[解] n回目に加えられる単位正三角形の数をα_nとおくと、

$$\alpha_n = 3n \quad \cdots ① \quad (★)$$

である。したがって、はじめの単位正三角形が1つの時

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 + 3\sum_{k=1}^{n} k = \frac{3}{2}n(n+1) + 1$$

// (1)

(2) まず、自明な不等式 $a_n \le b_n$ …② が成立する。次に、十分大きな有限整数Mがあって、はじめに1つの状況からはじめてM回目の操作後に、b_nの場合のはじめの単位正三角形が全てぬりつぶされているようにできる。この時明らかに

$$a_{n+M} \ge b_n \quad \cdots ③$$

が成立する。②、③から

$$1 \ge \frac{a_n}{b_n} \ge \frac{a_n}{a_{n+M}} \quad \cdots ③$$

(1)から

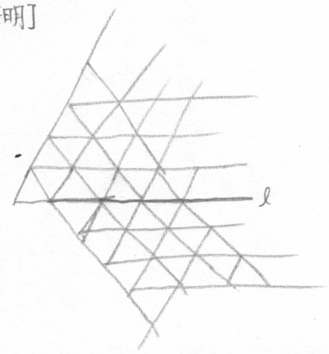
$$\frac{a_n}{a_{n+M}} = \frac{\frac{3}{2}n(n+1)+1}{\frac{3}{2}(n+M)(n+M+1)+1} = \frac{1(1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{3n}}{(1+\frac{M}{n})(1+\frac{M+1}{n}) + \frac{2}{3n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

だから、③及びはさみうちの定理から

$$\frac{a_n}{b_n} \to 1$$

//

[★の証明]



対称性から上の部分についてかんがえる。半直線 l より上をA、下をBとする。

Aのうちで n回目に塗られるのは

$$\begin{cases} n \in \text{odd} \cdots \frac{n+1}{2} \\ n \in \text{even} \cdots \frac{n+2}{2} \end{cases}$$

Bのうちで 〃

$$\begin{cases} n \in \text{odd} \cdots \frac{n-1}{2} \\ n \in \text{even} \cdots \frac{n-2}{2} \end{cases}$$

だから、全体ではあわせて3n コ。

a_n'

$a_n' < b_n < a_n$

第　問

▷頭のいらないタダのけさんなのだが……エグイ

(1) D, Eの座標からセメル時.

Aは D, Eの接線の交点として定まるので. $\overline{AB}$上にDがある条件が必要

☆文字設定, 図形的条件と束縛条件を1対1でかんがえよ.

おいた点から順にたどる!

あとは,

直角双曲線の面積 ⟷ tx − $\frac{y}{t}$ 変換で少しラクにできる

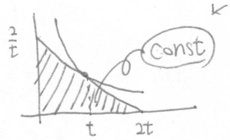
[使い方]

$y' = \frac{y}{t}$, $x' = tx$ とおくと, 点 $(t, \frac{1}{t})$ は (1.1) に, $y = \frac{1}{x}$ はそのままで. 面積も

($t \times \frac{1}{t} = 1$ より) 一定。したがって接点を (1.1) として良い。

ちなみに…. 今回は使っても大差ないと思い見送ったが.

↙ コイツも頭に入れておくこと!



→ これから. どうせ Aがy軸上の時にmaxになるはず… と予想だけはつく。

[別解]

▷(1). (2) 共に. 同次式でなく三角で置換してもうまくいく。

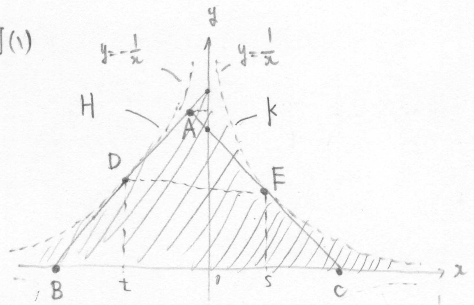
▷(2)は "いらない所をけずる" を用いてもとける。Aが出てこない分ラクではある。

さらに. △ABCと△ADEの比をかんがえるのも手。

T23き 97回

第 2 問

[解](1)



A(X,Y)とおく。$y=\frac{1}{|x|}$ との $x<0$, $0<x$ での接線 $D(t,-\frac{1}{t})$, $E(s,\frac{1}{s})$ $(t<0<s)$ …①

