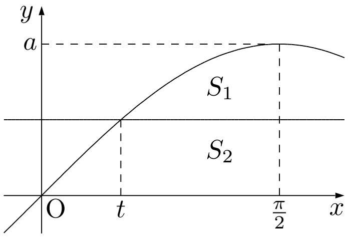
$a \geq 1$ とする．xy 平面において，不等式 $0 \leq x \leq \pi/2$，$1 \leq y \leq a\sin x$ によって定められる領域の面積を S_1，不等式 $0 \leq x \leq \pi/2$，$0 \leq y \leq a\sin x$，$0 \leq y \leq 1$ によって定められる領域の面積を S_2 とする．$S_2 - S_1$ を最大にするような a の値と，$S_2 - S_1$ の最大値を求めよ．

[解] グラフの概形は下図である．



$y = a\sin x$ と $y = 1$ の交点の x 座標 t として

$$a\sin t = 1 \qquad 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \qquad \cdots ①$$

である．以下 $\cos t = c$，$\sin t = s$ とおく．

まず，

$$S = \int_0^{\pi/2} a\sin x\,dx = a$$

とおく．題意から

$$S_1 = \int_t^{\pi/2} (a\sin x - 1)\,dx$$

である．$f(a) = S_2 - S_1$ は

$$\begin{aligned} f(a) &= S - 2S_1 \\ &= a - 2ac + \pi - 2t \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2c}{s} - 2t + \pi \qquad (\because ①) \end{aligned}$$

である．これを $g(t)$ とおく．

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{-c}{s^2} + \frac{2}{s^2} - 2 \\ &= \frac{2-c}{s^2} - 2 \\ &= \frac{c(2c-1)}{1-c^2} \end{aligned}$$

ゆえ，下表を得る．

t	0		$\pi/3$		$\pi/2$
f'		$+$	0	$-$	0
f		$\nearrow$	$\pi/3$	$\searrow$	

従って，求める最大値は $t = \pi/3$ の時の $\pi/3$ である．このとき①から

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

である．$\cdots$(答)