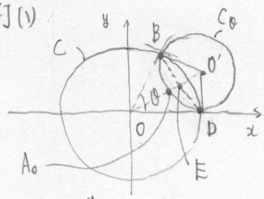
第 1 問

[解] (1)



C_θの中心O', D(1, 0) B($\cos\theta$, $\sin\theta$)とおく。
以下 $C=\cos\theta$, $S=\sin\theta$ と略記する。題意の条件から、

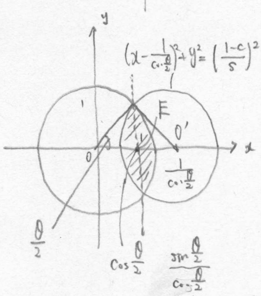
$$\angle ODO' = \angle OBO' = \angle R \quad \cdots ①$$

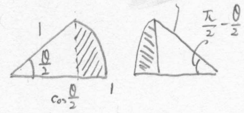
であり、O'(X, Y)とおくと、

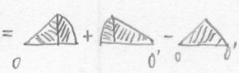
$$\begin{cases} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X-1\\Y\end{pmatrix}=0 \\ \begin{pmatrix}C\\S\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X-C\\Y-S\end{pmatrix}=0 \end{cases}$$

$$X=1,\ Y=\frac{1-C}{S} \quad (\because 0<\theta<\pi) \cdots ②$$

である。したがって、求める共通領域の面積S_θは左図斜線部（もとの図形を$\frac{\theta}{2}$だけ回転した）である。対称性から





$\frac{1}{2}S_\theta =$ 

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\,\frac{\pi-\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore S_\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{\pi-\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{2} - \tan\frac{\theta}{2} \quad /\!/$$

(2) A_θは線分OO'上にあって、

$$\overline{OA_\theta} = \overline{OO'} - \overline{O'A_\theta} = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

だから

$$\overrightarrow{OA_\theta} = \frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

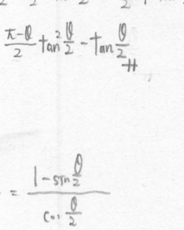
とすると、

$$X = 1-\sin\frac{\theta}{2},\quad Y = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

区間内で $\cos\frac{\theta}{2}>0$ から、$\sin\frac{\theta}{2}$ を消して

$$Y = \frac{(1-X)\cdot X}{\sqrt{1-(1-X)^2}} = \frac{(1-X)X}{\sqrt{2X-X^2}} \quad /\!/ \quad (0<X<1)$$

(3) (2)のグラフは区間内で $Y>0$ で、概形は右図



よってもとめる体積Vは

$$V = \int_0^1 \pi Y^2\,dX$$
$$= \pi\int_0^1 \frac{X^2(1-X)^2}{X(2-X)}\,dX$$
$$= \pi\int_0^1 \left\{(-X^2-1) + \frac{2}{2-X}\right\}dX$$
$$= \pi\left[-\frac{1}{3}X^3 - X - 2\log(2-X)\right]_0^1$$
$$= \pi\left(2\log 2 - \frac{4}{3}\right) \quad /\!/$$

$-SC-SC\frac{S^2}{C}$

$-SC\frac{S^3}{C}$