京大理科数学 1978

70分/150分

第 1 問

[解] $\alpha=a+b,\ \beta=ab$ とする.

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow (\alpha+c)-3\sqrt[3]{\beta}\cdot c^{\frac{1}{3}}-(\alpha-2\sqrt{\beta})\geq 0 \quad \cdots ①$$

この左辺 $f(c)$ とおくと, $f'(c)=1-\sqrt[3]{\beta}\cdot c^{-\frac{2}{3}}$ より下表をえる

c	0		$\sqrt{\beta}$	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

よって

$$f(c)\geq f(\sqrt{\beta})=\alpha+\sqrt{\beta}-3\sqrt{\beta}-\alpha+2\sqrt{\beta}=0$$

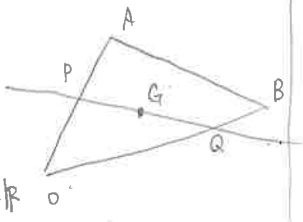
だから①は示された □

/20

第 2 問

[解] 点Xに対し、$\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ とおく。$\vec{a}$と$\vec{b}$は一次独立。

$$\begin{cases}\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\\ \vec{p}=h\vec{a}\\ \vec{q}=k\vec{b}\end{cases}$$



従って、直線PQ上の点Xは $t\in\mathbb{R}$ として

$$\vec{x}=th\vec{a}+(1-t)k\vec{b}$$

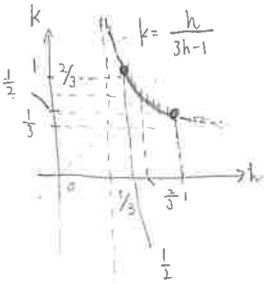
とおける。これがGを通るので、

$$th=(1-t)k=\frac{1}{3}$$

をみたす $t\in\mathbb{R}$ が存在するから、($h,k\neq 0$が必要で)、

$$\frac{1}{h}+\frac{1}{k}=3 \quad \text{…(i)}$$

さらに、$T=hkS$ …① である。$\alpha=hk$ とおく。(i)をみたす (h,k) $(0<h,k\leq 1)$ は右図太線部



従って、(i)から $\alpha=\frac{1}{3}(h+k)$ に注意して、図でこれらが交点を持つ条件から

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\leq\alpha\leq\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{4}{9}\leq\alpha\leq\frac{1}{2}$$

①に代入して

$$\frac{4}{9}S\leq T\leq\frac{1}{2}S$$

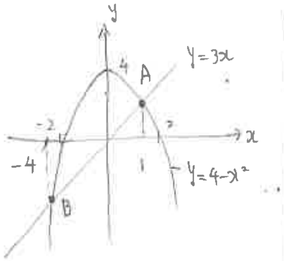
/20

第 3 問

[解](1) $P(t, 4-t^2)$ とおく. $(-4 \le t \le 2)$

$\triangle PAB = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot$(PとABの距離)

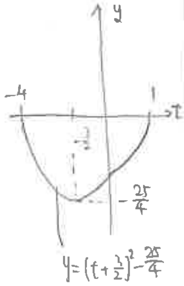
だから. PとABの距離 l が最大の時. △PABの面積も最大.



$$l = \frac{|3t+t^2-4|}{\sqrt{9+1}} = \frac{\sqrt{10}}{10}\left|\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right|$$

より. $\max l = \frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{25}{4}$ ($t=-\frac{3}{2}$の時) だから

求めるP(p,q)は $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ //



(2) 題意の直線はm: $y=3x+\alpha$ とおける $(\alpha\in\mathbb{R})$. これと放物線の交点のx座標は

$$x^2+3x+\alpha-4=0$$

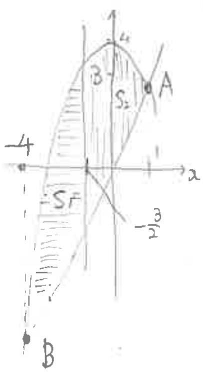
の2解であり. $x=\frac{1}{2}\left(-3\pm\sqrt{25-4\alpha}\right)$ だから. CDの中点Mのx座標は $x=-\frac{3}{2}$ となる. したがって(1)から. 線分CDは $x=p$ で2等分される. 終

(3) 右図のように面積をおく $(S=S_1+S_2)$

$$S=\int_{-4}^{1}(4-x^2-3x)\,dx=\frac{1}{6}5^3$$

$$S_1=\int_{-4}^{-\frac{3}{2}}(4-x^2-3x)\,dx=-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3+\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{12}5^3$$

よって $S_1=S_2$ となるから示された 終



/20

第4問

/20

第 5 問

[解] (1) 条件は $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}$ $(\alpha\le\beta\le\gamma)$ として

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ とかけること.

$$\begin{cases} m=-(\alpha+\beta+\gamma)\\ n=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\\ 2=-\alpha\beta\gamma\end{cases}$$

より. $(\alpha,\beta,\gamma)=(-2,-1,-1)\ (-2,1,1)\ (-1,1,2)$ で

あるから各々代入して

$(m,n)=(4,5)\ (0,-3)\ (2,-1)$ //

(2) $k\in\mathbb{Z}$ を解に持つ時

$k(k^2+mk+n)=-2$ …※

$k,\ k^2+mk+n\in\mathbb{Z}$ から

$(k,\ k^2+mk+n)=\underbrace{(-2,1)}_{①}\ \underbrace{(2,-1)}_{②}\ \underbrace{(1,-2)}_{③}\ \underbrace{(-1,2)}_{④}$

