# 京大理科数学 1975

70/150

| | 計 | 思 | 総 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A | A | A | 20 |
| 2 | A | A | A | 20 |
| 3 | A | A | A | 20 |
| 4 | A | A | A | 20 |
| 5 | C | B | B | 20 |
| 6 | B | B | B | 20 |

第 1 問

[解] 1チームの勝ち数は、$n-1, n-2, \cdots, 1, 0$ の $n$ 通りしかないので、題意から、第 $k$ 位のチーム $A_k$ は $n-k$ 勝していることになる $(k=1, 2, \cdots, n)$

以下、題意の成立を $k$ についての帰納法で示す。

1° $k=1$ の時

1位のチームは $n-1$ 勝。つまり他の全てのチームに勝っており、成立。

2° $k \leqq i$ での成立を仮定 $(i=1, 2, \cdots, n-1)$

$k=i+1$ の時、仮定から、$A_{i+1}$ は $A_1 \sim A_i$ のチームに負けており、少なくとも $i$ 回負けている。従って、$n-(i+1)$ 勝するには残りの全ての試合に勝つことになるから、$k=i+1$ でも成立

以上から示された ■

/20

第 2 問

[解]

(1) $x \geq 0$ から AM-GM より

$$\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x} \quad \cdots ①$$

//

(2) ①から $[0, k]$ の時

$$\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k \leq \frac{1}{2}(x+1)\left(1-\frac{x}{k}\right)^k$$

両辺同じ区間で積分、与式左辺 A として

$$A < \frac{1}{2}\int_0^k (x+1)\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx$$

$t = 1-\frac{x}{k}$ とおくと $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{k}$, $x : 0 \to k$ で $t : 1 \to 0$ だから

$$A < \frac{1}{2}\int_1^0 \{1+k(1-t)\} t^k (-k) dt$$

$$= \frac{1}{2}k\int_0^1 \{(1+k)t^k - kt^{k+1}\} dt$$

$$= \frac{1}{2}k\left[t^{k+1} - \frac{k}{k+2}t^{k+2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}k\,\frac{2}{k+2} = \frac{1}{1+2/k} < 1 \quad (\because k \in \mathbb{N})$$ 図

/20

第 3 問

[解] 題意から

$$\begin{cases} 2\beta = \alpha + \gamma & \cdots ① \\ \sin^2\beta = \sin\alpha \sin\gamma & \cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入

$$\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right]\left[\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right]$$

$t = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, $S = \frac{\alpha-\gamma}{2}$ とおく

$$\sin^2 t + \sin^2 S = 0 \quad \cdots ③$$

$\sin t, \sin S \in \mathbb{R}$ から、③が成立するのは

$$\sin t = \sin S = 0$$

$$\therefore \frac{\alpha+\gamma}{2} = n\pi, \quad \frac{\alpha-\gamma}{2} = k\pi \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

の時である解いて

$$\alpha = (n+k)\pi$$
$$\gamma = (n-k)\pi$$

①に代入して

$$\beta = n\pi$$

従って、題意のようになるのは、$n, k \in \mathbb{Z}$として

$$(\alpha, \beta, \gamma) = ((n+k)\pi, n\pi, (n-k)\pi)$$

/20

第 4 問

[解] 点Xの位置ベクトルを$\vec{x}$で定める。$\vec{\alpha}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$とし、Gを△ABCの重心とすると

$$\vec{\alpha}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{p}$$

$$=3(\vec{g}-\vec{p})$$

$$\therefore |\vec{\alpha}|=3|\vec{g}-\vec{p}|=3|\overrightarrow{PG}|$$

したがって、定円の中心D、直線DGと定円の交点のうちGとDに関して反対側のものEとして、P＝Eの時与式は最大。

/20

第 5 問

[解] $\begin{cases} 2 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \cdots ① \\ S = n - 2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} > 0 \end{cases}$

(i) $n=3$の時.

$$S = 1 - \left(\underbrace{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}}\right)$$

だから. $S>0$をみたすうち、〜〜を最大にするような$a$の組をもとめれば良いが. $\frac{1}{x}$は$2 \leq x$で単調減少なことから. しらみつぶしに考える

$1^\circ$ $a_1=2$の時

$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}<\frac{1}{2}$をみたすうち逆数和をmaxにする$a_2, a_3$をかんがえる. $a_2, a_3 \geq 2$から、$(a_2-2)(a_3-2)>4$だから.

