平面上に 2 つの曲線

$$y = x^2 \tag{1}$$
$$y = 3x^2 + 24x + 50 \tag{2}$$

がある．このとき 1 点 P をとり，曲線 (1) の上の任意の点 A に対して，線分 AP を一定の比 $m : n (m > 0, n > 0)$ に内分する点 B が必ず曲線 (2) の上にあるようにしたい．点 $P(\alpha, \beta)$ の座標と比 $m : n$ の値とを求めよ．

[解] $t \in \mathbb{R}$ に対して $A(t, t^2)$ と置ける． 題意の条件から $s \in \mathbb{R}$ に対して $B(s, 3s^2+24s+50)$ とおいてよい．このとき内分点に関する条件から

$$\begin{cases} \dfrac{nt + m\alpha}{m+n} = s & (3) \\ \dfrac{nt^2 + m\beta}{m+n} = 3s^2 + 24s + 50 & (4) \end{cases}$$

$\forall t \exists s, (3) \wedge (4)$ となる P，m，n の条件を求めればよい．(3) を (4) に代入して s を消去する．$a = m + n$ として簡単のため

$$p = \frac{6n(m\alpha + 4a)}{a^2}$$
$$q = \frac{3m^2\alpha^2}{a^2} + \frac{24m\alpha}{a} + 50$$

とおけば,

$$\frac{nt^2 + m\beta}{a} = 3\left(\frac{nt + m\alpha}{a}\right)^2 + 24\frac{nt + m\alpha}{a} + 50$$
$$\Longleftrightarrow \frac{n}{a}t^2 + \frac{m\beta}{a} = \frac{3n^2}{a^2}t^2 + pt + q$$

が恒等式であればよい． したがって

$$\begin{cases} \dfrac{n}{a} = \dfrac{3n^2}{a^2} \\ p = 0 \\ \dfrac{m\beta}{a} = q \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{3n}{a} \\ m\alpha + 4a = 0 & (\because a, n \neq 0) \\ \dfrac{m\beta}{a} = q \end{cases}$$

第 1 式および $a = m + n$ から，$n : m : a = 1 : 2 : 3$ である．これを第 2 式に代入して $\alpha = -6$ を得る．さらに第 3 式にこれらを代入して

$$\frac{2}{3}\beta = \frac{4}{3}\alpha^2 + 16\alpha + 50$$
$$\therefore \beta = 3$$

である．以上から $P(-6, 3)$，$m : n = 2 : 1$ である．$\cdots$(答)