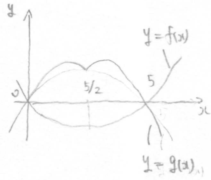
東大理科数学　1968

第 1 問

[解] $f(x)=x^2-5x$, $g(x)=\frac{\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)-\frac{3}{5}\sin^2\left(\frac{\pi x}{5}\right)$ とおく。グラフの概形は右図。これら2つの囲む面積 S とすると

$$S=\int_0^5 g(x)dx+\int_0^5(-f(x))dx \quad \cdots ①$$



であり、

$$\circ \int_0^5 g(x)dx=\left[-\cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)\right]_0^5 - \frac{3}{5}\frac{1}{2}\left[x-\frac{5}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{5}\right)\right]_0^5$$

$$= 2-\frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\circ -\int_0^5 f(x)dx=\frac{1}{6}5^3=\frac{125}{6}$$

を①に代入して

$$S=\frac{64}{3} \quad \cdots ②$$

である。さらに $-\int_0^5 f(x)dx>\int_0^5 g(x)dx$ だから $\alpha<0$ である。この時 $y=f(x)$ と $y=\alpha x$ の交点の x 座標 t $(t\neq 0)$ とする。題意から、

$$\int_0^t(\alpha x-f(x))dx=\frac{1}{6}t^3=\frac{1}{2}S=\frac{32}{3} \quad (\because ②)$$

$$\therefore t=4$$

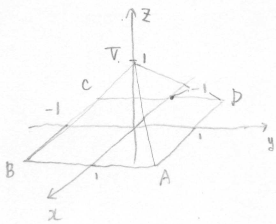
となるので $f(x)=\alpha x$ の解が $x=0,4$ となるから、$\alpha=-1$ が従う。

第 2 問

[解] ABCDが一辺2の正方形であるとして良い。この時. V−ABCDの高さは, 1となる。(∵題意) そこで. $A(1,1,0)$ $B(1,-1,0)$ $C(-1,-1,0)$ $D(-1,1,0)$, $V(0,0,1)$ なる空間座標をおく。対称性から面VABと面VBCのなす角をしらべれば良い。

面VAB, VBCの法線ベクトル $\vec{n}, \vec{m}$ は

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



である。これらのなす角 θ として.

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \qquad (\because 0 \leq \theta \leq \pi)$$

だから. 2面のなす角は $\frac{\pi}{3}$ $(<\pi/2)$ である。

第 3 問

[解] $a+b+c=0$ から.

$$f(x)=ax^2+bx-(a+b)$$
$$=a(x^2-1)+b(x-1)$$
$$=(x-1)\{a(x+1)+b\} \qquad (a, b\in\mathbb{R},\ a\neq 0) \quad \cdots ①$$

である。したがって. α, β が1か否かで場合分けすれば良い。

1° $\alpha=\beta=1$

① から. $f(\alpha)=f(\beta)=0$ より. (0.0) のみとる.

2° $\alpha=1 \wedge \beta\neq 1$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)$ は任意の実数をとるので: $x=0$

3° $\alpha\neq 1 \wedge \beta=1$

2° と同じく. $y=0$

4° $\alpha\neq 1 \wedge \beta\neq 1$

この時. $(X, Y)=(f(\alpha), f(\beta))$ とすると

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha^2-1 \\ \beta^2-1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \beta-1 \end{pmatrix}$$

だから. まず第2式を b について解いて.

$$b=\frac{1}{\alpha-1}X-(\alpha+1)a \qquad (\because \alpha\neq 1)$$

第1式に代入して.

$$Y=(\beta^2-1)a+\frac{\beta-1}{\alpha-1}X-(\alpha+1)(\beta-1)a$$
$$=\frac{\beta-1}{\alpha-1}X+(\beta-1)(\beta-\alpha)a$$

ここで ① から. $a\in\mathbb{R}\neq 0$ に注意して.

$$\begin{cases} ㋐\ \alpha\neq\beta \text{ の時.} \quad Y\neq\dfrac{\beta-1}{\alpha-1}X \\ ㋑\ \alpha=\beta \text{ の時} \quad Y=X \end{cases}$$

である。

以上まとめて.

$$\begin{cases} \alpha=\beta=1 \cdots (0.0) \\ \alpha=1 \wedge \beta\neq 1 \cdots x=0 \\ \alpha\neq 1 \wedge \beta=1 \cdots y=0 \\ \beta\neq\alpha \wedge \alpha\neq 1 \wedge \beta\neq 1 \cdots Y\neq\dfrac{\beta-1}{\alpha-1}X \text{ をみたす任意の点} \\ \beta=\alpha \wedge \alpha\neq 1 \wedge \beta\neq 1 \cdots Y=X \end{cases}$$

—//

[解注]

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha^2-1 \\ \beta^2-1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \beta-1 \end{pmatrix}$ ゆえ. $\begin{pmatrix} \alpha^2-1 \\ \beta^2-1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \beta-1 \end{pmatrix}$ が1次独立である条件をかんがえても (△の面積が0でない) 良いか.