である

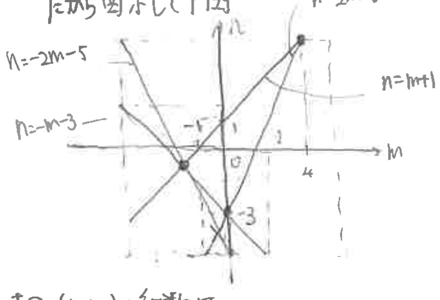
$$\begin{cases} ①の時\quad k=-2,\ 3-2m+n=0\\ ②の時\quad k=2,\ 5+2m+n=0\\ ③の時\quad k=1,\ 3+m+n=0\\ ④の時\quad k=-1,\ -1-m+n=0\end{cases}$$

逆にこの時 ※がみたされて十分である. //

(3) (2)から条件は

$$\begin{cases} n=2m-3,\ n=-2m-5,\ n=-m-3,\ n=m+1\\ |m|,|n|\le 5\end{cases}$$

だから図示して下図



よって (n,m) の組数は

$10+8+6+6-4=26$ //

第 6 問

[解] (i) $\cos(m\pm n)x=\cos mx\cos nx\mp\sin mx\sin nx$ (複号同順) の辺々引いて.

$$\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}=\sin mx\sin nx$$

したがって.

$$I_{m,n}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\}dx$$

$$=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi & (m=n)\end{cases}$$

\#

(ii) 被積分関数を $g_k(x)$ とおく.

$$g_k(x)=\sin^2 kx-2(a\sin mx+b\sin nx)\sin kx+(a\sin mx+b\sin nx)^2$$

$$=(\sin^2 kx+a^2\sin^2 mx+b^2\sin nx)+2ab\sin mx\sin nx$$

$$-2(a\sin mx+b\sin nx)\sin kx$$

から. (i) より

$$\begin{cases}f(0)=\pi(a^2+b^2)+2abI_{m,n}\\ f(k)=\pi(a^2+b^2+1)+2abI_{m,n}-2aI_{m,k}-2bI_{n,k}\ (k\geq 1)\end{cases}\cdots②$$

${}_5C_0={}_5C_5=1,\ {}_5C_1={}_5C_4=5,\ {}_5C_2={}_5C_3=10\cdots③$ から.

$$E=\left(\frac{1}{2}\right)^5\Big[\underline{\pi(32a^2+32b^2+31)+64abI_{m,n}}-2a\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k\cdot I_{m,k}-2b\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k\cdot I_{n,k}\Big]\cdots④$$

ここで. $m,n\in\mathbb{N}$ 及び $0\leq k\leq 5$ から.

$$\begin{cases}1\leq m\leq 5\ の時.\ \displaystyle\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k\cdot I_{m,k}={}_5C_m\cdot\pi\\ 6\leq m\quad の時.\ \displaystyle\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k\cdot I_{m,k}=0\end{cases}\cdots⑤$$

である。又. 〜部をAとおく。

1° $m=n$ の時

$I_{m,n}=\pi$ だから.

$$\frac{1}{\pi}\cdot 2^5\cdot E=\begin{cases}32(a+b)^2+31 & (6\leq m)\\ 32(a+b)^2-2(a+b){}_5C_m+31 & (1\leq m\leq 5)\end{cases}$$

である。$6\leq m$ の時. $a+b=0$ で $\min E=\frac{31}{32}\pi$ をとる。

$1\leq m\leq 5$ の時. $a+b=\frac{{}_5C_m}{32}$ で $\min E=\frac{\pi}{2^5}\left(31-\frac{({}_5C_m)^2}{32}\right)$ をとる。③から

$m=2$ 又は 3 の時. $\min E$ は最小値 $\frac{223}{256}\pi$ をとる。

2° $m\neq n$

$I_{m,n}=0$ から $A=\pi[32(a^2+b^2)+31]$ である。対称性から $m<n$ として良い。

$2^5\cdot E$ の値は以下のようになる。

n \ m	$1\leq m\leq 5$	$6\leq m$
$1\leq n\leq 5$	$A-2\pi(a\cdot{}_5C_m+b\cdot{}_5C_n)$ ㋐	
$6\leq n$	$A-2\pi\cdot a\cdot{}_5C_m$ ㋒	A ㋓

まず. ㋐の時. $a,b\leq 0$ ならば E は a,b の単調減少関数だから (${}_5C_k>0$)

$a=b=0$ で $\min E=\frac{31}{32}\pi$ をとる。$a,b>0$ の時. $m<n$ から $(m,n)=(2,3)$ で

$$2^5\frac{1}{\pi}E=32(a^2+b^2)+31-20(a+b)$$

$$=32\left(a-\frac{5}{16}\right)^2+32\left(b-\frac{5}{16}\right)^2+31-\frac{25}{4}$$

$$\geq\frac{99}{4}\quad(等号成立は\ a=b=\tfrac{5}{16})$$

から. $a=b=\frac{5}{16}$ で $\min E=\frac{99}{128}\pi$ をとる。

次に㋒の時. $a\leq 0$ なら同じく $\min E=\frac{31}{32}\pi$, $a>0$ の時. $m=2,3$ で

$$2^5\frac{1}{\pi}E=32(a^2+b^2)+31-20a$$

$$\geq 31-\frac{25}{8}=\frac{223}{8}\quad(等号成立は\ a=\tfrac{5}{16},\ b=0)$$

㋓の時は $a=b=0$ で $\min E=\frac{31}{32}\pi$ である。

以上から. 2° の㋐の時 E は min で. 対称性から

$$(m,n,a,b)=\left(3,2,\frac{5}{16},\frac{5}{16}\right)\ \left(2,3,\frac{5}{16},\frac{5}{16}\right)$$

\#