Simplexe, cas général

Pour l'instant nous ne nous sommes intéressés qu'aux cas particuliers où le PL était sous forme standard. qu'en est-il maintenant du problème suivant :

Min $Z = 2x_1 + x_2$ sous contraintes :

$$3x_1 + x_2 \geqslant 9$$

$$x_1 + x_2 \geqslant 6$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Transformons tout d'abord le problème de minimisation en un problème de maximisation :

Min $Z = 2x_1 + x_2 \Longleftrightarrow$ Max $Z' = -2x_1 - x_2$

Puis ajoutons des variables artificielles pour transformer les inégalités en égalités :

$$3x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 9$$

$$x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 6$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

On remarque que $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ n'est pas solution du PL car cela impliquerai entre autre $x_3 = -9$ incompatible avec $x_3 \geq 0$. Le PL n'est pas réalisable en l'état.

Pour pallier ce problème, nous introduisons deux nouvelles variables artificielles A_1 et A_2 dans le système :

$$3x_1 + x_2 - x_3 \qquad + A_1 \qquad = 9$$

$$x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad + A_2 = 6$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ A_1,\ A_2 \geq 0$$

La méthode *en deux phases*

Première phase

Cherchons maintenant à maximiser W = $-A_1 - A_2$

Selon les contraintes :

$$3x_1 + x_2 - x_3 \quad + A_1 \quad = 9$$

$$x_1 + x_2 \quad - x_4 \quad + A_2 = 6$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ A_1,\ A_2 \geq 0$$

Ainsi une solution de base réalisable est : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $A_1 = 9$ et $A_2 = 6 \Rightarrow W = -15$

W peut être réécrit : $W = -9 + 3x_1 + x_2 - x_3 - 6 + x_1 + x_2 - x_4 = -15 + 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4$

Notre premier tableau peut donc être écrit :

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur
A_1	3	1	−1	0	1	0	0	0	9
A_2	1	1	0	−1	0	1	0	0	6
Z'	2	1	0	0	0	0	1	0	0
W	−4	−2	1	1	0	0	0	1	−15

La méthode *en deux phases*

Première phase, suite :

On choisit x1 pour entrer dans la base et A1 pour en sortir

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
A_1	3	1	-1	0	1	0	0	0	9	9 / 3
A_2	1	1	0	-1	0	1	0	0	6	6 / 1
Z'	2	1	0	0	0	0	1	0	0	
W	-4	-2	1	1	0	0	0	1	-15	

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
A_1	3	1	-1	0	1	0	0	0	9	*×1 / 3*
A_2	1	1	0	-1	0	1	0	0	6	
Z'	2	1	0	0	0	0	1	0	0	
W	-4	-2	1	1	0	0	0	1	-15	

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	***1***	***1 / 3***	***-1 / 3***	***0***	***1 / 3***	***0***	0	***0***	***3***	
A_2	1	1	0	-1	0	1	0	0	6	***-Lx_1***
Z'	2	1	0	0	0	0	1	0	0	***-2 Lx_1***
W	-4	-2	1	1	0	0	0	1	-15	***+4 Lx_1***

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	1	1 / 3	-1 / 3	0	1 / 3	0	0	0	3	
A_2	***0***	***2 / 3***	***1 / 3***	***-1***	***-1 / 3***	***1***	0	***0***	***3***	
Z'	***0***	***1 / 3***	***2 / 3***	***0***	***-2 / 3***	***0***	***1***	***0***	***-6***	
W	***0***	***-2 / 3***	***-1 / 3***	***1***	***4 / 3***	***0***	0	***1***	***-3***	

La méthode *en deux phases*

Première phase, suite :

On choisit x3 pour entrer dans la base et A2 pour en sortir

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	1	1 / 3	−1 / 3	0	1 / 3	0	0	0	3	9
A_2	0	2 / 3	1 / 3	−1	−1 / 3	1	0	0	3	9 / 2
Z'	0	1 / 3	2 / 3	0	−2 / 3	0	1	0	−6	
W	0	−2 / 3	−1 / 3	1	4 / 3	0	0	1	−3	

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	1	1 / 3	−1 / 3	0	1 / 3	0	0	0	3	
A_2	0	2 / 3	1 / 3	−1	−1 / 3	1	0	0	3	*x3 / 2*
Z'	0	1 / 3	2 / 3	0	−2 / 3	0	1	0	−6	
W	0	−2 / 3	−1 / 3	1	4 / 3	0	0	1	−3	

