$0<x<\frac{\pi}{2}$ に対して関数 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$, $g(x)=\dfrac{x}{\tan x}+\dfrac{\tan x}{x}$ を考える.

1. $f'(x), f''(x)$ の正負を判定し, $y=f(x)$ のグラフをかけ.
2. $g'(x), g''(x)$ の正負を判定し, $y=g(x)$ のグラフをかけ.
3. 正定数 a に対して, 2 曲線 $y=\log\frac{a}{f(x)}$ と $y=g(x)$ のグラフが交わるための条件を求めよ.

[解]

(1) $f(x)$ の一階微分は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\tan x - x/\cos^2 x}{\tan^2 x} \\ &= \frac{\sin x\cos x - x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

である．$0<x<\pi/2$ では $\sin x<x$, $0<\cos x<1$ より

$$f'(x)<0 \tag{1}$$

が成立する．$\cdots$(答)

次に $f(x)$ の二階微分は

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{x}{\sin^2 x}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\sin^2 x-2x\sin x\cos x}{\sin^4 x}\right) \\ &= \frac{2\cos x(x-\tan x)}{\sin^3 x} \end{aligned}$$

である．$0<x<\pi/2$ では $x<\tan x$ より

$$f''(x)<0 \tag{2}$$

となる．$\cdots$(答)

eqs. (1) and (2) より，$0<x<\pi/2$ で $f(x)$ は上に凸で単調減少する．また，極限値は

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x\to 0} 1 \\ f(x) \xrightarrow{x\to\pi/2} 0 \end{cases}$$

だから，グラフの概形は fig. 1 である．

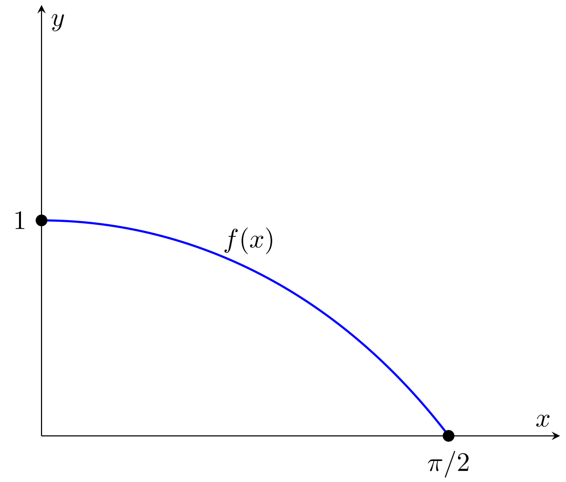

図 1: $f(x)$ の概形.

(2) $g(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$ だから $g(x)$ の一階微分は

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)-\frac{f'(x)}{f^2(x)} \\ &= f'(x)\left(1-\frac{1}{f^2(x)}\right) \end{aligned}$$

である．eq. (1) および $0<f(x)<1$ より，

$$g'(x)>0 \tag{3}$$

である．$\cdots$(答)

次に $g(x)$ の二階微分は

$$g''(x)=f''(x)\left(1-\frac{1}{f(x)^2}\right)+2\frac{f'(x)^2}{f(x)^3}$$

であり，eqs. (1) and (2) および $0<f(x)<1$ から

$$g''(x)>0 \tag{4}$$

である．$\cdots$(答)

また，極限値は

$$\begin{cases} g(x) \xrightarrow{x\to 0} 2 \\ g(x) \xrightarrow{x\to\pi/2} \infty \end{cases}$$

であるから，グラフの概形は fig. 2 である．

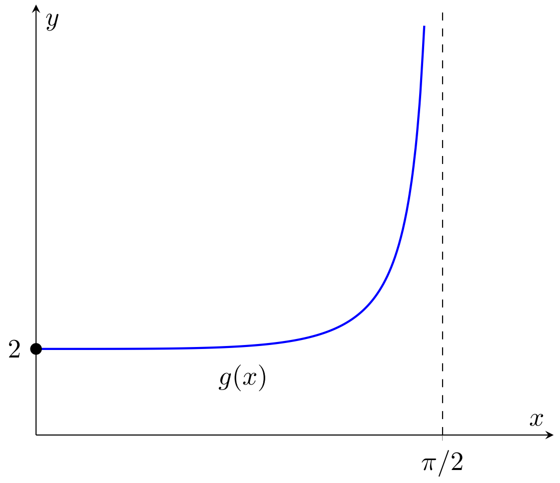

図 2: $g(x)$ の概形.

(3) 新しく

$$h(x)=\log\frac{a}{f(x)}-g(x)$$

とおく．$0<x<\pi/2$ で $h(x)=0$ が実解を持つ条件をもとめれば良い．以下 $A=\log a$ とする．$h(x)$ の一階微分は eq. (3) より

$$\begin{aligned}h'(x)&=-\frac{f'(x)}{f(x)}-g'(x)\\&=-\frac{f'(x)}{f(x)}-f'(x)\left(1-\frac{1}{f(x)^2}\right)\quad(\because(3))\\&=\frac{f'(x)}{f(x)^2}(f(x)^2+f(x)-1)\end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned}&f(x)^2+f(x)-1=0\\\iff\ &f(x)=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

だが，$0<f(x)<1$ よりあり得るのは符号が負の場合で

$$f(x)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

である．(1) より $f(x)$ は単調減少だから，これを満たす x がただ一つあるから，それを $x=\alpha$ とおくと，$h(x)$ の増減表は table 1 となる．

表 1: $h(x)$ の増減表

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$(\pi/2)$
h'		$+$	0	$-$	
h	$(A-2)$	$\nearrow$		$\searrow$	$(-\infty)$

ここで，

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\g(\alpha)&=f(\alpha)+\frac{1}{f(\alpha)}\\&=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\\&=\sqrt{5}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}h(\alpha)&=A-\log f(\alpha)-g(\alpha)\\&=A-\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-\sqrt{5}\\&=A-\log\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{\sqrt{5}}\right]\end{aligned}$$

である．したがって，増減表とあわせて $h(x)=0$ が実数解を持つ条件は $h(\alpha)\geq 0$ であり，求める a の条件は

$$\begin{aligned}&h(\alpha)\geq 0\\\iff\ &A\geq\log\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{\sqrt{5}}\right]\\\iff\ &a\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

となる．ただし $\log x$ が単調増加であることを利用した．$\cdots$(答)

[解説]