

東大理科数学 2012

[解] $D = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \wedge x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}\}$ は右図
 糸系領域(境界含む). 又 $A(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1-\frac{\sqrt{3}}{3}), B(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3})$

とある. 問題を読み直す限り明らかになる正だから.

$$l = y = \tan \theta \cdot x$$

とかけろ. 以下 $C = \cos \theta, S = \sin \theta, t = \tan \theta$ と表すことに

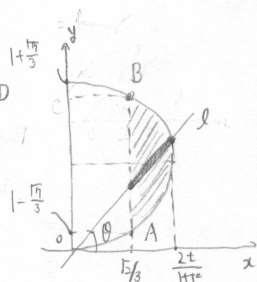
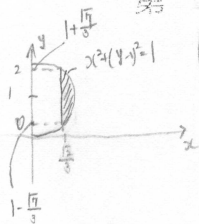
又直線と OA, OB とのなす角 α, β として.

$$\alpha < \theta < \beta$$

で(ある). l と $x^2 + (y-1)^2 = 1$ との交点は.

$$(1+t^2)x^2 - 2tx = 0$$

$$x = 0, \frac{2t}{1+t^2}$$



だから.

$$L = \left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) / C = 2S - \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{C} \quad (2)$$

$$\frac{dL}{d\theta} = 2C - \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{S}{C^2}$$

θ の内で $S, C > 0$ から

$$\frac{dL}{d\theta} \geq 0 \Leftrightarrow 2C^3 \geq \frac{\sqrt{3}}{3} S \Leftrightarrow 4C^6 \geq \frac{2}{9} S^2$$

$$\Leftrightarrow 18C^6 \geq 1 - C^2$$

$$\Leftrightarrow (C^2 - \frac{1}{3})(18C^4 + 6C^2 + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (C^2 - \frac{1}{3}) \left\{ 6(C^2 + \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{6} \right\} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow C^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow C \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because C > 0)$$

から下表を作る. t に対し, $0 \leq \theta < \pi/2 \wedge \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ を満たす.

| θ | α | θ | β |
|----------|------------|----------------------|------------|
| C | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | |
| L' | + | 0 | - |
| L | \nearrow | | \searrow |

$$\left(\tan \alpha = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}, \tan \beta = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}, \tan \theta = \sqrt{2} \text{ から.} \right)$$

$$(\alpha < \theta < \beta \text{ (} \tan \theta \text{ は単調)})$$

$$\text{したがって, } C = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ の時, } \max L = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$y = \tan \theta \cdot x$$

$$x^2 + (tx-1)^2 = 1$$

$$(tx-1)^2$$

$$x^2 + t^2 x^2 - 2tx + 1 = 1$$

$$c^2$$

$$1+t^2 = \frac{1}{c^2}$$



$$\frac{1}{1 + \frac{(1+t)^2}{c^2}}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{c^2}{c^2 + S^2 + 2S + 1}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{(1+S)^2}{c^2}} \cdot \frac{1-S^2}{2(1+S)}$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{2t}{1-t^2}$$

$$\frac{C^2 + (1+S)^2}{C^2 + (1+S)^2}$$

$$\frac{1-S}{S} \quad \frac{1+t}{2t} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1-S^2}{2+2S}$$

$$\frac{(1+S)(1-S)}{2(1+S)}$$

$$2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}} \quad 2\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{2t}{1+t^2}$$

$$1+t^2 < 3\sqrt{2}t$$

$$t^2 - 3\sqrt{2}t + 1 < 0$$

$$t = 3\sqrt{2} \pm \sqrt{18-4}$$

$$2 - \frac{1}{3} < 3\sqrt{2} \pm \sqrt{14}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sqrt{1 - \frac{1}{5}}$$

$$2\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{5}$$

$$\frac{5}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{5}{9} \sqrt{6}$$

場合の数のこのセットでは、

- ① 対称性
- ② modで場合分け

かてきないかまぎすて、世。

第 2 問

[解] $k \in \mathbb{N}$ とする。球は $2k$ 個の P, Q にある。右のように R を定める。対称性

から、 $2k$ 個の球が P, Q, R にある確率は a_k, b_k, b_k とおける。

又、題意から、以下の漸化式を得る。

$$b_{k+1} = \frac{2}{3} b_k + \frac{1}{6} b_k + \frac{1}{6} a_k$$

--- ①

又、 $a_n + 2b_n = 1$ から ① で a_n を消して、

$$b_{k+1} = \frac{1}{2} b_k + \frac{1}{6}$$

$$b_{k+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} (b_k - \frac{1}{3})$$

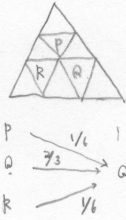
$b_0 = 0$ だから、この式を繰り返し用いて、

$$b_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

だから、もとめる確率は

$$\begin{cases} 0 & (n \in \text{odd}) \\ \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right) & (n \in \text{even}) \end{cases}$$

++



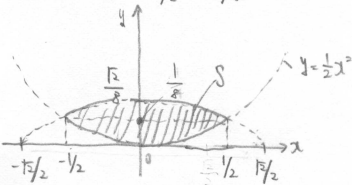
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} +$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

