}b_{m+1}=0 \quad \cdots ①$$

である。以下$a=a_m$などと表す。

1° $a_{m+1}=0$の時

漸化式及び(1)から、

$$\begin{cases} 2c=a+2b \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases}$$

aを消して、

$$(b-c)(5b-3c)=0$$

$b=c$とすると、$a^2+b^2=c^2$より$a=0$で、①に反する。よって$5b=3c$で、以上から

$$a:b:c=4:3:5$$

2° $b_{m+1}=0$の時

a_n, b_nの対称性及び1°から

$$a:b:c=3:4:5$$

以上から

$$a_m:b_m:c_m=3:4:5 \text{ or } 4:3:5$$