空間内に 3 点 $P\left(1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$, $Q\left(1, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $R\left(\dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を頂点とする正 3 角形の板 S がある．S を z 軸のまわりに 1 回転させた時，S が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ．

[**解**] 辺 PR, QR の方程式はそれぞれ以下のようになる．

$$PR : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3/4 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}$$

$$QR : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}$$

これらと平面 $z = k$ の交点は順に，

$$p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}k\right)$$
$$q = 1 - \sqrt{3}k$$

として

$$(q, p, k), (q, -p, k)$$

である．故に，図形の $z = k (0 \leq k \leq \dfrac{\sqrt{3}}{4})$ での切断面は

$$x = q$$
$$|y| \leq p$$

となる．したがって，切断面上の点と原点との距離の最大小値は

$$r_{max}^2 = p^2 + q^2$$
$$r_{min}^2 = q^2$$

である．故にこの平面での切断面の面積 $S(k)$ は

$$\begin{aligned} S(k) &= \pi(r_{max}^2 - r_{min}^2) \\ &= \pi p^2 \end{aligned}$$

となる．求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{3}/4} S(k)dk \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{3}/4}\left(1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}k\right)^2 dk \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}k - 1\right)^3\right]_0^{\sqrt{3}/4} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{48} \cdots (答) \end{aligned}$$

となる．