$k>0$ とする．xy 平面上の二曲線 $y=k(x-x^3)$，$x=k(y-y^3)$ が第一象限に $\alpha\neq\beta$ なる交点 (α,β) をもつような k の範囲を求めよ．

[解]

$$\exists\alpha\exists\beta\begin{cases}\beta=k(\alpha-\alpha^3) & \text{(1a)}\\ \alpha=k(\beta-\beta^3) & \text{(1b)}\\ \alpha\neq\beta\quad 0<\alpha,\beta & \text{(1c)}\end{cases}$$

なる条件を調べればよい．

$$\text{(1a)}\wedge\text{(1b)}\iff\text{(1a)}-\text{(1b)}\wedge\text{(1a)}+\text{(1b)}$$

より同値変形して

$$\exists\alpha\exists\beta\begin{cases}\alpha+\beta=k\left\{(\alpha+\beta)-(\alpha^3+\beta^3)\right\}\\ \beta-\alpha=k\left\{(\alpha-\beta)-(\alpha^3-\beta^3)\right\}\\ \alpha\neq\beta\quad 0<\alpha,\beta\end{cases}$$

$$\iff\exists\alpha\exists\beta\begin{cases}1=k\left\{1-(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\right\}\\ -1=k\left\{1-(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\right\}\\ \alpha\neq\beta\quad 0<\alpha,\beta\end{cases}$$

$$\iff\exists\alpha\exists\beta\begin{cases}0=2k\left\{1-(\alpha^2+\beta^2)\right\}\\ 1=k\alpha\beta\\ \alpha\neq\beta\quad 0<\alpha,\beta\end{cases}$$

途中の変形に $\alpha+\beta\neq 0$，$\alpha-\beta\neq 0$ を用いた．然るに $k>0$ だから

$$\exists\alpha\exists\beta\begin{cases}1-(\alpha^2+\beta^2)=0 & \text{(2a)}\\ 1=k\alpha\beta & \text{(2b)}\\ \alpha\neq\beta\quad 0<\alpha,\beta & \text{(2c)}\end{cases}$$

このような $k_{>0}$ の条件を調べる．そこで $\cos\theta=c$，$\sin\theta=s$ とおく．$(0<\theta<\pi/2,\theta\neq\pi/4)$ (2a)，(2c) から $\alpha=c,\beta=s$ と置ける．(2b) に代入して

$$k=\frac{1}{sc}=\frac{2}{\sin 2\theta}$$

であって，θ の範囲から $0<\sin 2\theta<1$ であるから，求める k の範囲は

$$2<k$$

である．$\cdots$(答)

[別解 1](2a) 以下，$\alpha\beta$ 平面上に図示する方法も考えられる．この時は (2b) と原点の距離の二乗 L が

$$\begin{aligned}L&=\alpha^2+\beta^2\\&=\alpha^2+\left(\frac{1}{k\alpha}\right)^2\\&\geq 2\sqrt{\frac{1}{k^2}}\qquad(\alpha,k>0\text{ から AM-GM})\\&=\frac{2}{k}\end{aligned}$$

で与えられること，及び答号成立が $\alpha=\beta$ であって，グラフが連続であることから，

$$\frac{2}{k}<1\iff 2<k$$

となる．$\cdots$(答)

[別解 2](2a) 以下，α，β を解とする 2 次方程式を考えてもよい．$a=\alpha+\beta$，$b=\alpha\beta$ とおけば

$$\exists a\exists b\begin{cases}1=a^2-2b & \text{(3a)}\\ 1=kb & \text{(3b)}\\ \alpha\neq\beta\quad 0<\alpha,\beta & \text{(3c)}\end{cases}$$

を考えればよい．考える方程式は $x^2-ax+b=0$ であって，(3c) からこれが正の異 2 実解を持てばよいので，判別式 D として

$$\begin{aligned}&D>0 && a,b>0\\ \iff& a^2-4b>0 && a,b>0\end{aligned}$$

これに (3a)，(3b) を代入して a，b を消去する．$k>0$ から $a,b>0$ は自動的に満たされ，

$$\left(1+\frac{2}{k}\right)-\frac{4}{k}>0\iff 2<k$$

となる．$\cdots$(答)