

変数 t が 0 から π まで動く時,

$$x = 2 \cos \left(t - \frac{\pi}{6} \right), y = \cos \left(t + \frac{\pi}{3} \right)$$

によってあらわされる点 (x, y) と原点 $(0, 0)$ との間の距離の最大値, 最小値およびそれをとる t の値を求めよ.

[解] $\cos t = c, \sin t = s$ とおく. 題意の距離の 2 乗を $L(t)$ とおけば

$$\begin{aligned} L(t) &= x^2 + y^2 \\ &= 4 \cos^2 \left(t - \frac{\pi}{6} \right) + \cos^2 \left(t + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \left(\sqrt{3}c + s \right)^2 + \left(\frac{1}{2}c - \frac{\sqrt{3}}{2}s \right)^2 \\ &= \frac{13}{4}c^2 + \frac{7}{4}s^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}sc \\ &= \frac{7}{4} + \frac{3}{2}c^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2t \\ &= \frac{5}{2} + \frac{3}{4}(\cos 2t + \sqrt{3}\sin 2t) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sin \left(2t + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

となる. $0 \leq t \leq \pi$ に注意して, 求める距離 L の最大最小は,

$$\begin{cases} \min L = 1 & \left(t = \frac{2\pi}{3} \right) \\ \max L = 2 & \left(t = \frac{\pi}{6} \right) \end{cases} \quad (\text{答})$$

となる.