京大理科数学 1989

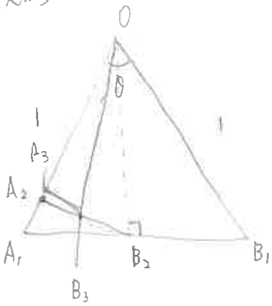
85分/150分

第 1 問

[解] $\angle A_nOB_n=\theta_n$ とおくと、題意から

帰納的に

$$\theta_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\theta \quad \cdots①$$



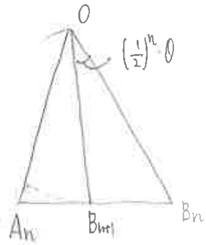
右下図で、

$$OA_n=a_n$$

$$OB_{n+1}=a_{n+1}$$

だから

$$\begin{cases} a_n\cos\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\theta\right\}=a_{n+1} \\ a_1=1 \end{cases}$$



となり、

$$a_n=\cos\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\theta\right\}\cdots\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{2}$$

である

(1) $a_3\cdot\sin\frac{\theta}{4}=\sin\frac{\theta}{4}\cdot\cos\frac{\theta}{4}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}\sin\theta \quad //$$

(2) $a_n\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}=A_n$ も、(1)と同じように計算して

$$A_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\sin\theta$$

だから

$$a_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\theta}{\sin\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\theta\right\}}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\longrightarrow\frac{\sin\theta}{\theta}\quad(n\to\infty) \quad //$$

/20

第 2 問

[解2] $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ とおく。$i = 1, 2, \cdots n$ に対し

$$a_i \leq \frac{A_n - a_i}{n-1} \quad \cdots ①$$

だから、i について たして、$n-1>0$ から

$$(n-1)A_n \leq (n-1)A_n$$

より、等号が成立する。つまり、①の等号が全て成立するから セイリして

$$a_i = A_n/n$$

であるから

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

の時 題意がみたされる

/2

第 3 問

[解] $f(x)$はモニックな多項式であるとしてよく，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$とおける。

$f'(x)=3x^2+2ax+b$より

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}a\right)f'(x)+\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)x+(c-ab)$$

題意から．

$$\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2=0 \quad \therefore \quad b=\frac{1}{3}a^2$$

だから．

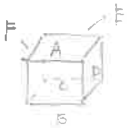
- $f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{3}a^2x+c$
- $f'(x)=3x^2+2ax+\frac{1}{3}a^2$

$$=3\left(x+\frac{1}{3}a\right)^2 \geq 0$$

より $f(x)$は単調増加。これと$f(x)\longrightarrow\pm\infty$ $(x\to\pm\infty)$から$f(x)=0$をみたす実数xがただ1つある。(fは連続) 答

[解] 立方体の6面をA, B, C, D, E, Fとする。Aにぬる色を固定すると、対面も同じ色でぬらなければならない。のこりの側面への色のぬり方は、

2色 α, β とするとCにどちらをぬるかの2通りである。以上から



$$P(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^5 {}_{N-1}P_2 = \frac{(N-1)(N-2)}{N^5}$$

//

さて、$x = \frac{1}{N}$ $\left(0 < x \leq \frac{1}{3}\right)$ とすると、

$$P(N) = x^3(1-x)(1-2x)$$

$$\frac{dP}{dx} = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2$$

$$= 10x^2\left(x - \frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)\left(x - \frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)$$

で、$0 < x \leq \frac{1}{3}$ より、$\frac{dP}{dx} > 0$ つまり P は x について単調増加だから、N について単調減少。

したがって、

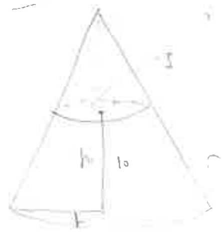
$$\begin{cases} a < b \text{ のとき } P(a) > P(b) \\ a > b \text{ のとき } P(b) > P(a) \end{cases}$$

//

第 1 問

[解] 高さyの時の表面の面積S, 円錐の半径rとすると

$$\sqrt{10-y} = S\frac{dy}{dt} \quad \cdots ①$$



$\therefore S = \pi\left(\frac{r(10-y)}{10}\right)^2$ を代入してセイリ

$$dt = \frac{\pi r^2}{100}(10-y)dy$$

両辺積分して

$$t = \frac{\pi r^2}{100}\left(10y - \frac{1}{2}y^2\right) + C$$

$t=0$ で $y=0$ から $C=0$. $(t,y)=(540,2)$, $y=10$ を各々代入

$$\begin{cases} 540 = \frac{\pi r^2}{100}\cdot 18 \\ t = \frac{\pi r^2}{100}\cdot 50 \end{cases}$$

辺々わって

$$\frac{t}{540} = \frac{50}{18}$$

$$\therefore \ t = 1500$$

だから. タンクが一ぱいになるのは. あと

$$\frac{1500}{60} - 9\ (h) = \underline{16\ (h)}$$

後である

/20