京大理科数学　1968

100/150分

		計	思	総	
1	論理	A	B	B	20
2	整数	A	A	A	20
3	多変数	B	B	B	20
4	多変数	B	C	B	20
5	関数	A	A	A	20
6	関数	B	A	B	20

第 1 問

解)

(1) 正しい

対偶をとると「$a>b \Rightarrow a\neq b$」だがこれは明らか ∎

(2) 正しくない

座標平面で $A(0,0)$ $B(1,0)$, $C(1,1)$ $D(0,1)$ とすると、どの3点も一直線上にないが

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$$

である。∎

(3) 正しい

まず $A=B$ を示す。$A\subset B$…① である。次に

$$B\subset C\subset A$$

だから $B\subset A$…②。①,②から $A=B$ である。同様にして $B=C$ も示されるので

$$A=B=C$$ ∎

(4) 正しい

帰納法で示す。$n=5$ の時、$25<32$ となって成立。$n=k$ ($k\in\mathbb{N}_{\geq 5}$) での成立を仮定し、$n=k+1$ の時

$$2^{k+1}>2\cdot k^2 \quad \cdots ① \quad (\because 仮定)$$

$$2k^2>(k+1)^2 \quad \cdots ② \quad (\because (左)-(右)=k^2-2k-1>0 \ (\because k\geq 5))$$

①,②から

$$2^{k+1}>(k+1)^2$$

となって $n=k+1$ で成立。以上から示された ∎

(5) 正しくない

正しいとすると $\frac{1}{N}=0$ なる $N\in\mathbb{N}$ が存在する。両辺 $N(\neq 0)$ 倍すると $1=0$ となって矛盾するから示された ∎

/20

第 2 問

[解] 3辺の長さ a, b, c $(a \leq b \leq c)$ とすると、三角不等式から

$$a \leq b \leq c < a+b.$$

が成り立つ。

$$a+b-c \geq 20+20-36 \geq 0$$

だから、問題文中にある長さのうち任意に3つ持ってくると、三角形をつくることができる。から、9つの辺の長さから3つをえらぶ方法を考えて

1° 3辺とも違う長さ… ${}_9C_3 = 84$通り

2° 2等辺三角形 … $2 \cdot {}_9C_2 = 72$通り

3° 正三角形 … 9通り

よって

$84+72+9 = 165$通り

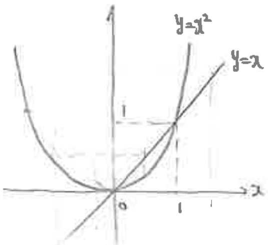
[本日のミス]
"相似"と"合同"をまちがえていた

/20

第 3 問

[解]

(1) 右のグラフから



○ まず $l<0$ の時, $x \leq l$ をみたす x に対して $x^2>0>l$ となり, S には属さない

○ $l>1$ の時. $x=l$ での題意の成立が必要だが,

$$l^2-l=l(l-1)>0$$

となって $l^2<l$ に矛盾.

よって. $0 \leq l \leq 1$ である 答

(2) ○ $0<m<1$ とすると. $x=m$ での題意の成立が必要だが(つまり $m \leq m^2$)

$$m^2-m=m(m-1)<0 \quad \therefore m^2<m$$

となり矛盾.

○ $1<m$ とすると. $1<m \leq l$ となり. (1)から $0 \leq l \leq 1$ であることに反する

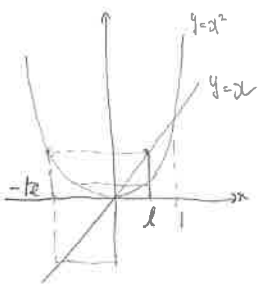
以上から $m \leq 0$ 又は $m=1$ である 答

(3) $m=1$ の時 $0 \leq l \leq 1$ と $1 \leq l$ から $l=1$ であり.

$S=\{1\}$

(4) $m<0$ の時. $m \leq x \leq l$ の全ての x で $m \leq x^2 \leq l$ となるような m を求める. $x^2=l \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{l}$ から.

グラフは右のようになり. 条件は



$-\sqrt{l} \leq m \leq 0$

である

/20

第 5 問

[解] $A\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ $B\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$, $P(x,x^2)$, $f(x)=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ とおく.

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{9}{4}\right)^2$$

$$=2x^4-3x^2-2x+\frac{61}{8}$$

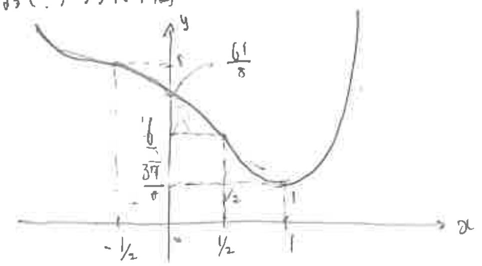
$$f'(x)=8x^3-6x-2$$

$$f''(x)=24x^2-6=6(2x+1)(2x-1)$$

より下表を得る

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1	
f'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	↘		↘		↘		↗

よって、グラフは下図



。極値 $\frac{37}{8}$

。変曲点… $\left(-\frac{1}{2},8\right)\left(\frac{1}{2},6\right)$

$\frac{31}{4}$

$\frac{1}{8}-\frac{3}{4}-1+\frac{61}{8}$

第 6 問

[解] $0<x<1$ …①

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{1-y}} \quad \cdots ②$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \frac{1}{x}\left[-2(1-t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^x = \frac{-2}{x}\left(\sqrt{1-x}-1\right)$$

を②に代入

$$\frac{2}{x}\left(1-\sqrt{1-x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y}}$$

①で両辺正だから2乗して

$$\frac{4}{x^2}\left(1-\sqrt{1-x}\right)^2 = \frac{1}{1-y}$$

同じく逆数をとって

$$\frac{x^2}{4\left(1-\sqrt{1-x}\right)^2} = 1-y$$

$$\therefore\ y = 1-\frac{x^2}{4\left(1-\sqrt{1-x}\right)^2} \equiv f(x) \quad \cdots ③$$

さて,

$$4f'(x) = -\frac{2x\left(1-\sqrt{1-x}\right)^2 - x^2\cdot 2\left(1-\sqrt{1-x}\right)\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)^4}$$

$$= \frac{-2x}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)^3}\left[\left(1-\sqrt{1-x}\right)-\frac{x}{2\sqrt{1-x}}\right]$$

$$= \frac{-x}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)^3\sqrt{1-x}}\left[2\sqrt{1-x}-(2-x)\right]$$

$$= \frac{1}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)^3\sqrt{1-x}}\cdot\frac{x^3}{2\sqrt{1-x}+(2-x)} > 0 \quad (\because 0<x<1)$$

から, y は x の増加関数であり, 又, ③の表式から

$$y \to \frac{3}{4}\ (x\to 1)$$

である.

/20