京大理科数学　1966

80分/150分

第 1 問

【解】(1) $f(x) = x^3+x-8$ とおく. $f'(x) = 3x^2+1 > 0$ から, $f(x)$は単調増加

これと $f(1) = -6$, $f(2) = 2$ より, $f(x)=0$ は $1<x<2$ の区間に

唯1つ実根を持つ //

(2) 根をαとおくと

$$\alpha^3+\alpha-8=0 \quad \cdots ①$$

αが有理数だと仮定すると, $\alpha = \frac{b}{a}$ ($a, b \in \mathbb{N}$ ∵(1))

とかける。(a, bは互いに素) ①に代入して整理

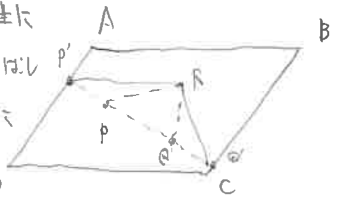
$$b^3 = 8a^3 - ba^2 = a^2(8a-b)$$

より, b^3がaで割り切れることが必要だが, a, bは互いに素だからそのようなことはない. よって矛盾し, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ である //

/20

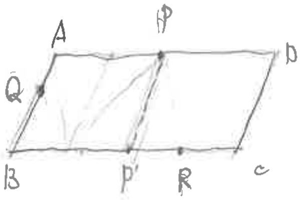
第 2 問

[解] ① 3点P,Q,Rが辺上にないとき、そのうちの一辺をのばして、四辺形の辺との交点に新たに点をとれば



より面積の大きい三角形ができるから、P,Q,Rは辺上にある 図

② P,Q,Rのうち2点が同一辺上にある時は、その2点を頂点にした時が面積最大である …①



又、3点とも異なる辺上にある時、対称性からそれを図のようにおく。

PをとおりABに平行な直線と、BCの交点P'とする。まずP,Rについて

1° RがBP'上にある時

PRを底辺とみて、Q=Aの時△PQRは最大、さらに、次にPをうごかして、P=Dの時△PQRは最大値$\frac{1}{2}$□ABCDをとる

2° RがP'C上にある時

同様にして Q=B, R=Cの時、△PQRは最大値$\frac{1}{2}$□ABCDをとる

①の時の最大値も同じく$\frac{1}{2}$□ABCDだから、以上あわせて題意は示された 図

(ii) (i)から、面積Sの平行四辺形の内に入る三角形の最大面積が$\frac{1}{2}S$だから、$S<2$の時 $\frac{1}{2}S<1$ となり、面積1の三角形は入らない 図

/20

第 3 問

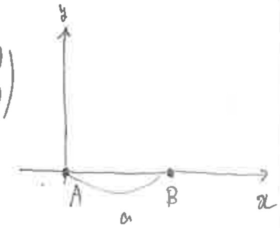
[解] 3本のテレビ塔を P, Q, R として、その高さ p, q, r $(p \geqq q \geqq r)$ とする。等号が全て成立することはない。さて、3点 A, B, C は P, Q の先端を結ぶ直線と平面の交点、$Q \cdot R$ 〃、$R \cdot P$ 〃 とおいておく。

すると、A, B, C はテレビ塔の3先端を含む平面内かつ平地を含む平面内にある。2平面が交わる時、その交線は直線となるから、3点 A, B, C は一直線上にある □

/20

第 4 問

[解] 右図のような座標平面を考える。



すると $0\leq\theta<2\pi$ として

$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}\cos2\theta\\ \sin2\theta\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$

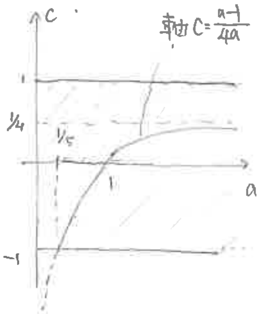
とおけるから

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}a+\cos\theta-\cos2\theta\\ \sin\theta-\sin2\theta\end{pmatrix}$$

$|\overrightarrow{PQ}|\geq0$ から. $|\overrightarrow{PQ}|^2$ が最大の時. $|\overrightarrow{PQ}|$ も最大. 以下 $\cos\theta=C, \sin\theta=S$ と略記して.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2&=(a+C-(2C^2-1))^2+(S-2CS)^2\\&=(-2C^2+C+a+1)^2+S^2(1-2C)^2\\&=4C^4-4C^3-(4a+3)C^2+2(a+1)C+(a+1)^2+S^2(4C^2-4C+1)\\&=-4aC^2+2(a-1)C+(a^2+2a+2)=f(C)\end{aligned}$$

以下 $f(C)$ の最大値を求める. $a>0$ に注意して. 軸の大きさで場合分けする



1° $0<a\leq\frac{1}{5}$ の時

$\max f(C)=f(-1)=(a-2)^2$

2° $\frac{1}{5}\leq a$ の時

$\max f(C)=f\left(\frac{a-1}{4a}\right)$
$=a^2+\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}+\frac{1}{4a}$

以上から

$\begin{cases}0<a\leq\frac{1}{5}\text{ の時 } 2-a\\ \frac{1}{5}\leq a\text{ の時 } \sqrt{a^2+\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}+\frac{1}{4a}}\end{cases}$ //

