xyz 空間において，点 P は yz 平面上の放物線 $z=1-y^2$ 上にあるとする．点 $A(1,0,1)$ と P を結ぶ直線を x 軸のまわりに回転して得られる曲線と二平面 $x=0$，$x=1$ とによって囲まれる部分の体積を V とする．V を P の y 座標で表せ．また V の最小値を求めよ．

[**解**]$P(0,t,1-t^2)$ とおく．また，$\vec{a}=(1,0,1)$ とする．このとき，題意の直線 l の方向ベクトル $\vec{l}$ は $\vec{l}=(-1,t,-t^2)$ であるから，

$$l:\overrightarrow{OX}=\vec{a}+p\vec{l}$$

である．$x=k(0\leq k\leq 1)$ で切断する．この平面と l の交点は $p=1-k$ に対応し，$\big(k,(1-k)t,1-(1-k)t^2\big)$ である．したがって，この平面での断面積 $S(k)$ は

$$\begin{aligned}S(k)&=\pi\left\{((1-k)t)^2+\left(1-(1-k)t^2\right)^2\right\}\\&=\pi\left\{1-2t^2(1-k)+(t^4+t^2)(1-k)^2\right\}\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 S(k)dk\\&=\pi\left[k+t^2(1-k)^2-\frac{1}{3}(t^4+t^2)(1-k)^3\right]_0^1\\&=\pi(1-t^2+\frac{1}{3}(t^4+t^2))\\&=\pi\left(\frac{1}{3}t^4-\frac{2}{3}t^2+1\right)\cdots(\text{答})\\&=\frac{\pi}{3}\left(t^2-1\right)^2+\frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

よって求める最小値は $t=\pm 1$ のときの

$$\min V=\frac{2}{3}\pi\cdots(\text{答})$$

である．