Exemple PLNE

Max Z = $3\,x_1 + 5\,x_2$ S.C. :

$x_1 + 2\,x_2 \leq 3$
$6\,x_1 + 8\,x_2 \leq 15$
avec $x_1,\ x_2 \geq 0$ et à valeurs entières

Correction détaillée

Dictionnaire :

$Z - 3\,x_1 - 5\,x_2 = 0$

$x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 3$
$6\,x_1 + 8\,x_2 + x_4 = 15$
avec $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$ et à valeurs entières

Première étape : simplexe classique

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z	valeur
x_3	1	2	1	0	0	3
x_4	6	8	0	1	0	15
Z	−3	−5	0	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z	valeur
x_2	1 / 2	1	1 / 2	0	0	3 / 2
x_4	2	0	−4	1	0	3
Z	−1 / 2	0	5 / 2	0	1	15 / 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z	valeur
x_2	0	1	3 / 2	−1 / 4	0	3 / 4
x_1	1	0	−2	1 / 2	0	3 / 2
Z	0	0	3 / 2	1 / 4	1	33 / 4

Cela nous donne notre premier noeud de notre arbre :

1	33 / 4
x1 : 3 / 2	x2 : 3 / 4

Ni x1 ni x2 n'ont des valeurs entières, on choisit alors de faire des cas sur x1 (on aurait pu choisir x2 aussi).

Ainsi, soit x1 ≤ 1, soit x1 ≥ 2 (bornes inf et sup entières de 3/2)

Cas numéro 1 : x1 ≤ 1

Nouveau dictionnaire :

$Z - 3\,x_1 - 5\,x_2 = 0$
$x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 3$
$6\,x_1 + 8\,x_2 + x_4 = 15$
$x_1 + x_5 = 1$

avec $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$

simplexe :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_3	1	2	1	0	0	0	3
x_4	6	8	0	1	0	0	15
x_5	1	0	0	0	1	0	1
Z	−3	−5	0	0	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_2	1 / 2	1	1 / 2	0	0	0	3 / 2
x_4	2	0	−4	1	0	0	3
x_5	1	0	0	0	1	0	1
Z	−1 / 2	0	5 / 2	0	1	1	15 / 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_2	1 / 2	1	1 / 2	0	0	0	3 / 2
x_4	2	0	−4	1	0	0	3
x_5	1	0	0	0	1	0	1
Z	−1 / 2	0	5 / 2	0	1	1	15 / 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_2	0	1	1/2	0	−1/2	0	1
x_4	0	0	−4	1	−2	0	1
x_1	1	0	0	0	1	0	1
Z	0	0	5/2	0	3/2	1	8

Nous obtenons une première solution à valeur entière : x1 = 1, x2 = 1, Z = 8.

Cela donne ainsi un autre noeud à notre arbre :

2	8
x1 : 1	x2 : 1

Il reste cependant à traiter les cas restants avant de conclure à la valeur maximale de Z pour x1 et x2 entiers.

Cas numéro 2 : x1 ≥ 2

Nouveau Dictionnaire

$Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$
$6x_1 + 8x_2 + x_4 = 15$
$x_1 - x_5 = 2$

Dictionnaire non réalisable, introduction d'une variable artificielle :

$Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$
$6x_1 + 8x_2 + x_4 = 15$
$x_1 - x_5 + \mathrm{A1} = 2$

avec $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \mathrm{A1} \geq 0$

Résolvons d'abord le problème Max W = -A1=-2 + x1 -x5 => -x1+x5+W=-2

Simplexe (première phase):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A1	Z	W	valeur
x_3	1	2	1	0	0	0	0	0	3
x_4	6	8	0	1	0	0	0	0	15
A1	1	0	0	0	−1	1	0	0	2
Z	−3	−5	0	0	0	0	1	0	0
W	−1	0	0	0	1	0	0	1	−2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A1	Z	W	valeur
x_3	0	2	1	0	1	−1	0	0	1
x_4	0	8	0	1	6	−6	0	0	3
x_1	1	0	0	0	−1	1	0	0	2
Z	0	−5	0	0	−3	3	1	0	6
W	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Max W = 0 => le problème originale possède des solutions, une solution particulière est x3 = 1, x4 = 3, x1 = 2, x5 = 0, x2 = 0

