京大理科数学 1990

110/120分

			計	思	総	
1	多変数		B	A	B	20
2	整数		A	B	B	20
3	行列					/
4	多変数	☆	B	B	B	20
5	確立	☆	B	C	C	20
6	多変数		A	B	B	20

第 1 問

[解] Pのx座標tとおくと

$$\begin{cases} t^3-t=t^2-a & \cdots ① \\ 3t^2-1=2t & \cdots ② \end{cases}$$

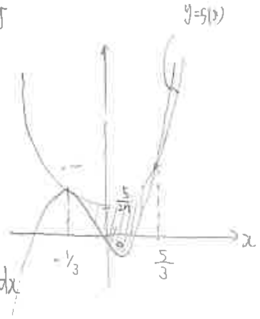
②から $t=-\frac{1}{3}, 1$ だから、①に代入して

$$(t,a)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{27}\right),\ (1,1)$$

である。以下、$f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2-a$ とおく。

1° $(t,a)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{27}\right)$ の時

グラフは右図で



求める面積は

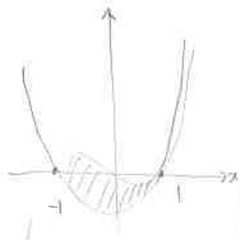
$$S=\int_{-1/3}^{5/3}(g(x)-f(x))\,dx$$

$$=\int_{-1/3}^{5/3}-(x+1/3)^2(x-5/3)\,dx$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\right)^4=\frac{4}{3}$$

2° $(t,a)=(1,1)$ の時

グラフは右図で



$$S=\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(t-1)^2(t+1)\,dx$$

$$=\frac{4}{3}$$

以上からいずれの場合も

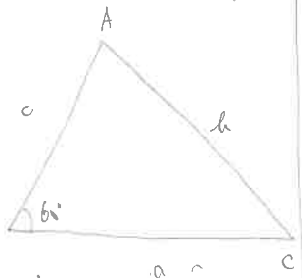
$$S=\frac{4}{3}$$

/20

第2問

[解] △ABCに余弦定理を用いて

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac$$



∴ $(b+a+c)(b-a+c) = ac$

a, c は素数で $a \le c$ から

$(b+a-c,\ b-a+c) = \underline{(a, c)}$ ①　$\underline{(1, ac)}$ ②　($b \in \mathbb{Z}$, $a, c \in$ 素数, $a \le c$ より)

である …☆

①の時　$a = b = c$ となり △ABCは正三角形

②の時　$b = 1 - a + c = ac + a - c$ だから b を消して

$$(a-2)(c+2) + 3 = 0$$

だが、$a, c \in$ 素数 から $a, c \ge 2$ なので

(正数) = 0

となり不適

以上から△ABCは正三角形である

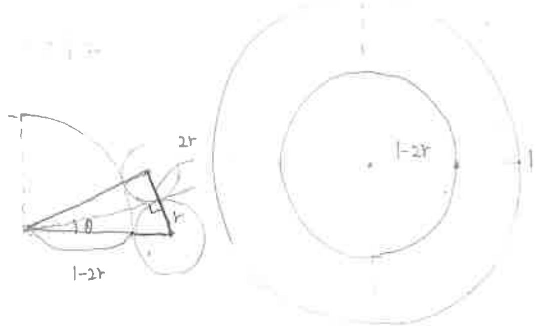
/20

第 3 問

/20

第 4 問

[解] まず半径 r について $0<r<\frac{1}{2}$ が必要である …①



(1) 上図のように半径 r の円を順に $C_1, C_2, \cdots$ とし、その中心 $O_1, O_2, \cdots$ とする。又、図のように θ をおくと

$$\sin\theta=\frac{r}{1-r} \quad \cdots ②$$

である。又、円が n 個あることから θ について

$$2n\theta\le 2\pi$$

$$\therefore\ \theta\le\frac{\pi}{n} \quad \cdots ③$$

$n\ge 2$ から $\frac{\pi}{n}\le\frac{\pi}{2}$ であり $0\le\theta\le\pi/2$ で $\sin\theta$ が増加することから、②③より

$$\frac{r}{1-r}\le\sin\frac{\pi}{n}$$

r についてといて、①とあわせて

$$0<r\le\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}} \quad \cdots(答)$$

(2) $n+2$ 個の円の面積の総和 $S_n(r)$ とおくと

$$\frac{S_n(r)}{\pi}=1+(1-2r)^2+nr^2\equiv f_n(r)$$

$$f_n'(r)=2nr+8r-4$$
$$=2\{(n+4)r-2\} \quad \cdots ④$$

である

[補題] $g(x)=\frac{\sin x}{1+\sin x}$, $h(x)=\frac{2x}{\pi+4x}$ について $(0<x\le\pi/2)$
$g(x)>h(x)$

