京大理科数学 2005

第 1 問

[解] L: $y=2x$ $(0\leq x\leq 1)$ である。よって

$$x^2+ax+b=2x \qquad (0\leq x\leq 1)$$

が解を持てば良い。$f(x)=x^2+(a-2)x+b$ とおく。

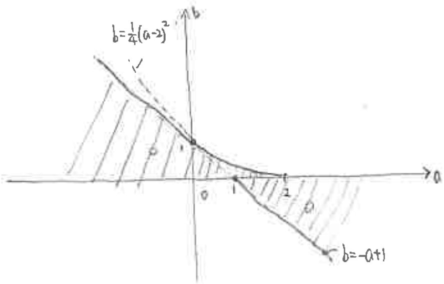
1° 区間内に1つ

$f(1)f(0)\leq 0 \Leftrightarrow b(a+b-1)\leq 0$

2° 区間内に2つ(重解含む)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{判別式}: (a-2)^2-4b\geq 0\\ \text{端点}: f(1)\geq 0,\ f(0)\geq 0\\ \text{軸}\ :\ 0\leq \frac{2-a}{2}\leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b\leq \frac{1}{4}(a-2)^2\\ b\geq 0,\ a+b-1\geq 0\\ 0\leq a\leq 2\end{array}\right.$$

以上を図示して、下図斜線部(境界含む)



第 2 問

[解] 各辺正から常用対数とって $\log_{10}x = \log x$ とかくと

$$10\log 2 < n\log\frac{5}{4} < 20\log 2$$

$$10\cdot\log 2 < n\cdot\log\frac{10}{8} < 20\log 2$$

$$10\cdot\log 2 < n(1-3\log 2) < 20\cdot\log 2$$

$\alpha = \log 2$ とおく. $1-3\alpha > 0$ から.

$$\frac{10\alpha}{1-3\alpha} < n < \frac{20\alpha}{1-3\alpha}$$

$$-\frac{10}{3} + \frac{10}{3(1-3\alpha)} < n < \frac{20}{-3}\left(-1+\frac{1}{(1-3\alpha)}\right) \quad \cdots ①$$

ここで $0.301 < \alpha < 0.3011$ から.

$$0.09967 < 1-3\alpha < 0.097$$

$$\frac{1}{0.097} < \frac{1}{1-3\alpha} < \frac{1}{0.09967}$$

$$10.30\ldots < \frac{1}{1-3\alpha} < 10.341\ldots$$

$$9.30\ldots < -1+\frac{1}{1-3\alpha} < 9.341\ldots$$

となるので

$$\begin{cases} 31.0\ldots < \frac{10}{3}\left(-1+\frac{1}{1-3\alpha}\right) < 31.13\ldots \\ 62.0\ldots < \frac{20}{3}\left(-1+\frac{1}{1-3\alpha}\right) < 62.26\ldots \end{cases}$$

だから ①をみたすnは $n = 32, \cdots 62$ の $62-32+1 = 31$ コ #

第 3 問

[解] $\beta\alpha+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\}=0$ だから. $\alpha\beta\gamma=k^3$ とおくと α,β,γ は

x の3次方程式 $x^3-k^3=0$ の3解で, $\alpha\neq\beta$ かつ $\alpha\neq0$。

$$(x-k)(x^2+kx+k^2)=0$$

$$\therefore x=k,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}k$$

だから. $\triangle ABC$ は 正三角形 (重心は原点)

第 4 問

[解] $217=7\cdot31$ である.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=7\cdot31 \quad \cdots ①$$

$a^2+ab+b^2>0$ から. $a-b>0$ で

$$(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(1,217)\ (7,31)\ (31,7)\ (217,1)$$

$$(a,b)=(9,8),\ (-8,-9),\ (6,-1)\ (1,-6)$$

//

第 5 問

[解] $k \in \mathbb{Z} \geq 1$ とする。

(1) $y = \cos x$ は区間内で単調減少で $-1 \leq \cos x \leq 1$ である。一方,

$$0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -1 + \frac{2}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{-x^2+1}{x^2+1} \leq 1$$

