京大理科数学 1965

70/150分.

		計	思	総
1	多変数	A	A	C
2	多変数	A	A	A
3	多変数	A	A	A
4	多変数-図形 ☆	C	C	C
5	関数	A	A	A
6	関数	A	A	A

第 2 問

[解] $k>0$ …① 根の1つをαとすると、kについての恒等式

$$(a-\alpha)k^2+(\alpha^2-4\alpha+4)k+b-4\alpha=0$$

が成りたつから

$$a=\alpha,\ (\alpha-2)^2=0,\ b=4\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l}\alpha=2,\\ a=2\\ b=8\end{array}\right.$$

である 代入して与方程式は.

$$kx^2-(k+2)^2x+(2k^2+4k+8)=0$$

$$(x-2)(kx-(k^2+2k+4))=0$$

だから もう1方の解は $x=\dfrac{k^2+2k+4}{k}=k+\dfrac{4}{k}+2\geqq 8$

$(\because k>0$からAM-GM. 等号成立は $k=\frac{4}{k}$ $\therefore k=2)$

だから. $k=2$の時 min 8をとる

第 3 問

[解] $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha, \beta \leq \pi/2 \cdots ① \\ \sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)=\sqrt{3}\sin x \cdots ② \end{cases}$

②がxについての恒等式なので、$x=0, \pi/2$での成立が必要で

$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta=0 \cdots ③ \\ \cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{3} \cdots ④ \end{cases}$

①.③から $\beta=-\alpha$ …⑤である. ④に代入して

$2\cos\alpha=\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha=\pm\frac{\pi}{6}$ (∵①)

だから.

$(\alpha, \beta)=\left(\pm\frac{\pi}{6}, \mp\frac{\pi}{6}\right)$ (複号同順)

が必要. 逆にこの時.

(与式左辺) $=2\sin x\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\sin x=$ (右辺)

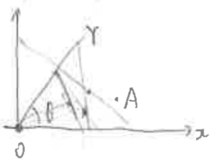
となって十分. よって

$(\alpha, \beta)=\left(\pm\frac{\pi}{6}, \mp\frac{\pi}{6}\right)$ (複号同順) //

/20

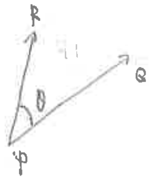
第4問

[解] OXをx軸, Oを原点とする右のような座標を考え. OYの方向ベクトルを $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ とおく $(0<\theta<\pi)$. 又, 点 $A(\alpha,\beta)$ とおく



題意から $P_1(t_1,0)\ Q_1(t_1\cos\theta,\ t_1\sin\theta)$ $P_2(t_2,0)\ Q_2(t_2\cos\theta,\ t_2\sin\theta)$ $(0<t_1<t_2)$ とおける. $P_1Q_1\perp OA$ 又は $P_2Q_2\perp OA$ の時, $OP_1=OQ_1$, $OP_2=OQ_2$ から, Aは∠XOYの2等分線上にあるから以下 $\angle OAP_1\neq\pi/2$ $\angle OAP_2\neq\pi/2$ とする. …※

$$\begin{cases}\tan\angle OAP_1=\tan\angle OAQ_1\\ \tan\angle OAP_2=\tan\angle OAQ_2\end{cases}$$



ここで, 右図の3点P, Q, Rに対し

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\overline{PQ}\cdot\overline{PR}\sin\theta}{\overline{PQ}\cdot\overline{PR}\cos\theta}$$

$$=\frac{2(\triangle PQR\text{の面積})}{\vec{PQ}\cdot\vec{PR}}$$

だから t_1, t_2 は t の方程式,

$$\frac{|\beta(t-\alpha)+\alpha\beta|}{-\alpha(t-\alpha)+\beta^2}=\frac{|\beta(tc-\alpha)-\alpha(ts-\beta)|}{-\alpha(tc-\alpha)-\beta(ts-\beta)}\quad\cdots①$$

の2異正実解 (ただし, $c=\cos\theta$, $S=\sin\theta$) ここで, $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\cos p\\ \sin p\end{pmatrix}$ $(0<r,\ 0<p<\theta)$ とおいて①に代入すると

$$\frac{|r\sin p\cdot t|}{-r\cos p\cdot t+r^2}=\frac{|r(\sin p\cdot c-\cos p\cdot s)t|}{-r(\cos p\cdot c+\sin p\cdot s)t+r^2}$$

