東大理科数学 1962

$\dfrac{t^3-1}{t}$ $\dfrac{(t-1)}{t}>0$

$t(t-1)>0$

$t<0,\ 1<t$

第 1 問

[解] $t=\log_a b$とおくと，与方程式は

$$x^2-2tx+\frac{1}{t}=0 \quad \cdots ①$$

となる。この2解は，$t^2-1/t>0 \iff t<0,\ 1<t \cdots ②$ のもとで，

$$x=t\pm\sqrt{t^2-1/t}$$

だから．題意から，

$$0<t-\sqrt{t^2-1/t}<1<t+\sqrt{t^2-1/t} \quad \cdots ③$$

$t<0$の時．左側の不等式が成立せず．不適だから ②から．$1<t$である。この時．

$$③ \iff t-1<\sqrt{t^2-1/t}<t \quad (\because 1-t<0)$$

$$\iff t^2-2t+1<t^2-1/t<t^2 \quad (\because 各辺正)$$

$$\iff 1<t \quad (\because 1<t)$$

となる。以上から．$1<t$であるから．

$$1<\log_a b$$

だから．

$$1<a<b \text{ or } b<a<1$$

である。

第 2 問

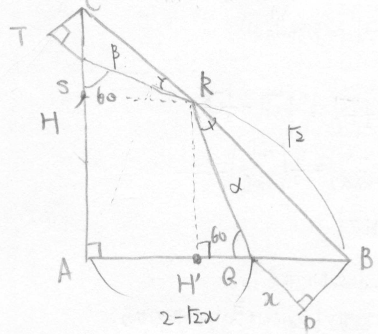
「解] PQ // BC より、$\angle BQP = \frac{\pi}{4}$ だから、

$$\cos\angle AQR = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \therefore \angle AQR = \frac{\pi}{3} \ (0<\angle AQR<\pi)$$

従って、$\angle BRQ = \angle CRS$ より $\triangle CSR \sim \triangle BQR$ なので、

$$\angle ASR = \angle AQR = \frac{\pi}{3}$$

となり、最後の条件から、$\angle CST = \frac{\pi}{4}$ となる。図は下図



$\cdots *$

RからAC, ABに下ろした垂足をH, H'とおき $\overline{RQ}=\alpha$, $\overline{SR}=\beta$ とおくと AB=2なことから、

$$\begin{cases} H'Q = \frac{1}{2}\alpha, \ RH' = H'B = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha \\ HR = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta, \ HS = \frac{1}{2}\beta \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2-\sqrt{2}x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta & \cdots ① \\ 2-\sqrt{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta & \cdots ② \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta = 2 & \cdots ③ \end{cases}$$

③より、$\alpha+\beta = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ だから ①+② に代入してもとめる関係式は

$$4-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\therefore \ x+y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{4-\frac{2}{3}(3+\sqrt{3})\right\}$$

$$\underline{x+y = \sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \ (x, y>0) \ //$$

[*以降] Aを原点とし、ABをx軸とする座標を設定すると

$$RQ: y = -\sqrt{3}(x-A) \quad (A = 2-\sqrt{2}x)$$

$$RS: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + B \quad (B = 2-\sqrt{2}y)$$

この交点 $\left(\frac{3A-\sqrt{3}B}{2}, \frac{-\sqrt{3}A+3B}{2}\right)$ が $x+y=2$ 上にあることが必要十分。

$$\frac{3A-\sqrt{3}B}{2} + \frac{-\sqrt{3}A+3B}{2} = 2$$

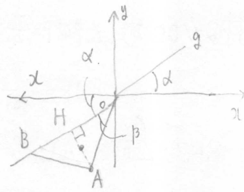
$$(3-\sqrt{3})(A+B) = 4$$

$$\therefore \ \underline{x+y = \sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \ //$$

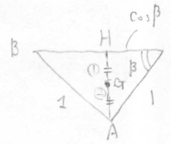
/20

第 3 問

[解] 右図のようにxy平面をとる。



|OA|=1 |AB|=1として良い。Aからgに下ろした垂足Hとする。又、Gが最低の時を考えるので: Aはgの下側にあるとして良い。



∠BOA = βとおく。|AB| = |OA|から. GはAHの中点である。

$$A(\cos(-\theta),\ \sin(-\theta))$$

$$H(\cos\beta\cdot\cos(-\alpha),\ \cos\beta\cdot\sin(-\alpha))$$

だから.

