自然数 $n$，$p$ に対し，$n^p$ を十進法で書いた時の 1 の位の数を $f_p(n)$ で表す．ただし，自然数とは，$1, 2, 3, \cdots$ のことである．

(1) $n$ が自然数の全体を動く時，$f_2(n)$ のとる値を全部求めよ．

(2) あらゆる自然数 $n$ に対して，$f_5(n) = f_1(n)$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $n$ が自然数の全体を動く時，$f_{100}(n)$ のとる値を全部求めよ．

**[解]** $n = 0$ に対しても同様に $f_p(n)$ を定義できるので，以下 $n \geq 0$ で考える．合同式の法を 10 とすると，

$$n^p \equiv f_p(n)$$

である．故に $k = 0, 1, 2, \cdots, 9$ および $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$f_p(10i + k) = f_p(k)$$

が成り立つ．よって以下 $f_p(0), \cdots, f_p(9)$ についてのみ考えればよい．

(1) $(10 - k)^2 \equiv k^2$ ゆえ，$f_2(k) = f_2(10 - k)$ である．故に $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ についてのみ調べればよい．

$$\begin{aligned} f_2(0) &= 0 & f_2(1) &= 1 \\ f_2(2) &= 4 & f_2(3) &= 9 \\ f_2(4) &= 6 & f_2(5) &= 5 \end{aligned}$$

だから，求める値は

$$f_2(n) = 0, 1, 4, 5, 6, 9$$

である．$\cdots$(答)

(2) $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ は 2 連続整数の積を因数に含むから 2 の倍数である．

又，ここでのみ合同式の法を 5 とすると，$\forall n, n^5 - n \equiv 0$ (実際に $n \equiv 0, \pm 1, \pm 2, 3$ を代入すれば明らか) である．故に 5 の倍数である．

以上から，$n^5 - n$ は 2 かつ 5 の倍数，つまり 10 の倍数．よって

$$n^5 - n \equiv 0 \Longleftrightarrow f_5(n) = f_1(n)$$

である．□

(3) (2) の結果から

$$n^{100} \equiv (n^4)^{25} \equiv n^4$$

であるから，$f_4 n$ の取り得る値だけを求めればよい．(1) と同様にして，$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ のみ調べれば十分である．

$$\begin{aligned} f_4(0) &= 0 & f_4(1) &= 1 \\ f_4(2) &= 6 & f_4(3) &= 1 \\ f_4(4) &= 6 & f_4(5) &= 5 \end{aligned}$$

であるから，求める値は

$$f_4(n) = 0, 1, 5, 6$$

である．$\cdots$(答)