京大理系数学2014

第 1 問

[解] $P(1+2t,\ t,\ -2-t)$, $Q(1+s,\ 2-s,\ -3+s)$, $R(1+u,\ -1+2u,\ u)$ とおく。

Q, R が垂足だから $\overline{PQ} \perp m$, $\overline{PR} \perp n$ となる。

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} s-2t \\ 2-s-t \\ -1+s+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} u-2t \\ -1+2u-t \\ 2+u+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} s=1 \\ 2u-t=0 \end{cases}$$

$6u-3t$

$-2-2+1$

から. $(s, u) = (1, \frac{1}{2}t)$ だから

$\circ\ \overline{PQ}^2 = (s-2t)^2 + (s+(t-2))^2 + (s+(t-1))^2$

$= 3s^2 - 6s + 6t^2 - 6t + 5 = 6t^2 - 6t + 2$

$\circ\ \overline{PR}^2 = (u-2t)^2 + (2u-(t+1))^2 + (u+(t+2))^2$

$= 6u^2 - 6tu + 6t^2 + 6t + 5 = \frac{9}{2}t^2 + 6t + 5$

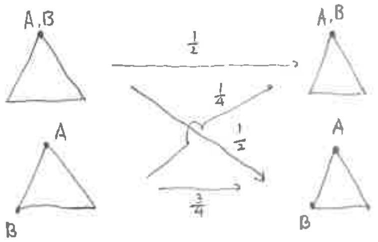
だから $f(t) = \overline{PR}^2 + \overline{PQ}^2$ とすると

$f(t) = \frac{21}{2}t^2 + 7$

これは $t=0$ で $\min 7$ をとる。この時 $P(1, 0, -2)$ である。

第 2 問

[解] n[s]後に異なる点にいる確率 $q(n)$ とする.



上図から

$$p(n+1) = \frac{1}{2}p(n) + \frac{1}{4}q(n)$$
$$= \frac{1}{2}p(n) + \frac{1}{4}(1-p(n))$$
$$= \frac{1}{4}p(n) + \frac{1}{4}$$

$p(1) = \frac{1}{2}$ だから くり返し用いて.

$$p(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

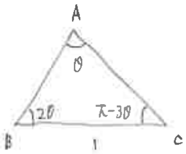
//

第 3 問

[解] $\angle A=\theta$ とおく。内角の正条件から

$$0<\theta,\ 0<2\theta,\ 0<\pi-3\theta$$

$$\Leftrightarrow\ 0<\theta<\frac{\pi}{3} \qquad \cdots ①$$



である。正弦定理から，

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{1}{\sin\theta} \qquad \therefore\ \overline{AB}=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=3-4\sin^2\theta \qquad \cdots ②$$

以下，$c=\cos\theta$，$s=\sin\theta$ とする。△ABCの面積 T は ②から

$$T=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin 2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(3-4s^2)\cdot 2sc$$

$$=(3-4s^2)sc$$

$$T'=3\cos 2\theta-4(3s^2c^2+(-s)\cdot s^3)$$

$$=3(1-2s^2)-4s^2(3c^2-s^2)$$

$$=3(1-2s^2)-4s^2(3-4s^2)$$

$$=16t^2-18t+3 \qquad (t=s^2)$$

から，下表をうる。

θ	0				$\frac{\pi}{3}$
t	0		$\frac{9-\sqrt{33}}{16}$		$3/4$
T'		$+$	0	$-$	
T		↗		↘	

したがって，もとめるのは

$$\cos\angle B=\cos 2\theta=1-2t=1-\frac{9-\sqrt{33}}{8}=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$$

第 4 問

[解] $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ とする。$y=f(x)$ とすれば、与式は

$$y^3-2y^2-y+2\geqq 0$$

$$(y-1)(y^2-y\ \ -2)\geqq 0$$

$$(y-1)(y-2)(y+1)\geqq 0$$

$$\therefore\ -1\leqq y\leqq 1_{\text{or}}\ \ 2\leqq y \quad \cdots ①$$

したがって、全ての x で ① が成立すれば良い。$f(x)\xrightarrow{+\infty} 0$ かつ、$x^2+x+1>0$ から f が連続であることより、$2\leqq y$ なる x がある時、① が全ての x で成立することはなく不適。

