京大理科数学 1980

90/120分

			計	思	総	
1	行列					
2	多変数		A	A	A	20
3	空間		B	B	B	20
4	確立		A	A	A	20
5	整数	A	A	C	C	20
6	関数	A	B	B	B	20

第 1 問

/20

第 2 問

[解] $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$ の頂点 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ が

$y=-2x+5$ 上にあるので、

$$-\frac{b^2}{4a}=\frac{b}{a}+5$$

$$\therefore\ a=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}b^2+b\right) \quad \cdots ①$$

又、題意の面積 S として ① から

$$S=\int_0^{-\frac{b}{a}}(ax^2+bx)\,dx$$

$$=\frac{-a}{6}\left(-\frac{b}{a}\right)^3=\frac{1}{6}\frac{b^3}{a^2}$$

$$=\frac{1}{6}\frac{b^3}{\frac{1}{25}b^2\left(\frac{1}{4}b+1\right)^2}=\frac{25}{6}\frac{b}{\left(\frac{1}{4}b+1\right)^2}$$

$$=\frac{25}{6}\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}b+\frac{1}{b}}$$

$$\leq\frac{25}{6}\frac{1}{\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{b}{16}\cdot\frac{1}{b}}}=\frac{25}{6}$$

($\because$ $b>0$ から AM-GM)

等号成立は $\frac{b}{16}=\frac{1}{b} \Leftrightarrow b=4$ のとき ($\because b>0$)

[この時、$y=-\frac{8}{5}x^2+4x$ となり

$$S=\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{4}{3}\cdot\frac{25}{8}=\frac{25}{6}$$

⇒合致]

/20

第3問

[解] $A(l,m,n)$ $B(m,n,l)$ $C(n,l,m)$ とおく(∵②)

①,③から

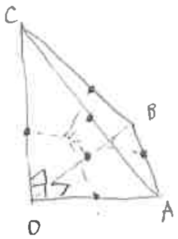
$$\begin{cases} l+m+n=1 \cdots ④ \\ lm+mn+nl=0 \cdots ⑤ \end{cases}$$

(i) 点$X\left(\frac{l+m+n}{3}, \frac{l+m+n}{3}, \frac{l+m+n}{3}\right)$ をとると ④から Xは $x+y+z=1$ 上にあり

$$XA^2=XB^2=XC^2=\left(\frac{m+n-2l}{3}\right)^2+\left(\frac{m+l-2n}{3}\right)^2+\left(\frac{n+l-2m}{3}\right)^2$$

だから∴ A,B,Cは Pを中心とする平面$x+y+z=1$上の円上にある 図

(ii) ⑤から $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$となり、四$OABC$は$\triangle OAB$を底面とし、$OC$を高さとする四面体とみることができる



$$OA=OB=OC=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$$
$$=\sqrt{(l+m+n)^2-2(mn+nl+lm)}$$
$$=1\ (∵④⑤)$$

から、体積Vとして

$$V=\frac{1}{6}=\mathrm{const}$$ 図

(iii) $L\left(\frac{m+n}{2}, \frac{n+l}{2}, \frac{l+m}{2}\right)$, $M\left(\frac{n+l}{2}, \frac{m+l}{2}, \frac{n+m}{2}\right)$ $N\left(\frac{m+l}{2}, \frac{m+n}{2}, \frac{n+l}{2}\right)$

$P\left(\frac{l}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ $Q\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}, \frac{l}{2}\right)$ $R\left(\frac{n}{2}, \frac{l}{2}, \frac{m}{2}\right)$ だから、

$Y\left(\frac{l+m+n}{4}, \frac{l+m+n}{4}, \frac{l+m+n}{4}\right)$ とおけば

$$KY^2=\left(\frac{m+n-l}{4}\right)^2+\left(\frac{m+l-n}{4}\right)^2+\left(\frac{l+n-m}{4}\right)^2=\mathrm{const}$$

(KはL～Qの任意の点)となり、たしかにL～RはYを中心とする定球上にある。図

☆ (ii)は、サラスの公式を使うと一瞬だったり…

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & n \\ m & n & l \\ n & l & m \end{bmatrix}$$

$$\frac{(l+m+n)(l^2+m^2+n^2-0)}{1}+3lmn$$

$$V=\frac{1}{6}\left|lnm+mln+nml-l^3-n^3-m^3\right|$$
$$=\frac{1}{6}(l^2+m^2+n^2)=\frac{1}{6}\left((l+m+n)^2-2\cdot 0\right)=\frac{1}{6}$$

/20

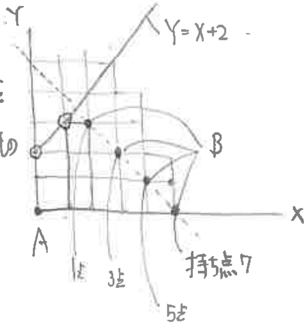
第4問

[解] $\frac{1}{2}$の確立で1点増し, $\frac{1}{2}$の確立で1点減る.

n回目までに奇数の目が出た回数$X(n)$, n回目までに偶数の目が出た回数$Y(n)$とおくと n≦5の時常に

$$※X(n)+2>Y(n) \quad (X(n)+Y(n)=n)$$

がみたされていれば良い(n=5では等号が成立しても良い). このような場合の数は右の図で格子上を通ってAからBまで行く最短経路のうちY=X+2を通らないものと1対1対応している



- 7点 .. 1通り
- 5点 .. 5通り
- 3点 .. 9通り
- 1点 .. 5通り

だから.

