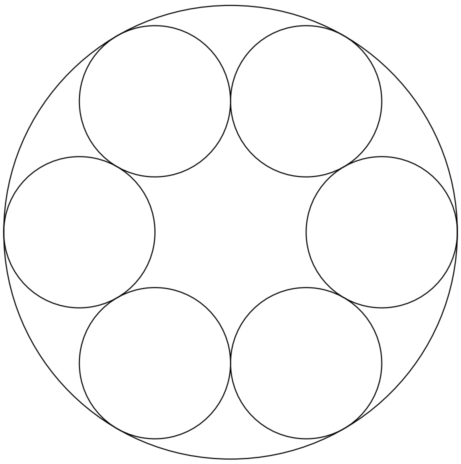
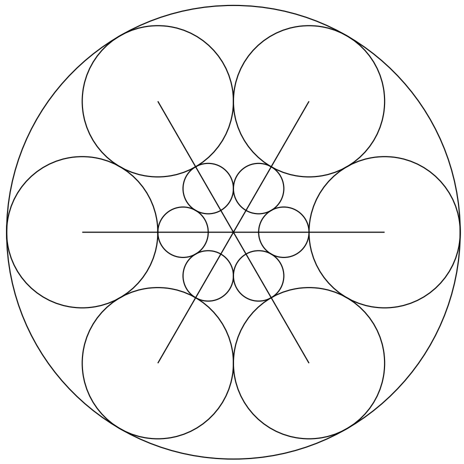
1. 半径 1 の円に内接する 6 個の半径の等しい円を図 1 のように描き，さらに図 2 のように 6 個の小さな半径の等しい円を描く，この操作を無限にくり返したとき，6 個ずつ次々に描かれる円の面積の総和 S_2 と，それらの円の円周の長さの総和 C_2 を求めよ．
2. (1) で 6 個の円を次々に描いていった．一般に，自然数 $n \geq 2$ に対して $3n$ 個の円を用いて同様の操作を行うとき，描かれる円の面積の総和 S_n と，それらの円の円周の長さの総和 C_n を求めよ．
3. 数列 $S_2, S_3, S_4, \cdots$ の極限値を求めよ．



(a) 図 1



(b) 図 2

[解] はじめから (2) のような一般的な状況を考える．すなわち，自然数 $n \geq 2$ に対して $3n$ 個の円を用いて操作を行っていく．そこで最初に (2) から考えよう．k 回目の操作で描かれる円の半径を $r_n(k)$ とおく．

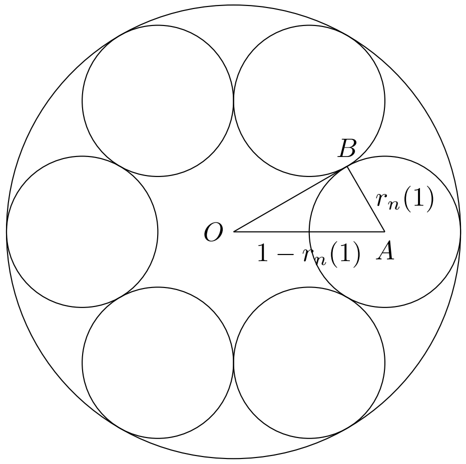


図 2: $k = 1$ の様子

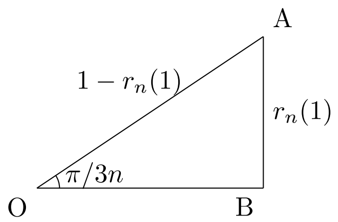


図 3: $k = 1$ のときの半径の導出

まず初期条件 $k = 1$ を考える．ひとつの円の中心を A，隣接する円との接点 B とする．fig. 3 で $\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3n}$ だから

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{3n} &= \frac{AB}{OA} \\ &= \frac{r_n(1)}{1 - r_n(1)} \\ \therefore r_n(1) &= \frac{\sin\frac{\pi}{3n}}{1 + \sin\frac{\pi}{3n}} \qquad (1) \end{aligned}$$

