点 V を頂点とし，正方形 $ABCD$ を底面とする四角錐 $V \cdot ABCD$ があって，その 4 側面はいずれも底辺 20 cm，高さ 40 cm の二等辺三角形である．

辺 VA 上に $VP : PA = 3 : 1$ なる点 P をとり，3 点 P，B，C を通る平面でこの四角錐を切るとき，切り口の面積を求めよ．

[解] 辺 VD 上に $VQ : QD = 3 : 1$ なる点 Q をとると，切り口は台形 $PBCQ$ となる．相似から $PQ = \dfrac{3}{4}AB = 15\,\mathrm{cm}$ である．また AD，BC の中点を M，N として $\triangle VMN$ で立体を切断すると右のようになる．ただし R は PQ の中点である．ここで $\triangle VMN$ に余弦定理を用いて

$$\cos\angle RMN = \frac{1}{4}$$

だから，$\triangle MNR$ に余弦定理を用いて

$$RN = \sqrt{(10)^2 + (20)^2 - 100} = 20\,\mathrm{cm}$$

である．対称性から RN は台形の高さであるから，求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|RN|(|PQ| + |BC|) &= \frac{1}{2}20(15+20)\\ &= 350\,\mathrm{cm}^2\end{aligned}$$

である．$\cdots$(答)

図が欲しい