長さ l の線分が，その両端を放物線 $y=x^2$ の上にのせて動く．この線分の中点 M が x 軸にもっとも近い場合の M の座標を求めよ．ただし $l \geq 1$ とする．

[解] 線分の両端を $A(a,a^2)$，$B(b,b^2)$ とする．ただし

$$a<b \tag{1}$$

とする．l の長さが l であるから

$$\begin{aligned}|AB|=l \iff |AB|^2&=l^2\\(b-a)^2+(b^2-a^2)^2&=l^2\\(b-a)^2\left(1+(a+b)^2\right)&=l^2 \end{aligned}\tag{2}$$

となる．ここで $t=a+b$，$s=b-a$ とおいて，a，b の存在条件を調べる．まずは (1)，(2) に代入して

$$\begin{cases} s>0 & \text{(3a)}\\ s^2(1+t^2)=l^2 & \text{(3b)}\end{cases}$$

次に，$ab=\dfrac{t^2-s^2}{4}$ であるから，a，b は x の 2 次方程式 $x^2-tx+\dfrac{t^2-s^2}{4}=0$ の異 2 実解であるから，判別式 D として

$$\begin{aligned}&D>0\\ \iff& t^2-4\frac{t^2-s^2}{4}>0\\ \iff& s^2>0\end{aligned}$$

これは (3a) から常に成立する．よって s，t の条件式は (3a)，(3b) である．このもとで $M(X,Y)$ として Y が最小となる場合を考えれば良い $(\because Y\geq 0)$.

$$\begin{cases} X=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{t}{2}\\ Y=\dfrac{a^2+b^2}{2}=\dfrac{t^2+s^2}{4}\end{cases}$$

であるから，(3b) を用いて t を消去して

$$\begin{aligned}Y&=\frac{t^2+s^2}{4}\\&=\frac{1}{4}\left(s^2+\frac{l^2}{s^2}-1\right)\\&\geq\frac{1}{4}\left(2\sqrt{l^2}-1\right) && (s,l>0\text{ 故 AM-GM})\\&=\frac{1}{4}(2l-1) && (l>0)\end{aligned}$$

である．等号成立は

$$s^2=\frac{l^2}{s^2}\iff s=\sqrt{l},t=\pm\sqrt{l-1}$$

のときで，$l\geq 1$ からこのような (s,t) は必ず存在する．又この時 $X=\dfrac{\pm\sqrt{l-1}}{2}$ である．よって求める座標は $\left(\dfrac{\pm\sqrt{l-1}}{2},\dfrac{1}{4}(2l-1)\right)\cdots$(答) である．