

2 次方程式  $x^2 - 2x \log_b a + \log_b a = 0$  が実根  $\alpha, \beta$  をもち,  $0 < \alpha < 1 < \beta$  となるものとする. このとき  $a, b, 1$  の大きさの順序はどのようになるか. ただし  $a, b$  はいずれも 1 と異なる正の数とする.

[解]  $p = \log_a b$  とおく.  $a, b \neq 1$  から  $p \neq 0$  であるから, 題意の方程式は  $x^2 - 2px + \frac{1}{p} = 0$  となる. これが題意のような解を持つので, 判別式を  $D$ , 方程式の左辺を  $f(x)$  として

$$\begin{aligned} \begin{cases} D > 0 \\ f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} p^2 - \frac{1}{p} > 0 \\ \frac{1}{p} > 0 \\ 1 - 2p + \frac{1}{p} < 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} p > 0 \\ p^3 - 1 > 0 \\ -2p^2 + p + 1 < 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} p > 0 \\ p > 1 \\ p < \frac{-1}{2}, 1 < p \end{cases} \iff 1 < p \end{aligned}$$

が条件である. これは  $p \neq 0$  を満たし十分. 故に

$$\begin{aligned} 1 < p &\iff \log_a a < \log_a b \\ &\iff \begin{cases} a < b & (1 < a) \\ a > b & (1 > a) \end{cases} \end{aligned}$$

となるから,  $1 < a < b$  または  $b < a < 1$  である. ... (答)