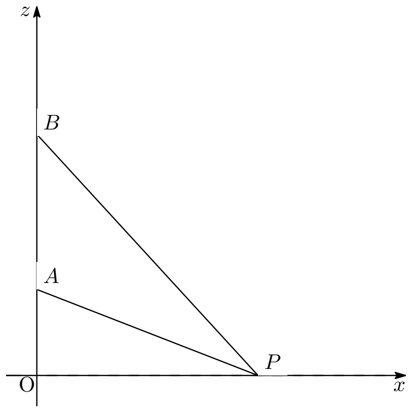
空間に座標系が定められていて，z 軸上に 2 点 $A(0,0,6)$，$B(0,0,20)$ が与えられている．xy 平面上の点 $P(x,y,0)$ で，$0 \leq x \leq 15$，$0 \leq y \leq 15$，$\angle APB \geq 30^\circ$ を満たすものの全体がつくる図形の面積を求めよ．

[解] 対称性から，まず P が x 軸上にある時を考える．



上図において，(xz 平面)

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} -x \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -x \\ 20 \end{pmatrix}$$

だから，$0 \leq \angle APB < \pi/2$ とあわせて，

$$\begin{aligned} \tan\angle APB &= \frac{|-6x+20x|}{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}} \\ &= \frac{14x}{120+x^2} \qquad (\because x \geq 0) \end{aligned}$$

$\tan\theta$ が $0 \leq \theta < \pi/2$ で単調増加であることから，$\angle APB \geq 30^\circ$ のとき，

$$\begin{aligned} &\tan\frac{\pi}{6} \leq \frac{14x}{120+x^2} \\ \Longleftrightarrow & x^2 - 14\sqrt{3}x + 120 \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & (x-10\sqrt{3})(x-4\sqrt{3}) \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & 4\sqrt{3} \leq x \leq 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

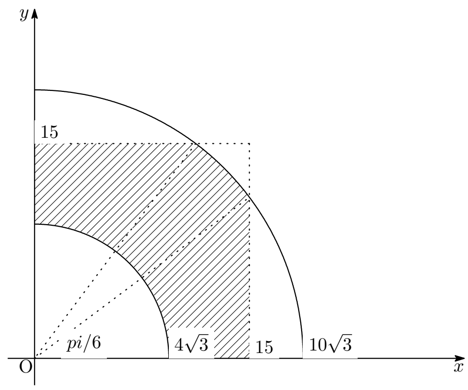
したがって，P を xy 平面で動かすと，

$$16 \times 3 \leq x^2 + y^2 \leq 100 \times 3 \qquad (1)$$

となる．従って，求める領域は

$$(1) \wedge (0 \leq x \leq 15) \wedge (0 \leq y \leq 15) \qquad (2)$$

であり，図示して右上図斜線部．



この面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}(10\sqrt{3})^2 + 15 \times 5\sqrt{3} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}(4\sqrt{3})^2 \\ &= 13\pi + 75\sqrt{3} \end{aligned}$$

である．$\cdots$(答)