

$y = ax^2$  のグラフが  $y = \log x$  のグラフに接するように定数  $a$  の値を求めよ．なお，このときこれらのグラフと  $x$  軸とで囲まれる図形の面積を求めよ．

[解]  $x = t (t > 0)$  で接するとすると， $(ax^2)' = 2ax$ ， $(\log x)' = \frac{1}{x}$  故

$$\begin{cases} at^2 = \log t \\ 2at = \frac{1}{t} \end{cases} \iff at^2 = \log t = \frac{1}{2} \\ \iff \begin{cases} t = \sqrt{ea} = \frac{1}{2e} \end{cases} \quad (1)$$

故に  $a = \frac{1}{2e}$  である．…(答)

このとき，求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t (ax^2)dx - \int_1^t \log x dx \\ &= \left[ \frac{a}{3} x^3 \right]_0^t - [x(\log x - 1)]_1^t \\ &= \frac{at^3}{3} - t(\log t - 1) - 1 \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{e} + \frac{1}{2} \sqrt{e} - 1 \quad (\because (1)) \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{e} - 1 \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

である．