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\beta\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$$

である。このy座標Yとして　　　　$\alpha-(\theta-\alpha)$

$$Y = -\frac{1}{2}\left[\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\theta\right]$$

これがminになる時のtanθをもとめれば良い。α+β=θから.

$$Y = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right) + \sin\theta\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin(2\alpha-\theta)\right] \quad \cdots ①$$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$ より、($0<\alpha<\pi/2$ とあわせて)

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{5} \\[2ex] \cos 2\alpha = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

だから ①に代入して、以下 $S=\sin\theta$, $C=\cos\theta$ として、

$$Y = -\frac{1}{4}\left[3S + \frac{4}{5}C - \frac{3}{5}S\right]$$

$$= -\left(\frac{3}{5}S + \frac{1}{5}C\right)$$

$$\geq -\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \quad (\because コーシー・シュワルツ)$$

等号成立は $\begin{pmatrix}1/5\\ 3/5\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}C\\ S\end{pmatrix}$ の時で.この時

$$\frac{1}{5}S - \frac{3}{5}C = 0$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{S}{C} = \underline{3}$$

となる。

第 4 問

[解] $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}$ とおく。

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1-r^{2^{k-1}}} - \frac{1}{1-r^{2^k}} \right) = \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r^{2^n}} \quad \cdots ①$$

だから.

$$\begin{cases} |r| > 1 \text{ の時. } S_n \longrightarrow \dfrac{1}{1-r} \\ |r| < 1 \text{ の時 } S_n \longrightarrow \dfrac{1}{1-r} - 1 = \dfrac{r}{1-r} \end{cases}$$

となる。

第 5 問

[解] (1) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2(yz+zx+xy)=18 \end{cases}$

である。$V=xyz$ とおくと、x, y, z は t の3次式

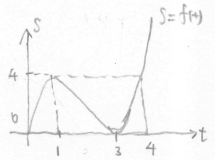
$$t^3-6t^2+9t-V=0 \quad \cdots ①$$

の3実解である。$f(t)=t^3-6t^2+9t$ とすると

$$f'(t)=3t^2-12t+9$$
$$=3(t-1)(t-3)$$

から、下表をうる。

t		1		3	
f'	+	0	−	0	+
f	↗	4	↘	0	↗



したがって、$s=f(t)$ のグラフは右上図で、①の解は $s=f(t)$ と $s=V$ の共有点の t 座標だから、x の値域は ($x>0$ とあわせて)

$$0<x\leq 4 \quad (x\neq 3)$$ //

(2) (1)のグラフから、$\max V=4$ //

第　6　問

［解］(1) $\left(6\sin\frac{x}{6}\right)' = \cos\frac{x}{6}$ だから．P, Qにおける接線 l_P, l_Q は

$$\begin{cases} l_P : y = \frac{1}{2}(x-2\pi)+3\sqrt{3} \equiv f(x) \\ l_Q : y = -(x-6\pi) \equiv g(x) \end{cases}$$

だから．Rはこれらの交点で，$R\left(\frac{14}{3}\pi-2\sqrt{3},\ \frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)$ //

(2) グラフの概形は右図だから．もとめる面積S，$\alpha=\frac{14}{3}\pi-2\sqrt{3}$ として

$$S=\int_{2\pi}^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{6\pi} g(x)\,dx-\int_{2\pi}^{6\pi} 6\sin\frac{x}{6}\,dx$$

$$=\frac{8}{3}\pi^2+8\sqrt{3}\pi-63$$ //