京大理科数学　1983

120/120分

		計	思	総
1	確率	B	C	B
3	多変数	B	C	B
2	行列			
4	空間	B	B	B
5	多変数	C	B	B
6	多変数	B	B	B

第 1 問

[解] A, B, Cの勝つ確率は右図のようである。

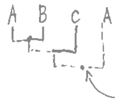
相手	A	B	C
A		p	q
B	$1-p$		$\frac{1}{2}$
C	$1-q$	$\frac{1}{2}$	

(1) もとめる確率 P_a とする。右図から。

$$P_a = pq + p(1-q)\cdot\frac{1}{2}\cdot P_a$$

$$\therefore P_a = \frac{2pq}{2-p(1-q)} \;//$$

(2) もとめる確率 P_b とする。右図から.



$$P_b = (1-p)\frac{1}{2}\cdot P_c$$

P_c は(1)で p と q を入れかえたものだから.

$$P_b = \frac{pq(1-p)}{2-q(1-p)} \;//$$

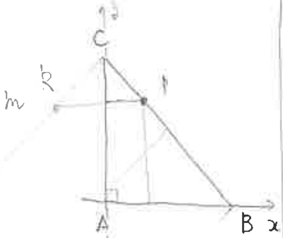
(3) もとめる確率 R とする。1回目どちらが勝つかで場合分けして.

$$R = \frac{1}{2}(P_a + P_c) = pq\left[\frac{1}{2-p(1-q)} + \frac{1}{2-q(1-p)}\right] \;//$$

第2問

[解]

$$\begin{cases} BC: \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{c}=1 \\ l: b(x-b)+cy=0 \\ m: bx-c(y-c)=0 \end{cases}$$



だから $P(bX, cY)$ とおくと $(X+Y=1)$

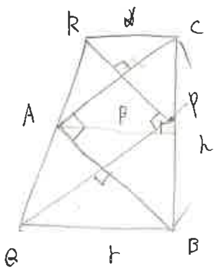
$$Q\left(bX, \frac{b^2}{c}(X-1)\right), \quad R\left(\frac{c^2}{b}(Y-1), cY\right)$$

だから $X+Y=1$ から

$$\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix} bX \\ -\frac{b^2}{c}Y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AR}=\begin{pmatrix} -\frac{c^2}{b}X \\ cY \end{pmatrix}$$

となり $\overrightarrow{AQ} \parallel \overrightarrow{AR}$ だから Q, R, A は一直線上にある。

(2) 図のように定めると、題意の時



$$\frac{1}{2}(\alpha+r)\cdot h = 2\cdot\frac{1}{2}\beta h$$

$$\alpha+r=2\beta \quad \cdots ①$$

である。

1° $RQ \nparallel BC$ の時

①なら AはRQの中点であり、(1)から

$$|\overrightarrow{AQ}|^2=|\overrightarrow{AR}|^2$$

$$\Leftrightarrow b^2X^2+\frac{b^4}{c^2}Y^2=c^2Y^2+\frac{c^4}{b^2}X^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^4-c^4}{c^2}Y^2=\frac{c^4-b^4}{b^2}X^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y^2}{c^2}=-\frac{X^2}{b^2} \quad (\because b\neq c)$$

となり $b, c, X, Y \in \mathbb{R}$; $X+Y=1$ に矛盾。よって この時 ①のようにはならない。

2° $RQ \parallel BC$ の時

AはRQ上の任意の点で ①をみたす。(1)から

$$X=\frac{b^2}{b^2+c^2} \quad \left(0<\frac{b^2}{b^2+c^2}<1\right)$$

とすれば、$\overrightarrow{AQ} \parallel \overrightarrow{BC}$ となって適する。

以上から ①のようになるのは $RQ \parallel BC$ の時で、この時 題意から

□BCRQ は長方形

である。

/20

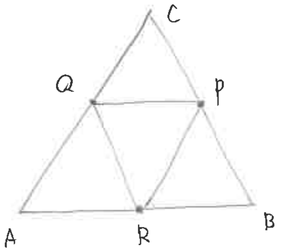
第 3 問

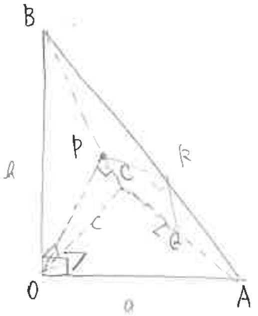
/20

第 4 問

[解]

