[解] $L: y=2x\ (0 \le x \le 1)$ である。よって.

$$x^2+ax+b=2x \qquad (0 \le x \le 1)$$

が解を持てば良い。$f(x)=x^2+(a-2)x+b$ とおく。

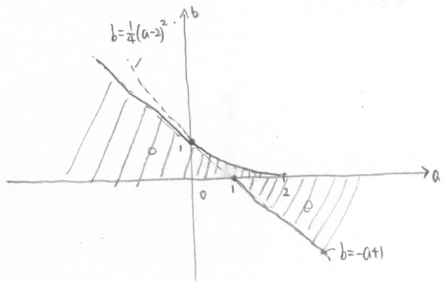
1° 区間内に1つ

$f(1)f(0) \le 0 \Leftrightarrow b(a+b-1) \le 0$

2° 区間内に2つ(重解含む)

$$\begin{cases} \text{判別式}: (a-2)^2-4b \ge 0 \\ \text{端点}: f(1) \ge 0,\ f(0) \ge 0 \\ \text{軸}: 0 \le \dfrac{2-a}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \le \dfrac{1}{4}(a-2)^2 \\ b \ge 0,\ a+b-1 \ge 0 \\ 0 \le a \le 2 \end{cases}$$

以上を図示して、下図斜線部(境界含む)



第 2 問

[解] 各辺正から常用対数とって, $\log_{10} x = \log x$ とかくと.

$$10\log 2 < n\log\frac{5}{4} < 20\log 2$$

$$10\cdot\log 2 < n\cdot\log\frac{10}{8} < 20\log 2$$

$$10\cdot\log 2 < n(1-3\cdot\log 2) < 20\cdot\log 2$$

$\alpha = \log 2$ とおく. $1-3\alpha > 0$ から.

$$\frac{10\alpha}{1-3\alpha} < n < \frac{20\alpha}{1-3\alpha}$$

$$-\frac{10}{3} + \frac{10}{3(1-3\alpha)} < n < \frac{20}{3}\left\{-1 + \frac{1}{(1-3\alpha)}\right\} \quad \cdots ①$$

ここで: $0.301 < \alpha < 0.3011$ から.

$$0.0967 < 1-3\alpha < 0.097$$

$$\frac{1}{0.097} < \frac{1}{1-3\alpha} < \frac{1}{0.0967}$$

$$10.30\ldots < \frac{1}{1-3\alpha} < 10.341\ldots$$

$$9.30\ldots < -1 + \frac{1}{1-3\alpha} < 9.341\ldots$$

となるので:

$$\begin{cases} 31.0\ldots < \frac{10}{3}\left(-1+\frac{1}{1-3\alpha}\right) < 31.13\ldots \\ 62.0\ldots < \frac{20}{3}\left(-1+\frac{1}{1-3\alpha}\right) < 62.26\ldots \end{cases}$$

だから. ①をみたすnは $n = 32, \ldots, 62$ の $62-32+1 = 31$ コ //

第 3 問

[解] $\beta\alpha+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\}=0$ だから，$\alpha\beta\gamma=k^3$ とおくと，α,β,γ は

x の3次方程式 $x^3-k^3=0$ の3解で，$\alpha\neq\beta$ かつ $\alpha\neq0$。

だから $(x-k)(x^2+kx+k^2)=0$

$\therefore x=k,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}k$

だから，△ABCは 正三角形（重心は原点）

第 4 問

[解] $217=7\cdot31$ である.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=7\cdot31 \quad \cdots ①$$

$a^2+ab+b^2>0$ から. $a-b>0$ で.

$$(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(1,217)\ (7,31)\ (31,7)\ (217,1)$$

$$(a,b)=(9,8),(-8,-9),(6,-1)\ (1,-6)$$

//

第　　　問

第 5 問

[解] $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。

(1) $y=\cos x$ は区間内で単調減少で $-1 \leq \cos x \leq 1$ である。一方、

$$0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \iff -1 \leq -1+\frac{2}{x^2+1} \leq 1 \iff -1 \leq \frac{-x^2+1}{x^2+1} \leq 1$$

