京大理科数学 1985

100/100分

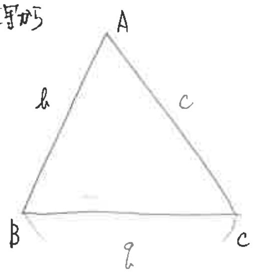
		計	思	総	
1	多変数(ベクトル) ☆	C	C	C	20
2	行列				
3	複素数				
4	整数				
5	確立(分布)				
6	関数				

第　問

[解] AB=b, AC=c とおく

($b,c>0$, $q<b+c$) と. 余弦定理から

$$q^2=b^2+c^2-2p$$



$b+c=\alpha$. $bc=\beta$ とおくと

$$\begin{cases} q<\alpha & \cdots ① \\ \alpha^2-2\beta=2p+q^2 & \cdots ② \end{cases}$$

で b,c は t の2次方程式 $t^2-\alpha t+\beta=0$ の2正実解である!以下

b,c の存在条件をもとめる. まず…の判別式Dとして, $b,c>0$ から

$$\begin{cases} D\geq 0 \\ \alpha>0 \\ \beta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-4\beta\geq 0 & \cdots ③ \\ \alpha>0 & \cdots ④ \\ \beta>0 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

②から $\beta=\frac{1}{2}(\alpha^2-2p-q^2)$ だから. ③⑤に代入して,

$$\begin{cases} \alpha^2-2(\alpha^2-2p-q^2)\geq 0 & \cdots ⑥ \\ \alpha^2-2p-q^2>0 & \cdots ⑦ \end{cases}$$

$q>0$ から ①∧⑥∧⑦ をみたすαの存在条件をもとめればよいことになる

$$⑥\wedge⑦ \Leftrightarrow 2p+q^2<\alpha^2\leq 4p+2q^2 \quad \cdots ⑧$$

よリ $2p+q^2<4p+2q^2 \Leftrightarrow 2p+q^2>0$ …⑨ が必要 (この時$4p+2q^2>0$で十分) この時各辺正から

$$⑧ \Leftrightarrow \sqrt{2p+q^2}<\alpha\leq\sqrt{4p+2q^2} \quad \cdots ⑩$$

で ①∧⑩をみたす αが存在する条件は

$$q<\sqrt{4p+2q^2} \Leftrightarrow 0<4p+q^2 \ (\because 両辺正) \quad \cdots ⑪$$

以上から求める条件は ⑨∧⑪ で

$$4p+q^2>0 \quad (4p+q^2>0の時\ 2p+q^2>0) \ ☆$$

逆にこの時. $b^2+c^2=2p+q^2$ となる $b,c\in\mathbb{R}_{>0}$ をとることができて

($\because 2p+q^2>0$) $\alpha=b+c$, $\beta=bc$ とおくと

$$\alpha^2-2\beta=2p+q^2$$

b,c は t の2次方程式 $t^2-\alpha t+\beta=0$ の2正実解で $\alpha^2-4\beta\geq 0$, $\alpha,\beta>0$

$4p+2q^2\geq\alpha^2>2p+q^2$

だから代入して

$$\begin{cases} \alpha^2-2(\alpha^2-2p-q^2)\geq 0 \\ \alpha>0 \\ \alpha^2-2p-q^2>0 \end{cases}$$

$$\therefore 2p+q^2<\alpha^2\leq 4p+2q^2$$

$4p+2q^2-q^2>0$ から $q^2<4p+2q^2$ なので. $\alpha=b+c>q$ をみたすような (b,c) が存在し十分.

以上から

$$4p+q^2>0$$

[別解] [多変数でのベクトルの強さ…]

[B,C を固定し,A をうごかして考える. この時 A があるような p,q をもとめる と考えて, $\vec{a}$ について解く. 点の存在条件をベクトルの形に換言するというのが大切.]