第 3 問

[解] $y \geq \frac{1}{2}x^2$, $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{1/32} \leq 1$ の図形は下の図の斜線部。



(1) 対称性から

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} V_1 &= \int_0^{\frac{\sqrt{12}}{2}} \left(\left(\frac{1}{32} - \frac{x^2}{16} \right) - \frac{1}{4} x^2 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{20} x^5 - \frac{1}{48} x^3 + \frac{1}{32} x \right]_0^{\frac{\sqrt{12}}{2}} \\ &= \frac{11}{15} \left(\frac{1}{2} \right)^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} V_2 &= \int_0^{\frac{\sqrt{12}}{2}} (2y) dy + \int_{\frac{\sqrt{12}}{2}}^{\frac{\sqrt{12}}{2}} \left(\frac{1}{2} - 16y^2 \right) dy \\ &= \left[y^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{12}}{2}} + \left[\frac{1}{2} y - \frac{16}{3} y^3 \right]_{\frac{\sqrt{12}}{2}}^{\frac{\sqrt{12}}{2}} \\ &= \frac{1}{64} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{12}-1}{8} - \frac{16}{3} \frac{2\sqrt{12}-1}{8^2} \\ &= \frac{1}{64} + \frac{\sqrt{12}-1}{16} - \frac{1}{3} \frac{2\sqrt{12}-1}{32} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{64} [-7 + 8\sqrt{12}] \end{aligned}$$

だから

$$V_1 = \frac{11}{15} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \pi V_2 = \frac{\pi}{192} (-7 + 8\sqrt{12})$$

(2) (1) から

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^6 (-7 + 8\sqrt{12})}{\frac{11}{15} \left(\frac{1}{2} \right)^5} = \frac{\frac{1}{2} (-7 + 8\sqrt{12})}{\frac{11}{5}}$$

$$= \frac{5}{22} (-7 + 8\sqrt{12}) < 1$$

$$\Leftrightarrow -7 + 8\sqrt{12} < \frac{22}{5} \Leftrightarrow 8\sqrt{12} < \frac{57}{5} \quad \text{①}$$

したがって ①は $64 \cdot 2 \cdot 25 = 3200 < 3249 = (57)^2$ の平方根をとって

$8\sqrt{12} < \frac{57}{5}$ だから成立。よって

$$\frac{V_2}{V_1} < 1$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad 2x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 2y$$

$$\frac{1}{2} y + 4y^2 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\pi}$$

$$x^2 + 16y^2 = \frac{1}{2}$$

$$4y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{8} = 0$$

$$32y^2 - 4y - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = 2y$$

$$x^2 = 2y$$

$$2\sqrt{2} - 1$$

$$\frac{8 \cdot 2}{8 \cdot 8} = 0$$

$$\frac{1}{2} y + 4y^2 = \frac{1}{8}$$

$$32y^2 + 4y - 1 = 0$$

$$16$$

$$2^5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2$$

$$A^2 \neq \left[-\frac{1}{2} A^7 - \frac{1}{3} A^7 + A^6 \right]$$

$$\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right)$$

$$1 - \frac{5}{30}$$

$$\frac{22}{30} A^6$$

$$\frac{11}{15} A^6 \cdot 2\pi$$

第 4 問

[解] $n \in \mathbb{N}_{2-} - \emptyset$

(1) 連続2自然数の積が n 乗数になるものがあると仮定し、 $n \in m(m+1)$

($m \in \mathbb{N}$) とおくと、 $k \in \mathbb{N}$ とし

$$m(m+1) = k^n$$

とかける。 $m \perp m+1$ から、 $m, m+1$ が共に n 乗数であることが必要で、

$t, s \in \mathbb{N}$ とし

$$m = t^n, m+1 = s^n$$

とかける。 m を代りて、

$$t^n = s^n - 1 \quad \therefore 1 = s^n - t^n = (s-t)(s^{n-1} + \dots + t^{n-1})$$

①から、 $s-t \in \mathbb{Z}$, $s^{n-1} + \dots + t^{n-1} \geq |t| + 1 = 2$ となり、矛盾。よって示された。□

(2) $n=2$ の成立は示されたので、 $n \geq 3$ とする。

(=) (1) と同様にし、 $A_m = \prod_{k=m+1}^{m+n} k$ が n 乗数だと仮定する。 $(m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) p \in \mathbb{N}$ とし

$$A_m = p^n$$

とかける。 $(m+1)^n < A_m < (m+n)^n$ から、($\because m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

$$(m+1)^n < p^n < (m+n)^n$$

$$m+1 < p < m+n$$

したがって、 $p = m+k$ ($k=2, \dots, n-1$) とかけるが、 A_m は p と互いに素な $m+k+1 \in$

因数に持ち、矛盾。よって矛盾は是より示された。□

0, 1, ..., n-1

$m \cdot n \cdot (n+1)$

$$n! \equiv t^n \pmod{p^n}$$

$n \neq 1, 2$

$$m(m+1) \dots (m+n) = p^n$$

$$\frac{m!}{(m-m)!} \cdot \frac{(m+n)!}{(m+1)!} = p^n$$

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} = p^n$$

