n を自然数とする．

1. 実数 x に対して，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2}$ を求めよ．
2. 不等式 $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\right| \leq \frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ．
3. 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ を求めよ．

[解]

(1) $x \in \mathbb{R}$ だから $-x^2 \neq 1$ なので，第一項は公比 $-x^2$ の等比数列の和である．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)} - \frac{1}{1+x^2}\\ &= \frac{-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\end{aligned}$$

となり題意は示された．

(2) (1) の両辺を $[0,1]$ で積分して絶対値をとると

$$\left|\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx\right| \tag{1}$$

である．以下各項を評価する．まず左辺第一項は先に積分を処理することで

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k dx &= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\end{aligned} \tag{2}$$

であり，右辺は積分区間内で $0 \leq x \leq 1$ より $1+x^2 \geq 1$ だから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx &\leq \int_0^1 x^{2n+2}dx\\ &= \frac{1}{2n+3}\end{aligned} \tag{3}$$

となる．eqs. (2) and (3) を eq. (1) に代入して

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\right| \leq \frac{1}{2n+3} \tag{4}$$

となり，題意は示された．

(3) (2) で示した eq. (4) の右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束するから，挟み撃ちの定理より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \tag{5}$$

である．右辺の積分は $x = \tan\theta$ と置換すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{dx}{d\theta}d\theta\\ &= \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\ &= \int_0^{\pi/4} d\theta\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

だから，eq. (5) に代入して

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

である．$\cdots$(答)

[解説]