第 4 問

[解] l上 $z=k$ での切り口の面積$S(k)$は

$$S(k)=\pi\{1+(1-k^2)^2\}=\pi\{2-2k^2+k^4\}$$

だから、もとめる体積Vとして

$$V=\int_{-1}^{1}S(k)\,dk$$

$$=2\pi\int_0^1(2-2k^2+k^4)\,dk$$

$$=2\pi\left[2k-\frac{2}{3}k^3+\frac{1}{5}k^5\right]_0^1$$

$$=\frac{46}{15}\pi \quad \text{//}$$

第 5 問

[解] (1) から. $P(x)$ は奇関数で. $P(x) = ax^3 + bx$ $(a \neq 0)$ とおける。

(2) から. $b \neq 0$ である ($b=0$ なら $x=0$ が重根となり矛盾, 逆に $b \neq 0$ なら重根をもたない)

さて. $P'(x) = 3ax^2 + b$ において. (3) から. $P'(x)$ が定符号である。

$ab \neq 0$ とあわせて.

$$\begin{cases} 1^\circ\ a>0 \wedge b>0 \\ 2^\circ\ a<0 \wedge b<0 \end{cases}$$

のいずれかとなる。又. (4).(5) から

$$\begin{cases} P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{8} + \frac{b}{2} \in \mathbb{Z} & \cdots ① \\ 0 < P(1) = a+b < 6 & \cdots ② \end{cases}$$

1°, 2° 及び ② から. 2° はありえず. 1° に限定される。又. ① から

$$\frac{a+4b}{8} \in \mathbb{Z} \quad \therefore\ a+4b = 8k \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \cdots ③$$

1°, ② から $(a, b) = (1, 1)\,(1, 2)\,(1, 3)\,(1, 4)\,(2, 1)\,(2, 2)\,(2, 3), (3, 1)\,(3, 2)\,(4, 1)$

となるが. ③ をみたすのは $(a, b) = (4, 1)$ のみ。したがって.

$$P(x) = 4x^3 + x \quad /\!/$$

68 T

第 6 問

[解] (1) $f(x)=(1+x)^{\alpha}-\left(1+\frac{\alpha}{2}x\right)$ とおく。$f'(x)=\alpha\left[\left(\frac{1}{1+x}\right)^{1-\alpha}-\frac{1}{2}\right]$ であり、

$0\leq x\leq 1$, $0<\alpha<1$ から、$1\geq\frac{1}{1+x}\geq\frac{1}{2}$, $0<1-\alpha<1$ であることより $f'(x)>0$ だから $f(x)$ は

単調増加で、$[0,1]$ の時、$f(x)\geq f(0)=0$ $\therefore\ 1+\frac{\alpha}{2}x\leq(1+x)^{\alpha}$ ■

(2) $1<\frac{1024}{1000}<2^{\frac{1}{20}}$ … ① を示す。①の左側は自明である。右側について、(1)で

$(x,\alpha)=\left(1,\frac{1}{20}\right)$ とすると、(これは $0\leq x\leq 1$, $0<\alpha<1$, $\alpha\in\mathbb{Q}$ をみたす)

$$2^{\frac{1}{20}}\geq 1+\frac{1}{40}>1+\frac{24}{1000}\qquad\left(\because\ \frac{1}{40}>\frac{24}{1000}\Leftrightarrow 1000>960\right)$$

だから、①の右側も成立。したがって①は成立する。①の両辺1000倍してから20乗すると、

$$10^{60}<2^{200}<2\cdot 10^{60}\qquad\cdots②$$

だから、2^{200} は、61ケタで、最上位は1 ■

(3) ②の各辺正だから常用対数をとって、

$$60<200\log_{10}2<60+\log_{10}2$$

$$\therefore\ \frac{30}{100}<\log_{10}2<\frac{60}{199}\qquad\cdots③$$

となり、

$$\frac{30}{100}=0.300\ ,\quad \frac{60}{199}=0.3015\cdots<0.302$$

から、

$$0.300<\log_{10}2<0.302$$

となる。■