

東大数学理科後期 1995 年度

1 問題 1

パスカル三角形の第 n 行の部分

$$P_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_{3k}, \quad (1)$$

$$Q_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_{3k+1}, \quad (2)$$

$$R_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_{3k+2} \quad (3)$$

として数列 P_n, Q_n, R_n を定義する. ただし, $k > n$ のとき ${}_nC_k = 0$ とする.

1. $P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1}$ を P_n, Q_n, R_n の式として表せ.
2. 一般項 P_n, Q_n, R_n を求めよ.
3. P_{12}, Q_{12}, R_{12} を求めよ.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

2 問題 2

平面上に 2 点 P, Q があり、 P と Q の距離は 1 であるとする。このとき、次の (条件) を満たす三角形 ABC の面積 S の最大値を求めたい。

(条件) 三角形 ABC は与えられた平面上にあり、各頂点 A, B, C から P までの距離または Q までの距離のうち、少なくとも一方は 1 以下である。

1. P を中心とする半径 1 の円周を E , Q を中心とする半径 1 の円周を F とする。上の (条件) の下で最大面積をもつ三角形の頂点 A, B, C はそれぞれ E または F の上にあることを示せ。
2. この二つの頂点 A, B は円周 E 上にあるとして、この円の中心 P から弦 AB におろした垂線の長さを p とする。 p を固定したとき、(条件) を満たす三角形 ABC の面積 S が最大となるならば、直線 AB と直線 PQ は直交することを示せ。
3. (条件) を満たす三角形 ABC の面積 S の最大値を求めよ。

3 問題 3

1 から 13 まで、それぞれ違った数字が書かれたカードが 1 枚ずつ 13 枚ある。このカードを使って、 A と B の 2 人が次のルールでゲームをする。

- A と B は最初に 2 枚ずつカードを持つ。相手のカードの数字は見えない。
- まず、 A が 1 枚のカードを数字が見えるようにして出し、 B はそれを見て 1 枚のカードを出す。数字の大きいカードを出した者が 1 点を得る。
- 次に、残りのカードを出しあって、数字の大きいカードを出した者が 1 点を得る。
- この際、 A と B はおのおのの得点が最大となるようにカードを出すものとする。

1. カードが配られた後、 A は手持ちのカードのうち、数字の大きいものを最初に出した方が有利か、不利か、あるいはどちらを出しても同じか。
2. A, B に無作為に 2 枚ずつカードを配った場合、 A の得る点数の期待値を求めよ。
3. A はカードの数字の合計が 14 となるような 2 枚のカードを最初を選んで持っているものとする。 B は残りのカードから無作為に 2 枚のカードを選んでゲームを行なう。この場合、 A ははじめにどのようにカードを選べば A の得る点数の期待値が最大となるか、また最小となるか。それぞれの場合の得点の期待値を求めよ。