yz 平面の直線 $y = z$ を l_1, 直線 $y = z + \sqrt{2}$ を l_2 とする．xyz 空間において l_1 を軸にして l_2 を回転してできる円柱面（内部は含まない）を C とする．さらに z 軸を軸として C を回転してできる回転体 R とする．

1. xy 平面で C を切った切り口に現れる楕円の方程式を求めよ．
2. R の yz 平面による断面を図示せよ．
3. R の $-2 \leq z \leq 2$ の部分の体積を求めよ．

[解]

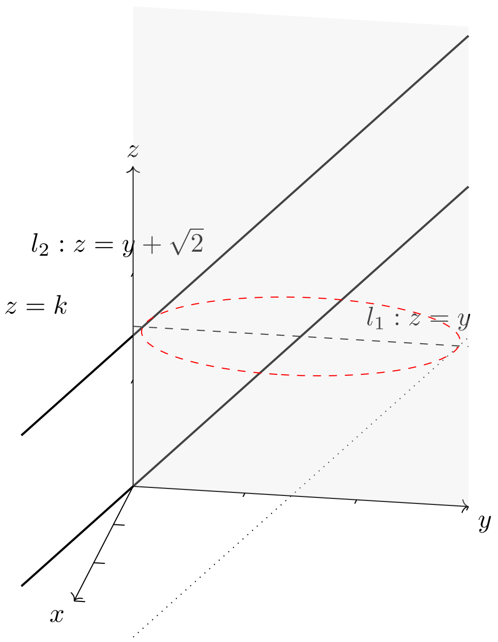

図 1: l_1,l_2 の様子

(1) まず、$Z = k$ での C の切断面を求める．(1) の答えは最後に $k = 0$ とすれば求まる．対称性から $0 \leq k$ とする．l_1 と l_2 の様子を fig. 1 に示す．l_1 と l_2 の距離が 1 だから, C 上の点 $P(X, Y, Z)$ のみたす条件は, P と l_1, l_2 の距離が 1 であること．P から l_1 に下ろした垂足 H とすると, $\vec{OH}$ は $\vec{OP}$ の l_1 への射影だから, l_1 の方向ベクトルを $\vec{n} = (0, 1, 1)$ として

$$\vec{OH} = \frac{\vec{OP}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}, \quad |\vec{OH}|$$

$$\therefore \left|\vec{OH}\right| = \frac{|\vec{OP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{(Y+Z)^2}{2} \tag{1}$$

である．$\triangle OPH$ にピタゴラスの定理を用いて eq. (1) を代入すると

$$PH^2 = OP^2 - OH^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{(Y+Z)^2}{2}$$

これが 1 に等しいので,

$$2(X^2 + Y^2 + Z^2) - (Y + Z)^2 = 2 \tag{2}$$

を得る．これが C の方程式である．

$Z = k$ での切断面は，eq. (2) に $Z = k$ を代入して

$$2X^2 + Y^2 - 2kY + k^2 - 2 = 0$$

$$2X^2 + (Y - k)^2 = 2 \tag{3}$$

という楕円である．図示すると fig. 2 のようになる．

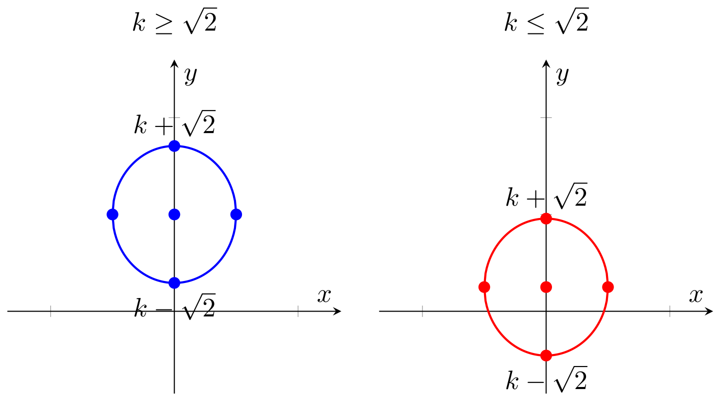

図 2: 楕円: $2x^2 + (y - k)^2 = 2$ の様子

従って，eq. (3) に $k = 0$ を代入して，xy 平面での断面は

$$2x^2 + y^2 = 2$$

である．$\cdots$(答)

(2) 次に，C を z 軸周りに回転させた R の方程式について考える．(2) の答えは，最後に $x = 0$ を代入すれば求まる．

C の $z = k$ での切断面 C_k を原点 $O_k(0, 0, k)$ 中心に回転させたものが R である．従って，C_k 上の点で, 原点か

らの距離が最大の点を A_k, 最小の点 B_k とおくと，この平面での回転体 R の範囲は

$$O_K B_k^2 \leq x^2+y^2 \leq O_k A_k^2$$

であり，面積 S_k は

$$S_k = \pi(O_k A_k^2 - O_k B_k^2) \tag{4}$$

で与えられる.R の様子を fig. 3 に示す.

