a, b, t は実数で, $a \geq 0 > b$ とする. 次の漸化式により, 数列 a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を定める.

$$a_1 = a, \quad b_1 = b$$

$$a_{n+1} = \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right) a_n + \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right) b_n, \quad b_{n+1} = \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right) a_n + \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right) b_n$$

1. a_n を a, b, t, n を用いて表せ.
2. $n \to \infty$ とするとき, a_n が収束するための a, b, t についての必要十分条件を求めよ.

[解]

(1) $p \geq 0, b \geq 0$ $a, b, t \in \mathbb{R}$ 表記の簡潔さのため,

$$X = \frac{1}{2}t + \frac{5}{t^2+1}$$
$$Y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{t^2+1}$$

とおくと，X, Y は

$$X + Y = t$$
$$X - Y = \frac{10}{t^2+1}$$

を満たす．題意の漸化式の辺々足し引きして，

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = (X+Y)(a_n + b_n) = t(a_n + b_n) \\ a_{n+1} - b_{n+1} = (X-Y)(a_n - b_n) = \dfrac{10}{t^2+1}(a_n - b_n) \end{cases}$$

だから，$a_n + b_n$ および $a_n - b_n$ は等比級数である．これと初期条件 $a_1 = a$, $b_1 = b$ から，一般項は

$$\begin{cases} a_n + b_n &= t^{n-1}(a+b) \\ a_n - b_n &= \left(\dfrac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}(a-b) \end{cases}$$

a_n を求めるために辺々足して

$$a_n = \frac{1}{2}(a+b)t^{n-1} + \frac{1}{2}(a-b)\left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}$$

を得る．$\cdots$(答)

(2) 表記の簡潔さのため $A = \frac{a+b}{2}$, $B = \frac{a-b}{2}$ とする．題意の条件 $a \geq 0 > b$ から，$B > 0$ である．さらに $s = \frac{10}{t^2+1}$ とすると (1) で得た一般項は

$$a_n = A \cdot t^{n-1} + B \cdot S^{n-1}$$

となる．以下 a_n が収束する条件を t と s の大小関係に注目して考える．$B > 0$, $s > 0$ であることに注意する．まず $A \neq 0$ のとき，

1° $|t| < s \iff -2 < t < 2$ の時

$$a_n = s^{n-1}\left\{B + A\left(\frac{t}{s}\right)^{n-1}\right\}$$

に於いて，

$$\left\{B + A\left(\frac{t}{S}\right)^{n-1}\right\} \xrightarrow{n\to\infty} B(\neq 0)$$

だから，a_n の収束条件は

$$-1 < s \leq 1 \iff t \leq -3, 3 \leq t$$

となる．$-2 < t < 2$ と同時にこの条件を満たす t はないから，この領域で a_n は収束しない．

2° $|t| = s \iff t = \pm 2$ の時
まず $t = 2$ の時，$a_n = a \cdot 2^{n-1}$ だから，$a \geq 0$ より収束条件は $a = 0$ である．
次に $t = -2$ の時，$a_n = A(-2)^{n-1} + B(-2)^{n-1}$ だから，$B > 0$ より a_n は収束しない．

3° $|t| > s \iff t < -2$ or $2 < t$ の時

$$a_n = t^{n-1}\left\{A + B\left(\frac{S}{t}\right)^{n-1}\right\}$$

である．

$$\left\{A + B\left(\frac{s}{t}\right)^{n-1}\right\} \xrightarrow{n\to\infty} A(\neq 0)$$

より収束条件は $-1 < t \leq 1$ だが $t < -2$ or $2 < t$ と同時にこの条件を満たす t は存在しない．よってこの領域で a_n は収束しない．

次に $A = 0 \iff a + b = 0$ の時,

$$a_n = B \cdot s^{n-1}$$

より，a_n が収束する条件は

$$-1 < s \leq 1 \iff t \leq -3, 3 \leq t$$

である．

以上 4 つの場合分けから，もとめる条件は

$$(a+b=0 \land (t \leq -3 \text{ or } 3 \leq t)) \text{ または } (a+b \neq 0 \land a=0 \land t=2)$$

である．$\cdots$(答) **[解説]**