京大理科数学　1971

70/150分

		計	思	総
[1]	整数	A	B	B
[2]	複素	B	B	B
[3]	多変数	A	A	A
[4]	空間基礎	A	A	A
[5]	図形	B	B	B
[6]	多変数	B	B	B

第 1 問

[解]

(i) 1辺の長さ1、辺が座標軸に平行な時

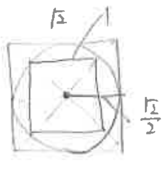
この正方形内部(周含む)の点(x,y)は、$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$として

$$\begin{cases} \alpha \leq x \leq \alpha+1 \\ \beta \leq y \leq \beta+1 \end{cases}$$

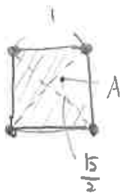
と書ける。この時、$\alpha \leq m \leq \alpha+1$, $\beta \leq n \leq \alpha+1$ をみたす $m, n \in \mathbb{Z}$ が必ず存在するから、(m,n)は正方形内部にある。従って、常に少なくとも1つの格子点を含む。

(ii) 辺の長さ$\sqrt{2}$の時

辺の長さ$\sqrt{2}$の時、右図から、正方形の中心(対角線の交点)からの距離$\frac{\sqrt{2}}{2}$の点は全て正方形内に含まれる …※



又、1辺1の正方形Ⓐの4頂点となるような4格子点をもってくる。A内の任意の点は少なくとも1つの格子点の距離が$\frac{\sqrt{2}}{2}$以下だから(∵対角線の長さ$\sqrt{2}$)、※より、辺の長さ$\sqrt{2}$の正方形は少なくとも1つ格子点を持つ



[別] (i)をつかおうとすると半径$\frac{\sqrt{2}}{2}$の円に接する座標軸に平行な辺を持つ正方形をもってきてもOK.

/20

第 2 問

[解]

(必要性)

$$\begin{cases} z+\alpha\bar{z}+\beta=0 & \cdots① \\ \bar{\alpha}z+\bar{z}+\bar{\beta}=0 & \cdots② \end{cases}$$

① − ②×α より $\alpha\bar{\beta}=\beta$ ($\because |\alpha|=1$) だから示された。

(十分性)

$\beta=\alpha\bar{\beta}$ の時、$\beta=0$ ならば $z=0$ が $z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ をみたし十分。

$\beta\neq0$ の時

$$z+\alpha\bar{z}+\beta=0$$

$$\Leftrightarrow z+\frac{\beta}{\bar{\beta}}\bar{z}+\beta=0$$

$$\Leftrightarrow \bar{\beta}z+\beta\bar{z}+|\beta|^2=0 \quad \cdots③$$

③はガウス平面上で直線を表すから、$z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ をみたす

z は必ず存在し、十分。□

/20

第 3 問

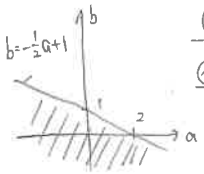
[解] mは a,bによって以下のようになる.(軸で場合分け)

㋐ $-\frac{a}{2} \le 0 \Leftrightarrow a \ge 0$の時. $m=f(0)=b$

㋑ $0 \le -\frac{a}{2} \le 1 \Leftrightarrow -2 \le a \le 0$の時 $m=f(-\frac{a}{2})=-\frac{1}{4}a^2+b$

㋒ $1 \le -\frac{a}{2} \Leftrightarrow a \le -2$の時 $m=f(1)=a+b+1$

又.$(a.b)$の存在領域は下図斜線部(境界含む)である



㋐の時　$\max f(0)=1 \quad ((a.b)=(0.1))$

㋑の時　$m \le -\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a+1$

$= -\frac{1}{4}(a+1)^2+\frac{5}{4} \le \frac{5}{4}$

等号成立は $(a.b)=(-1,\frac{3}{2})$

㋒の時　$m \le a+1-\frac{1}{2}a+1$

$= \frac{1}{2}a+2 \le 1$

等号成立は $(a.b)=(-2,2)$

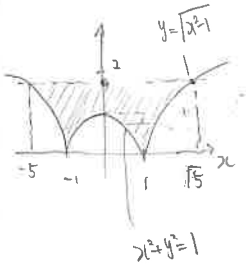
以上から $(a.b)=(-1,\frac{3}{2})$ がmを最大にする

/20

第 4 問

[解] $y=\sqrt{|x^2-1|}$ のグラフは下図だから、求める体積V、Vのうち

$x\geq 0$ をみたす部分の体積V' として



$$V = 2V' \quad \cdots ①$$

又、

$$V' = 4\sqrt{5}\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi - \int_1^{\sqrt{5}} \pi(x^2-1)\,dx$$

$$= \pi\left[4\sqrt{5} - \frac{2}{3} - \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^{\sqrt{5}}\right]$$

