方程式 $x^2-xy+y^2=3$ の表す曲線の略図をえがき，その第一象限にある部分が x 軸，y 軸と囲む図形の面積を求めよ．

[**解**] 題意の曲線 C とし，C を負方向に $\pi/4$ だけ回転した図形 C' とする．$C(X,Y)$ が $C'(x,y)$ に移るとする．$e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ として，

$$\begin{aligned}X+iY&=e\left(\frac{\pi}{4}\right)(x+iy)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x+iy)\end{aligned}$$

であるから，

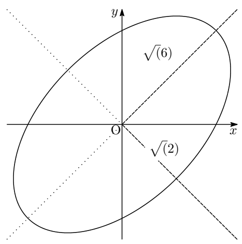
$$X=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\qquad Y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

これを C の方程式に代入して

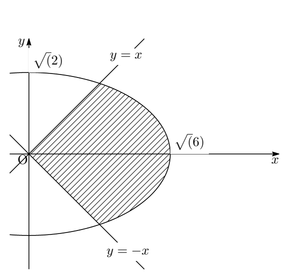
$$(x-y)^2-(x+y)(x-y)+(x+y)^2=6$$

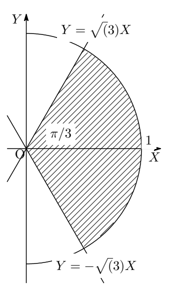
$$\therefore\ x^2+3y^2=6$$

故に C' は短半径 $\sqrt{2}$，長半径 $\sqrt{6}$ の楕円である．これを正方向に $\pi/4$ 回転させたものが C であるから，C の概形は以下．



また，求める面積 S は，C' 側で考えれば下図斜線部である．($x=0$，$y=0$ を $\pi/4$ 回転させると $y=\pm x$ に成る．)





ここで $(X,Y)=(x/\sqrt{6},y/\sqrt{2})$ なる座標変換をすると，右上図のようになるから，

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{2}}S=\frac{1}{2}\frac{2\pi}{3}$$

$$S=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

である．$\cdots$(答)