場所 1 から場所 n に異なる n 個のものが並んでいる．これらを並べ替えてどれもが元の位置にならないようにする方法の総数を $D(n)$ とする．ただし $n \geq 2$ とする．

1. $n = 4$ の場合の並べ替え方をすべて書き出して，$D(4)$ を求めよ．
2. $n \geq 4$ に対して $D(n) = (n-1)\{D(n-2) + D(n-1)\}$ を証明せよ．

[解] n 個のものを数字の 1 から n であらわし，一つの並べ方を n 桁の整数で表す．場所 i をこの整数の i 桁目に対応させる．わかりやすさのため i 桁目の数字を A_i とする．よって一つの並べ方は $A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1$ となる．最初の並べ方は場所 i に整数 i が置いてあるパターンとする．例えば，$n = 4$ のとき，最初の並べ方は 4321 であるとする．

(1) $n = 4$ の時，4 つのものを $1, 2, 3, 4$ の整数であらわして，全ての並べ方をリストアップすると

3412	2413	3214
3142	2143	2134
1432	1243	1234

の 9 通りだから，$D(4) = 9$ である．$\cdots$(答)

(2) $n \geq 4$ とする．対称性から $A_1 = 2, 3, \ldots, n$ となる並べ方は等しいので、以下 $A_1 = 2$ として考える．$A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n$ に $1, 3, 4, \cdots n$ を題意を満たすように並べれば良い．

0.1　$A_2 = 1$ の時．

$A_3, A_4, \ldots, A_n$ に $3, 4, \ldots, n$ を題意をみたすように並べれば良く，$D(n-2)$ 通り．

0.2　$A_2 \neq 1$ の時．

1 は A_3 から A_n のどこへでも配置できる．1 を 2 で置き換えれば，2 を A_3 から A_n のどこかに配置することになり，2 は A_2 には置けないから，これは要するに $2, 3, \cdots, n$ を $A_2, A_3, \cdots, A_n$ に条件を満たして配置することと同じである．従って場合の数は $D(n-1)$ 通りである．

以上で全ての場合が尽くされているから，求める場合の数は A_1 を動かして $n-1$ 倍した

$$D(n) = (n-1)\{D(n-1) + D(n-2)\}$$

である．よって題意は示された．$\cdots$(答)

[解説]