とすると、$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ から

$$\begin{cases} AB: y=\frac{1}{t^2}x-\frac{2}{t} \\ AC: y=-\frac{1}{s^2}x+\frac{2}{s} \end{cases}$$

であり、$A\left(\frac{2ts(t+s)}{t^2+s^2}, \frac{2(s-t)}{(s^2+t^2)}\right)$ $B(2t,0)$ $C(2s,0)$ だから△ABCの面積T_1は

$$T_1=\frac{1}{2}(2s-2t)\frac{2(s-t)}{(s^2+t^2)}=2\frac{(s-t)^2}{(s^2+t^2)} \quad \cdots ②$$

である。$x=\frac{s}{t}$ $(x<0)$ とおくと、②から

$$T_1=2\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)}=2\left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right) \quad \cdots ③$$

又、Dが線分AB上にあることから①に注意して

$$2t<t<\frac{2ts(t+s)}{t^2+s^2} \Leftrightarrow 1>\frac{2s(t+s)}{t^2+s^2} \Leftrightarrow 1>\frac{2x(1+x)}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1<0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2} \quad \cdots ④$$

A,C,Eについても同様に $x<1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}<x$ …⑤ をうる。④∧⑤から

$-1-\sqrt{2}<x<1-\sqrt{2}$ …⑥ である。これは $x<0$ をみたす。同区間で③について、

$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ から下表をうる。

x	$-1-\sqrt{2}$		-1		$1-\sqrt{2}$
T_1'		$+$	0	$-$	
T_1		↗		↘	

したがって③の表式から

$$2+\sqrt{2}<T_1\leq 4$$ //

(2) $\begin{cases} \overrightarrow{AD}=\frac{t^2-2st-s^2}{t^2+s^2}\begin{pmatrix} t \\ +\frac{1}{t}\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AE}=\frac{s^2-2st-t^2}{t^2+s^2}\begin{pmatrix} s \\ -\frac{1}{s}\end{pmatrix} \end{cases}$ からサラスの公式より△ADEの面積T_2として

$$2T_2=\left|\left(\frac{t^2-2st-s^2}{t^2+s^2}\right)\left(\frac{s^2-2st-t^2}{t^2+s^2}\right)\right|\left|t\left(-\frac{1}{s}\right)-s\left(+\frac{1}{t}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{(t^2-2st-s^2)(s^2-2st-t^2)}{st(t^2+s^2)}\right|$$

(1)と同じxを用いて

$$2T_2=\left|\frac{(1-2x-x^2)(x^2-2x-1)}{x(x^2+1)}\right|$$

$$=\left|\frac{x^4-6x^2+1}{x(x^2+1)}\right| \quad \cdots ⑤$$

| |の中身をf(x)とおき、④での値域をもとめる。

$$f'(x)=\frac{4x^2(x^2-3)(x^2+1)-(3x^2+1)(x^4-6x^2+1)}{x^2(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{4a(a-3)(a+1)-(3a+1)(a^2-6a+1)}{a(a+1)^2} \quad (a=x^2)$$

$$=\frac{a^3+9a^2-9a-1}{a(a+1)^2}$$

$$=\frac{(a-1)(a^2+10a+1)}{a(a+1)^2}$$

から下表をうる。

x	$-(1+\sqrt{2})$		-1		$-1+\sqrt{2}$
f'		$+$	0	$-$	
f	(0)	↗	1	↘	(0)

したがって⑤の表式から

$$0\leq T_2\leq 1$$ //

$x=-1\pm\sqrt{2}$

$x=1\pm\sqrt{2}$

$4(-1)\cdot 2$

$-4(-4)$

$1\pm\sqrt{2}$

$t^2+s^2-2ts-2t^2-2$

$\frac{1}{t}$ $-(t^2+s^2)-2t(s-t)$

$-t^2-s^2-2ts+2t^2$

$\left|\frac{s}{t}-\frac{t}{s}\right|$

第 3 問

(1) 0000～9999が $\frac{1}{N}$ の確率ででる。

$\longrightarrow P_N = \frac{1}{N}$

(2) N=10000の時

$\begin{cases} 0001\text{のみ } \frac{2}{N} & \text{のカクリツ} \\ \text{otherwise } \frac{1}{N} & 〃 \end{cases}$

だから

$$P_N = \left(\frac{2}{N}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{N}\right)\frac{1}{N} = \frac{N+2}{N^2}$$

(3) Nの時. Nの下4ケタをnとして. ($N \neq 20000$)

$\begin{cases} 0001 \sim n\text{のみ } \frac{2}{N} \\ \text{otherwise のみ } \frac{1}{N} \end{cases}$ $\rightarrow P_N = \left(\frac{2}{N}\right)^2 \cdot n + (N-2n)\left(\frac{1}{N}\right)$

$$= \frac{N+2n}{N^2}$$

これは $N=2\times10^4$ でも成立。あとはこのmax, minだが...

