

東工大理系後期 2006 年度

July 1, 2025

1 問題 1

a, b を正の数とする. xy 座標平面において, 楕円 $ax^2 + by^2 = 1$ の第 4 象限 ($x \geq 0, y \leq 0$) に含まれる部分を C , 傾き $t \geq 0$ の半直線 $y = tx$ ($x \geq 0$) を l_t とする. l_t 上の点 P と C 上の点 P' を結ぶ線分 PP' が y 軸に平行になるように動くとき, 線分 PP' の長さを最大にする P を P_t で表し, $t \geq 0$ が変化するとき P_t が描く曲線を C' とする. また, 楕円 $ax^2 + by^2 = 1$ と C' との交点を $Q(\alpha, \beta)$ とする.

1. 曲線 C' の方程式 $y = f(x)$ を求めよ.
2. α と β を求めよ.
3. 直線 $y = \beta$, 曲線 C' および y 軸が囲む領域を D とする. D を y 軸の回りに 1 回回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

2 問題 2

自然数 a, b, c が

$$3a = b^3, \quad 5a = c^2$$

を満たし, d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限るとする.

1. a は 3 と 5 で割り切れることを示せ.
2. a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ.
3. a を求めよ.