Méthode graphique : cinquième exemple

Maximiser

$$Z = 40x_1 + 60x_2$$

Sous contraintes

$$2x_1 + x_2 \leqslant 70$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 40$$
$$x_1 + 3x_2 \leqslant 90$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Algorithme du Simplexe (G.Dantzig 1947)

Programme Linéaire sous Forme Standard

Un programme linéaire sous forme standard s'exprime de cette manière :

Objectif :

Max $\sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$

Sous Contraintes

contraintes : $\sum_{j=1}^{n} a_{\mathrm{ij}} \, x_j \leq b_i$ avec $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$

et $x_j \geqslant 0$

Algorithme du Simplexe, intuition

Problème

Max $Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ sous contraintes :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

Première étape : Introduisons des variables d'écart

Le PL est équivalent à :

Max $Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ sous contraintes :

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0$$

Algorithme du Simplexe, intuition

Le PL est équivalent à :

Max $Z = 5 x_1 + 4 x_2 + 3 x_3$ sous contraintes :

$$x_4 = 5 - 2 x_1 - 3 x_2 - x_3$$

$$x_5 = 11 - 4 x_1 - x_2 - 2 x_3$$

$$x_6 = 8 - 3 x_1 - 4 x_2 - 2 x_3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Deuxième étape : Trouver une solution initiale

Une première solution initiale est :

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ et } x_4 = 5,\ x_5 = 11,\ x_6 = 8$$

Ainsi, $Z = 0$

Peut-on améliorer cette solution initiale ?

Algorithme du Simplexe, intuition

Le PL est équivalent à :

Max $Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ sous contraintes :

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$
$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$
$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Troisième étape : Choisir une variable à augmenter

L'augmentation de cette variable doit augmenter Z (on cherche à maximiser Z).

Choisissons x_1.

Quatrième étape : De combien pouvons-nous augmenter x_1 ?

Si $x_2 = x_3 = 0$ alors comme $x_4 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{5}{2} = 2.5$

comme $x_5 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{11}{4} = 2.75$

comme $x_6 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{8}{3} \simeq 2.66667$

Choisissons ainsi $x_1 = \frac{5}{2}$, la nouvelle solution est donc : $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ et $x_5 = 1,\ x_6 = \frac{1}{2},\ x_1 = \frac{5}{2}$

et Z = $\frac{25}{2}$

Algorithme du Simplexe, intuition

Cinquième étape : Réécrivons le système en intervertissant x_4 et x_1 :

Le PL est équivalent à :

Max $Z = \frac{25}{2} - \frac{7}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 - \frac{5}{2} x_4$ sous contraintes :

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_4$$

$$x_5 = 1 + 5 x_2 + 2 x_4$$

$$x_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 + \frac{3}{2} x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Troisième étape (bis) : Choisir une variable à augmenter

L'augmentation de cette variable doit augmenter Z (on cherche à maximiser Z).

Choisissons x_3 (le seul choix possible !).

Quatrième étape (bis) : De combien pouvons-nous augmenter x_3 ?

Si $x_2 = x_4 = 0$ alors comme $x_1 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 5$

comme $x_6 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 1$

Choisissons ainsi $x_3 = 1$, la nouvelle solution est donc : $x_2 = x_6 = x_4 = 0$ et $x_5 = 1$, $x_3 = 1$, $x_1 = 2$

et Z = 13

Algorithme du Simplexe, intuition

Cinquième étape (bis) : Réécrivons le système en intervertissant x_6 et x_3:

Le PL est équivalent à :

Max $Z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6$ sous contraintes :

$$x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6$$

$$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$$

$$x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Terminaison

Tous les coefficients des variables dans l'expression de Z sont négatifs $\Longrightarrow$ La solution est optimale !

Retour au problème d'origine

Ainsi, ZMax = 13 avec $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

Algorithme du Simplexe : Définitions

Dictionnaire

En admettant un PL :

Max $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$

contraintes : $\quad \sum_{j=1}^{n} a_{\text{ij}}\, x_j \leq b_i$ avec $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$

et $x_j \geqslant 0$

Après introduction des variables d'écarts $x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m}$:

$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{\text{ij}}\, x_j$ avec $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$

$x_j = 0$ avec $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n + m$

Chaque itération de l'algorithme du simplexe produit un système d'équations linéaires, appelé **dictionnaire**; les équations expriment m variables et la variable Z en fonction des n autres variables.

Un dictionnaire est **réalisable** si en posant à 0 les variables de droites, on obtient une solution réalisable.

Les variables **à gauche** d'un dictionnaire sont les **variables en base.**

Les variables **à droite** d'un dictionnaire sont les **variables hors-base**.

