東大理科数学 1962

$\dfrac{t^3-1}{t}$　　$\dfrac{(t-1)}{t}>0$

$t(t-1)>0$

$t<0,\ 1<t$

第 1 問

[解] $t=\log_a b$ とおくと, 与方程式は

$$x^2-2tx+\frac{1}{t}=0 \qquad \cdots ①$$

となる。この2解は、$t^2-1/t>0 \Leftrightarrow t<0,\ 1<t$ ⋯ ② のもとで、

$$x=t\pm\sqrt{t^2-1/t}$$

だから 題意から、

$$0<t-\sqrt{t^2-1/t}<1<t+\sqrt{t^2-1/t} \qquad \cdots ③$$

$t<0$ の時 左側の不等式が成立せず 不適だから ②から $1<t$ である。この時

$$③ \Leftrightarrow t-1<\sqrt{t^2-1/t}<t \quad (\because 1-t<0)$$

$$\Leftrightarrow t^2-2t+1<t^2-1/t<t^2 \quad (\because 各辺正)$$

$$\Leftrightarrow 1<t \quad (\because 1<t)$$

となる。以上から $1<t$ であるから

$$1<\log_a b$$

だから、

$$1<a<b \ \text{or} \ b<a<1$$

である。

第 2 問

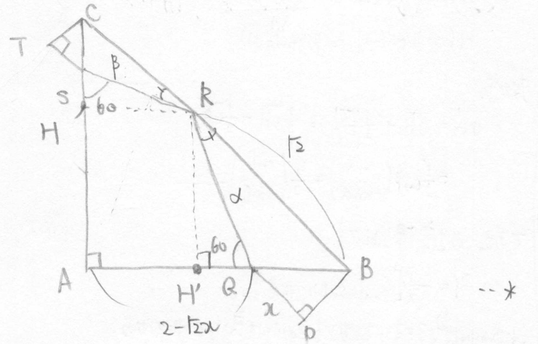
「解」PQ∥BCより、$\angle BQP=\frac{\pi}{4}$ だから、

$$\cos\angle AQR=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2}=\frac{1}{2}\quad \therefore \angle AQR=\frac{\pi}{3}\ (0<\angle AQR<\pi)$$

従って、$\angle BRQ=\angle CRS$ より $\triangle CSR \sim \triangle BQR$ なので、

$$\angle ASR=\angle AQR=\frac{\pi}{3}$$

となり、最後の条件から、$\angle CST=\frac{\pi}{4}$ となる。図は下図



…＊

RからAC, ABに下ろした垂足をH, H'とおき $\overline{RQ}=\alpha$, $\overline{SR}=\beta$ と

おくと AB=2なとから、

$$\begin{cases} H'Q=\frac{1}{2}\alpha,\ RH'=H'B=\frac{\sqrt3}{2}\alpha \\ HR=\frac{\sqrt3}{2}\beta,\ HS=\frac{1}{2}\beta \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2-\sqrt2x=\frac{1}{2}\alpha+\frac{\sqrt3}{2}\beta & \cdots① \\ 2-\sqrt2y=\frac{\sqrt3}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta & \cdots② \\ \frac{\sqrt3}{2}\alpha+\frac{\sqrt3}{2}\beta=2 & \cdots③ \end{cases}$$

③より、$\alpha+\beta=\frac{4}{\sqrt3}=\frac{4}{3}\sqrt3$ だから ①+② に代入してもとめる関係式

は

$$4-\sqrt2x-\sqrt2y=\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{4}{3}\sqrt3$$

$$\therefore\ x+y=\frac{1}{\sqrt2}\left\{4-\frac{2}{3}(3+\sqrt3)\right\}$$

$$x+y=\sqrt2\left(1-\frac{\sqrt3}{3}\right)\quad (x,y>0)$$

[＊以降] Aを原点とし、ABをx軸とする座標を設定すると

$$RQ: y=-\sqrt3(x-A)\qquad (A=2-\sqrt2x)$$

$$RS: y=-\frac{1}{\sqrt3}x+B\qquad (B=2-\sqrt2y)$$

この交点 $\left(\frac{3A-\sqrt3B}{2},\ \frac{-\sqrt3A+3B}{2}\right)$ が $x+y=2$ 上にあることが必要十分.