(1)





底面を各々$\triangle ABC$, $\triangle PQR$とみると、高さ1定だから

$$\triangledown OPQR : \triangledown OABC = \triangle PQR : \triangle ABC \quad \cdots ①$$

である. 三角形の相似から

$$\overline{AQ} : \overline{AO} = a : \sqrt{a^2+c^2} \quad \therefore \overline{AQ} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

同様にして

$$\overline{AR} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \overline{BP} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

だから $\triangle ABC$の面積を1として

$$\triangle ARQ = \frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^2}{c^2+a^2}$$

$$\triangle BPR = \frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2+b^2}$$

$$\triangle PCQ = \frac{c^2}{b^2+c^2}\cdot\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

だから

$$\triangle PQR = 1 - \frac{a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$= \frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

よって①から

$$\triangledown OPQR : \triangledown OABC = 2a^2b^2c^2 : (b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)$$

(2) (1)から

$$\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \leq \frac{1}{4}$$

$$8ABC \leq (B+C)(C+A)(A+B) \quad \cdots ②$$

(文字に対し$X=x^2$)

を示せばよい. A, B, Cから AM-GMより

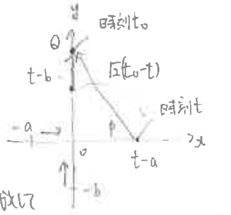
$$B+C \geq 2\sqrt{BC} > 0$$

などとした3式をかけあわせると②は示される. ∎

/20

第 5 問

［解］到達時刻 t_0 とする。右のように点 P, Q を定める。



$$|OP|=|t-a|,\ |OQ|=|t_0-b|,\ |PQ|=\sqrt{2}(t_0-t)$$

だから、△OPQ にピタゴラスの定理を用いて

$$2(t_0-t)^2=(t-a)^2+(t_0-b)^2 \quad \cdots ①$$

$s=t_0-t$ とすると s を min にする t をもとめれば良い。①に代入して

$$2s^2=(t-a)^2+(s+t-b)^2$$

$$=s^2+2(t-b)s+(t-b)^2+(t-a)^2$$

$$\therefore\ s^2-2(t-b)s-(t-a)^2-(t-b)^2=0$$

$$\therefore\ s=t-b+\sqrt{2(t-b)^2+(t-a)^2} \quad (\because s>0)$$

であるから、両辺 t で微分して、

$$\frac{ds}{dt}=1+\frac{2(t-b)+(t-a)}{\sqrt{2(t-b)^2+(t-a)^2}}$$

だから、

$$\frac{ds}{dt}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2(t-b)^2+(t-a)^2}\geq -2(t-b)-(t-a)$$

$-2(t-b)-(t-a)\geq 0 \Leftrightarrow t\leq \frac{a+2b}{3}$ のもとで 2 乗して良く，（$t\geq\frac{a+2b}{3}$ のときは常に $\frac{ds}{dt}\geq 0$）

$$2(t-b)^2+(t-a)^2\geq 4(t-b)^2+(t-a)^2+4(t-a)(t-b)$$

$$\Leftrightarrow 0\geq 2(t-b)^2+4(t-b)(t-a)$$

$$=2(t-b)\{3t-(2a+b)\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+b}{3}\leq t\leq b \quad (\because 0<a<b)$$

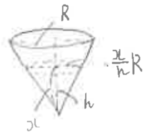
だから、下表をうる。

t	0		$\frac{2a+b}{3}$	
s'		$-$	0	$+$
s		↘		↗

したがって、もとめるのは $t=\frac{2a+b}{3}$ である。

[解] 時刻tでの水面の面積Pとすると.

$$-Sv = P\frac{dx}{dt} \quad \cdots ①$$



ここで.

$$P = \pi\left(\frac{x}{h}R\right)^2 = \frac{\pi R^2}{h^2}x^2 \quad \cdots ②$$

及び

$$v = kx$$

を① に代入して

$$-Skx = \frac{\pi R^2}{h^2}x^2\frac{dx}{dt}$$

$x>0$ より.

$$-Sk = \frac{\pi R^2}{h^2}x\frac{dx}{dt}$$

両辺積分して、$t=0$ で $x=h$ より.

$$-Skt + \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi R^2}{h^2}x^2$$

$x>0$ より.

$$x(t) = \sqrt{\frac{2h^2}{\pi R^2}\left(\frac{1}{2}\pi R^2 - Skt\right)} \quad /\!/$$