A chaque itération, une variable entre dans la base et une variable sort de la base.

Le choix de la variable à entrer est dicté par l'amélioration de l'objectif Z.

Le choix de la variable à sortir est dicté par le désir de conserver toutes les variables non négatives

On appelle **pivotage** le processus permettant de passer d'un dictionnaire à un autre.

Simplexe : deuxième exemple

Soit le PL suivant :

Max $Z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$ sous contraintes :

$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3$

$-x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Trouvez la solution maximisant Z.

Solution

$$\left\{\frac{37}{3}, \left\{x_1 \to \frac{5}{3}, x_2 \to 0, x_3 \to \frac{4}{3}\right\}\right\}$$

Algorithme du simplexe

1- Initialisation : former le dictionnaire

S’assurer que le dictionnaire est réalisable (un dictionnaire est dit réalisable si la mise à zéro de toutes les variables hors base est possible sans violer les contraintes).

2- Itération : Chercher à effectuer un pivotage

Si tous les coefficients des variables de la fonction objectif sont négatifs, l’optimum est atteint, STOP.

Sinon, choix de la variable d’entrée, choix de la variable de sortie et pivotage.

Méthode des tableaux

Plutôt que d'utiliser la méthode systématique avec les dictionnaires, il est aussi possible d'utiliser une autre méthode, dite des tableaux.

Cela permet de calculer plus rapidement les itérations entre les différents dictionnaires.

PL précédent :

Max $Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ sous contraintes :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Tableau initial :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur
x_4	2	3	1	1	0	0	0	5
x_5	4	1	2	0	1	0	0	11
x_6	3	4	2	0	0	1	0	8
Z	−5	−4	−3	0	0	0	1	0

Méthode des tableaux

Choix de la variable d'entrée : coeficient sur la ligne de Z le plus négatif, ici x_1.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	valeur
x4	2	3	1	1	0	0	0	5
x5	4	1	2	0	1	0	0	11
x6	3	4	2	0	0	1	0	8
Z	-5	-4	-3	0	0	0	1	0

Choix de la variable de sortie : ratio de la colonne valeur sur la colonne d'entrée positive le plus faible et positif, ici x_4.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	valeur	
x4	2	3	1	1	0	0	0	5	$\frac{5}{2}$
x5	4	1	2	0	1	0	0	11	$\frac{11}{4}$
x6	3	4	2	0	0	1	0	8	$\frac{8}{3}$
Z	-5	-4	-3	0	0	0	1	0	

Méthode des tableaux

Pivotons les deux variables :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_4	2	3	1	1	0	0	0	5	$\times \frac{1}{2}$
x_5	4	1	2	0	1	0	0	11	
x_6	3	4	2	0	0	1	0	8	
Z	−5	−4	−3	0	0	0	1	0	

La colonne de la variable d’entrée doit être égale à 0 pour toutes les lignes sauf pour celle de la variable de sortie :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	
x_5	4	1	2	0	1	0	0	11	$-4\,Lx_1$
x_6	3	4	2	0	0	1	0	8	$-3\,Lx_1$
Z	−5	−4	−3	0	0	0	1	0	$+5\,Lx_1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	
x_5	0	−5	0	−2	1	0	0	1	
x_6	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	
Z	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$\frac{25}{2}$	

Procédons maintenant à l’itération suivante :

Méthode des tableaux

Il existe encore un coéficient sur la ligne Z négatif, ainsi nous pouvons encore trouver une meilleure valeur de Z :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	
x_5	0	−5	0	−2	1	0	0	1	
x_6	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	
Z	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$\frac{25}{2}$	

Variables à faire entrer x_3, variable à faire sortir : x_6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	5
x_5	0	−5	0	−2	1	0	0	1	−
x_6	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	1
Z	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$\frac{25}{2}$	

Méthode des tableaux

Permutation :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	
x_5	0	-5	0	-2	1	0	0	1	
x_6	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\times 2$
Z	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$\frac{25}{2}$	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2} Lx_3$
x_5	0	-5	0	-2	1	0	0	1	$-0\, Lx_3$
x_3	*0*	*-1*	*1*	-3	*0*	*2*	*0*	*1*	
Z	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$\frac{25}{2}$	$+\frac{1}{2} Lx_3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	*1*	*2*	*0*	*2*	*0*	*-1*	*0*	*2*	
x_5	0	-5	0	-2	1	0	0	1	
x_3	0	-1	1	-3	0	2	0	1	
Z	*0*	*3*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*13*	

Toutes les coeficients sur la ligne Z sont positifs => on arrête l'algorithme.

ZMAX = 13 avec $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$