点Xに対し. $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ とおく.

$$② \Leftrightarrow (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=p$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2-(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}-p=0$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{a}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|^2=\left|\frac{\vec{b}-\vec{c}}{2}\right|^2+p$$

$$=\frac{q^2}{4}+p$$

よリ $\frac{q^2}{4}+p>0$ (逆にこの時 BC上にない A がとれる!!)

/20

第 2 問

/20

[解]

(i) $b, c \in \mathbb{R}$ であるから、この時 $\beta = \bar{\alpha}$ となるので、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2b \ (\neq 0) \\ \alpha - \beta = 2id \quad (d \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

とおける。したがって $\gamma = v + iw$ とすると $(v, w \in \mathbb{R})$

$$\gamma = \frac{v}{2b}(\alpha+\beta) + \frac{w}{2d}(\alpha-\beta) = \left(-\frac{v}{2b} + \frac{w}{2d}\right)\alpha + \left(-\frac{v}{2b} - \frac{w}{2d}\right)\beta$$

と表せる。□

(2) (i)から、$b^2 - c \geq 0$ 又は $b = 0$ が必要である。

㋐ $b^2 - c \geq 0$ の時

α, β は実数である。$\alpha = \beta = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$ に注意する。

- $b = c = 0$ の時、$f(x) = 5 \neq 0$ より (＊) をみたす。
- otherwise, $t\alpha + u\beta$ は任意の実数値をとるから、

  常に $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow (b-1)^2 - 5 + c < 0 \Leftrightarrow c < -(b-1)^2 + 5$

㋑ $b = 0$ かつ $b^2 - c < 0$ の時

α, β は純虚数であるから、$t\alpha + u\beta$ は任意の ki $(k \in \mathbb{R})$ の形の値をとる。

$$f(ki) = (-k^2 - c + 5) - 2ki = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ かつ } c = 5$$

より、$c \neq 5$ であれば (＊) をみたす。

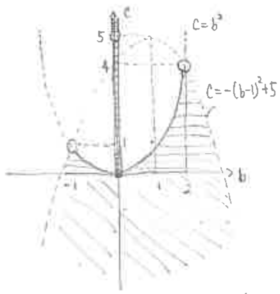
㋐㋑より、もとめるのは、

"$b^2 - c \geq 0$ かつ $c < -(b-1)^2 + 5$"

or

"$b = 0$ かつ $b^2 - c < 0$ かつ $c \neq 5$"

で、図示すると右図斜線部 (境界は実線のみ含む)



第 4 問

[解] (1) ①の中心 $(0,0,0)$ と②のキョリは

$$l = \frac{r}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}r$$

だから、Dは半径 $\sqrt{\frac{1}{3}(r^2+2)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ の円である。よって、

$$|\overrightarrow{PQ}| \leq (\text{Dの直径}) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$ 証

(2) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ から、$\frac{1}{3}(r^2+2) \in \mathbb{Z}$ が必要である。合同式の法を3として

$$\begin{cases} r \equiv 0 \text{ の時} & r^2+2 \not\equiv 0 \\ r \equiv \pm 1 \text{ 〃} & r^2+2 \equiv 0 \end{cases}$$

だから、$r \equiv \pm 1$ が必要である。 …①

②を①に代入して r を消す。

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{3}\left\{(x+y+z)^2+2\right\}$$

$$\therefore (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 2$$ …②

$x, y, z \in \mathbb{Z}$ だから、$(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2$ のうち2つが1、のこり1つが0である。

$$\left((x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\right) = (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$$

対称性から $x \leq y \leq z$ とすると、($\because$ ②) これをみたすのは

$$(x, y, z) = (x, x+1, x+1)\ (x, x, x+1)$$

のみである。したがって、条件② 及び ③から $k \in \mathbb{N}$ として

$$\begin{cases} r = 3k+2 \text{ の時、} & (x,y,z) = (k, k+1, k+1)\ (k+1, k, k+1), (k+1, k+1, k) \\ r = 3k+1 \text{ 〃} & (x,y,z) = (k, k, k+1)\ (k, k+1, k)\ (k+1, k, k) \end{cases}$$

