

7600017 - Introdução à Física Computacional - 2022

Prof. Guilherme Sipahi

Terceiro Projeto

17/10/2022

Entrega: 06/11/2020

Instruções

- Use o diretório **proj3_#usp** em [/public/IntroFisComp22/projeto3](#)
- Deixe no diretório apenas 4 arquivos, de nomes **exerA.f90**, **exerB.f90**, **grafB.pdf**, **exerC1.f90**, **exerC2.f90** e **grafC.pdf**
- Os códigos devem seguir rigorosamente os padrões especificados abaixo para **entrada/saída**
- Use **precisão dupla em seus resultados**
- **Se deixar de fazer algum exercício não inclua o arquivo correspondente**

Método de Euler

O objetivo deste projeto é o cálculo da velocidade de uma bicicleta em função do tempo, levando-se em conta os efeitos resistivos (hidrodinâmicos) do ar.

A) Ignoremos inicialmente o efeito resistivo do ar e a segunda lei de Newton nos dá

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \quad (1)$$

sendo m a massa do sistema **ciclista + bicicleta** e F a força que o ciclista emprega (devido à sua energia interna) para o movimento. Supomos aqui que não haja atritos nas engrenagens da bicicleta de forma que praticamente toda a força empregada pelo ciclista é transmitida ao movimento do sistema **ciclista + bicicleta**. A questão é: como se calcula F ? Podemos, ao invés de aplicar (1), tratar o problema de outra forma. Estudos fisiológicos de ciclistas corredores mostraram que a potência

P fornecida pelos ciclistas é de aproximadamente 400 W para corridas de duração da ordem de uma hora. Então temos

$$\frac{dE}{dt} = P \quad (2)$$

e

$$mv \frac{dv}{dt} = P , \quad (3)$$

o que implica em

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{mv} . \quad (4)$$

De novo, desprezamos o atrito devido às engrenagens da bicicleta e o atrito da roda com o solo. Resolvendo-se a equação (4) temos

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2Pt/m} . \quad (5)$$

Discretizando a equação (4) acima usando a relação para a derivada de dois pontos para frente, i.e.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} \quad \text{com } t_i = i \Delta t \quad \text{e } i = 0, 1, 2, \dots , \quad (6)$$

temos a relação

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{mv_i} \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) , \quad (7)$$

conhecida como **método de Euler**.

Escreva um código que calcule, usando a equação (7), a velocidade como função do tempo. Use $m = 80 \text{ kg}$ para a massa do sistema ciclista+bicicleta e $P = 400 \text{ W}$. Leia a partir do terminal, **em uma única linha**, o intervalo de tempo total T (em s), Δt (em segundos) e a velocidade inicial v_0 (pequeno, mas diferente de zero) em m/s. A saída do programa deve ser o arquivo **velA_out.dat**, com a velocidade em função do tempo para um intervalo de tempo T , no formato

t v(t)

A primeira linha do arquivo deve ser

0 v0

e o número de linhas do arquivo será $1 + \text{int}(T/\Delta t)$.

- B)** Vamos agora considerar o efeito da resistência do ar. Em geral esperamos que a força resistiva obedeça à seguinte relação

$$f_{res} \sim \gamma_1 v - \gamma_2 v^2 , \quad (8)$$

onde o primeiro termo domina para pequenas velocidades e o segundo para grandes velocidades. No presente caso, o primeiro termo, que pode ser estimado pela lei de Stokes para o escoamento hidrodinâmico de objetos simples, pode ser desprezado

frente ao segundo termo. O coeficiente γ_2 pode ser estimado levando-se em conta que no intervalo dt a massa de ar que se choca com o ciclista é dada por

$$m_{ar} \approx \rho A v dt \quad (9)$$

sendo A a área de choque e ρ a densidade do ar. Se esta massa de ar, ao chocar-se com o ciclista, adquire a mesma velocidade v da bicicleta, temos que a energia dada ao ar é

$$E_{ar} \approx m_{ar} v^2 / 2 . \quad (10)$$

Esta energia é transferida pela força resistiva

$$F_{res} v dt = W_{res} = E_{ar} \quad (11)$$

e temos que

$$F_{res} = C \rho A v^2 , \quad (12)$$

onde C é o coeficiente de arrasto (*drag coefficient*). No presente cálculo $C = 1/2$, o que representa uma boa aproximação. Se inserirmos a equação (12) em (7) teremos a equação

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{mv_i} \Delta t - \frac{C \rho A v_i^2}{m} \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) . \quad (13)$$

Generalize o programa da tarefa **A)** levando em conta o efeito da resistência do ar. Leia a partir do terminal, **todos em uma única linha**, T , Δt , v_0 e a área A , nessa mesma ordem.

