$$f(x)=x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{24}, g(x)=x^5+x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x+\frac{1}{120}$$

とする．このとき以下のことが成り立つことを示せ．

(1) 任意の実数 x に対し，$f(x)>0$ である．

(2) 方程式 $g(x)=0$ はただひとつの実数解 α をもち，$-1<\alpha<0$ となる．

[解]

(1) 微分計算により

$$f'(x)=4x^3+3x^2+x+\frac{1}{6}$$
$$f''(x)=12(x+\frac{1}{4})^2+\frac{1}{4}>0$$

であるから，$f'(x)$ は単調増加．故に $f'(x)$ が 3 次式であることと併せて，$f'(t)=0$ なる t がただひとつ存在する．したがって

$$\begin{aligned} f(t)&=(\frac{1}{4}x+\frac{1}{16})f'(t)+\frac{1}{32}(2t^2+2t+1)\\ &=\frac{1}{32}(2t^2+2t+1)\\ &=\frac{1}{32}\left\{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}>0 \end{aligned}$$

となって，下表をうる．

x		t	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	正	$\nearrow$

ゆえに題意は示された．□

(2) 微分計算から

$$g'(x)=5x^4+4x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}$$
$$g''(x)=20x^3+12x^2+3x+\frac{1}{3}$$
$$g'''(x)=60\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{3}{5}>0$$

だから，前問と同様に $g''(t)=0$ なる実数 t がただひとつ存在し，下表を得る．

x		t	
g''	$-$	0	$+$
g'	$\searrow$		$\nearrow$

したがって

$$\begin{aligned} g'(x)&\geq g'(t)\\ &=\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{20}\right)g''(t)+40\left\{6\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right\}\\ &=40\left\{6\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right\}>0 \end{aligned}$$

から $g'(x)>0$ であるので $g(x)$ は単調増加で，$g(x)$ が 5 次であること，および $g(0)>0$，$g(-1)=\frac{-11}{30}$ から題意は示された．□

[別解]

(1) 与式を変形する．

$$f(x)=\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{72}$$

で，確かに $f(x)>0$ である．よって示された．□

(2) 前問と同様に

$$\begin{aligned} g'(x)&=5x^4+4x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{24}\\ &=5(x^2+\frac{2}{5}x)^2+\frac{7}{10}(x+\frac{5}{21})^2+\frac{3}{1512} \end{aligned}$$

ゆえ $g'(x)>0$ である．これと $g(-1)<0$ および $g(0)>0$ から示すべきことは明らか．
□