1 Somme, produit, logarithme, exponentielle

1.1 Somme

1.1.1 Définition

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \begin{cases} a_p + a_{p+1} + ... + a_n, & \text{si } p \leqslant n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette somme comporte $n-p+1$ termes, on peut la noter aussi $\displaystyle\sum_{p \leqslant i \leqslant n} a_i$ ou bien $\displaystyle\sum_{i \in [\![p,n]\!]} a_i$

Remarque :

- La variable i est muette, on a $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{k=p}^{n} a_k$

1.1.2 Règles de calcul et méthodes

1) **Linéarité** :

$$\sum_{i=p}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=p}^{n} a_i + \sum_{i=p}^{n} b_i \quad \textbf{et} \quad \sum_{i=p}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=p}^{n} a_i$$

Ce qui se résume par $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i=p}^{n} a_i + \mu \sum_{i=p}^{n} b_i$

2) **Attention**, en général :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i b_i \neq \sum_{i=p}^{n} a_i \sum_{i=p}^{n} b_i$$

3) **Télescopage** :

$$\sum_{i=p}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_p$$

4) **Changement d'indice**, par exemple :

$$\sum_{i=p}^{n} a_{i+m} = \sum_{k=p+m}^{n+m} a_k$$

$\hookrightarrow$ Ici, on effectue le chgt d'indice $k = i + m$, avec $k : p + m \longrightarrow n + m$ et on doit remplacer tous les i de la première somme par $k - m$

$$\sum_{i=p}^{n+p} a_i = \sum_{k=0}^{n} a_{k+p}$$

$\hookrightarrow$ Ici, on effectue le chgt d'indice $k = i - p$, avec $k : 0 \longrightarrow n$ et on doit remplacer tous les i de la première somme par $k + p$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$\hookrightarrow$ Ici, on effectue le chgt d'indice $k = n - i$, avec $k : 0 \longrightarrow n$ et on doit remplacer tous les i de la première somme par $n - k$

5) **Sommation par séparation** :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{i=p}^{q} a_i + \sum_{i=q+1}^{n} a_i\,, \quad \text{avec } p \leqslant q \leqslant n$$

Par exemple, séparation des termes suivant les restes possibles r modulo b des indices. On pose : $i = bq + r$, avec $i, q, r \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $r < b$, c'est à dire $r \in \{0, 1, ..., b-1\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=p}^{n} a_i &= \sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n \\ i=bq}} a_i + \sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n \\ i=bq+1}} a_i + ... + \sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n \\ i=bq+b-1}} a_i \\
&= \sum_{p\leqslant bq\leqslant n} a_{bq} + \sum_{p\leqslant bq+1\leqslant n} a_{bq+1} + ... + \sum_{p\leqslant bq+b-1\leqslant n} a_{bq+b-1} \\
&= \sum_{q=\lceil \frac{p}{b}\rceil}^{\lfloor \frac{n}{b}\rfloor} a_{bq} + \sum_{q=\lceil \frac{p-1}{b}\rceil}^{\lfloor \frac{n-1}{b}\rfloor} a_{bq+1} + ... + \sum_{q=\lceil \frac{p-b+1}{b}\rceil}^{\lfloor \frac{n-b+1}{b}\rfloor} a_{bq+b-1}
\end{aligned}$$

On notera la partie entière par défaut $\lfloor\ \rfloor$ et la partie entière par excès $\lceil\ \rceil$, on vérifie :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x\rfloor \leqslant x \leqslant \lfloor x\rfloor + 1$ et $\lceil x\rceil - 1 \leqslant x \leqslant \lceil x\rceil$
$\lfloor x\rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z},\ m \leqslant x\}$ et $\lceil x\rceil = \min\{n \in \mathbb{Z},\ x \leqslant n\}$

1.1.3 Sommes classiques

1) Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k}
\end{aligned}$$

2) Soient (a_n) une suite arithmétique et $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, avec $p \leqslant n$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = N\frac{a_p + a_n}{2}$$

avec $N = n - p + 1$ le nombre de termes de la somme.

3) Soient (a_n) une suite géométrique de raison q et $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, avec $p \leqslant n$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \begin{cases} a_p\dfrac{1-q^N}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ Na_p & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

avec $N = n - p + 1$ le nombre de termes de la somme.

1.1.4 Sommes binomiales

On rappelle pour $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} & \text{, si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 \text{ , sinon} \end{cases}$$

C_n^k qui se note aussi $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le nombre de combinaisons de k éléments choisis parmi n. Voir cours **dénombrement**.