である. したがって. $f(x) = \cos x - \frac{1-x^2}{1+x^2}$ とすると.

$$f(2k\pi) \geq 0,\ f(2k\pi+\pi) \leq 0$$

となるから. $f(x)$ が連続であることとあわせて. $f(\alpha_k) = 0$ $(2k\pi \leq \alpha_k \leq 2\pi k + \pi)$ なる α_k がある。C_1 の接線 l_k は

$$l_k : y = -\sin\alpha_k(x - \alpha_k) + \cos\alpha_k \equiv g(x)$$

で表される. $g(\alpha_k) = 0$ から

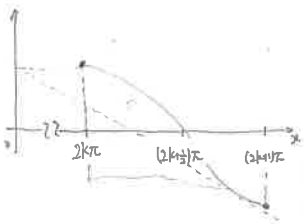
$$\cos\alpha_k = \frac{1-\alpha_k^2}{\alpha_k^2+1},\quad \sin\alpha_k = \sqrt{1 - \frac{(1-\alpha_k^2)^2}{(\alpha_k^2+1)^2}} = \frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2+1}\ (>0)$$

であり,

$$g(0) = -\frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2+1}(-\alpha_k) + \frac{1-\alpha_k^2}{\alpha_k^2+1} = \frac{\alpha_k^2+1}{\alpha_k^2+1} = 1$$

から. l_k は $(0, 1)$ を通る ■

(2) $h(x) = g(x) - \frac{1-x^2}{1+x^2}$ とおく.



$$h(x) = -\frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2+1}x + 1 - \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$= -\frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2+1}x + 2 - \frac{2}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{\alpha_k^2+1}\frac{-x}{x^2+1}(x-\alpha_k)(\alpha_k x - 1)$$

$2\pi k \leq \alpha_k, x \leq (2\pi+1)k$ から.

$$\begin{cases} x < \alpha_k \text{ の時} & h(x) > 0 \\ x = \alpha_k \quad 〃 & h(x) = 0 \\ \alpha_k < x \quad 〃 & h(x) < 0 \end{cases}$$

となり たしかに $2\pi k \leq x \leq (2\pi+1)k$ では $h(x) = 0$ はただ1つ解を持つ。つまり. C_1 と C_2 の共有点はただ1つである. ■

[解2] (2) $x = t$ における C_1 の接線は $y = -\sin t(x-t) + \cos t$ である。

これと y 軸の交点 $Y(t) = t\sin t + \cos t$, $Y'(t) = t\cos t$ から. 下表を得る.

t	$2\pi k$		$(2\pi+\frac{1}{2})k$		$(2\pi+1)k$
Y'		$+$	0	$-$	
Y	1	$\nearrow$		$\searrow$	-1

$\alpha_k \neq 2\pi k$ であることと, $2\pi k < x \leq (2\pi+1)k$ で $Y(t) = 1$ なる t が唯1つあること,

及び (1) から. 題意は示された ■

第 6 問

[解] 左からk番目までぬる時，k番目が赤である場合の数をa_k，青又は黄色である場合の数をb_kとする。題意から

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k + b_k \\ b_{k+1} = 2a_k \end{cases} \quad \cdots *$$

であり，又 $a_1 = 1$，$b_1 = 2$となる．$*$からb_kを消して．

$$a_{k+2} = a_{k+1} + 2a_k, \quad a_1 = 1,\ a_2 = 3$$

だから，といて．

$$a_k = \frac{1}{3}\left\{2^{k+1} + (-1)^k\right\}$$

$$b_k = \frac{2}{3}\left\{2^k + (-1)^{k-1}\right\} \quad (k \geqq 2)$$

だから$n \geqq 2$のとき，もとめるのは

$$a_n + b_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+2} + (-1)^n + 2(-1)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2^{n+2} + (-1)^{n-1}\right)$$

＃