である。したがって、$f(x)=\cos x-\frac{1-x^2}{1+x^2}$ とすると、

$$f(2k\pi) \geq 0,\ f(2k\pi+\pi) \leq 0$$

となるから、$f(x)$ が連続であることとあわせて、$f(\alpha_k)=0$ $(2k\pi \leq \alpha_k \leq 2\pi k+\pi)$ なる α_k がある。C_1 の接線 l_k は

$$l_k : y=-\sin\alpha_k(x-\alpha_k)+\cos\alpha_k \equiv g(x)$$

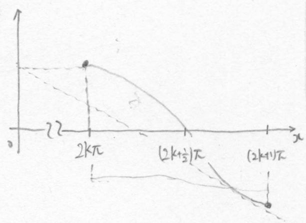
で表される。$g(\alpha_k)=0$ から

$$\cos\alpha_k=\frac{1-\alpha_k^2}{\alpha_k^2+1},\quad \sin\alpha_k=\sqrt{1-\frac{(1-\alpha_k^2)^2}{(\alpha_k^2+1)^2}}=\frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2+1}\ (>0)$$

であり、

$$g(0)=-\frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2+1}(-\alpha_k)+\frac{1-\alpha_k^2}{\alpha_k^2+1}=\frac{\alpha_k^2+1}{\alpha_k^2+1}=1$$

から、l_k は $(0,1)$ を通る。■



(2) $h(x)=g(x)-\frac{1-x^2}{1+x^2}$ とおく。

$$h(x)=-\frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2+1}x+1-\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$=-\frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2+1}x+2-\frac{2}{1+x^2}$$

$$=\frac{2}{\alpha_k^2+1}\frac{-x}{x^2+1}(x-\alpha_k)(\alpha_k x-1)$$

$2\pi k \leq \alpha_k, x \leq (2\pi+1)k$ から、

$$\begin{cases} x<\alpha_k \text{ の時 } & h(x)>0 \\ x=\alpha_k \quad〃 & h(x)=0 \\ \alpha_k<x \quad〃 & h(x)<0 \end{cases}$$

となり、たしかに $2\pi k \leq x \leq (2\pi+1)k$ では $h(x)=0$ はただ1つ解を持つ。つまり、C_1 と C_2 の共有点はただ1つである。■

[解2] (2) $x=t$ における C_1 の接線は $y=-\sin t(x-t)+\cos t$ である。

これと y 軸の交点 $Y(t)=t\sin t+\cos t$, $Y'(t)=t\cos t$ から、下表をうる。

t	$2\pi k$		$(2\pi+\frac{1}{2})k$		$(2\pi+1)k$
Y'		$+$	0	$-$	
Y	1	$\nearrow$		$\searrow$	-1

$\alpha_k \neq 2\pi k$ であることと、$2\pi k < x \leq (2\pi+1)k$ で $Y(t)=1$ なる t が唯1つあること、及び(1)から、題意は示された。■

第 6 問

[解] 左からk番目までぬる時、k番目が赤である場合の数をa_k、青又は黄色である場合の数をb_kとする。題意から

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k + b_k \\ b_{k+1} = 2a_k \end{cases} \quad \cdots *$$

であり、又$a_1 = 1$, $b_1 = 2$となる。$*$からb_kを消して

$$a_{k+2} = a_{k+1} + 2a_k, \quad a_1 = 1,\ a_2 = 3$$

だから、といて

$$a_k = \frac{1}{3}\{2^{k+1} + (-1)^k\}$$

$$b_k = \frac{2}{3}\{2^k + (-1)^{k-1}\} \quad (k \geqq 2)$$

だから$n \geqq 2$のとき、もとめるのは

$$a_n + b_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+2} + (-1)^n + 2(-1)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2^{n+2} + (-1)^{n-1}\right)$$

〃