4 点 $A_1(0,0)$，$A_2(1,0)$，$A_3(2,2)$，$A_4(0,2)$ を頂点とする四辺形がある．この平面上に 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 をとって，点 P_1 は P_4A_4 の中点，点 P_2 は P_1A_1 の中点，点 P_3 は P_2A_2 の中点，点 P_4 は P_3A_3 の中点となるようにする．

4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 の座標及び四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ の面積を求めよ．

[解] $K=1,2,3,4$ とする．$P_k(a_k,b_k)$ とおく．題意から

$$\begin{cases} (2a_1,2b_1)=(a_4,b_4+2) \\ (2a_2,2b_2)=(a_1,b_1) \\ (2a_3,2b_3)=(a_2+1,b_2) \\ (2a_4,2b_4)=(a_3+2,b_3+2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a_1=a_4 \\ 2a_2=a_1 \\ 2a_3=a_2+1 \\ 2a_4=a_3+2 \end{cases} \begin{cases} 2b_1=b_4+2 \\ 2b_2=b_1 \\ 2b_3=b_2 \\ 2b_4=b_3+2 \end{cases}$$

である．これからまず

$$a_1=\frac{a_4}{2}=\frac{a_3+2}{4}=\frac{a_2+5}{8}=\frac{a_1+10}{16}$$
$$\Longleftrightarrow a_1=\frac{2}{3}$$

となり，順に $(a_2,a_3,a_4)=(1/3,2/3,4/3)$ である．次に同様に

$$b_1=\frac{b_4+2}{2}=\frac{b_3+6}{4}=\frac{b_2+12}{8}=\frac{b_1+24}{16}$$
$$\Longleftrightarrow b_1=\frac{8}{5}$$

であるから，$(b_2,b_3,b_4)=(4/5,2/5,6/5)$ が従う．以上から

$$P_1\left(\frac{2}{3},\frac{8}{5}\right),P_2\left(\frac{1}{3},\frac{4}{5}\right),P_3\left(\frac{2}{3},\frac{2}{5}\right),P_4\left(\frac{4}{3},\frac{6}{5}\right)$$

である．$\cdots$(答)

従って四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ の面積は

$$S=\frac{8-2}{5}\frac{4-1}{3}\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$$

である．$\cdots$(答)