$g(x)=1-\frac{1}{1+\sin x}$, $h(x)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2(\pi+4x)}$ より

$F(x)=g(x)-h(x)$ とおくと

$$F'(x)=-\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}+\frac{\pi}{2}\frac{-4}{(4x+\pi)^2}\le 0 \quad (\because 0<x\le\pi/2)$$

より $F(x)$ は単調減少。これと $F(\pi/2)=\frac{1}{6}>0$ から $F(x)>0$ なので補題は示された。□

[補題] から下表をえる

r	0		$\frac{2}{n+4}$		$\frac{\sin\pi/n}{1+\sin\pi/n}$
S'		$-$	0	$+$	
S		↘		↗	

よってもとめる r は $r=\frac{2}{n+4}$ である …(答)

/20

第5問

[解]

(1) 1° N=5の時

$i=j=0$ での成立が必要だが

$P(X=0 \wedge Y=0) = \frac{1}{36}$

$P(X=0) = \frac{1}{6}$　　　(N=6の時の図)

$P(Y=0) = \frac{7}{36}$

から $P(X=0 \wedge Y=0) = P(X=0)P(Y=0)$ は不成立, よって X, Y は独立ではない

2° N=6の時

確率変数 X, Y に対し, まず $P(X=k)=P(Y=k)=1/6$ $(k=0 \sim 5)$ であり

$P(X=i \wedge Y=j) = 1/36$　($X=i$ に対し(確率$1/6$) $Y=j$ となる目の出方は1通り)

から, 任意の i, j に対し $P(X=i \wedge Y=j) = P(X=i)P(Y=j)$ が成立するので X と Y は独立

(2) $i=j=0$ での成立が必要である

1° N=3の時

$P(X=k)=P(Y=k)=\frac{1}{3}$ $(k=0 \sim 2)$ であり (1)と同じく,

$P(X=i \wedge Y=j) = \frac{1}{9}$ だから, X, Y は独立.

2° N=4の時.

$P(X=0)=\frac{1}{6}$, $P(Y=0) = \frac{9}{36}$, $P(X=Y=0) = \frac{1}{36}$ から

X, Y は非独立

3° $7 \leqq N$ の時

2週まわって6につくことはないので, 1回目に出た目を A, 2回目を B とすると $Y=6$ となるのは $A+B=6$ の 5通り.

$P(Y=6) = \frac{5}{36}$

又, $P(X=6) = \frac{1}{6}$, $P(X=6 \wedge Y=6) = 0$ だから

$P(X=6)P(Y=6) \neq P(X=6 \wedge Y=6)$

となり, X と Y は独立でない

以上から, X, Y が独立なのは

$N=3, 6$

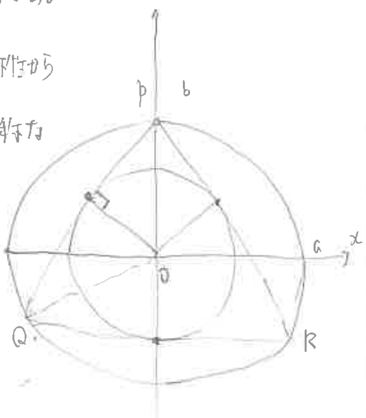
の時.

/2

第 6 問

[解] 題意から $a, b > 1$ である

図形のy軸に関する対称性から
Q,Rはy軸に関して対称な
点にある さらにこの時
$\overline{QR} \parallel x$軸となること
から、QRと $x^2+y^2=1$ の
接点は A$(0,-1)$ である。
($(0,1)$ は明らかに不適)



従って、Q,Rのy座標は-1で対称性から Q$\left(-a\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}, -1\right)$

R$\left(a\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}, -1\right)$ とおける。以下 PRが $x^2+y^2=1$ に接する条件をもとめる

(この時 PQも $x^2+y^2=1$ と接する) △OPRの面積を2通りで表す

$$\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\frac{1}{b^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2\left(1-\frac{1}{b^2}\right)+(1+b)^2}$$

両辺正から2乗して

$$a^2(b^2-1) = a^2\left(\frac{b^2-1}{b^2}\right) + (b+1)^2$$

$$a^2(b^2-1)^2\frac{1}{b^2} = (b+1)^2$$

$$a = \frac{b}{b-1} \quad (a>0,\ b>1)$$

/20