第 5 問

[解] PがABCDを1周する時

AB上… $y=1,\ -1\leq x\leq 1$ …①
BC上… $x=-1,\ -1\leq y\leq 1$ …②
CD上… $y=-1,\ -1\leq x\leq 1$ …③
DA上… $x=1,\ -1\leq y\leq 1$ …④

である 従って Q(u,v)のキセキは以下 ($a>1$に注意)

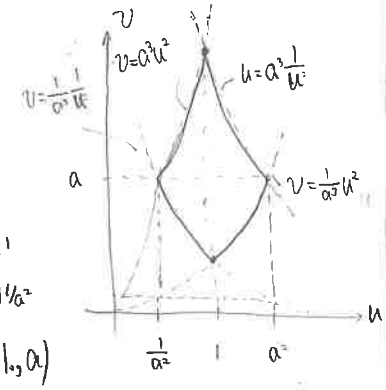
1°の時
$u=a\cdot a^{x},\ v=\frac{1}{a}\cdot a^{2x}\ (-1\leq x\leq 1)$から
$v=\frac{1}{a^3}u^2\ (1\leq u\leq a^2)$

2°の時
$u=\frac{1}{a}\cdot a^{y},\ v=\frac{1}{a^2}\cdot a^{-y}\ (-1\leq y\leq 1)$から
$v=\frac{1}{a^3}\frac{1}{u}\ \left(\frac{1}{a^2}\leq u\leq 1\right)$

3°の時
$u=\frac{1}{a}\cdot a^{x},\ v=a\cdot a^{2x}\ (-1\leq x\leq 1)$から
$v=a^3\cdot u^2\ \left(\frac{1}{a^2}\leq u\leq 1\right)$

4°の時
$u=a\cdot a^{y},\ v=a^2\cdot a^{-y}\ (-1\leq y\leq 1)$から
$v=a^3\frac{1}{u}\ (1\leq u\leq a^2)$

図示して右図だから、求める面積S、Sのうち $\frac{1}{a^2}\leq u\leq 1$のものを$S_1$、$1\leq u\leq a^2$のものを$S_2$として、



$S=S_1+S_2$ …⑤

$S_1=\int_{1/a^2}^{1}\left(a^3u^2-\frac{1}{a^3}\frac{1}{u}\right)du$

$=\left[\frac{a^3}{3}u^3-\frac{1}{a^3}\log u\right]_{1/a^2}^{1}$

$=\frac{a^3}{3}-\left(\frac{1}{3a^3}+\frac{2}{a^3}\log a\right)$

$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{3a^3}-\frac{2}{a^3}\log a$

$S_2=\int_{1}^{a^2}\left(a^3\frac{1}{u}-\frac{1}{a^3}u^2\right)du$

$=\left[+a^3\log u-\frac{1}{a^3}\frac{1}{3}u^3\right]_{1}^{a^2}=+2a^3\log a-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}\frac{1}{a^3}$

⑤〜⑦より

$S=2\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)\log a$ //

採点ミス
[補足]
$u^2\to u$になっていた。採点もとしか!!

/20

第6問

[解]

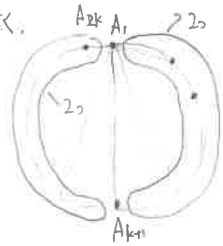
(1) n個の頂点の中から3つえらべば三角形1つに対応するので

$${}_nC_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \quad /\!/$$

(2) (1)から、鈍角三角形(ア)、直角三角形(イ)のものをのぞけばよい。

1° $n=2k$ ($k\in\mathbb{N}$, ≥ 2) の時

1つの頂点をA_1とする。A_1A_{k+1}は外接円の直径だから、(ア)をつくるには右図の領域から2点をえらべばよく、



$k\geq 3$のとき $2\cdot{}_{k-1}C_2$ 通り
$k\leq 2$の時 0通り

1つの頂点が他にある場合と重複を考えて

$k\geq 3$の時 $2k\cdot 2\,{}_{k-1}C_2/2 = k(k-1)(k-2)$ 通り
$k\leq 2$ 〃 0通り

一方(イ)は、1つの直径となる辺に対し、のこり1つの辺のえらび方が$2k-2$通りあるから、

$k(2k-2)$通り

2° $n=2k-1$の時

1°と同様に考える。1つの頂点をA_1に固定した時(ア)は

$k\geq 3$のとき $2\cdot{}_{k-1}C_2$ 通り
$k\leq 2$の時 0 通り

だから、あわせて

$k\geq 3$の時 $(2k-1)\cdot{}_{k-1}C_2$ 通り
$k=2$の時 0 〃

(イ)は存在しない

以上から、もとめる数は $n=3$の時1つ、$n=4$の時0つで、$n\geq 5$の時

1° $n\in$ evenの時 $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right) - \frac{n}{2}(n-2)$
$= \frac{1}{24}n(n-2)(n-4)$ つ

2° $n\in$ oddの時 $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)$
$= \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)$

これらは$n=3,4$でも成立するから、

$n\in$ odd $\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)$つ
$n\in$ evenの時 $\frac{1}{24}n(n-2)(n-4)$つ $/\!/$

である。

/20