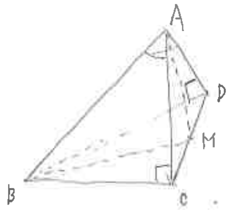
京大理系数学 2010 — 乙

第 1 問

[解] 点Xに対し $\overrightarrow{AX}=\vec{x}$ とする。題意から

$$\begin{cases} \vec{c}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0 & \cdots ① \\ \vec{d}\cdot(\vec{d}-\vec{b})=0 & \cdots ② \\ \vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

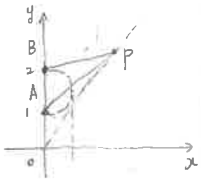


$\vec{m}=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$ が $\overrightarrow{CD}$ と垂直であることを示す

$$\begin{aligned} \vec{m}\cdot\overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{d}) \\ &= \frac{1}{2}\left(|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}\right) & (\because ①②) \\ &= 0 & (\because ③) \end{aligned}$$

から示された。よって③とあわせて、題意の平面に含まれる一次独立な2ベクトルが $\overrightarrow{CD}$ と垂直なので、題意は示された□

[解] まず3点A,P,Bを形成するから、Pが直線AB：$y=-\frac{1}{2}x+1$上に存在しないが、これは常にみたされる。$\angle APB=\theta$とする。ABを直径とする円C：$x^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{1}{4}$と$y=x$が交わるか調べる。



$(0,\frac{3}{2})$と$y=x$のきょりlとして

$$l=\frac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}>\frac{1}{2}=(\text{Cの半径})$$

から、交わらない。よって $0\leq\theta<\pi/2$ …① であり、この区間で$\tan\theta$はθの単調増加関数である。$\overrightarrow{PA}=\begin{pmatrix}-x\\1-x\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PB}=\begin{pmatrix}-x\\2-x\end{pmatrix}$から、

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\sin\theta}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cos\theta}=\frac{|-x(2-x)+x(1-x)|}{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}=\frac{|-x|}{x^2+(1-x)(2-x)}$$

$$=\frac{x}{2x^2-3x+2}\quad(\because x>0)$$

$$=\frac{1}{2(x+\frac{1}{x})-3}\leq\frac{1}{1}\quad(\because x>0\text{からAM-GM, 等号成立は}x=1)$$

から、もとめる $\max\theta=\frac{\pi}{4}$ //

第 4 問

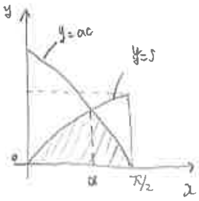
[解] 以下 $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ とする。

$$S=\int_0^{\pi} s\,dx = 2 \qquad \cdots ①$$

であり、$y=s$ と $y=ac$ は $[0,\frac{\pi}{2}]$ にただ1つ交点を持ち、このx座標αとして

$$\sin\alpha = a\cos\alpha \qquad \cdots ②$$

グラフの概形から、



$$T=\int_0^{\alpha} s\,dx + \int_{\alpha}^{\pi/2} ac\,dx$$

$$= 1-\cos\alpha + a(1-\sin\alpha) \qquad \cdots ③$$

①,③を $S:T=3:1$ に代入して

$$2 : 1-\cos\alpha + a(1-\sin\alpha) = 3:1$$

$$2 = 3-3\cos\alpha + 3a - 3a\sin\alpha$$

$$0 = 1-3\cos\alpha + 3a(1-\sin\alpha) \qquad \cdots ④$$

②から、$a=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ だから代入して

$$0 = (1-3\cos\alpha)\cos\alpha + 3\sin\alpha(1-\sin\alpha)$$

$$3 = \cos\alpha + 3\sin\alpha$$

ここで $t=\tan\frac{\alpha}{2}$ とおくと、$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ から

$$3(1+t^2) = 1-t^2+6t$$

$$4t^2-6t+2=0$$

$$(2t-1)(t-1)=0$$

$0\leq\alpha<\pi/2$ から $0\leq\alpha/2<\pi/4$ から $0\leq t<1$ なので、$t=\frac{1}{2}$ となる。この時 ②から

$$a=\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}=\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}$$

//

[解2] $\tan\alpha=a$, $0<\alpha<\pi/2$ から $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ となるので ④に代入し整理して $a=\frac{4}{3}$ //

