10 進表示の n 桁の正の整数で，隣り合う桁の数字が互いに相異なるような数の個数 を a_n とするとき，次の問いに答えよ．

1. a_n を求めよ．
2. 上の数のうちで，1 の位の数字が 0 である数の個数を b_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ．

[解]

(1) 最高位の選び方は 1 から 9 のなかから一つえらぶ 9 通り，，それ以下の位は 0 から 9 のうち一つ上の位で使われた以外の一つを選ぶ 9 通りなので，結局すべての桁について 9 通りの選び方があるから，答えは $a_n = 9^n$ 通り．$\cdots$(答)

(2) a_n 通りの整数のうち，1 の位が 0 のものを b_n 個，1 の位が 1 であるものを c_n 個とする．対称性から，1 位が $2, 3, \ldots, 9$ であるものも c_n 個ずつあり，これらは排反だから

$$b_n + 9c_n = a_n \tag{1}$$

が成り立つ．

次に，b_{n+1} を考える．$n+1$ 桁の正整数の下 2 桁に注目すると，1 の位は 0 であるから，10 の位は $1, 2, \ldots, 9$ のうち一つを選ぶことができる．このような 1 から $n+1$ の位の選び方は $9c_n$ に等しいので，

$$b_{n+1} = 9c_n = a_n - b_n \quad (\because \text{eq. (1)})$$

となる．両辺を a_n で割ると

$$\frac{b_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{b_n}{a_n}$$

ここで (1) から $a_n = 9^n$ だから $a_{n+1} = 9a_n$ となることを利用して

$$9\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 - \frac{b_n}{a_n}$$

を得る．$d_n = b_n/a_n$ とおくと，d_n に関する漸化式

$$9d_{n+1} = 1 - d_n$$

を得る．d_n の初期条件は $b_1 = 0$ から $d_1 = 0$ である．したがってこの漸化式は

$$d_{n+1} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{9}\left(d_n - \frac{1}{10}\right)$$

$$d_n = \frac{1}{10}\left\{-\left(\frac{-1}{9}\right)^{n-1} + 1\right\}$$

と解ける．したがって求めるべき極限値は

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} d_n \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\left\{-\left(\frac{-1}{9}\right)^{n-1} + 1\right\} \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

である．$\cdots$(答)

[解説] 典型的な場合の数と数列の問題であり，解法も漸化式がたてば簡単である．(2) の解答も 1/10 であり，これは桁数が増えてくれば 1 の位の値がほぼランダムに分布することを意味しており，非常にそれらしい値になっている．