点 $\mathrm{P}(x, y)$ は xy 平面上の点 $C:(x-5)^2+(y-5)^2=r^2\,(r>0)$ の上を動く動点である．このとき点 P の点 $\mathrm{A}(9, 0)$ に関する対称点を Q とし，また点 P を原点 O のまわりに正の向きに $\pi/2$ だけ回転した点を R とする．点 P が円 C の上を動くときの線分 QR の長さの最小値 $f(r)$ と最大値 $g(r)$ とを求めよ．また $f(r)$ が 0 となるような r の値を求めよ．

[解] $\cos\theta=c,\ \sin\theta=s$ とおく． とおく．すると $\mathrm{P}(5+rc, 5+rs)$ とおけるから，

$$\mathrm{Q}(13-rc, -5-rs) \quad \mathrm{R}(-5-rs, 5+rc)$$

である．故に

$$\begin{aligned}|\mathrm{QR}|^2=&\{(13-rc)-(-5-rs)\}^2\\&+\{(-5-rs)-(5+rc)\}^2\\=&(18-rc+rs)^2+(-10+rs+rc)^2\\=&18^2+10^2+2r^2+56rs-16rc\\=&424+2r^2+8\sqrt{53}r\sin(\theta-\alpha)\end{aligned}$$

である．ここで，α は

$$\tan\alpha=\frac{2}{7}$$

を満たす数である．$0\leq\theta<2\pi$ から，

$$-\alpha\leq\theta-\alpha<2\pi-\alpha$$

であるから，$-1\leq\sin(\theta-\alpha)\leq 1$ である．故に $r>0$ から，

$$\begin{cases}f(r)=\sqrt{424-8\sqrt{53}r+2r^2}=\sqrt{2}|r-2\sqrt{53}|\\g(r)=\sqrt{424+8\sqrt{53}r+2r^2}=\sqrt{2}(r+2\sqrt{53})\end{cases}$$

である．また，$f(r)=0$ のとき，$r=2\sqrt{53}$ である．$\cdots$(答)