1つのサイコロを続けて投げて，それによって $a_n(n=1,2,\dots)$ を以下のように定める．

出た目の数を順に $c_1,c_2,\dots$ とするとき，$1\le k\le n-1$ を満たすすべての整数 k に対し $c_k\le c_n$ ならば $a_n=c_n$，それ以外の時 $a_n=0$ とおく．ただし $a_1=c_1$ とする．

(1) a_n の期待値を $E(n)$ とするとき，$\lim_{n\to\infty}E(n)$ をもとめよ．

(2) $a_1,a_2,\dots,a_n$ のうち2に等しいものの個数の期待値を $N(n)$ とするとき，$\lim_{n\to\infty}N(n)$ を求めよ．

[解]

(1) k を1から6までの整数とする．$a_n=k$ となる確率は $n=1$ のとき $\frac{1}{6}$ で，$n\le 2$ のときは a_1 から a_{n-1} がすべて k 以下となる時で

$$P(a_n=k)=\left(\frac{k}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}\tag{1}$$

である．これは $n=1$ でも成立する．よって

$$\begin{aligned}E(n)&=\sum_{k=1}^{6}kP(a_n=k)\\&=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k}{6}\right)^{n}\\&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}1\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

となる．

(2) 期待値の加法定理および (1) から

$$\begin{aligned}N(n)&=\sum_{l=1}^{n}P(a_l=2)\\&=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}\\&=\frac{1}{6}\frac{1-(1/3)^n}{1-1/3}\\&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{4}\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

となる．