直線 $l : x = y = z$ と直線 $m : x/2 = (y-1)/3 = -z$ 上にそれぞれ点列 $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ および $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n \cdots$ があり，全ての n について線分 P_nQ_n と m，線分 Q_nP_{n+1} と l とはそれぞれ直交しているとする．n を限りなく大きくするとき，点 P_n，Q_n はそれぞれどのような点に近づくか．それらの点の座標を求めよ．

[解] $\vec{a} = (1,1,1)$，$\vec{b} = (2,3,-1)$，$\vec{c} = (0,1,0)$ とすると，$\vec{a}$，$\vec{b}$ はそれぞれ，l，m の方向ベクトルである．P_n，Q_n が各直線上にあるので，実数 t_n，s_n を用いて

$$\overrightarrow{OP_n} = t_n\vec{a} \qquad \overrightarrow{OQ_n} = \vec{c} + s_n\vec{b}$$

と表される．題意の条件から

$$\begin{cases} \vec{b} \cdot \overrightarrow{P_nQ_n} \\ \vec{a} \cdot \overrightarrow{Q_nP_{n+1}} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \vec{b} \cdot (\vec{c} + s_n\vec{b} - t_n\vec{a}) = 0 \\ \vec{a} \cdot (\vec{c} + s_n\vec{b} - t_{n+1}\vec{a}) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \vec{b} \cdot \vec{c} + s_n|\vec{b}|^2 - t_n\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{c} + s_n\vec{a} \cdot \vec{b} - t_{n+1}|\vec{a}|^2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ここで，

$$|\vec{a}|^2 = 3 \qquad |\vec{b}|^2 = 14$$
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \qquad \vec{b} \cdot \vec{c} = 3$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$$

を代入して

$$\begin{cases} 3 + 14s_n - 4t_n = 0 \\ 1 + 4s_n - 3t_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(2) から s_n を消去して

$$t_{n+1} = \frac{1}{21}(8t_n + 1)$$
$$t_{n+1} - \frac{1}{13} = \frac{8}{21}\left(t_n - \frac{1}{13}\right)$$

繰り返し用いて

$$t_n = \frac{1}{13} + \left(\frac{8}{21}\right)^{n-1}\left(t_1 - \frac{1}{13}\right)$$
$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{13} \tag{3}$$

故に (2) から

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4t_n - 3}{14}\right) \\ &= \frac{1}{14}\left(4\lim_{n\to\infty} t_n - 3\right) \\ &= \frac{1}{14}\left(4\frac{1}{13} - 3\right) && (\because (3)) \\ &= \frac{-5}{26} && (4) \end{aligned}$$

である．以上の結果から，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_n} &= t_n\vec{a} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{13}\vec{a} \\ &= \left(\frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}\right) \\ \overrightarrow{OQ_n} &= \vec{c} + s_n\vec{b} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{c} - \frac{5}{26}\vec{b} \\ &= \left(\frac{-5}{13}, \frac{11}{26}, \frac{5}{26}\right) \end{aligned}$$

となって，求める点は

$$P_n \to \left(\frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}\right)$$
$$Q_n \to \left(\frac{-5}{13}, \frac{11}{26}, \frac{5}{26}\right)$$

である．$\cdots$(答)