$0 < a < 1$ とする．座標平面上で原点 A_0 から出発して x 軸の正の方向に a だけ進んだ点を A_1 とする．次に A_1 で進行方向を反時計回りに $120°$ 回転し a^2 だけ進んだ点を A_2 とする．以後同様に A_{n-1} で反時計回りに $120°$ 回転して a^n だけ進んだ点を A_n とする．このとき点列 $A_0, A_1, A_2, \ldots$ の極限の座標を求めよ．

[解]

ベクトル $A_n\vec{A}_{n+1}$ を表す複素数を d_n と表す．また、$e(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ とし，$p = e(2\pi/3)$ とする．題意から，

$$\begin{cases} d_{n+1} = apd_n \quad (n \geq 0) \\ d_0 = a \end{cases}$$

となる．これは初項 $d_0 = a$、公比 ap の等比数列だから，その一般項は，

$$d_n = a(ap)^n$$

となる．したがって，点 A_n を表す複素数を t_n とおくと，$n \geq 1$ に対して

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} d_k = a\frac{1-(ap)^n}{1-ap} \tag{1}$$

となる．題意より $0 < a < 1$ であり，またその定義から $|p| = 1$ であるから $\lim_{n\to\infty}(ap)^n = 0$ となり，t_n の極限値は

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{a}{1-ap}$$

である．ここに $p = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ を代入すると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} t_n &= \frac{a(1-a\bar{p})}{(1-ap)(1-a\bar{p})} \\ &= \frac{a(1-a\bar{p})}{1-2a\Re p+a^2} \\ &= \frac{2a-a^2(-1-i\sqrt{3})}{2(1+a+a^2)} \\ &= \frac{a(2+a)+i\sqrt{3}a^2)}{2(1+a+a^2)}\end{aligned}$$

したがって、求める座標は

$$\left(\frac{a(2+a)}{2(a^2+a+1)}, \frac{\sqrt{3}a^2}{2(a^2+a+1)}\right)$$

である．$\cdots$(答)

[解説] 複素数の問題．