第 4 問

[解] 右のように3頂点A,B,Cを定め，外心Oとする。

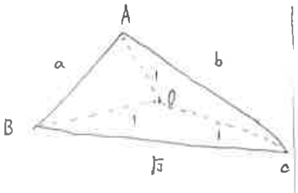
この時△ABCは鋭角三角形だから△ABCの内部にOがある。△OBCに余弦定理を用いて$\angle BOC = \frac{2}{3}\pi$を得る。この時円周角から$\angle BAC = \frac{\pi}{3}$となるので，余弦定理を△ABCに用いて，

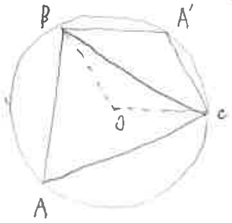
$$3 = a^2+b^2-2\cdot ab\cdot\frac{1}{2} = a^2+b^2-ab$$

$$b = \frac{a \pm \sqrt{12-3a^2}}{2}$$

ここで$1<a<2$から複号負は$b<0$となって不適だから

$$b = \frac{a+\sqrt{12-3a^2}}{2}$$





解) (1) 帰納法で示す。$a_n=3^{2^n}-1$ とおく。$a_1=8=2^3$ から $n=1$ では成立する。

$n=k\in\mathbb{N}$ での成立を仮定する。

$$a_{k+1}=3^{2^{k+1}}-1=\left(3^{2^k}\right)^2-1=\left(3^{2^k}+1\right)\left(3^{2^k}-1\right) \quad \cdots ①$$

ここで

$$3^{2^k}+1\equiv 1^{2^k}+1\equiv 0 \pmod{2}$$
$$3^{2^k}+1\equiv (-1)^{2^k}+1\equiv 2 \pmod{4}$$

から、$3^{2^k}+1$ は2でわり切れ、4でわり切れない。…②。①②仮定から a_{k+1} は 2^{k+3} でわり切れ、2^{k+4} でわり切れない。よって $n=k+1$ でも成立。よって示された■

(2) $A\in$ odd として、$m=A\cdot 2^n$ ($n\in\mathbb{N}$) とかける。(∵ $m\in$ even)

$$3^m-1=\left(3^{2^n}\right)^A-1=(a_n+1)^A-1$$
$$=a_n\left(a_n^{A-1}+{}_AC_1\cdot a_n^{A-2}+\cdots+{}_AC_{A-2}\cdot a_n+A\right)$$

$A\geq 3$ の時 ~~~ は2でわり切れない。又 $A=1$ の時 $3^m-1=a_n$ となる。したがって 3^m-1 は (1)から 2^{n+2} でわり切れるが 2^{n+3} ではわり切れない。…③

ここで $n\geq 3$ の時、$A\cdot 2^n\geq n+3$ となることを帰納的に示す。

1° $n=3$

(与式) ⇔ $27A\geq 6$ となり、たしかに成立。

2° $n=k$ ($\in\mathbb{N}_{\geq 3}$) での成立を仮定

$A\cdot 2^{k+1}\geq 2(k+3)$ (∵仮定) $\geq k+4$ (∵ $k\geq 3$) から $n=k+1$ でも成立。

以上から、$A\cdot 2^n\geq n+3$ ($n\geq 3$) …④ が示された。③、④から $n\geq 3$ では題意は不成立。

以下 $n=1, 2$ について調べる。

1° $n=1$

$A=1$ のみ $A\cdot 2\leq n+2$ をみたすので、$m=1\cdot 2^1=2$ は題意をみたす。

2° $n=2$

$A=1$ のみ $A\cdot 2^2\leq 2+2$ をみたすので、$m=4$ のみ題意をみたす。

以上から示された■

第 6 問

[解] 全てのボール,箱を区別すると、ボールを箱に入れる $(2n)^n$ 通りが同様にたしからしい。

この時題意をみたす入れ方は、${}_{2n}P_n$ 通りだから

$$p_n=\frac{{}_{2n}P_n}{(2n)^n}=\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{(2n)^n}=\frac{2n}{2n}\frac{2n-1}{2n}\cdots\frac{n+1}{2n}$$

$$\log p_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{2n}$$

だから

$$\frac{\log p_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{2n}\xrightarrow{n\to\infty}2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log x\,dx=2\Big[x(\log x-1)\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}=\log 2-1$$