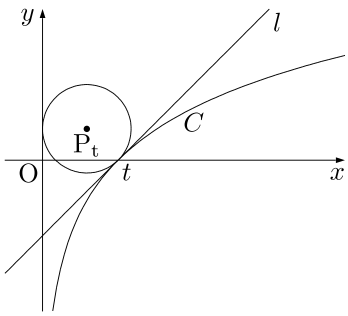
xy 平面において，直線 $x=0$ を L とし，曲線 $y=\log x$ を C とする．さらに，L 上，または C 上，または L と C に挟まれた部分にある点全体の集合を A とする．A に含まれ，直線 L に接し，かつ曲線 C と点 $(t, \log t)$ $(0<t)$ において共通の接線を持つ　円の中心を $\mathrm{P_t}$ とする．

$\mathrm{P_t}$ の x 座標，y 座標を t の関数として $x=f(t)$，$y=g(t)$ と表した時，次の極限値はどのような数となるか．

i) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}$

ii) $\displaystyle\lim_{t\to +\infty}\frac{f(t)}{g(t)}$

[解] $f(t)=f$ などと略記する．グラフの概形は下のようになる．



C の $\mathrm{Q}(t, \log t)$ での接線 l は，

$$l : y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$$

である．円が L と接することから，半径 r として

$$r = f \qquad \cdots ①$$

である．故に円の方程式は

$$(x-f)^2 + (y-g)^2 = f^2$$

さらに，円が Q を通る条件から

$$(t-f)^2 + (\log t - g)^2 = f^2 \qquad \cdots ②$$

Q での接線が l に一致することから

$$\begin{aligned}
&l \perp \mathrm{P_t Q}\\
&\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t-f \\ \log t - g \end{pmatrix} = 0\\
&t(t-f) + (\log t - g) = 0 \qquad \cdots ③
\end{aligned}$$

である．③を②に代入して g を消去して

$$\begin{aligned}
(t-f)^2 + t^2(t-f)^2 &= f^2\\
(1+t^2)(t-f)^2 &= f^2
\end{aligned}$$

ここで，円が A に含まれることから

$$t-f>0 \qquad\qquad f>0$$

だから

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+t^2}(t-f) = f\\
&\therefore\ f = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{1+\sqrt{1+t^2}} \qquad \cdots ④
\end{aligned}$$

である．③に代入して

$$g(t) = \frac{tf}{\sqrt{1+t^2}} + \log t \qquad \cdots ⑤$$

さて，$h(t) = f(t)/g(t)$ とおく．⑤の両辺 $f(>0)$ でわると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{\log t}{f}\\
&= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t\sqrt{1+t^2}}\log t \quad (\because ④)\\
&= \frac{t^2 + (1+t^2)\log t}{t\sqrt{1+t^2}}\\
\therefore\ h &= \frac{t\sqrt{1+t^2}}{t^2+(1+t^2)\log t}
\end{aligned}$$

だから，

$$h \overset{t\to+0}{\longrightarrow} 0$$

および

$$h=\frac{1}{\frac{t}{1\sqrt{1+t^2}}+\frac{\log t}{t}\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}}\stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow}1$$

である. $\cdots$(答)