

京大理系数学 2006

[解] $Q(x)=0$ は重解を持たないと仮定する。 $Q(x)=A(x-\alpha)(x-\beta)$ ($A \neq 0$) とおく。

$p(x)$	$p'(x)$
$(x-\alpha)$ を因数に持たない	$(x-\alpha)$ を因数に持たず、 Q で割り切れない。
$(x-\beta)$ “	$(x-\beta)$ “

から矛盾。よって $Q(x)$ は重解を持つ。

第 2 問

[解] $AB = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($0 \leq s \leq 1$) とおける。このとき、 $k \in \mathbb{R}$ ($0 \leq k \leq 1$) に対し、

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 5+t \\ 9+2t \\ 5+3t \end{pmatrix}$$

なる k が存在することを示せば良い。

$$\begin{cases} 2s = k(5+t) \\ 2s+1 = k(9+2t) \\ -2s+2 = k(5+3t) \end{cases} \quad \begin{cases} t = -1 \\ k = \frac{1}{3} \\ s = \frac{2}{3} \end{cases}$$

よって、 $t = -1$ のとき、 $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3} \right)$ となる。

[解] $x \leq 0$ のとき, $f(x) = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$,
 $x \geq 0$ のとき, $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

である。 $x \leq 0$ のとき $f(x) = -2(x + \frac{1}{2})$ だから、

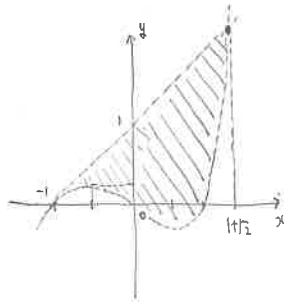
$x = -1$ の接点原は

$$y = x + 1$$

であるから、 $x \geq 0$ の交点 は $x = 1 + \sqrt{2}$ である。

よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{ (x+1) + (x^2+x) \} dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} \{ (x+1) - (x^2-x) \} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} (-x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{3} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_0^{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} + (1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{3}(1+\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{6+4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$



第 4 問

[解] $n \geq 3$ のとき, $n \equiv 0 \pmod{3}$ であり, $n^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$ となり, $n^2 + 2$ は素数ではない.

$n = 3m$ のとき, $n^2 + 2 = 11 \in \text{prime}$, $n = 2m$ のとき $n^2 + 2 = 6 \notin \text{prime}$. したがって, 示すべきは

第 5 問

[解] 点 X に対し, $\overrightarrow{AX} = \vec{x}$ とおく. $s, t, u \in 0 < s, t, u < 1$ となる実数として

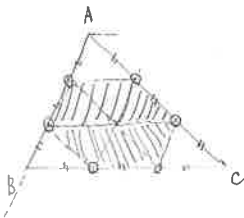
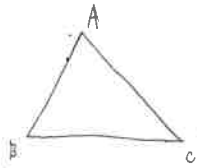
$$\vec{p} = s\vec{b}, \vec{q} = t\vec{c} + (1-t)\vec{b}, \vec{r} = u\vec{c}$$

とかなる $\triangle PQR$ の重心 G とする.

$$3\vec{g} = (t+u)\vec{c} + (1+s-t)\vec{b}$$

$$\vec{g} = \frac{t}{3}(\vec{c}-\vec{b}) + \frac{s}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

だから, 下図斜線部 (境界含まず)



第 6 問

[解] $f'(0) = [\cos(\theta+d)]$ から下表を作る。

θ	0	$\frac{\pi}{2}-d$	$\pi/2$
f'	+	0	-
f	\nearrow		\searrow

よって、 $f(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{2}-d$ で最大。

$$f(\theta) = \left[\sin(\lambda(\theta+d)) + \cos(\lambda(\theta+d)) \right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}-d} \quad (\because \phi)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}-d \right) - \cos d$$

++