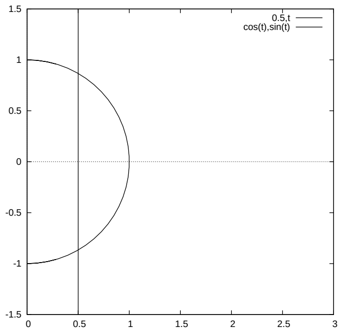
S を中心 O，半径 a の球面とし，N を S 上の一点とする．点 O において線分 ON と $\pi/3$ の角度で交わるひとつの平面の上で，点 P が点 O を中心とする等速円運動をしている．その角速度は毎秒 $\pi/12$ であり，また $|OP| = 4a$ である．点 N から点 P を観測するとき，P は見え始めてから何秒間見え続けるか．また P が見え始めた時点から見えなくなる時点までの，$|NP|$ の最大値および最小値を求めよ．ただし，球面 S は不透明であるものとする．

[解] $\cos\theta = c$, $\sin\theta = s$ とおく． ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする．P が xy 平面上の円 $x^2+y^2 = 16a^2$ 上を動くよう，$N(a/2, 0, \sqrt{3}a/2)$ とする．すると $P(4ac, 4as)$ と置ける．N での S の接平面 T は

$$T : \frac{a}{2}x + \frac{\sqrt{3}a}{2}z = a^2$$

であり，これと xy 平面との交線は $x = 2a$ となり，下図のようになる．



P が見えるのは $2a \leq x$ の領域である．これは $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$ の領域であるから，見え続ける時間 t として

$$\frac{\pi}{12}t = \frac{2\pi}{3} \iff t = 8$$

である．$\cdots$(答)

次に，$f(\theta) = |NP|^2$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \left(4ac - \frac{a}{2}\right)^2 + (4as)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 \\ &= a^2\left[16c^2 - 4c + \frac{1}{4} + 16s^2 + \frac{3}{4}\right] \\ &= a^2\left[-4c + 17\right] \end{aligned}$$

である．この $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$ での最大小を求めればよく，$|NP| \geq 0$ ゆえ，

$$\begin{cases} \max f(\theta) = f\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right) = 15a^2 \\ \min f(\theta) = f(0) = 13a^2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \max |NP| = \sqrt{15}a \\ \min |NP| = \sqrt{13}a \end{cases}$$

である．$\cdots$(答)