Propriété : Formule du binôme de Newton :

Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

1.2 Doubles sommes

1.2.1 Définition et notations

Pour $p \leqslant n$ et $q \leqslant m$ des entiers positifs, une double somme est du type $\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} a_{ij}$, c'est à dire :

$$\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} a_{ij} = \sum_{i=p}^{n} S_i \text{ , avec } S_i = \sum_{j=q}^{m} a_{ij}$$

Autre notation $\sum_{\substack{p \leqslant i \leqslant n \\ q \leqslant j \leqslant m}} a_{ij}$. Si $n = m$ et $p = q$, on la notera $\sum_{p \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}$

Attention
Les bornes de la deuxième somme peuvent dépendre de l'indice de la première, mais jamais l'inverse. Par exemple :

- Valide : $\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{ij}$
- Non valide : $\sum_{i=2}^{j}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

1.2.2 Règles de calculs et méthodes

1) Factorisation à bornes quelconques. Cas 1 : le premier terme ne dépend pas du deuxième indice :

$$\sum_i \sum_j a_i b_{ij} = \sum_i a_i (\sum_j b_{ij})$$

2) Factorisation à bornes quelconques. Cas 2 : termes d'indices **séparables** :

$$\sum_i \sum_j a_i b_j = (\sum_i a_i)(\sum_j b_j)$$

3) Inversion des sommes. Cas 1 : les bornes ne dépendent pas d'indices :

$$\sum_{i=p}^{n} \sum_{j=q}^{m} a_{ij} = \sum_{j=q}^{m} \sum_{i=p}^{n} a_{ij}$$

4) Inversion des sommes. Autre cas, utiliser éventuellement un tableau, par ex :

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} a_{ij}$$

1.3 Produit

1.3.1 Définition et notations

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$\prod_{i=p}^{n} a_i = \begin{cases} a_p a_{p+1} ... a_n, & \text{si } p \leqslant n \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

Cet produit comporte $n - p + 1$ facteurs, on peut le noter aussi $\prod\limits_{p \leqslant i \leqslant n} a_i$ ou bien $\prod\limits_{i \in [\![p,n]\!]} a_i$

1.3.2 Règles de calculs et méthodes à bornes quelconques

1) $\prod\limits_i a_i b_i = (\prod\limits_i a_i)(\prod\limits_i b_i)$

2) Par **récurrence** du 1), $\forall n \in \mathbb{N}$, $\prod\limits_i (a_i)^n = (\prod\limits_i a_i)^n$

3) **Déduction** de 2), $\forall i,\ a_i \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\prod\limits_i (a_i)^n = (\prod\limits_i a_i)^n$

4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda^n \prod\limits_{i=1}^{n} a_i$

5) **Produit télescopique** :

$$\forall i \in [\![p, n]\!],\ a_i \neq 0,\ \prod_{i=p}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$$

1.4 Exponentielle et logarithme

1.4.1 Exponentielle

- On définit la fonction exponentielle :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$$

En utilisant la formule de Taylor, $f(1) = e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \approx 2.71828$ un irrationnel.

- f est continue, dérivable, strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}$. On a $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$

- **Propriétés**

1) $\forall a \in \mathbb{R},\ e^a > 0$, en particulier $e^0 = 1$
2) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^a e^b = e^{a+b}$
3) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (e^a)^b = e^{ab}$
4) $\forall a \in \mathbb{R},\ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
5) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
6) $\forall (n, p) \times \mathbb{N}^2$ et $\forall k \in [\![p, n]\!],\ a_k \in \mathbb{R},\ \prod_{k=p}^{n} e^{a_k} = e^{(\sum_{k=p}^{n} a_k)}$

1.4.2 Logarithme

- On définit la fonction logarithme Népérien :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$$

- f est continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. f est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$. On a $\lim_{0^+} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$

- **Propriétés**

1) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ \ln(x)$ n'existe pas
2) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
3) $\forall (a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n \ln(a)$
4) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
5) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

6) $\forall X \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln(X)} = X$ et $\forall X \in \mathbb{R},\ \ln(e^X) = X$

7) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathbb{R}_+^*,\ X^n = e^{\ln(X^n)} = e^{n\ln(X)}$

8) $\forall (n,p) \times \mathbb{N}^2$ et $\forall k \in [\![p,n]\!]\ , a_k \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\prod_{k=p}^{n} a_k) = \sum_{k=p}^{n} \ln(a_k)$

1.5 Exercices

Exercice 1

Calculer les sommes et produits suivants en fonctions de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} 1, \qquad \prod_{i=0}^{n-42} 2, \qquad \prod_{i=8}^{2n-3} \frac{i}{i+1}, \qquad \prod_{k=1}^{n-2} 2k, \qquad \sum_{j=0}^{n} j, \qquad \sum_{k=3}^{n} 2^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k$$

Exercice 2

Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k})$, puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ en calculant a, b tels que $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, en calculant a, b, c tels que $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$

Exercice 3

Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$, pour le second, dériver $(x+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$

Exercice 4

1. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$
2. Écrire de deux manières différentes $\displaystyle\sum_{3 \leqslant i < j < n} a_{ij}$
3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k$, puis la calculer en inversant les deux sommes

Exercice 5

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k})$
2. En utilisant la fonction ln, montrer que pour tout entier $n > 1$,
$$\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