$$= \pi\left[4\sqrt{5} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{3}\right]$$

$$= \pi\left(\frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right)$$

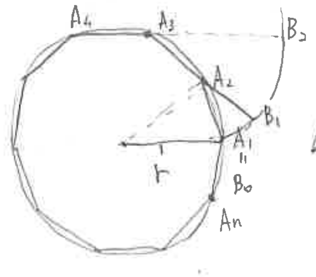
だから①に代入

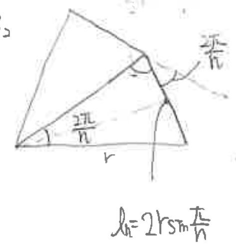
$$V = \frac{4}{3}\pi\left(5\sqrt{5}-2\right)$$

/20

第 5 問

[解] 正n角形の一辺の長さl_nとおくと、$l_n = 2r\sin\frac{\pi}{n}$である…①





題意から扇形 $A_{k+2}A_{k+1}B_k$ ($k \geq 0$, $B_0 = A_1$) の半径 r_k とすると

$$\begin{cases} r_0 = l_n \\ r_{k+1} = r_k + l_n \end{cases}$$

から、等差数列の公式より $r_k = (k+1)l_n$ であり、中心角は $\frac{2\pi}{n}$ だから扇形 $A_{k+2}A_{k+1}B_k$ の面積 T_k は

$$T_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot r_k^2 = \frac{\pi}{n} l_n^2 \cdot (k+1)^2$$

よって、扇形の面積の総和Tは

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{n} l_n^2 (k+1)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} l_n^2 \cdot k^2$$

$$= \frac{1}{6}\pi(n+1)(2n+1)\cdot l_n^2 \quad \cdots ②$$

一方、正n角形の面積Sは、右の小三角形の面積のn倍で、

$$\frac{S}{n} = \frac{1}{2}\cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$$

$$S = \frac{1}{2} n r^2 \sin\frac{2\pi}{n} \quad \cdots ③$$

①,②,③から

$$S_n = S + T = \frac{1}{2} n r^2 \sin\frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{3}(n+1)(2n+1) r^2 \sin^2\frac{\pi}{n} \quad \cdots (1)$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} 2\pi + \frac{2\pi}{3} r^2 \left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2 \pi^2 \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$\longrightarrow \pi r^2 + \frac{4}{3}\pi^3 r^2 \quad (n \to \infty, \text{この時} \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n} \to 0)$$

/20

第6問

[解] 時刻tのP, Qの座標は

$$P_t(\cos\pi t, \sin\pi t),\ Q_t(a, vt)\quad (0<v<a\pi)$$

である.

(1) $\overrightarrow{OP_t} \parallel \overrightarrow{OQ_t} \iff vt\cos\pi t - a\sin\pi t = 0$ …① である.

①の左辺 $f(t)$ とおくと

$$f'(t) = v\cos\pi t - \pi vt\sin\pi t - \pi a\cos\pi t$$
$$= -(\pi a - v)\cos\pi t - \pi vt\sin\pi t$$

である. $A = \sqrt{(\pi a - v)^2 + (\pi vt)^2}\ (>0)$ とおくと

$$f'(t) = -A\sin(\pi t + \alpha)$$

とおける. ただし α は $\cos\alpha = \frac{\pi vt}{A}\ (>0)$, $\sin\alpha = \frac{\pi a - v}{A}\ (>0)$ を

みたす $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ なる角. 従って. $n \le t \le n+1$ の時

$$n\pi + \alpha \le \pi t + \alpha \le (n+1)\pi + \alpha$$

となり, $f'(t)$ は区間内で唯一, 符号をかえる点をもつ.

従って この時のtをt'として下表をえる ($k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$)

t	$2k$		t'		$2k+1$
f'		$-$	0	$+$	
f	正	↘		↗	負

t	$2k+1$		t'		$2k+2$
f'		$+$	0	$-$	
f	負	↗		↘	正

従って. $n \le t \le n+1$ の間に $f(t_n) = 0$ をみたす t_n が唯1つある //

(2) $n \le t_n \le n+1$ …② である. (1)から

$$vt_n\cos\pi t_n - a\sin\pi t_n = 0$$
$$\cos\pi t_n = \frac{a\sin\pi t_n}{vt_n} \to 0\ (n\to\infty,\ ②から)$$

②からしたがって

$$t_n \to n + \frac{1}{2}\ (n\to\infty)$$

だから $t_n - n \to \frac{1}{2}\ (n\to\infty)$ である. //

・(1)は t と $\frac{1}{2}$ ずれを断ってから $\tan x$ と x に分解するのもわかりやすい

・一応 A も t の関数だけど, 今回あんまりカンケイないね

/20