Simplexe (deuxième phase) :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_3	0	2	1	0	1	0	1
x_4	0	8	0	1	6	0	3
x_1	1	0	0	0	−1	0	2
Z	0	−5	0	0	−3	1	6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_3	0	0	1	−1/4	−1/2	0	1/4
x_2	0	1	0	1/8	3/4	0	3/8
x_1	1	0	0	0	−1	0	2
Z	0	0	0	5/8	3/4	1	63/8

Cela nous donne le troisième noeud de notre arbre :

3	63 / 8
x1 : 2	x2 : 3 / 8

Or, x2 n'est pas valeur entière, on choisit alors de faire des cas sur x2.

Ainsi, soit x2 ≤ 0, soit x2 ≥ 1 (bornes inf et sup entières de 3/8)

Cas numéro 2-1 : x1 >= 2 et x2 <= 0

ici il n'est pas nécessaire (bien que possible) de dérouler une simplexe, en effet, on a x2 ≤ 0 et x2 ≥ 0 ainsi, x2 = 0, ainsi, ils reste pour x1 les contraintes suivantes :

x1 ≥2, x1≤3, 6x1≤15 Sachant que Z augmente lorsque l'on augmente x1 (coefficient positif) la nouvelle solution est donc x1 = 5/2, x2 = 0 ce qui nous donne Z = 15/2

Cela nous donne le quatrième noeud de notre arbre :

4	15 / 2
x1 : 5 / 2	x2 : 0

Or, x1 n'est pas valeur entière, on choisit alors de faire des cas sur x1.

Ainsi, soit x1 ≤ 2, soit x1 ≥ 3 (bornes inf et sup entières de 5/2)

Cas numéro 2-1-1 : x1 >= 2 et x2 <= 0 et x1 ≤ 2

ici il n'est pas nécessaire (bien que possible) de dérouler une simplexe, en effet, on a x2 ≤ 0 et x2 ≥ 0 ainsi, x2 = 0, et x1 >= 2 et x1 ≤ 2 ainsi x1 = 2

La solution x1 = 2, x2 = 0 vérifie toutes les contraintes, et nous donne Z = 6, ceci est la deuxième solution à valeur entière trouvée jusqu'à maintenant.

Cela nous donne le cinquième noeud de notre arbre :

5	6
x1 : 2	x2 : 0

Il reste cependant à traiter les cas restants avant de conclure à la valeur maximale de Z pour x1 et x2 entiers.

Cas numéro 2-1-2 : x1 >= 2 et x2 <= 0 et x1 ≥ 3

ici il n'est pas nécessaire (bien que possible) de dérouler une simplexe, en effet, on a x2 ≤ 0 et x2 ≥ 0 ainsi, x2 = 0, et x1 >= 3

Or, une des contraintes est : 6x1 + 8x2 ≤15 ⇒ x1 ≤ 5/2 (car x2 = 0) ⇒ incompatible avec x1 ≥ 3

Pas de solutions donc pout le cas 2-1-2 cela nous donne le sixième noeud de notre arbre :

6	–
x1 : –	x2 : –

Il reste cependant à traiter les cas restants avant de conclure à la valeur maximale de Z pour x1 et x2 entiers.

Cas numéro 2-2 : x1 >= 2 et x2 >= 1

ici il n'est pas nécessaire (bien que possible) de dérouler une simplexe, en effet, on a x1 ≥ 2 et x2 ≥ 1 ainsi x1 + 2x2 ≥ 4 incompatible avec x1 + 2x2 ≤ 3

Pas de solutions donc pout le cas 2-2 cela nous donne le septième et dernier noeud de notre arbre :

7	–
x1 : –	x2 : –

Conclusion

Seuls deux noeuds possèdent des valeurs entières pour x1 et x2 :

2	8
x1 : 1	x2 : 1

et

5	6
x1 : 2	x2 : 0

Ainsi, la valeur maximale de Z avec x1 et x2 entiers est Zmax = 8 avec x1 = 1 et x2 = 1