関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ は次の条件を満たすものとする．

(1) $f(1)=4$.

(2) $x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$.

このとき $\int_0^1 f(x)dx$ の値を最大にする a，b の値，最小にする a，b の値をそれぞれ求めよ．

[解] 条件 (1) から，

$$a+b=3 \tag{1}$$

である．次に条件 (2) を考える．$x=0$ のときはこれは満たされるから，以下 $x>0$ で考える．このとき，

$$\begin{aligned}&\forall x>0, f(x)\geqq 0\\ \Longleftrightarrow\ &\forall x>0, x^2+ax+b\geqq 0\end{aligned} \tag{2}$$

だから (2) について考えればよろしい．そこでこの不等式の左辺を $g(x)$，方程式 $g(x)=0$ の判別式を D とおけば，(2) は

$$\begin{aligned}
&D\leqq 0 \vee \begin{cases} D>0 \\ f(0)\geqq 0 \\ \dfrac{-a}{2}<0 \end{cases}\\
\Longleftrightarrow\ & a^2-4b\geqq 0 \vee \begin{cases} a^2-4b>0 \\ b\geqq 0 \\ a>0 \end{cases}\\
\Longleftrightarrow\ & -6\leqq a\leqq 2 \vee \begin{cases} a<-6, 2<a \\ 0<a\leqq 3 \end{cases} \qquad (\because (1))\\
\Longleftrightarrow\ & -6\leqq a\leqq 3
\end{aligned} \tag{3}$$

となる．このもとで $h(a)=\int_0^1 f(x)dx$ の最大小を考える．

$$\begin{aligned} h(a) &= \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{-1}{6}a+\frac{7}{4} \qquad (\because (1)) \end{aligned}$$

となり，$h(a)$ は a の単調減少関数である．故に (1)，(3) より，$(a,b)=(3,0)$ で最小，$(a,b)=(-6,9)$ で最大となる．$\cdots$(答)