京大理科数学 1986

1	多変数
2	多変数 ☆
3	
4	図形 ☆
5	
6	多変数

第 1 問

[解] $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n & \cdots ① \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0 & \cdots ② \end{cases}$

①,②から.

$$n a_1 \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n a_n$$

$\therefore\ a_1 \leq 0 \leq a_n \quad (\because n \in \mathbb{N})$

より. $a_k \leq 0 \leq a_{k+1}\ (k = 1, 2, \cdots n-1)$ をみたす k が存在する

$$\sum_{i=1}^{n} i a_i = (a_1 + \cdots + a_n) + (a_2 + \cdots + a_n) + \cdots + (a_n)$$

$$= 0 + (-a_1) + (-a_1 - a_2) + \cdots + (-a_1 - \cdots - a_k)$$

$$+ (a_{k+1} + \cdots + a_n) + \cdots + a_n$$

> 0 （∵各項 0 以上, 等号成立は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ だが. 題意よりそれはない）

[解2]（カンタンに…）

M.I. で示す. $n = k$ での成立をかていし. $a_1, a_2, \cdots, (a_k + a_{k+1})$ に適用すると

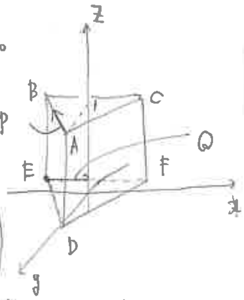
$$0 < \sum_{i=1}^{k} i a_i + k a_{k+1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k+1} i a_i \quad (\because a_{k+1} \geq 0) \quad ■$$

/20

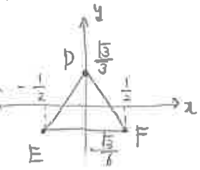
第2問

[解] $D\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ $F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$とおく。



P, Qの速さ秒速1とし，まず時刻tを$0 \leq t \leq 1$としてかんがえる。時刻tではPはABを$t:1-t$に，QはEFを$t:1-t$に内分するので

$$
\begin{cases}
\overrightarrow{OP} = (1-t)\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{3}/3\\ 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1/2\\ -\sqrt{3}/6\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{3}/3\\ 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1/2\\ -\sqrt{3}/2\\ 0\end{pmatrix}\\
\overrightarrow{OQ} = (1-t)\begin{pmatrix}-1/2\\ -\sqrt{3}/6\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\sqrt{3}/6\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\ -\sqrt{3}/6\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}
\end{cases}
$$

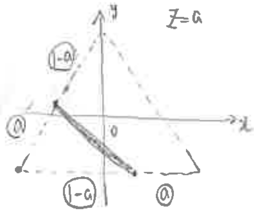


となり，$z=a$とPQの交点はPQの$1-a:a$内分点で，この点Rとして

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OR} &= a\overrightarrow{OP} + (1-a)\overrightarrow{OQ}\\
&= a\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{3}/3\\ 1\end{pmatrix} + (1-a)\begin{pmatrix}-1/2\\ -\sqrt{3}/6\\ 0\end{pmatrix} + \frac{a}{2}t\begin{pmatrix}-1\\ -\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix} + (1-a)t\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1/2\\ -\sqrt{3}/6\\ 0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\\ 1\end{pmatrix} + \frac{t}{2}\begin{pmatrix}2-3a\\ -\sqrt{3}a\\ 0\end{pmatrix} \qquad (0 \leq t \leq 1)
\end{aligned}
$$

だから図示して右図太線部。対称性から、もとめる切り口は右下図のような

一辺 $\sqrt{3a^2-3a+1}$ の正三角形 //

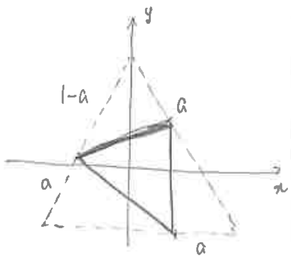


(2) $z=a$での切り口の面積$S(a)$は

$$S(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3a^2-3a+1)$$

だから

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 S(a)\,da\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[a^3 - \frac{3}{2}a^2 + a\right]_0^1\\
&= \frac{\sqrt{3}}{8} \quad //
\end{aligned}
$$



