整数を係数とする次数 3 の多項式 $P(x)$ で，次の条件を満たすものを求めよ．

(1) $P(x)$ のグラフは原点に関して対称である．

(2) $P(x)=0$ は重根を持たない．

(3) $P(x)$ は極大値も極小値も持たない．

(4) $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$ は整数である．

(5) $0<P(1)<6$ である．

[解] 条件 (1) から，$P(x)$ は奇関数であるから，$a,b\in\mathbb{R}$ として $P(x)=ax^3+bx$ とおける．ただし $a\neq 0$ である．さらに条件 (2) から，$b\neq 0$ が従う．($b=0$ なら重根 $x=0$ を持つ．) さらに条件 (3) から $P'(x)=3ax^2+b$ の符号が入れ替わらなければよい．言い換えれば常に非負か，常に非正であればよい．然るに $P'(0)=b$ 及び $x\to\infty$ の極限を考えることで，a,b の符号が一致していなければならない ($\because ab\neq 0$)．つまり $ab>0$ である．

次に (4) から

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a+4b}{8}\in\mathbb{Z}$$
$$\Longleftrightarrow a+4b=8k(k\in\mathbb{Z}) \qquad (1)$$

となる．以上に加えて条件 (5) から $0<a+b<6$ である．$a,b\in\mathbb{Z}$ 及び $ab>0$ からあり得る (a,b) の候補は

$$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1)$$
$$(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)$$

のみであるが，このうち (1) を満たすのは $(a,b)=(4,1)$ のみである．故に求めるのは $P(x)=4x^3+x\cdots$(答) である．