次の式 $x=\tan\theta$，$y=\frac{1}{\cos\theta}$ $(0\leq\theta<\frac{\pi}{2})$ で表される xy 平面上の曲線 C を考える．定数 $t>0$ に対し点 $\mathrm{P}(t,0)$ を通り x 軸に垂直な直線 l と曲線 C の交点を Q とする．曲線 C，x 軸，y 軸，および直線 l で囲まれた図形の面積を S_1 とし，$\triangle$OPQ の面積を S_2 とする．

1. S_1, S_2 を t を用いて表せ．
2. 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_1-S_2}{\log t}$ を求めよ．

[解] 先に曲線 C の概形を求める．$0<\theta<\pi/2$ で $x=\tan\theta$ は非負だから両辺二乗しても同値であって，

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{1}{\tan^2\theta}\\
&= \frac{1-\cos\theta^2}{\cos\theta^2}\\
&= \frac{1}{\cos\theta^2}-1\\
&= y^2-1
\end{aligned}
$$

となり，C は双曲線である．$0<\theta<\pi/2$ から, $0<x, 1\leq y$ で, 求める C の概形は fig. 1 である．

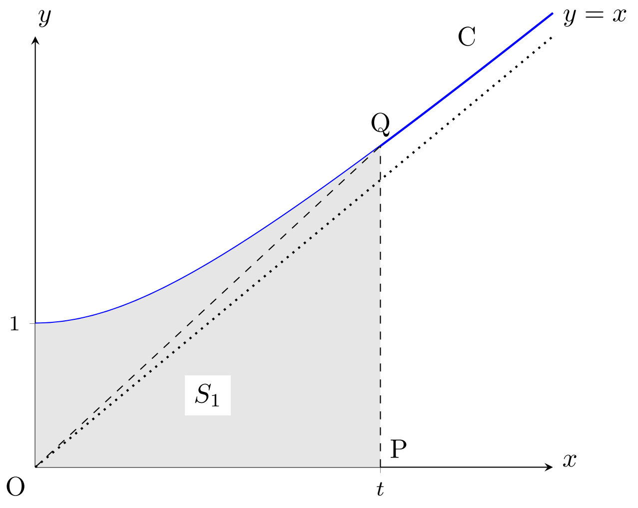

図 1: C の概形と点 P, Q の関係

(1) S_1 は $y=\sqrt{x^2+1}$ を $0\leq x\leq t$ で積分したものであり，

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^t \sqrt{x^2+1}\,dx\\
&= \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^t\\
&= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+1}+\log(t+\sqrt{t^2+1})\right]
\end{aligned}
$$

である．$\cdots$(答)

次に S_2 は底辺 t，高さ $\sqrt{t^2+1}$ の三角形の面積であり，

$$
S_2=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1}
$$

である．$\cdots$(答)

(2) (1) の結果から，与式は

$$
\begin{aligned}
\frac{S_1-S_2}{\log t} &= \frac{1}{2}\frac{\log(t+\sqrt{t^2+1})}{\log t}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\log t+\log(1+\sqrt{1+1/t^2})}{\log t}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\log(1+\sqrt{1+1/t^2})}{\log t}\right)\\
&=\!\to \frac{1}{2}\quad(t\to\infty)
\end{aligned}
$$

となり，求めるべき極限値は 1/2 である．$\cdots$(答)

[解説] 平面図形の問題．素直に条件を置いていけば良く，計算負荷も軽いのでかなり簡単な問題だろう．

(2) は要するに，C の漸近線である $y=x$ と曲線 C に囲まれた部分の面積がどのように振る舞うかというのを示す問題である．この様子を fig. 2 に示す．この問題から，ここの部分の面積が対数で発散していくということがわかる．

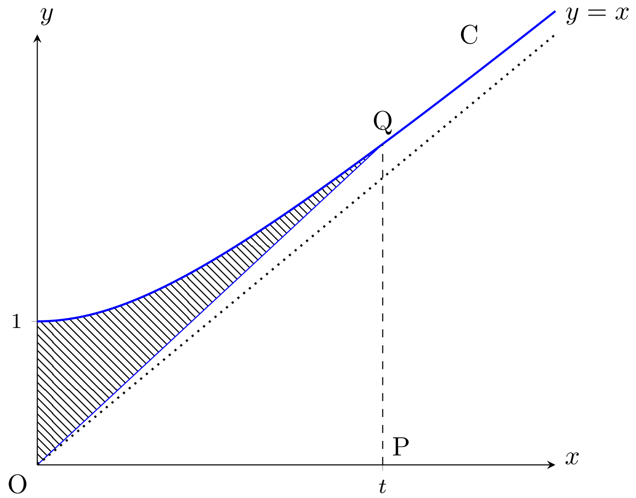

図 2: S_1 と S_2 の差は塗りつぶされた部分である.