$$\frac{3A-\sqrt3B}{2}+\frac{-\sqrt3A+3B}{2}=2$$

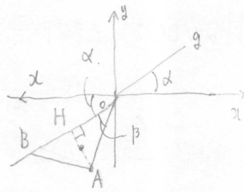
$$(3-\sqrt3)(A+B)=4$$

$$\therefore\ x+y=\sqrt2\left(1-\frac{\sqrt3}{3}\right)$$

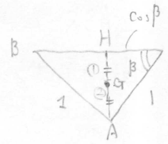
/20

第 3 問

[解] 右図のようにxy平面をとる。



|OA|=1 |AB|=1として良い。Aからgに下ろした垂足Hとする。又、Gが最低の時を考えるので Aはgの下側にあるとして良い。



∠BOA = βとおく。|AB|=|OA|から、GはAHの中点である。

$$A(\cos(-\theta),\ \sin(-\theta))$$

$$H(\cos\beta\cdot\cos(-\alpha),\ \cos\beta\cdot\sin(-\alpha))$$

だから、

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\beta\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ -\sin\alpha\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ -\sin\theta\end{pmatrix}$$

である。このy座標Yとして

$\alpha-(\theta-\alpha)$

$$Y = -\frac{1}{2}\left[\sin\alpha\cos\beta + \sin\theta\right]$$

これがminになる時のtanθをもとめれば良い。α+β=θから、

$$Y = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right) + \sin\theta\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin(2\alpha-\theta)\right] \quad \cdots ①$$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$ より、($0<\alpha<\pi/2$ とあわせて)

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+(\frac{1}{2})^2} = \dfrac{4}{5} \\ \cos 2\alpha = \dfrac{1-(\frac{1}{2})^2}{1+(\frac{1}{2})^2} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

だから ①に代入して、以下 $S=\sin\theta$, $C=\cos\theta$ として、

$$Y = -\frac{1}{4}\left[3S + \frac{4}{5}C - \frac{3}{5}S\right]$$

$$= -\left(\frac{3}{5}S + \frac{1}{5}C\right)$$

$$\geq -\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \quad (\because コーシー・シュワルツ)$$

等号成立は $\begin{pmatrix}1/5 \\ 3/5\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}C \\ S\end{pmatrix}$ の時で、この時

$$\frac{1}{5}S - \frac{3}{5}C = 0$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{S}{C} = \underline{\underline{3}}$$

となる。

/20

第 4 問

[解] $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}$ とおく。

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1-r^{2^{k-1}}} - \frac{1}{1-r^{2^k}} \right) = \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r^{2^n}} \quad \cdots ①$$

//

だから.

$$\begin{cases} |r|>1 \text{の時.} \ S_n \longrightarrow \frac{1}{1-r} \\ |r|<1 \text{の時} \ S_n \longrightarrow \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r} \end{cases}$$

//

となる。

第 5 問

[解] (1)
$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2(yz+zx+xy)=18 \end{cases}$$

である。$V=xyz$ とおくと、x, y, z は t の3次式

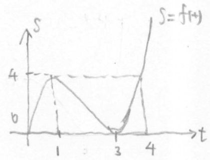
$$t^3-6t^2+9t-V=0 \quad \cdots ①$$

の3実解である。$f(t)=t^3-6t^2+9t$ とすると

$$f'(t)=3t^2-12t+9$$
$$=3(t-1)(t-3)$$

から、下表をうる。

t		1		3	
f'	+	0	−	0	+
f	↗	4	↘	0	↗



したがって、$s=f(t)$ のグラフは右上図で、①の解は $s=f(t)$ と $s=V$ の共有点の t 座標だから、x の値域は ($x>0$ とあわせて)

$$0<x\leq 4 \quad (x\neq 3)$$

(2) (1)のグラフから、$\max V=4$

第 6 問

[解] (1) $\left(6\sin\frac{x}{6}\right)' = \cos\frac{x}{6}$ だから、P, Q における接線 l_P, l_Q は

$$\begin{cases} l_P : y = \frac{1}{2}(x-2\pi)+3\sqrt{3} & \equiv f(x) \\ l_Q : y = -(x-6\pi) & \equiv g(x) \end{cases}$$

だから、R はこれらの交点で、$R\left(\frac{14}{3}\pi-2\sqrt{3},\ \frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)$ //

(2) グラフの概形は右図だから、もとめる面積 S、$\alpha=\frac{14}{3}\pi-2\sqrt{3}$ として

$$S=\int_{2\pi}^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{6\pi} g(x)\,dx-\int_{2\pi}^{6\pi} 6\sin\frac{x}{6}\,dx$$

$$=\frac{8}{3}\pi^2+8\sqrt{3}\pi-63$$ //