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	1	1 / 3	−1 / 3	0	1 / 3	0	0	0	3	$-\frac{1}{3} Lx_2$
x_2	***0***	***1***	***1 / 2***	***−3 / 2***	***−1 / 2***	***3 / 2***	***0***	***0***	***9 / 2***	
Z'	0	1 / 3	2 / 3	0	−2 / 3	0	1	0	−6	$-\frac{1}{3} Lx_2$
W	0	−2 / 3	−1 / 3	1	4 / 3	0	0	1	−3	$+\frac{2}{3} Lx_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	***1***	***0***	***−1 / 2***	***1 / 2***	***1 / 2***	***−1 / 2***	0	***0***	***3 / 2***	
x_2	0	1	1 / 2	−3 / 2	−1 / 2	3 / 2	0	0	9 / 2	
Z'	***0***	***0***	***1 / 2***	***1 / 2***	***−1 / 2***	***−1 / 2***	***1***	***0***	***−15 / 2***	
W	***0***	***0***	***0***	***0***	***1***	***1***	0	***1***	***0***	

On remarque ainsi que $x_1 = 3/2$, $x_2 = 9/2$ et $x_3 = x_4 = A_1 = A_2 = 0$ est une solution réalisable pour le système avec W = 0

La méthode *en deux phases*

Deuxième phase :

On écrit ainsi le tableau suivant (on a conservé les lignes précédentes, supprimé les colonnes A1 et A2 ainsi que la ligne W):

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z '	valeur	
x_1	1	0	-1 / 2	1 / 2	0	3 / 2	
x_2	0	1	1 / 2	-3 / 2	0	9 / 2	
Z '	0	0	1 / 2	1 / 2	1	-15 / 2	

Or on remarque ici que les coeficients de x_3 et x_4 sont tous positifs ⇒ nous sommes déjà en présence de la solution optimale, pas besoin de procéder à des itérations successives.

La solution optimale est donc $x_1 = 3/2,\ x_2 = 9/2,\ Z' = -15/2 \Rightarrow Z = 15/2$

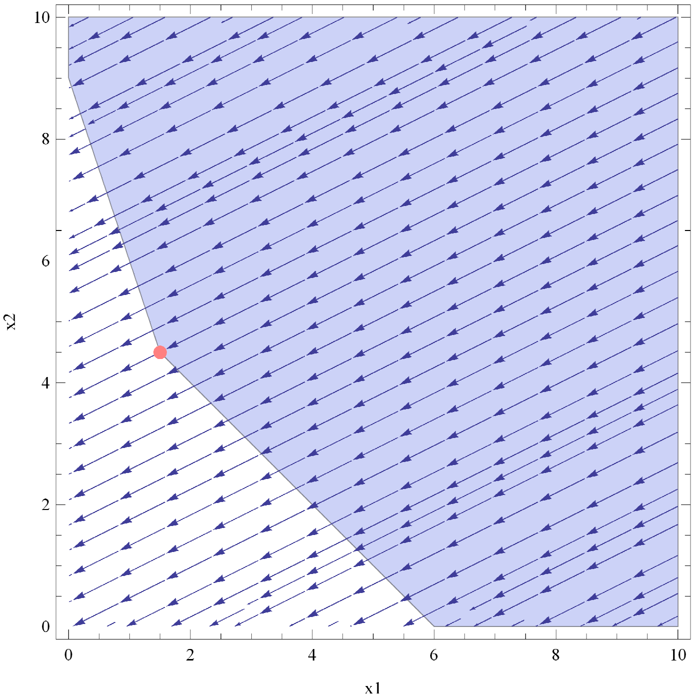
Vérification de notre solution :

Min $Z = 2x_1 + x_2$ sous contraintes :

$3x_1 + x_2 \geqslant 9$

$x_1 + x_2 \geqslant 6$

$x_1,\ x_2 \geq 0$



Exemple méthode en deux phases

Max Z = $4x_1 + 12x_2$

sous contraintes :

$x_1 \leq 1000$

$x_2 \leq 500$

$3\,x_1 + 6\,x_2 \leq 4200$

$x_1 + x_2 \geq 1000$

$x_1 + 2\,x_2 \geq 1200$

avec $x_1, x_2 \geq 0$

{600., 400.}

Solution de l’exemple précédent : Z = 7200