a，b，c，d を正の数とする．不等式

$$\begin{cases} s(1-a)-tb>0 \\ -sc+t(1-d)>0 \end{cases}$$

を同時に満たす正の数 s，t があるとき，2 次方程式

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$$

は $-1<x<1$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つことを示せ．

[解] 与方程式の左辺 $f(x)$ とする．また

$$\begin{cases} s(1-a)-tb>0 & \cdots ① \\ -sc+t(1-d)>0 & \cdots ② \end{cases}$$

とする．

$1-a \leq 0$ つまり $1 \leq a$ の時，①が満たされず不適．故に

$$0<a<1 \qquad \cdots ③$$

このもとで，①を変形して

$$s>\frac{b}{1-a}t \qquad \cdots ④$$

また，$c>0$ だから，②を変形して

$$s<\frac{1-d}{c}t \qquad \cdots ⑤$$

である．ここで，$s>0$ だから，

$$\begin{aligned} 1-d&>0 \\ 0<d&<1 \qquad \cdots ⑥ \end{aligned}$$

である．

以上から

$$\begin{aligned} &\exists s_{>0}, \exists t_{>0}, ① \wedge ② \\ \Longleftrightarrow &\exists s_{>0}, \exists t_{>0}, ④ \wedge ⑤ \wedge ③ \\ \Longleftrightarrow &\exists t_{>0}, \frac{b}{1-a}t<\frac{1-d}{c}t \wedge ③ \\ \Longleftrightarrow &\frac{b}{1-a}<\frac{1-d}{c} \wedge ③ \\ \Longleftrightarrow &bc<(1-a)(1-d) \wedge ③ \qquad (\because c>0) \end{aligned}$$

である．

故に，a から d までが正であることと併せて，

$$\begin{aligned} f(\pm 1)&=(1+ad-bc)\mp(a+d) \\ &>(a+d)\mp(a+d)>0 \\ f(a)&=-bc<0 \qquad (-1<a<1) \end{aligned}$$

であるから，題意は示された．□