

実数 a, b に対し $x_n = \frac{1}{n^b} \left\{ \frac{1}{n^a} + \frac{1}{(n+1)^a} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^a} \right\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ とおく. $n \rightarrow \infty$ のとき x_n が収束するための a, b の条件およびそのときの極限値を求めよ.

[解]

まずは x_n の一般項を求める.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n^b} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+k)^a} \\ &= \frac{1}{n^b} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^a} \\ &= \frac{1}{n^{a+b-1}} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^a} \end{aligned}$$

ここで

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^a}$$

とおくと, これは区分求積の形になっており, $n \rightarrow \infty$ の時以下のように収束する.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= \int_1^2 \frac{1}{x^a} dx \\ &= \begin{cases} \log 2 & (a = 1) \\ \frac{1}{1-a} (2^{1-a} - 1) & (a \neq 1) \end{cases} \quad (\neq 0) \end{aligned}$$

次に x_n の残りの部分を考えると,

$$\frac{1}{n^{a+b-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & (a+b-1 > 0) \\ 1 & (a+b-1 = 0) \\ \infty & (a+b-1 < 0) \end{cases}$$

である. 以上をまとめると, $a+b-1 \geq 0$ の時収束し, その収束値は以下になる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 0 & (n \rightarrow \infty) \\ \log 2 & (a+b=1, a=1) \\ \frac{2^{1-a}-1}{1-a} & (a+b=1, a \neq 1) \end{cases}$$

... (答)

[解説]