放物線 $y = 3/4 - x^2$ を y 軸のまわりに回転して得られる曲面 K を，原点を通り回転軸と 45° の角をなす平面 H で切る．曲面 K と平面 H で囲まれた立体の体積を求めよ．

[解] 題意の放物線が偶関数であることから，曲面 K の方程式は，x^2 を x^2+z^2 で置き換えて

$$y = \frac{3}{4} - (x^2 + z^2)$$

である．また，対称性から H の方程式は

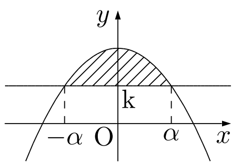
$$y = x$$

としてよい．

これらを平面 $x = k$ で切断すると

$$K : y = \left\{\frac{3}{4} - k^2\right\} - z^2 \equiv f(z)$$
$$H : y = k$$

となる．



故に曲面 K と平面 H で囲まれた立体 L のこの平面での断面は

$$k \leq y \leq \left\{\frac{3}{4} - k^2\right\} - z^2$$

となる．このような y の存在条件は

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{4} - k - k^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

とおけば

$$k \leq \left\{\frac{3}{4} - k^2\right\} - z^2$$
$$\therefore -\alpha \leq z \leq \alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となり，この平面内での L の断面積 $S(k)$ は

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \{f(z) - k\}\, dz \\ &= \frac{1}{6}(\alpha + \alpha)^3 \\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4} - k - k^2\right)^{3/2} \\ &= \frac{4}{3}\left\{1 - \left(k + \frac{1}{2}\right)^2\right\}^{3/2} \end{aligned}$$

である．②から z の存在条件は実数 α の存在条件に等しく，①から

$$\frac{3}{4} - k - k^2 \geq 0$$
$$\therefore \frac{-3}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

となる．以上から，もとめる体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-3/2}^{1/2} S(k)dk \\ &= \frac{4}{3}\int_{-3/2}^{1/2} \left\{1 - \left(k + \frac{1}{2}\right)^2\right\}^{3/2} dk \\ &= \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{3/2} dt \qquad (t = k + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{8}{3}\int_{0}^{\pi/2} \left(1 - s^2\right)^{3/2} \frac{ds}{d\theta} d\theta \qquad (t = s = \sin\theta, c = \cos\theta) \\ &= \frac{8}{3}\int_{0}^{\pi/2} c^2(1 - s^2)d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

となる．

[解 2][解] と同様に，

$$x \leq y \leq \frac{3}{4} - (x^2 + z^2)$$

の体積を求める．$y = x + k$ で立体を切断した断面の面積を $S(k)$ とする．まず，k の範囲を求める．

$$\exists x \exists y \exists z\,, x \leq y \leq \frac{3}{4} - (x^2 + z^2), \, y = x + k$$
$$\exists x \exists z\,, x \leq x + k \leq \frac{3}{4} - (x^2 + z^2)$$

$$\exists x \exists z\,, 0 \leq k \wedge \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 \leq 1-k$$
$$0 \leq k \leq 1$$

である．また，切断面の xz 平面への正射影は，y を消去して，

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 \leq 1-k$$

であり，これは半径 $\sqrt{1-k}$ の円である．故に正射影の面積は

$$(1-k)\pi$$

$y=x+k$ と xz 平面の成す角は $\pi/4$ であるから，

$$S(k)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = (1-k)\pi$$
$$S(k) = \sqrt{2}(1-k)\pi$$

である．k が Δk だけ変化すると，$y=x+k$ は自身と垂直な方向へ $\Delta k/\sqrt{2}$ だけ移動するから，

$$\int_0^1 S(k)\frac{\sqrt{2}}{2}\,dk = \frac{\pi}{2}$$

が求める体積である．$\cdots$(答)