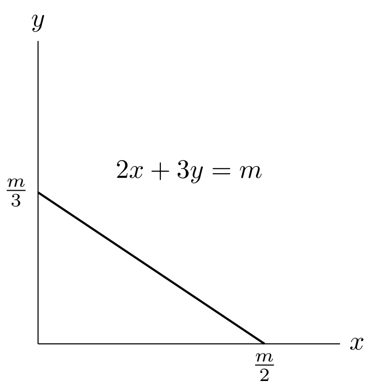
m を 0 以上の整数とする．直線 $2x+3y=m$ 上の点 (x,y) で, x,y がともに 0 以上の整数であるものの個数を $N(m)$ とする．

1. $N(m+6)=N(m)+1$ を証明せよ．
2. $N(m)=1-m+\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{2m}{3}\right]$ を証明せよ．ただし, $[a]$ は a 以下の最大の整数を表すものとする．

[解] 題意の直線 $2x+3y=m$ は図のようになる．



さて，x,y をパラメータ表示するため，

$$\begin{cases} 2x+3y=m \\ -2m+3m=m \end{cases}$$

を辺々引いて，

$$2(x+m)+3(y-m)=0$$

2 と 3 は互いに素だから, $k\in\mathbb{Z}$ として,

$$\begin{cases} x+m=3k \\ y-m=-2k \end{cases}$$
$$\therefore (x,y)=(3k-m,-2k+m)$$

と表すことができる．x,y が非負だから，k に対する条件は

$$\frac{m}{3}\leq k\frac{m}{2}$$

であり，従って $N(m)$ は

$$N(m)=\left(\frac{m}{3}\leq k\leq\frac{m}{2}\text{をみたす } k\in\mathbb{Z}\text{の数}\right) \quad (1)$$

と言い換えることができる．

(1) eq. (1) に注意して m を 6 で割ったあまりで場合分けする．$t\in\mathbb{N}$ として，

$$\begin{cases} m=6t \text{ の時,} & N(m)=3t-2t+1=t+1 \\ m=6t-1 \text{ の時,} & N(m)=(3t-1)-(2t-1)=t \\ m=6t-2 \text{ の時,} & N(m)=(3t-1)-(2t-1)=t \\ m=6t-3 \text{ の時,} & N(m)=(3t-2)-(2t-2)=t \\ m=6t-4 \text{ の時,} & N(m)=(3t-2)-(2t-2)=t \\ m=6t-5 \text{ の時,} & N(m)=(3t-3)-(2t-2)=t+1 \end{cases} \quad (2)$$

を得る．$N(m+6)$ は $t\to t+1$ とした時に該当し，このときいずれも $N(m)$ は 1 だけ増えるから，たしかに $N(m+6)=N(m)+1$ が成立する．よって題意は示された．

(2) 簡単のため

$$f(m)=1-m+\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{2}{3}m\right]$$

とおく．(1) と同様に m を 6 で割った余りで場合わけすると，

$$\begin{cases} m=6t \text{ の時,} f(m)=1-6t+3t+4t=t+1 \\ m=6t-1 \text{ の時,} f(m)=1-(6t-1)+(3t-1)+(4t-1)=t \\ m=6t-2 \text{ の時,} f(m)=1-(6t-2)+(3t-1)+(4t-2)=t \\ m=6t-3 \text{ の時,} f(m)=1-(6t-3)+(3t-2)+(4t-2)=t \\ m=6t-4 \text{ の時,} f(m)=1-(6t-4)+(3t-2)+(4t-3)=t \\ m=6t-5 \text{ の時,} f(m)=1-(6t-5)+(3t-3)+(4t-4)=t-1 \end{cases} \quad (3)$$

である．eqs. (2) and (3) を比較することで，たしかに $f(m)=N(m)$ であることがわかる．以上から題意は示された．