$r>0, \sin p>0, t>0$ より $\sin(\theta-p)>0$ から

$$\frac{\sin p}{-\cos p\cdot t+r}=\frac{\sin(\theta-p)}{-\cos(\theta-p)\cdot t+r}$$

$$(-\sin p\cos(\theta-p)+\sin(\theta-p)\cos p)t+r(\sin p-\sin(\theta-p))=0$$

$$\sin(\theta-2p)t+r(\sin p-\sin(\theta-p))=0\quad\cdots②$$

②が2異正実解を持つ条件は, ②の左辺がtの高々1次式であることと $r>0$ より $\underbrace{\sin(\theta-2p)=0}_{③}$ ∧ $\underbrace{\sin p=\sin(\theta-p)}_{④}$

$0<\theta<\pi$, $0<p<\theta$ から③より

$$\theta-2p=0\qquad\therefore\ \theta=2p$$

が必要. この時④もみたされ, 十分 だから, 題意のようになる条件は

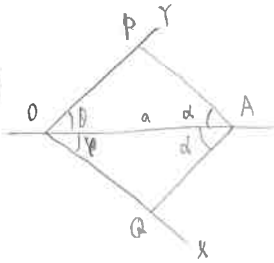
$p=\frac{\theta}{2}$, つまり Aが∠XOYの2等分線上にある時.

※とあわせて題意は示された. □

[別解]

各図形量を右図のようにおく. この時 OP=OQ となるαが少なくとも2つある条件をしらべる

$(0<\theta,\alpha,\varphi<\pi,\ 0<\theta+\varphi<\pi,\ a>0)$



正弦定理から

$$OP=\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi-\theta-\alpha)}a$$

$$OQ=\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi-\varphi-\alpha)}a$$

だから①から; $\overline{OP}=\overline{OQ}$ の時. $\sin(\pi-\theta-\alpha)=\sin(\pi-\varphi-\alpha)$ なので

$$\sin(\theta-\alpha)+\sin(-\varphi+\alpha)=0$$

$$\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}-\alpha\right)=0$$

$0<\frac{\theta+\varphi}{2}<\pi/2$, $0<\alpha<\pi$ から

$$\theta=\varphi\quad\text{or}\quad\frac{\theta+\varphi}{2}=\alpha$$

$\theta=\varphi$ の時OK, $\frac{\theta+\varphi}{2}=\alpha$ の時 これをみたすαは2つはないからアウト.

/20

第5問

[解] $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ とおく.

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} g(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to a-0} g(x)$ が一致する時, $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)$ を $f(x)$ の

$x=a$ における微分係数という.

(ア) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $g(x)=\dfrac{\frac{1}{x^3}-1}{x-1}$ の時.

$$g(x)=\frac{1-x^3}{x^3}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{-1}{x^3}(x^2+x+1)$$

より.

$$\lim_{x\to 1+0} g(x)=\lim_{x\to 1-0} g(x)=-3 \quad /\!/$$

(イ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3}}{x-1}$ の時

$$g(x)=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x^2+x-2)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}}$$

から

$$\lim_{x\to 1+0} g(x)=\lim_{x\to 1-0} g(x)=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad /\!/$$

/20

第 6 問

[解] $\int_1^x (x-t) f(x)\,dt = x^4-2x^2+1$ …①

$(左辺) = xf(x)\int_1^x dt - f(x)\int_1^x t\,dt$

$= xf(x)(x-1) - f(x)\frac{1}{2}(x^2-1)$

$= \frac{1}{2}f(x)(x-1)^2$

$(右辺) = (x+1)^2(x-1)^2$

だから、①が $1<x$ の全ての x で成立する時

$f(x) = 2(x+1)^2$

であるから、$f(t) = 2(x+1)^2$ //

[問題文の $f(x)$ が $f(t)$ のカノウ性が有り、その場合は微分をくり返せばよい]

⟹ 確認したところ、$f(t)$ だったので、以下に解答をのこしておく。

[解2]

$\int_1^x (x-t) f(t)\,dt = x^4-2x^2+1$

$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x) = 4x^3-4x$ ($x=1$ で与式が成立)

両辺 x で微分して

$f(x) = 12x^2-4$ //