自然数 a, b, c が

$$3a = b^3, \quad 5a = c^2$$

を満たし，d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限るとする．

1. a は 3 と 5 で割り切れることを示せ．
2. a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ．
3. a を求めよ．

[解] 自然数 a, b, c に対して

$$\begin{cases} 3a &= b^3 \\ 5a &= c^2 \end{cases} \tag{1}$$

とおく．

(1) eq. (1) および $3, 5$ は素数であることから，b, c は各々 $3, 5$ でわり切れる．したがって，$b' = \frac{1}{3}b$, $c' = \frac{1}{5}c (\in \mathbb{N})$ として eq. (1) に代入して

$$\begin{cases} a &= 9b'^3 \\ a &= 5c'^2 \end{cases} \tag{2}$$

と書ける．従って a は $3^2 5^1$ でわり切れる．$\cdots$(答)

(2) 背理法を用いて示す．a の素因数として,$3, 5$ 以外の素数 $p \in \mathbb{N}_{\neq 1}$ があると仮定する．すると (1) と同様に，eq. (1) から

$$a = pa'$$
$$b = 3pb''$$
$$c = 5pc''$$

なる $a', b'', c'' \in \mathbb{N}$ が存在する．eq. (1) に代入すると

$$a' = 9p^2 b''^3 = 5pc''^2 \tag{3}$$

である．

したがって，a' が p^2 でわり切れるので，$a' = p^2 a''$ なる $a'' \in \mathbb{N}$ が存在する．これを eq. (5) に代入して

$$a'' = 9b''^3 = \frac{5c''^2}{p}$$

を得る．$5c''^2/p$ が整数であるためには，p が 5 と互いに素であることから，c'' が p を因数に持って，

$$c'' = pc'''$$

なる $c''' \in \mathbb{N}$ がある．eq. (5) に代入すると，

$$a'' = 9b''^3 = 5pc'''^2$$

p は 9 と互いに素だから，b'' は p を因数に持つ．従って a'' が p^3 を因数に持つ．$a = p^3 a''$ だったから，結局 a が p^6 を因数に持つ．

一方，題意から α^t $(t \in \mathbb{N}_{\geq 6})$ の形の素因数 a はもたない．これは矛盾．従って背理法より，$p = 1, 3, 5$ となり，題意は示された．$\cdots$(答)

(3) (1), (2) から，$a = 3^k \cdot 5^l$ $(k, l \in \mathbb{N})$ とおける．ただし

$$\begin{cases} 2 \leq k \leq 5 \\ 1 \leq k \leq 5 \end{cases} \tag{4}$$

である．eq. (2) に代入して

$$a = 3^k \cdot 5^l = 9 \cdot b'^3 = 5 \cdot c'^2 \tag{5}$$

だから，b' および c' も同じく $3, 5$ のみ素因数にもち，

$$b' = 3^n \cdot 5^m,$$
$$c' = 3^x \cdot 5^y,$$
$$n, m, x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

と書ける．変数の範囲は eq. (4) より

$$0 \leq n, m, x, y \leq 5 \tag{6}$$

である．eq. (5) に代入して

$$3^k \cdot 5^l = 3^{3n+2} \cdot 5^{3m} = 3^{2x} \cdot 5^{2y+1}$$
$$\therefore \begin{cases} k = 3n + 2 = 2x \\ l = 3m = 2y + 1 \end{cases}$$

である．これをみたす (k, l) は eqs. (4) and (6) の条件では $(k, l) = (2, 3)$ のみであり，この時

$$a = 3^2 \cdot 5^3 = 1125$$

である．$\cdots$(答)