5回振ることのできる確立は $\frac{20}{2^5}=\frac{5}{8}$ //

得点の期待値は $\frac{1}{2^5}(7+25+27+5)=2$ 点 //

/20

第 5 問

[解] $\{a_n\}$ を小さい順にならびかえた数列 $\{b_n\}$ とする．

(i) b_1 により場合分けする。$b_1 \geqq 0$ の時は，b_n が単调増加で．あることから(イ)が成立する。そこで．$b_1 < 0$ の時 (ロ)が成立することを示す．

$b_n > 0$ と仮定する．すると．$b_k \leqq 0 < b_{k+1}$ をみたす k ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leqq k \leqq n-1$) が存在する

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_k \leqq 0 < b_{k+1} < \cdots < b_n$$

この時 b_1 と b_n をとりだしてきて $b_1 - b_n$ 又は $b_n - b_1$ のいずれかが S の要素だが，$b_1 < 0 < b_n$ より

$$b_1 - b_n > b_1 \ , \quad b_n - b_1 > b_n$$

となり．b_n が単调増加であることに反し矛盾．以上から $b_n \leqq 0$ となり．したがって(ロ)が成立する

以上から示された 圓

(ii) (イ)が成り立つ時

S の全要素が0以上だから b_k, b_j をとってきた時 ($j < k$)．$b_j - b_k < 0$ は S の要素となりえず．$b_k - b_j$ が S の要素となる。

したがって

$$b_2 - b_1 < b_3 - b_1 < \cdots < b_n - b_1 \quad (n-1 \text{コ})$$

が全て S の要素となる．

1° $b_1 > 0$ の時

$$b_1 \leqq \underbrace{b_2 - b_1 < b_3 - b_1 < \cdots}_{n-1\text{コ}} < b_n - b_1 < b_n$$

となり．
$b_2 - b_1 = b_1, \cdots, b_n - b_1 = b_{n-1}$ となるから．順に

$$b_2 = 2b_1,\ b_3 = 3b_1,\ \cdots\ b_n = nb_1$$

となり．たしかに数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 (>0)$，公差 b_1 の等差数列

2° $b_1 = 0$ の時

$b_2 > b_1 = 0$ から．同じようにして

$$(0 <) b_3 - b_2 < b_4 - b_2 < \cdots < b_n - b_2 (< b_n)$$

が全て S の要素で．

$$b_3 - b_2 = b_2\ , \cdots ,\ b_n - b_2 = b_{n-1}$$

となり．$2 \leqq i$ の時 $b_i = i b_2$，$b_1 = 0$ だから．$\{b_n\}$ は初項0公差 b_2 の等差数列．

(ロ)が成り立つ時

(イ)と同じく．

$$b_1 - b_n < b_2 - b_n < \cdots b_{n-1} - b_n$$

が全て S の要素だから．(イ)の場合と全く同様にして $\{b_n\}$ が等差数列であることが示される．

以上から．いずれの場合も $\{b_n\}$ は等差数列。$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ をならびかえたものだから，示された 圓

/20

第 6 問

[よく考えると、わざわざ(2)で $(A,B)=(1,3)$ を排除する必要なかったね。]

[解] $f(x)$ を、f などと略記する

(1) $g(x), h(x)$ は整数係数だから $g(0), h(0) \in \mathbb{Z}$ …①.

又、$f(0)=g(0)h(0)$ から $1=g(0)h(0)$ …②

①.②から $(g(0), h(0))=(1,1)\ (-1,-1)$ となるが、いずれの場合も

$g(0)=h(0)$ となる図

(2) 題意の時、対称性から $\underbrace{(g\text{の次数})}_{A} \leq \underbrace{(h\text{の次数})}_{B}$ とすると、

$(A,B)=(1,3)\quad(2,2)$

のいずれかである。前者の時、f の最高次係数が1なことと(1)から

$g(x)=\pm x\pm 1$

となるが、$f(\pm 1)\neq 0$ と因数定理から $f(x)=g(x)h(x)$ に矛盾。よって $(A,B)=(2,2)$ に限られる。さ以下 $f(m), g(m)\in\mathbb{Z}$、$(m\in\mathbb{Z})$ に注意する。

$$\begin{cases} g(1)h(1)=1 \\ g(a)h(a)=1 \\ g(b)h(b)=1 \end{cases}$$

より、(1)と同じく、$g(1)=h(1), g(a)=h(a)\ g(b)=h(b)$ である。

g, h は共に2次式であること、異なる3つの値で g, h の値が一致することから、$\underline{g(x)=h(x)}$ となる図

(3) $g=h$ の時

$(g+1)(g-1)=x(x-a)(x-1)(x-b)$ - ③

たとえば $(a,b)=(-1,-2)$, $g(x)=x^2+x-1$ とすれば

$(g+1)(g-1)=x(x+1)(x+2)(x-1)$

となって③をみたすから

$(a,b)=(-1,-2)$ //

が1例である。

/20