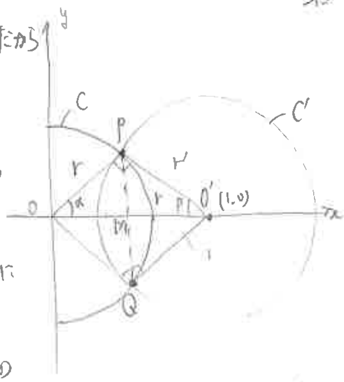
第 3 問

/20

第 6 問

[解] 図形はx軸対称だから
OQ⊥O'Q でもある.

P,Qがx<0にある時 明らかに OP⊥O'Pとはならないから… ☆, P,Qがx≥0にある時のみ考える. 円C'の半径r'とし, Pからx軸への垂足M, ∠POM=α, ∠PO'M=β とおく $(0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2})$ と題意から



$$\begin{cases} r^2+r'^2=1 & \cdots① \\ r\sin\alpha = r'\sin\beta & \cdots② \\ \alpha+\beta=\pi/2 & \cdots③ \end{cases}$$

このもとで

(□OPO'Qの面積 S_1) $= rr'$

(D∩D'の面積 S_2) $= \frac{1}{2}\cdot 2\alpha r^2 + \frac{1}{2}2\beta r'^2 - rr'$

$= \alpha r^2 + \beta r'^2 - rr'$

だから題意の面積 $S(r)$ として

$$S(r) = S_1 - S_2 = 2rr_1 - (\alpha r^2 + \beta r'^2)$$

② の両辺正から2乗して.

$$r^2\sin^2\alpha = r'^2\sin^2\beta \quad \cdots④$$

①④から

$$r^2 = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta} \qquad r'^2 = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$$

$rr'>0$ から

$$rr' = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta} \quad (\text{二乗正に}0<\alpha,\beta<\tfrac{\pi}{2}\text{を用いた})$$

これらを$S(r)$に代入して

$$S(r) = \frac{1}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}\left[2\sin\alpha\sin\beta - \alpha\sin^2\beta - \beta\sin^2\alpha\right]$$

③を代入し, $S=\sin\alpha$, $C=\cos\beta$ として

$$S(r) = 2SC - \alpha C^2 - (\pi/2-\alpha)S^2$$
$$= 2SC + \alpha(S^2-C^2) - \frac{\pi}{2}S^2 \equiv T(\alpha)$$

$$T'(\alpha) = 2\cos 2\alpha - \cos 2\alpha + 2\alpha\sin 2\alpha - \frac{\pi}{4}\cdot 2\sin 2\alpha$$
$$= \cos 2\alpha + 2(\alpha-\tfrac{\pi}{4})\sin 2\alpha$$

$$T''(\alpha) = -2\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha + 4(\alpha-\tfrac{\pi}{4})\cos 2\alpha$$
$$= 4(\alpha-\tfrac{\pi}{4})\cos 2\alpha \le 0$$

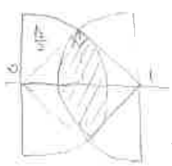
だから, $T'(\alpha)$は単調減少. これと $T'(\pi/4)=0$から

下表をえる.

α	0		$\pi/4$		$\pi/2$
T'		+	0	−	
T		↗		↘	

よって $T(\alpha)$は, $\alpha=\pi/4$で max $\underline{1-\frac{\pi}{4}}$ をとる.

[



斜線部 $= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

$□ = \frac{1}{2}$

⇒ OK!!

]

[☆1. ベクトル表示で内積とればすぐわかる]

[全部文字おいてやったけど, 天下り的に座標を表して, でもいいかも.
けっきょくr,θからrを消して, 多分同じになる]

/20