Obs: use $m = 80$ kg, $P = 400$ W e $\rho = 1.2$ kg/m³. Também note que suas respostas devem ser referentes a um intervalo T , isto é, a velocidade do ciclista após um tempo T (lido), etc. Teste seu programa para tempo T igual a **3 horas**.

O seu programa deve conter **duas saídas diferentes**. A primeira, escrita diretamente para o **terminal**, deve ter o seguinte formato:

- resposta à primeira questão abaixo, com o número de linhas que for necessário.
- respostas às próximas 4 questões, uma por linha (sem linhas adicionais entre as respostas); a resposta numérica deve ser a última palavra da linha.

Cuidado: Não coloque unidades ou pontuação após a resposta!

Questões:

1. Porque o ciclista corredor normalmente se curva em corridas? Porque os ciclistas correm em grupo? Por que é mais vantajoso um corredor colar-se atrás de outro ao invés de ultrapassá-lo diretamente?
2. Qual o espaço total percorrido pelo ciclista após o tempo T ?
3. Qual a velocidade final do ciclista após o tempo T ?
4. Em que instante é alcançada a velocidade terminal?
5. Qual a velocidade média do ciclista no período de tempo T ?

A segunda saída, que você pode chamar `velB_out.dat`, deve possibilitar a confecção do gráfico abaixo, com a comparação de seus resultados para diversos valores da área A . Use $v_0 = 0.1 \text{ m/s}$ e tempo de 20 minutos. Use $\Delta t = 0.1 \text{ s}$.

Seu gráfico deve conter:

- curva da solução exata sem resistência do ar
- curvas para 3 valores diferentes da área $A = 1/2, 1, 2$.

O gráfico deve ser preparado com `gnuplot` e salvo como arquivo `pdf`, de nome `grafB.pdf`.

Sugestão: use o mesmo formato do arquivo do exercício A.

Método de Euler-Cromer

O método de Euler é simples e muito útil. Entretanto, como todo método numérico, pode não ser apropriado para todos os casos. Usando o movimento de um pêndulo, vamos avaliar as suas limitações do método de Euler e propor o uso de outro método que fazendo uma pequena modificação, possibilita a sua resolução.

- C) Consideremos o pêndulo da figura abaixo, onde uma massa m é suspensa por uma haste de comprimento l e massa desprezível. Indicamos com θ o ângulo em relação à vertical. A equação de Newton para a componente tangencial do movimento é

$$m a_\theta = m l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -m g \sin \theta$$

e consequentemente temos a equação diferencial

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta .$$

Caso as oscilações sejam pequenas, usamos $\sin \theta \approx \theta$ e obtemos a aproximação harmônica do problema

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta .$$

cuja solução é dada por

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi) , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} ,$$

sendo θ_0 e ϕ constantes que fixam o movimento.

Escreva um código que resolva numericamente o pêndulo dentro da aproximação harmônica. Uma possível discretização das equações acima é (método de Euler)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta \rightarrow \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i\Delta t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta t ,$$

onde $t = i \Delta t$. Faça sempre $-\pi \leq \theta \leq \pi$, isto é, quando θ ultrapassar π faça $\theta \rightarrow \theta - 2\pi$ ou, se θ ficar menor que $-\pi$, faça $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$. Neste programa calcule também $E(t)$, sendo E a energia total do sistema. Você notará que a solução está incorreta e que a energia total não é constante. Isto nos diz que a discretização escolhida não é adequada. Uma ligeira modificação no método de Euler consertará este problema. Para isso é suficiente considerar as equações (de Euler-Cromer)

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i\Delta t$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1}\Delta t ,$$

Escreva um programa com estas novas equações e mostre graficamente a ausência dos problemas antes apontados.

Em seus programas leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- o ângulo θ_0
- o comprimento da haste l
- a massa m
- Δt
- o tempo total T_{sim} de simulação

Use $\omega_0 = 0 \text{ rad/s}$. No código [exerC1.f90](#) use o método de Euler e no código [exerC2.f90](#) o método de Euler-Cromer. A saída, nos arquivos [exerC1_out.dat](#) e [exerC2_out.dat](#), deve ser no formato:

```
t      theta(t)
```

Além disso, você deve preparar o arquivo [grafC.pdf](#) com dois gráficos:

- o primeiro com a solução exata para $\theta(t)$, comparando-a com a solução numérica pelo método de Euler (código [exerC1.f90](#)) e com o método de Euler-Cromer (código [exerC2.f90](#));

- o segundo com a energia total (cinética mais potencial) como função do tempo, para o caso 1 (método de Euler) e para o caso 2 (método de Euler-Cromer).

Para esses gráficos use $m = 1 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$, $\Delta t = 0.04 \text{ s}$ e $\theta_0 = 10^\circ$. (Converta o ângulo para radianos em seu programa!) Acompanhe o movimento por 10 s , começando do máximo deslocamento ($\theta = \theta_0$) e com velocidade zero.