よって $-1\leqq y\leqq 1$ のみしらべる。

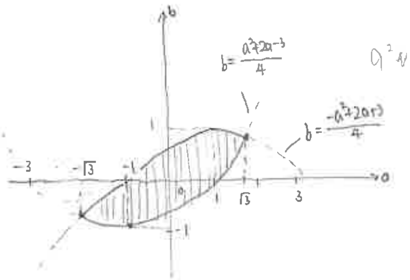
$$-(x^2+x+1)\leqq ax+b\leqq x^2+x+1$$

$$-x^2-(a+1)x-1\leqq b\leqq x^2+(1-a)x+1 \quad \cdots ②$$

② の右辺の最小値は $x=\dfrac{a-1}{2}$ の時の $1-\left(\dfrac{1-a}{2}\right)^2=\dfrac{-a^2+2a+3}{4}$、左辺の最大値は $x=-\dfrac{a+1}{2}$ の時の $\dfrac{(a+1)^2}{4}-1=\dfrac{a^2+2a-3}{4}$ だから、全ての x で ② が成立する条件は、

$$\frac{a^2+2a-3}{4}\leqq b\leqq \frac{-a^2+2a+3}{4}$$

これを図示して 上以下斜線部(境界含む)



第 5 問

[解] $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ である。以下合同式の法を3とする。対称性から
$(a,b)\equiv(1,1)\ (1,2)\ (2,2)$ の時を考えれば良い。

- $(a,b)\equiv(1,1)$ の時、$a^3+b^3\equiv 2$ となり不適。
- $(a,b)\equiv(2,2)$ 〃 $a^3+b^3\equiv 16\equiv 1$ 〃

だから $(a,b)\equiv(1,2)$ が必要である。この時 $a+b\equiv 0$、$a^2-ab+b^2\equiv 0$ から a^3+b^3 は少なくとも
9で割り切れる。そこで $m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ として、

$$a=3m+1,\quad b=3n+2 \qquad \cdots①$$

とおく。

$$a+b=3(m+n+1)$$
$$a^2-ab+b^2=(9m^2+6m+1)+(9n^2+12n+4)-(9mn+3n+6m+2)$$
$$=9m^2+9n^2+9mn+9n+3$$

から a^2-ab+b^2 は9で割り切れず、a^3+b^3 が81で割り切れるには $a+b$ が27で割り切れなければならない。そこで $l\in\mathbb{N}$ として

$$a+b=27l \qquad \cdots②$$

とできる。これが条件。$A=a^2+b^2$ として、

$$A=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(27l)^2+(27l-2b)^2\}$$

$l=1$ の時、これは $b=14\ (\equiv 2)$ で最小値、365をとる。この時 $a=13$ である。一方 $l\geq 2$ の時

$$A\geq\frac{1}{2}\cdot(27l)^2\geq\frac{1}{2}\,4\cdot 27^2=729\cdot 2>365$$

から、A が365より小さくなることはない。以上から、$(a,b)=(13,14)$ で $\min a^2+b^2=365$ //
この時対称性から $(a,b)=(14,13)$ // も解である。

[解2] $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ から、$a^3+b^3\equiv 0 \pmod{81}$ の時、$a+b$ が3で割り切れ

$$a+b=3c$$

とかける。代入、整理して

$$9abc=27c^3-(a^3+b^3)$$

だから、$a,b\not\equiv 0 \pmod 3$ から、$c\equiv 0 \pmod 3$ である。この時

$$a^3+b^3=27c^3-9abc$$

より、a^3+b^3 は81で割り切れる。よって、条件は、$l\in\mathbb{N}$ として

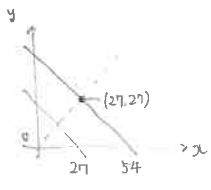
「$a,b\not\equiv 0 \pmod 3$ かつ $a+b=27l$」

(以下略)