[離散関数カンスウ]

①まずは xでおきかえてグラフ or セイリしてカンタンにわからないか。

② あとは階差 or 比

☆関数のmax, min…微分に走る前に…

① 単調な項のくみあわせ。

② 分数の真分数化。

③ 次数下げ。

とかはヤルこと!

第 3 問

[解] $N = a\times10^4+m$ とおく。ただし, $a\in\mathbb{N}$, mは4桁以下の非負整数。

まず $a=1$ の時をかんがえる。$m=0$の時, $P_N=\frac{1}{N}$。$m\neq0$の時,

$$\begin{cases} 0001\sim m \text{ は } \frac{2}{N} & 3 \\ 0000,\ m+1\text{以上は } \frac{1}{N} & 2 \end{cases}$$

の確率で出るから

$$P_N = m\left(\frac{2}{N}\right)^2 + (N-2m)\left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{N+2m}{N^2}$$

となり, $m=0$の時もこれで良い。したがって

(1) $P_{10000} = \frac{1}{10^4}$ //

又,

$$P_{10001}-P_{10000} = \frac{10001+2}{(10001)^2} - \frac{1}{10000}$$

$$= \frac{(l+3)\cdot l-(l+1)^2}{(l+1)^2\cdot l} \qquad (l=10^4\text{とした})$$

$$= \frac{l-1}{(l+1)^2 l} > 0$$

から $P_{10001} > P_{10000}$ // であって, これを計さんすると,

$$\frac{9999}{(10000+1)^2\cdot10^4} = \frac{9999}{(10^8+2\cdot10^4+1)10^4} \fallingdotseq 9.997\times10^{-9}$$

$$\fallingdotseq 1.0\times10^{-8} \ \text{// (2)}$$

(3) $a=1$の時, $N=10^4+m$ だから

$$P_N = \frac{10^4+3m}{(10^4+m)^2} \quad \cdots ①$$

mをxでおきかえた関数 $f(x)=\frac{10^4+3x}{(10^4+x)^2}$ をかんがえる。

$$f'(x) = \frac{3(10^4+x)^2-(10^4+3x)\cdot2(10^4+x)}{(10^4+x)^4}$$

$$= \frac{-3x+10^4}{(10^4+x)^3}$$

から下表をうる。

x	0		$\frac{10^4}{3}$		10^4-1
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

又, $\frac{10^4}{3}=3333.3\cdots$ だから, P_Nの最大値は $N=13333$ か 13334 である。

$P_{13333} \fallingdotseq 1.125\times10^{-4}$

$P_{13334} \fallingdotseq 5.626\times10^{-5}$

$\max P_N = P_{13333}$ である。一方, ①のP_Nの表式は $N=20000$ の時も $P_N=\frac{1}{10^4}$として適用できるから, $\min P_N = P_{10000}, P_{20000}$ である。

$r = \frac{19999}{(13333)^2}$, $q = \frac{1}{10^4}$ //

(4) 今度は一般のaについて. $m\neq0$の時

$$\begin{cases} 0001\sim m \text{ は } \frac{a+1}{N} \\ \text{otherwise} \quad \frac{a}{N} \end{cases}$$

の確率ででるから, $A=10^4$として.

$$P_N = m\left(\frac{a+1}{N}\right)^2 + (N-(a+1)m)\left(\frac{a}{N}\right)^2$$

$$= \frac{(2a+1)\cdot m + a^2\cdot A}{(Aa+m)^2}$$

$$= \frac{1}{A} + \frac{m-m^2/A}{(Aa+m)^2}$$

$$= \frac{1}{A} + \frac{m(A-m)}{AN^2} \qquad (m=0\text{でも成立})$$

まず〜部が非負だから $P_N \geq \frac{1}{A} = q \cdots ②$。又, これは$a$について単調減少だから

$P_N \leq r \cdots ③$.

②, ③から

$q \leq P_N \leq r$ // 因