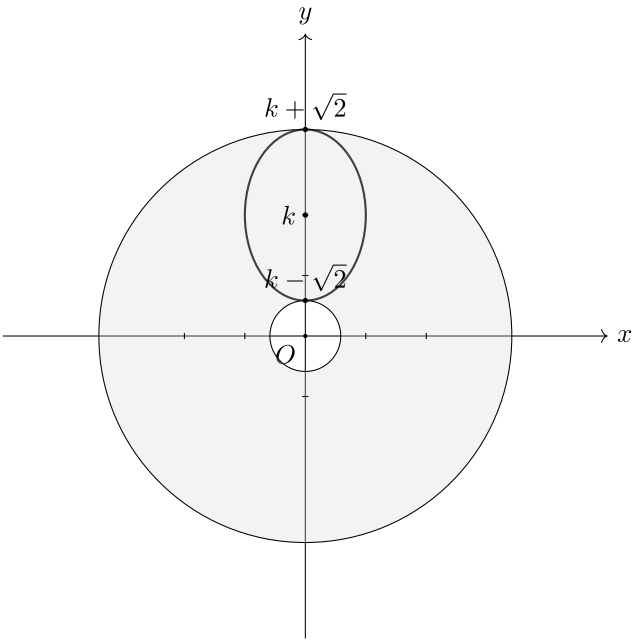

図 3: 回転体 R の $z=k$ での断面

$k \geq \sqrt{2}$ の時は明らかに $A_k(0, k+\sqrt{2}), B_k(0, k-\sqrt{2})$ である．以下 $0 \leq k \leq \sqrt{2}$ の時を考える．C_k 上の点 Q は, $Q(\cos\theta, k+\sqrt{2}\sin\theta)$ とおける．ただし $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする．この時の OQ を考えると

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OQ}}^2 &= \cos\theta^2 + 2\sin\theta^2 + \sqrt{2}k\sin\theta + k^2 \\ &= \sin\theta^2 + 2\sqrt{2}k\sin\theta + k^2 + 1 \\ &= (\sin\theta + \sqrt{2}k)^2 + 1 - k^2\end{aligned}$$

であり，$-1 \leq \sin\theta \leq 1$ だから, $\overline{\mathrm{OQ}}^2$ の最小値，最大値は k によって以下のようになる．まず最小値は

$$\begin{cases} 0 \leq k \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \min \overline{\mathrm{OQ}}^2 = 1-k^2, (\sin\theta = -\sqrt{2}k) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} < k \leq 1, & \min \overline{\mathrm{OQ}}^2 = (k-\sqrt{2})^2, (\sin\theta > -\sqrt{2}k) \end{cases} \tag{5}$$

であり，一方最大値は $\theta = \pi/2$ のときで，$A_k(0, k+\sqrt{2})$ で一定である．この時 $\max \overline{\mathrm{OQ}}^2 = \overline{\mathrm{OA_k}}^2 = (k+\sqrt{2})^2$ である．したがって, eqs. (4) and (5) から $Z=k$ での R の領域及び面積 S_k は以下のようになる.

$$R = \begin{cases} 1-k^2 \leq x^2+y^2 \leq (k+\sqrt{2})^2 & 0 \leq k \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ (k-\dfrac{1}{2})^2 \leq x^2+y^2 \leq (k+\sqrt{2})^2 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq k \leq 1 \end{cases} \tag{6}$$

$$S_k = \begin{cases} \pi\left\{\left(k+\sqrt{2}\right)^2 + k^2 - 1\right\} = \pi(2k^2+2\sqrt{2}k+1) & 0 \leq k \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \pi\left\{(k+\sqrt{2})^2 - (k-\sqrt{2})^2\right\} = 4\sqrt{2}\pi k & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq k \end{cases} \tag{7}$$

従って，求める R の yz 平面での断面は，eq. (6) に $k=z, x=0$ を代入して

$$R = \begin{cases} 1-z^2 \leq y^2 \leq (z+\sqrt{2})^2 & 0 \leq z \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ (z-\sqrt{2})^2 \leq y^2 \leq (z+\sqrt{2})^2 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

であり，図示すると fig. 4 のようになる．ただし境界を含む．$\cdots$(答)

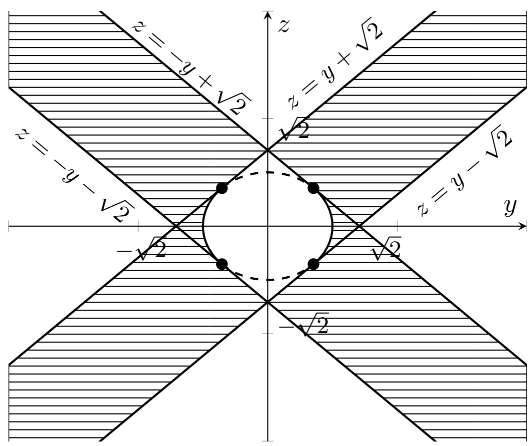

図 4: (2) の回答の領域

(3) 対称性から，eq. (7) を $0 \leq k \leq 2$ で積分したものの 2 倍が求める体積である.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}V &= \int_0^2 S_k dk \\ &= \int_0^{\sqrt{2/2}} \pi(2k^2+2\sqrt{2}k+1)dk + \int_{\sqrt{2}/2}^2 4\sqrt{2}\pi k dk\end{aligned} \tag{8}$$

である。各項積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}/2}(2k^2+2\sqrt{2}k+1)dk &= \left[\frac{2}{3}k^3+\sqrt{2}k^2+k\right]_0^{1/2}\\ &= \frac{7}{6}\sqrt{2}\\ \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} 4\sqrt{2}kdk &= 2\sqrt{2}\left[k^2\right]_{\sqrt{2}/2}^{2}\\ &= 7\sqrt{2}\end{aligned}$$

だから eq. (8) に代入して

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\left\{\frac{7}{6}\sqrt{2}+\frac{7}{2}\sqrt{2}\right\}\\ &= \frac{49}{3}\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

が求める体積である. $\cdots$(答)

[解説]