数列 $\{a_n\}$ の項が $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ によって与えられているものとする．このとき $a_n = 2\sin\theta_n$, $0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ_n を見いだせ．また $\lim_{n\to\infty}\theta_n$ をもとめよ．

[解] 漸化式から

$$\begin{aligned}2\sin\theta_{n+1} &= \sqrt{2+2\sin\theta_n}\\ &= \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_n\right)}\\ &= \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_n}{2}\right)}\\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_n}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_n}{2}\right)\end{aligned}$$

ただし，変形途中で，$0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ により $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta_n}{2}\right) > 0$ であることに注意した．だから $0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ とあわせて

$$\theta_{n+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_n}{2}$$

である．変形して

$$\theta_{n+1} - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(\theta_n - \frac{\pi}{2}\right)$$

だから，繰り返し用いて，初期条件 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$ より

$$\theta_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cdots(\text{答})$$

故に求める極限値は $\lim_{n\to\infty}\theta_n = \dfrac{\pi}{2}\cdots$(答) である．