2 の関数 $f(x)$，$g(x)$ が次の性質 1)，2)，3)，4) を持つものとする．

1) $f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ において微分可能．

2) $f(0)=g(o)=0$.

3) 原点において，$y=f(x)$ および $y=g(x)$ のグラフに引いた接線はたがいに直交する．

4) 実数 a，b，c を適当に取ると，$f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{ax+bf(x)}{cx+f(x)}$，$g'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{ax+bg(x)}{cx+g(x)}$ が成り立つ．

このとき，a の値を求めよ．

[解]$p=f'(0)$，$q=g'(0)$ とおく．条件 3)，4) から

$$\begin{cases} pq=-1 \\ p=\lim_{x\to 0}\dfrac{a+bf(x)/x}{c+f(x)/x} \\ q=\lim_{x\to 0}\dfrac{a+bg(x)/x}{c+f(x)/x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} pq=-1 \\ p=\dfrac{a+bp}{c+p} \\ q=\dfrac{a+bq}{c+q} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} pq=-1 \\ x(c+x)=a+bx \quad (x=p,q) \end{cases}$$

故に p，q は x の 2 次方程式 $x^2+(c-b)x-a=0$ の実解である．$p=q$ とすると，第 1 式から $p=i$ となって，$p\in\mathbb{R}$ に矛盾．故に $p\neq q$ だから，これらは 2 異実解を構成する．よって解と係数の関係から $-a=pq=-1\iff a=1\cdots$(答) である．