$(a_2, a_3) = (3,7)\ (4.5)$ 又は $a_2 \geq 5$

なので. もとめる組は $(a_1, a_2, a_3) = (2, 3.7)$

$2^\circ$ $a_1=3$の時

$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}<\frac{1}{3} \Leftrightarrow (a_2-3)(a_3-3)>9$ をみたすうち逆数和をmaxにする$a_2, a_3$をもとめる. $(a_2, a_3) = (4,13), (5,8)\ (6,7)$ or $a_2 \geq 7$で.

明らかに$1^\circ$の時より和が小さい

以上から. もとめるのは $(a_1, a_2, a_3) = (2, 3.7)$ //

(ii) $n \geq 5$の時. $a_i = 2$ $(i=1.2 \sim n)$とすることにより

$$S = n-2-\frac{n}{2} = \frac{1}{2}(n-4) > 0$$

となって $S$は最小値をとる. $n$をうごかした時. これは明らかに$n=5$で最小値をとる 以下$1 \leq n \leq 4$として考える. $n=1,2$の時. $S$は明らかに負だから不適. よって$n=4$をしらべる. $\frac{1}{x}$が$2 \leq x$で単調増加なことと$2=a_1=a_2=a_3=a_4$の時$S=0$であることから. $a_1=a_2=a_3=2, a_4=3$の時. $\min S = 2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\ (>0)$をとる.

以上から.

$\begin{cases} n \geq 5\text{の時}\ n=5.\ a_i=2\text{で}\ \min S = \frac{1}{2} \\ n=4\ 〃\ a_1=a_2=a_3=2, a_4=3\text{で}\ \min S = 1/6 \\ n=3\ 〃\ (a_1, a_2, a_3) = (2,3,7)\text{で}\ \min S = \frac{1}{42} \end{cases}$

よって. $S$をminにするのは

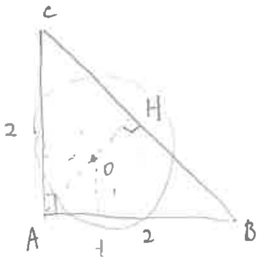
$n=3.\ (a_1, a_2, a_3) = (2.3.7)$ //

の時.

/20

## 第 6 問

[解] Aを原点, $B(2,0)$ $C(0,2)$ とする $xy$ 平面で考える。又. $O(t,t)$ $(0<t)$ とおき, 題意の円Tとおく.




$T: (x-t)^2+(y-t)^2=1$

$BC: x+y=2$

(i) Tと $x$ 軸の交点は $x^2-2tx+2t^2-1=0$ の2実解

〃 $y$ 〃 $y^2-2ty+2t^2-1=0$ 〃

〃 BC 〃 $2x^2-4x+2t^2-4t+3=0$ 〃

だからこれらが $0\leq x\leq 2$, $0\leq y\leq 2$ に2実解を持つ条件を考えて

軸: $0<t<2$,
端: $2t^2-1\geq 0$, $2t^2-4t+3\geq 0$
判: $t^2-(2t^2-1)>0$

軸: $0<1<2$
端: $2t^2+4t+3\geq 0$, $2t^2-4t+3\geq 0$
判: $4-2(2t^2-4t+3)>0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<t<2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\leq t,\ t<1 \end{cases} \wedge \quad 2-\sqrt{2}<t<2+\sqrt{2}$

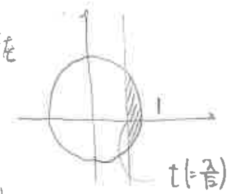
$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\leq t<1$

よって. $x=\sqrt{2}t$ から. $\underline{1\leq x<\sqrt{2}}$ //

(ii) (i)の時. Tの中心と $x$, $y$ 軸, BCとの距離は各々

$t,\ t,\ \sqrt{2}-\sqrt{2}t$

だから. $F(t)$ が右図斜線部の面積を表すことから. ……




$S=\pi-2F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-F(\sqrt{2}-x)$ //

(iii) (ii)から

$\frac{dS}{dx}=+4\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{1-(\sqrt{2}-x)^2}$

$=2\left[\sqrt{2-x^2}-\sqrt{1-(\sqrt{2}-x)^2}\right]$ //

$=2\dfrac{-2\sqrt{2}x+3}{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{1-(\sqrt{2}-x)^2}}$

から下表を得る

| $x$ | $1$ | | $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S$ | | ↗ | | ↘ | |

よって. $\underline{x=\frac{3}{4}\sqrt{2}}$ で $S$ は最大.

/20