点 (x, y) を点 $(x+a, y+b)$ にうつす平行移動によって曲線 $y=x^2$ を移動して得られる曲線を C とする．C と曲線 $y=\dfrac{1}{x}$，$x>0$ が接するような a，b を座標とする点 (a, b) の存在する範囲の概形を図示せよ．

また，この二曲線が接する点以外に共有点を持たないような a，b の値を求めよ．ただし，二曲線がある点で接するとは，その点で共通の接線を持つことである．

[解] 題意から $C: y=(x-a)^2+b$ である．接点の x 座標を $t_{>0}$ とすれば，$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{-1}{x^2}$ だから，求める条件は，

$$\exists t\begin{cases} t>0 \\ (t-a)^2+b=\dfrac{1}{t} \\ 2(t-a)=\dfrac{-1}{t^2}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \exists t\begin{cases} t>0 \\ b=\dfrac{1}{t}-\left(\dfrac{-1}{2t^2}\right)^2 \\ a=t+\dfrac{1}{2t^2}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \exists t\begin{cases} t>0 \\ b=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{4t^4} \\ a=t+\dfrac{1}{2t^2}\end{cases} \tag{1}$$

従って，(a, b) が (1) で表されるパラメータ曲線上にあればよい．

$$a'=1-\frac{1}{t^3}=\frac{t^3-1}{t^3}$$
$$b'=\frac{-1}{t^2}+\frac{1}{t^5}=\frac{1-t^3}{t^5}$$

だから下表を得る．

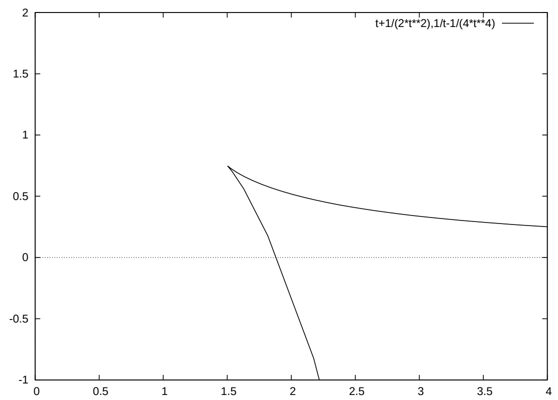
t	0		1	
a'		$-$	0	$+$
b'		$+$	0	$-$
(a, b)		$\nwarrow$	$\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$	$\searrow$

また，(1) から極限値は以下のようになる．

$$t\to+0 \text{ のとき}\begin{cases} a\to+\infty \\ b\to-\infty\end{cases}$$

$$t\to+\infty \text{ のとき}\begin{cases} a\to+\infty \\ b\to+0\end{cases}$$

故にグラフの概形は以下．



次に，接点以外に交点を持たない時，

$$(x-a)^2+b=\frac{1}{x}$$

を満たす $x_{>0}$ が唯一つ $x=t$ のみであればよい．(1) を代入して

$$\left(x-\left(t+\frac{1}{2t^2}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{4t^4}\right)=\frac{1}{x}$$

$$\Longleftrightarrow x^2-2\left(t+\frac{1}{2t^2}\right)x+\left(t+\frac{1}{2t^2}\right)^2+\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{4t^4}\right)=\frac{1}{x}$$

$$\Longleftrightarrow x^3-2\left(t+\frac{1}{2t^2}\right)x^2+\left(t^2+\frac{2}{t}\right)x-1=0$$

$\iff (x-t)^2\left(x-\dfrac{1}{t^2}\right)=0$

だから，条件は $t>0$ も考慮して

$$t=\frac{1}{t^2}\iff t=1$$

である．この時，(1) から，$(a,b)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{4}\right)$ となる．$\cdots$(答)