

[解] (1) S_1, S_2, S_3 は、 $\triangle OPQ$ の xy 平面, yz 平面, zx 平面への正射影の面積である。

そこで $\triangle OPQ$ の単位法線ベクトル $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする。 xy, yz, zx 平面の単位法線ベクトル、 $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と \vec{n} のなす角を各々 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とすると、

$$\cos \theta_1 = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{n}}{|\vec{a}_1| |\vec{n}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{S}, \quad \cos \theta_2 = \frac{y}{S}, \quad \cos \theta_3 = \frac{z}{S} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。正射影の性質より、 $S_k = S \cos \theta_k$ ($k=1, 2, 3$) となる。

$$S^2 + S^2 + S^2 = S^2 (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3) = S^2 (x^2 + y^2 + z^2) \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= S^2 \quad (\because |\vec{n}|=1)$$

である。図

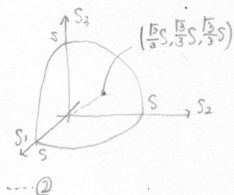
(2) $k = S_1 + S_2 + S_3$ に対し、 k の \max, \min を考える。(1) 及び $S_1, S_2, S_3 \geq 0$ から、 S_1, S_2, S_3 空間で、

(S_1, S_2, S_3) は

$$\begin{cases} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

と表す。 S_1, S_2, S_3 平面 $k = S_1 + S_2 + S_3$ が共有点を持つ条件から、

$$S \leq k \leq \sqrt{3} S$$



よって、

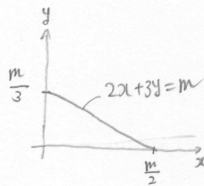
$$\min k = S, \quad \max k = \sqrt{3} S$$

である。

(1) で $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすれば $k = S$, $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすれば $k = \sqrt{3} S$ となる。

第 2 問

[解]
$$\begin{cases} 2x+3y=m & \cdots ① \\ -2m+3m=m & \cdots ② \end{cases}$$



①, ②を辺々引いて.

$$2(x+m)+3(y-m)=0$$

2と3は互いに素だから, $k \in \mathbb{Z}$ として.

$$x+m=3k, \quad y-m=-2k$$

$$(x, y) = (3k-m, -2k+m)$$

このうち, $0 \leq x \leq \frac{m}{2}$ をみたす k の数が $N(m)$ であるから.

$$N(m) = \left(\frac{m}{3} \leq k \leq \frac{m}{2} \text{ をみたす } k \in \mathbb{Z} \text{ の数} \right) \quad \cdots ③$$

である

(1) ③に注意して, m を6でわったあまりで場合分けする. $t \in \mathbb{N}$ とおす.

$$\begin{cases} m=6t \text{ のとき, } & N(m) = 3t - 2t + 1 = t + 1 \\ m=6t-1 \text{ ,, } & N(m) = (3t-1) - (2t-1) = t \\ m=6t-2 \text{ ,, } & N(m) = (3t-1) - (2t-1) = t \\ m=6t-3 \text{ ,, } & N(m) = (3t-2) - (2t-2) = t \\ m=6t-4 \text{ ,, } & N(m) = (3t-2) - (2t-2) = t \\ m=6t-5 \text{ ,, } & N(m) = (3t-3) - (2t-2) = t + 1 \end{cases}$$

より, 以下に $N(m+6) = N(m) + 1$ が成立する図

(2) $f(m) = 1 - m + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3}m \right\rfloor$ とおす. (1)と同様におす.

$$m=6t \text{ のとき, } f(m) = 1 - 6t + 3t + 4t = t + 1$$

$$m=6t-1 \text{ ,, } f(m) = 1 - (6t-1) + (3t-1) + (4t-1) = t$$

$$m=6t-2 \text{ ,, } f(m) = 1 - (6t-2) + (3t-1) + (4t-2) = t$$

$$m=6t-3 \text{ ,, } f(m) = 1 - (6t-3) + (3t-2) + (4t-2) = t$$

$$m=6t-4 \text{ ,, } f(m) = 1 - (6t-4) + (3t-2) + (4t-3) = t$$

$$m=6t-5 \text{ ,, } f(m) = 1 - (6t-5) + (3t-3) + (4t-4) = t + 1$$

よって, 以下に $f(m) = N(m)$ である図

[解] (1)