$(x+1)(x-2)$ の小数第 1 位を四捨五入したものが $1+5x$ と等しくなるような実数 x を求めよ．

[解]

実数 x に対して $f(x)=(x+1)(x-2)$, $g(x)=1+5x$ とおく．題意から，

$$g(x)\in\mathbb{Z},\quad g(x)-\frac{1}{2}\leq f(x)<g(x)+\frac{1}{2} \tag{1}$$

をみたす $x\in\mathbb{R}$ をもとめればよい. $g(x)\in\mathbb{Z}$ から $5x\in\mathbb{Z}$. つまり，$x=\frac{t}{5}$ $(t\in\mathbb{Z})$ とかける．eq. (1) に代入して t の条件式を求めると，

$$\begin{aligned}
&t+\frac{1}{2}\leq\left(\frac{t}{5}+1\right)\left(\frac{t}{5}-2\right)<t+\frac{3}{2}\\
&t+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{25}t^2-\frac{1}{5}t-2<t+\frac{3}{2}\\
&\therefore 125\leq 2t^2-60t<175
\end{aligned} \tag{2}$$

を得る．

ここで，二次関数 $y=p(t)=2t^2-60t$ のグラフの概形は fig. 1 のようになっており，

$$p(-3)=198 \qquad p(-1)=62$$
$$p(31)=62 \qquad p(33)=198$$

だから，eq. (2) を満たすような $t\in\mathbb{Z}$ は $t=-2,32$ である．したがって求めるべき $x=t/5$ は $x=\frac{32}{5},-\frac{2}{5}$ である．$\cdots$(答)

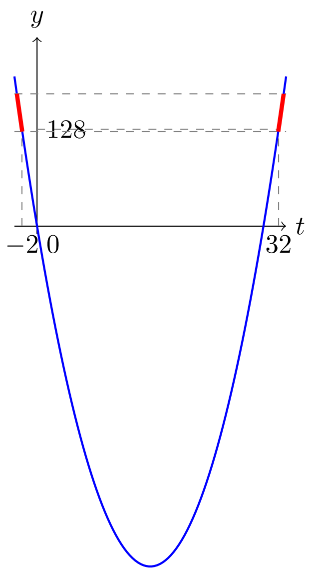

図 1　二次関数 $y=2t^2-60t$ のグラフ

[解説] 二次関数の問題．条件を素直に式に落としていけば解ける比較的容易な問題である．二次関数 $(x+1)(x-2)$ と一次関数 $1+5x$ がほぼ等しくなるような条件なので，解はこれらの交点に近くなるだろうというのが予想できる．実際にこれを解いてみると

$$\begin{aligned}
(x+1)(x-2)&=1+5x\\
x^2-6x-3&=0\\
x&=3\pm2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

であり，$x\approx6.46$ と $x\approx-0.46$ が得られる．本問題の解答である $x=\frac{32}{5},-\frac{2}{5}$ はこれらの値にほぼ等しく，検算として利用できるだろう．