[注] 最後の $a+b=27l$ 以下、図示してみると $l=1$ で min なのは明らかで、$l\geq 2$ の時

$$a^2+b^2\geq(27)^2+(27)^2>365$$

を得る。



第 6 問

[解] $C_2: x^2+y^2=r^2\ (x, y>0)$ とする。まず C_1, C_2 が2点で交わる条件から

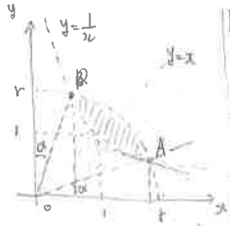
$$\sqrt{2}<r \quad \cdots ①$$

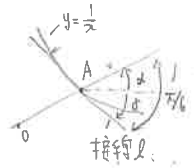
である。2交点 $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ $B(r\cos\beta, r\sin\beta)$ $(0<\alpha<\beta<\pi/2)$ とおく(対称性)と、対称性から

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha \quad \cdots ②$$

となる。次、C_1 が A を通る条件から

$$r\sin\alpha=\frac{1}{r\cos\alpha} \quad \cdots ③$$





ここで l の x 軸正方向を向いた方向ベクトルは $\vec{l}=\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{r^2\cos^2\alpha}\end{pmatrix}$ であり、$\overrightarrow{OA}=r\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ だから

$$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{l}=r\left(\cos\alpha-\frac{\sin\alpha}{r^2\cos^2\alpha}\right)>0 \quad (\because ①,\ 0<\alpha<\pi/4)$$

となり図は右上図のようになる。よ(>0)を図のようにして、$\tan\alpha=t$ とおくと、

$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\gamma}=\frac{t^2+r^2t+1}{r^2-t^3-t} \quad \cdots ④$$

ここで ③の両辺 $\frac{1}{\cos\alpha}$ をかけて整理すると、

$$r^2t=t^2+1 \quad \cdots ⑤$$

④,⑤から

$$r^2-t^3-t=\sqrt{3}(t^2+r^2t+1)$$

$$t^3+\sqrt{3}t^2+(\sqrt{3}r^2+1)t+\sqrt{3}-r^2=0$$

$$(t+\sqrt{3})(r^2t-1)+(\sqrt{3}r^2+1)t+\sqrt{3}-r^2=0$$

$$r^2(r^2t-1)+(\sqrt{3}r^2-1)t+(\sqrt{3}r^2+1)t-r^2=0$$

$$(r^4+2\sqrt{3}r^2)t=2r^2$$

$$t=\frac{2}{r^2+2\sqrt{3}}$$

であり、⑤を代入して

$$t^2+2\sqrt{3}t-1=0$$

$$t=-\sqrt{3}\pm2$$

$t>0$ から複号正を採用して

$$t=2-\sqrt{3}=\tan15^\circ,\quad r=2\ (①をみたす) \quad \cdots *$$

だから $0<\alpha<\pi/4$ から $\alpha=15^\circ$ …⑥である。題意の面積 S として

$$S= \quad - \quad \cdots ⑦$$

であり

$$=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}\pi$$

$$= \quad + \quad - \quad = \quad =\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\frac{1}{x}dx=\log\frac{1}{t}$$

を代入して、*,⑥から

$$S=\frac{2}{3}\pi-\log\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})$$

[解2] 対称性から $y>x$ の方を A とする。$A(p, \frac{1}{p})$ とする $(0<p<1)$。A での接線の傾きは $-\frac{1}{p^2}$ であり、l と x 軸の交点 C として $\overline{OA}=\overline{AC}$ となる。
$(\because OA$ の傾き正$)$ $\angle AOC>\pi/4$ から、題意の条件より $\angle OAC=\frac{\pi}{6}$ である。この時 $\angle AOC=\frac{5}{12}\pi$ となる。

$$\tan\frac{5}{12}\pi=2+\sqrt{3}$$

だから

$$\frac{1}{p^2}=\tan\frac{5}{12}\pi=2+\sqrt{3} \qquad \therefore p=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

以下 $\alpha=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\beta=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ とする。

$$S= \quad -$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\pi}{3}-\int_\alpha^\beta\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})$$