と求まる．

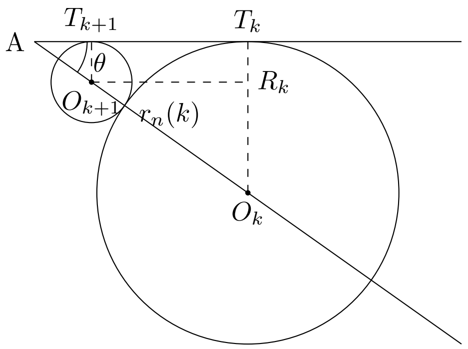


図 4: $r_n(k+1)$ と $r_n(k)$ の関係

円の半径の一般項 $r_n(k)$ と $r_n(k+1)$ を考える．fig. 4 で k 回目の円の中心 O_k とおく．半径 1 の最初の円の中心 A とし，A から各円に接する直線を AC とする．O_k から AC におろした垂線の足を T_k とおく．O_k から O_kT_k におろした垂線の足を R_k とおく．

線分 O_kT_k の長さは半径 $r_n(k)$ に等しい．別の表現で O_kT_k を計算すると

$$\begin{aligned} O_kT_k &= O_kR_k + R_kT_k \\ &= O_kO_{k+1}\sin\frac{\pi}{3n} + r_n(k+1) \\ &= (r_n(k) + r_n(k+1))\sin\frac{\pi}{3n} + r_n(k+1) \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} r_n(k) &= (r_n(k) + r_n(k+1))\sin\frac{\pi}{3n} + r_n(k+1) \\ r_n(k+1) &= \frac{1-a_n}{1+a_n}r_n(k) \end{aligned}$$

なる漸化式を得る．eqs. (1) and (2) から等比数列の公式より，一般項は

$$r_n(k) = \left(\frac{1-a_n}{1+a_n}\right)^{k-1} r_n(1) \tag{2}$$

$$= \left(\frac{1-a_n}{1+a_n}\right)^{k-1} \frac{a_n}{1+a_n} \tag{3}$$

となる．$A = \left(\frac{1-a_n}{1+a_n}\right)$ として $|A| < 1$ だから，円の面積の総和は

$$S_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{p=1}^{k} r_n^2(p)\cdot\pi\cdot 3n \tag{4}$$

$$= \pi\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)^2 \frac{1}{1-A^2}\cdot 3n \tag{5}$$

$$= \frac{3\pi}{4}na_n \tag{6}$$

である．円周の総和は

$$C_n = \lim_{p=1}^{k}\sum_{p=1}^{k} 2\pi r_n(p)\cdot 3n \tag{7}$$

$$= 6n\pi\frac{a_n}{1+a_n}\frac{1}{1-A} \tag{8}$$

$$= 3n\pi \tag{9}$$

と求まる．

(1) eqs. (6) and (9) に $n=2$ を代入して

$$S_2 = \frac{3}{4}\pi \qquad\qquad C_2 = 6\pi$$

である．$\cdots$(答)

(2) eqs. (6) and (9) が答えである．

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3\pi}{4}n\sin\frac{\pi}{3n} \\ C_n &= 3n\pi \end{aligned}$$

$\cdots$(答)

(3) eq. (6) の $n\to\infty$ の極限をとって

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{4}\frac{3n}{\pi}\sin\frac{\pi}{3n} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

である．ただし，$n\to\infty$ で $3n/\pi\to 0$ であることを用いた．$\cdots$(答)

[解説]

平面図形の問題．1995 年の 1 番とほぼ同様の円を敷き詰めていく問題である．特に漸化式の導出はほぼ全く同じなため，過去問演習をやっていた人にとってはボーナス問題だった可能性が高い．問題としても漸化式が立てば極限値の計算は非常に容易なので，簡単な部類である．(1) は本来誘導の意図だろうが，漸化式が立つという見通しがあれば先に (2) に手を出して，(1) はあとから値を代入すればだいぶ時間の短縮になる．