

n を 2 以上の偶数とする. 2 つの曲線 $C_1: y = x^n$ と $C_2: y = n^x$ について, 次の問いに答えよ.

1. C_1 と C_2 は $x < 0$ において, ただ 1 つの点 P_n で交わることを示せ.
2. C_1 と C_2 の交点の個数を求めよ.
3. P_n の $n \rightarrow \infty$ のときの極限の位置を求めよ.

[解] (1) n は偶数とし, $f_n(x) = x^n$, $g_n(x) = n^x$ とおく.

(1) $x < 0$ の時. $t = -x$ とおくと, $t > 0$ であり, $f_n(x)$ と $g_n(x)$ が一致するとすると

$$\begin{aligned} f_n(x) &= g_n(x) \\ \Leftrightarrow t^n &= \left(\frac{1}{n}\right)^t \quad (*) \end{aligned}$$

両辺正だから, 自然対数をとって

$$\begin{aligned} n \log t &= t \log n \\ \Leftrightarrow \frac{\log t}{t} &= \frac{\log n}{n} \quad (\text{ただし } x > 0) \quad (**) \quad (1) \end{aligned}$$

である. ここで $h(t) = \frac{\log t}{t}$ とおくと, 一階微分は

$$h'(t) = \frac{1 - \log t}{t^2}$$

であり, また $h(t)$ の極限値は

$$\begin{aligned} h(t) &\rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow +0) \\ h(t) &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

で与えられるから, $h(t)$ の増減表は table 1 となる.

表 1: $h(x)$ の増減表

| t | (0) | ... | e | ... | (∞) |
|------|---------------|------------|---------------|------------|--------------|
| h' | | + | 0 | - | |
| h | ($-\infty$) | \nearrow | $\frac{1}{e}$ | \searrow | (0) |

よって $h(t)$ のグラフは fig. 1 となる.

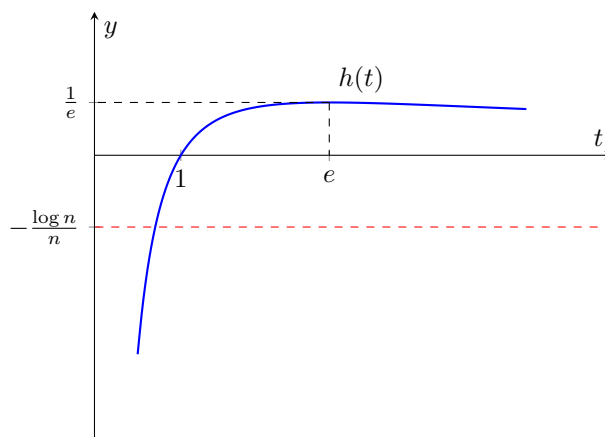


図 1: $h(t)$ の概形. $t = e$ で最大値をとる.

ここで n が 2 以上の偶数であるから $h(x) < 0$ であり, グラフの形から eq. (1) が成立する t が $0 < t < 1$ にただひとつ存在する. したがって C_1, C_2 は $x < 0$ にただ 1 つ交点を持つ. ... (答)

(2) $x > 0$ の時. $f_n(x), g_n(x)$ 共に正だから, (1) と同様に自然対数をとって考えると

$$\begin{aligned} f_n(x) &= g_n(x) \\ \Leftrightarrow n \log x &= x \log n \\ \Leftrightarrow \frac{\log x}{x} &= \frac{\log n}{n} \end{aligned}$$

である. n が 2 以上の偶数だから $\frac{\log n}{n} > 0$ であり, また fig. 1 より $\frac{\log n}{n} < 1/e$ である. 従って fig. 1 からこれみただけで x は 2 つある.

最後に $x = 0$ の時は $f_n(0) = 0$, $g_n(0) = 1$ だから, C_1, C_2 は交わらない.

以上で x について全ての場合が考えられた. $x < 0$ で一つ, $x = 0$ で 0 個, $x > 0$ で 2 つの解が存在する. C_1, C_2 の交点の数は $f_n(x) = g_n(x)$ の実解の数に等しいことからあわせて 3 つの交点がある. ... (答)

(3) $P_n(-x_n, y_n)$ とおくと, (1) の結果から $0 < x_n < 1$

である. P_n の条件から,

$$y_n = (-x_n)^n = n^{-x_n} \quad (2)$$

である.

$n \rightarrow \infty$ のとき, fig. 1 から $\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$ だから, eq. (1) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log x_n}{x_n} = 0$$

である. これを満たすには fig. 1 および $0 < x_n < 1$ から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \quad (3)$$

である. これを eq. (2) に代入して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{x_n} = 0 \quad (4)$$

である. eqs. (3) and (4) より, 求める P_n の極限值は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (-1, 0)$$

である.