〃

第 5 問

[解2] 2枚の硬貨A,Bとし,表の出る確率が各々a,bだとする。

確率変数X_1,X_2を以下のように定める。

$$X_1=\begin{cases}0 & (\text{Aがウラ})\\ 1 & (\text{Aが表})\end{cases}\qquad X_2=\begin{cases}0 & (\text{Bがウラ})\\ 1 & (\text{Aが表})\end{cases}$$

すると$X=X_1+X_2$だ。X_1,X_2は独立だから、

$$\begin{cases}P(X=0)=P(X_1=0)\cdot P(X_2=0)\\ P(X=1)=P(X_1=0)\cdot P(X_2=1)+P(X_1=1)\cdot P(X_2=0)\\ P(X=2)=P(X_1=1)\,P(X_2=1)\end{cases}\quad\cdots①$$

である。$P(X_1=0)=1-a$, $P(X_1=1)=a$,などを①に代入して

$$\begin{cases}P(X=0)=(1-a)(1-b)\\ P(X=1)=(1-a)b+(1-b)\cdot a\\ P(X=2)=ab\end{cases}\quad\cdots②$$

(1) $P(X=k)={}_2C_k\cdot p^k(1-p)^{2-k}$の時,②に代入して.

$$\begin{cases}(1-p)^2=(1-a)(1-b)=1+ab-(a+b)\\ 2p(1-p)=a+b-2ab\\ p^2\ =ab\end{cases}$$

$\alpha=a+b$, $\beta=ab$として.

$$\begin{cases}\beta-\alpha=(1-p)^2-1=p(p-2)\\ -2\beta+\alpha=2p(1-p)\\ \beta\ =p^2\end{cases}$$

第3式を1,2式に代入して

$$\alpha=p^2-p(p-2)=2p$$

$$\alpha=2p(1-p)+2\beta=2p$$

から、a,bはxの2次式$x^2-2p+p^2=0$の2解で:$(a,b)=(p,p)$ //

(2) $P(X=k)=\frac{1}{3}$の時,②に代入して

$$\frac{1}{3}=1+\beta-\alpha=\alpha-2\beta=\beta$$

として,$(\alpha,\beta)=(1,\frac{1}{3})$だから,a,bはtの2次式$t^2-t+\frac{1}{3}=0$の2解だが:この判別式Dとして

$$D=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}<0$$

から,$a,b\in\mathbb{R}$に反し矛盾。よって(a,b)は存在しない。//

/20

第 6 問

[解] (2)で $x=a$ として

$$a f(a) = 0 \qquad \cdots ①$$

又、(1)から、(2)の両辺 x で微分できて、

$$b f(x) = f(x) + x f'(x)$$

$$\therefore (b-1) f(x) = x f'(x) \qquad \cdots ②$$

$y = f(x)$ として②に代入すると、

$$(b-1) y = x \frac{dy}{dx}$$

まず $y \neq 0$ とする。

$$\frac{b-1}{x} dx = \frac{1}{y} dy$$

両辺積分して、C_0 を定数として、

$$(b-1) \log x = \log y + C_0$$

$$\therefore y = C \cdot x^{b-1} \qquad (C:定数) \qquad \cdots ③$$

ここで $y=0$ の時もこの表式で良い。①から、

$$a \cdot C \cdot a^{b-1} = 0 \iff C=0 \text{ or } a=0$$

に注意すると、C を定数として、

$$y = C x^{b-1}$$

である。

[解注]

さらにこまかく分類すれば、((1)に注意して)

$$\begin{cases} a=0 \wedge 1 \leq b \text{ の時} & y = C \cdot x^{b-1} \\ a \neq 0 \text{ or } b < 1 \text{ の時} & y = 0 \end{cases}$$

となる。