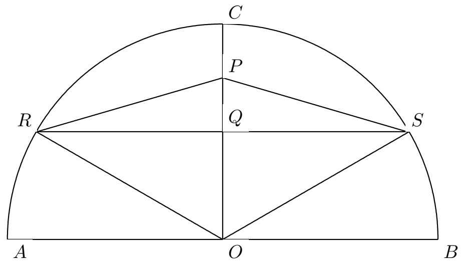
下の図において ABC は長さ 2 の線分 AB を直径とし，O を中心とする半円周，P は AB に垂直な半径 OC 上の動点とする．

k を正の定数とし，線分 PO を $k:1$ に内分する点 Q を通って AB に平行な弦を RS とすれば，P をどこにとったとき四辺形 $ROSP$ の面積が最大になるか．



[解] O を原点とし，B を x 軸正方向，C を y 軸正方向とする座標系を考える．$P(0,(1+k)t)$ とおく．すると，まず $0 \leq (1+k)t \leq 1$ より

$$0 \leq t \leq \frac{1}{1+k} \qquad (1)$$

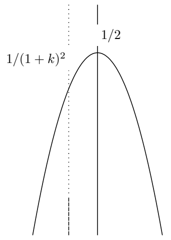
である．また，内分点の条件から $Q(0,t)$ であるから，S の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + t^2 &= 1 \\ x &= \sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

である．故に四辺形の面積 $f(t)$ として

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}|OP||RS| \\ &= |OP||QS| \\ &= (1+k)t\sqrt{1-t^2} \\ &= (1+k)\sqrt{-\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

グラフの概形は下図のようである．



故に，k の値によってこの最大値は以下のようになる．

(i)$1/(1+k)^2 \leq 1/2 \therefore -1+\sqrt{2} \leq k$ の時
$t^2 = 1/(1+k)^2$ の時，つまり $P = C$ の時 $f(t)$ は最大である．

(ii)$1/2 \leq 1/(1+k)^2 \therefore -1+\sqrt{2} \geq k$ の時
$t^2 = 1/2$ つまり $t = 1/\sqrt{2}$，P の y 座標が $(k+1)/\sqrt{2}$ の時，$f(t)$ は最大である．

以上から，求める P の位置は，

$$\begin{cases} |PO| = \dfrac{k+1}{\sqrt{2}} & (k \leq -1+\sqrt{2}) \\ P = C & (-1+\sqrt{2} \leq k) \end{cases}$$

である．