z 軸を軸とする半径 1 の円柱の側面で，xy 平面より上 (z 軸の正の方向) にあり，平面 $x - \sqrt{3}y + z = 1$ より下 (z 軸の負の方向) にある部分を D とする．D の面積を求めよ．

[解] $\cos\theta = c$, $\sin\theta = s$ とおく．円柱側面の点 P は $P(c, s, z)$ とおける．ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする．すると，D は

$$0 \leq z \leq 1 - c + \sqrt{3}s$$

で与えられる．z の存在条件から

$$\begin{aligned} &0 \leq 1 - c + \sqrt{3}s \\ \Longleftrightarrow &\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2} \\ \Longleftrightarrow &0 \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

となる．

従って，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{4\pi}{3}} (1 - c + \sqrt{3}s) d\theta \\ &= \Big[\theta - s - \sqrt{3}c\Big]_0^{\frac{4\pi}{3}} \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

となる．$\cdots$(答)