

x のある 2 次関数のグラフが、原点において直線 $y = x$ に接するという。このグラフ上の点 (u, v) における接線の傾きを u, v で表せ。ただし (u, v) は原点ではないとする。

[解] 題意の放物線を $y = f(x) = ax^2 + bx$ とおく ($\because f(0) = 0$)。ただし $a \neq 0$ である。
 $f'(0) = 1$ だから $b = 1$ である。故に

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + x \\ \therefore f'(x) &= 2ax + 1 \end{aligned}$$

となる。また (u, v) が放物線上にあることから $a = \frac{v-u}{u^2}$ である。故にグラフ上の点 $(u, f(u))$ での接線の傾きは

$$\begin{aligned} f'(u) &= 2ua + 1 \\ &= 2u \frac{v-u}{u^2} + 1 \\ &= \frac{2v-u}{u} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

である。