$f(x)$ は $x>0$ で定義された連続な関数で，$0<x_1<x_2$ ならば，つねに $f(x_1)>f(x_2)>0$ であるものとし，$S(x)=\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$ とおく．このとき，$S(1)=1$ であり，さらに任意の $a>0$ に対して，原点と点 $(a,f(a))$，原点と点 $(2a,f(2a))$ を結ぶ 2 直線と曲線 $y=f(x)$ とで囲まれる部分の面積は $3S(x)$ に等しいものとする．

(1) $S(x)$，$f(x)-2f(2x)$ をそれぞれ x の関数として表せ．

(2) $x>0$ に対して，$a(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n f(2^n x)$ とおく．積分 $\displaystyle\int_x^{2x} a(t)dt$ を求めよ．

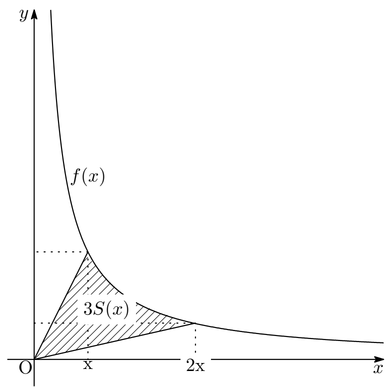
(3) 関数 $f(x)$ を決定せよ．

[解]

(1) 題意から，$f(x)$ は区間内で単調減少である．また，

$$S(x)=\int_x^{2x} f(t)dt \qquad (1)$$

である．グラフの概形は下図．



故に，題意から

$$\begin{aligned}3S(x)&=\int_x^{2x} f(t)dt+\frac{1}{2}xf(x)-\frac{1}{2}2xf(2x)\\&=S(x)+\frac{1}{2}xf(x)-xf(2x)\\S(x)&=\frac{1}{4}x(f(x)-2f(2x)) \qquad (2)\end{aligned}$$

である．$g(x)=f(x)-2f(2x)$ とおくと，(1)，(2) から

$$\begin{aligned}S'(x)&=2f(2x)-f(x)=-g(x)\\S(x)&=\frac{1}{4}xg(x)\end{aligned} \qquad (3)$$

$g(x)$ を消して，$S(x)=y$ とすれば，

$$4y=-x\frac{dy}{dx}$$

となる．$0<x$ で $0<f(x)$ であるから，$y>0$ となるので，変形して

$$\frac{-4x}{dx}=\frac{y}{dy}$$

積分して，$S(1)=1$ より，

$$y=S(x)=x^{-4}$$

である．従って (3) から，$g(x)=4x^{-5}$ である．$\cdots$(答)

(2) $a_n(x)=2^n f(2^n x)$ とおく．前問の結果で x に $2^n x$ を代入して，

$$\begin{aligned}2f(2^{n+1}x)&=f(2^n x)-4(2^n x)^{-5}\\2^{n+1}f(2^{n+1}x)&=2^n f(2^n x)-2^{n+2}(2^n x)^{-5}\\a_{n+1}(x)&=a_n(x)-2^{2-4n}x^{-5}\end{aligned}$$

である．繰り返し用いて，$n\geq 1$ のとき，

$$\begin{aligned}a_n(x)&=a_0(x)-\sum_{k=0}^{n-1}2^{2-4n}x^{-5}\\a_n(x)&=f(x)-4x^{-5}\frac{1-2^{-4n}}{1-2^4}\\&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)-\frac{64}{15}x^{-5}=a(x)\end{aligned}$$

であるから，求める積分値は

$$\int_x^{2x} a(t)dt=S(x)+\left[\frac{16}{15}t^{-4}\right]_x^{2x}$$

$$= x^{-4} + \frac{16}{15}\left(\frac{1}{16} - 1\right)x^{-4}$$
$$= 0$$

である．

(3) $f(x) > 0$ から，$a(x) > 0$ である．これと前問の積分計算から，被積分が恒等的に 0 である．

$$a(x) \equiv 0 \iff f(x) = \frac{64}{15}x^{-5}$$

これは $x > 0$ で定義された，連続な単調減少関数であり，十分である．以上から，

$$f(x) = \frac{64}{15}x^{-5}$$

である．$\cdots$(答)