Exercice 6

Calculer

$$\prod_{k=12}^{87} \frac{2k+1}{2k-1} \text{ puis } \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}} \text{ et enfin } \forall x > 0,\ \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx}$$

2 Les matrices

2.1 Définition

Définition

On appelle A une **matrice** constituée de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ par un tableau d'éléments réels de taille $n \times p$. On la note

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Remarques

- L'élément a_{ij} est situé sur la ième ligne et la jème colonne. En faisant varier i dans $[\![1, n]\!]$ et j dans $[\![1, p]\!]$, on construit A
- A est une matrice de taille $n \times p$. On dit aussi qu'elle est de type (n, p)
- Si $n = p$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n
  Si $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne (ou vecteur ligne) de taille $1 \times p$
  Si $p = 1$, on dit que A est une matrice colonne (ou vecteur colonne) de taille $n \times 1$
- Une matrice est un "assemblage" de vecteurs lignes ou colonnes de même taille

Notations

- On note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{R}$
- On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$

2.2 Opérations élémentaires

Définition

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ des matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

On définit la somme et le produit avec un réel :

1. $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$
2. $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $-2A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque : toute matrice A de type (n, p) se décompose de manière unique :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{ij}$$

avec E_{ij} la matrice de type (n,p) constituée d'un 1 à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne, et de 0 partout ailleurs.

On notera $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ la base canonique des matrices de type (n,p). Ainsi $\dim(M_{n,p}(\mathbb{R})) = np$

2.3 Produit de matrices

Définition

Soient A et B deux matrices de, respectivement, $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M_{q,m}(\mathbb{R})$.

Le **produit matriciel** (ou **produit**) $A \times B$ existe ssi $p = q$, à savoir le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B. La matrice $A \times B$ est de type (n,m).

Remarques

- $(n,p) \times (p,m) \longrightarrow (n,m)$
- On note aussi le produit AB

Définition : calcul du produit

Soient $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant m}}$.

Le produit AB est défini par une matrice $C = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. On a

$AB = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$, mais par exemple $A^2 = A \times A$ n'existe pas.

Définition : puissance de matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit $A^p = A \times ... \times A$, p fois.

Définition : matrice identité

La **matrice identité** est une matrice carrée constituée uniquement de 1 sur sa diagonale et de 0 ailleurs.

A l'ordre n, on la note $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarques

- Par exemple, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $(I_n)^p = I_n$
- I_n est une matrice remarquable car $\forall A \in M_n\big(\mathbb{R}\big)$, $AI_n = I_nA = A$. Elle représente donc **l'élément neutre** de $M_n(\mathbb{R})$ pour le produit matriciel.

Propriétés

1. **Associativité** : $\forall (A, B, C) \in M_{n,p}(\mathbb{R}) \times M_{p,q}(\mathbb{R}) \times M_{q,m}(\mathbb{R})$, $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
2. **Distributivité**
   - à droite : $\forall (A, B, C) \in \big(M_{n,p}(\mathbb{R})\big)^2 \times M_{p,m}(\mathbb{R})$, $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
   - à gauche : $\forall (A, B, C) \in M_{n,p}(\mathbb{R}) \times \big(M_{p,m}(\mathbb{R})\big)^2$, $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
3. **Non commutativité (en général)** : $\exists (A, B) \in \big(M_n(\mathbb{R})\big)^2$, $A \times B \neq B \times A$

Remarques

- Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Si A et B dans $M_n(\mathbb{R})$, $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, si $AB \neq BA$
- Si $C_1, C_2, ..., C_p$ désignent les vecteurs colonnes de A de type (n, p), on vérifie :

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & \cdots & C_p \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et } \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p,\ AX = x_1C_1 + ... + x_pC_p :$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + ... + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

2.4 Transposition, trace, matrices élémentaires, inversion et rang

2.4.1 Matrices transposées

Définition

Soit $A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, la **transposée** de A est une matrice obtenue en échangeant les lignes avec les colonnes. Elle se note A^T telle que

$$A^T \in M_{p,n}(\mathbb{R}), \quad A^T = \big(b_{ij}\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}, \quad \text{avec} \quad b_{ij} = a_{ji}$$

Exemples

- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont considérés comme des matrices de genre $(n, 1)$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u}^T)\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + ... + x_ny_n$$

Propriétés

- $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:
  1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
  2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $(AB)^T = (B)^T(A)^T$

2.4.2 Trace

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$, la **trace** de A est la somme des coefficients diagonaux de A. C'est le nombre $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $tr(A) = 2$

Propriétés

- $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:
  1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
  2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
- $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $tr(AB) = tr(BA)$

Remarque

- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonalisable, on a $A = PDP^{-1}$ avec D matrice diagonale des valeurs propres et P la matrice de passage des vecteurs propres de A. On a

$$tr(A) = tr(PDP^{-1}) = tr(PP^{-1}D) = tr(D)$$

2.4.3 Inversion

Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on dit que A est **inversible** si

$$\exists B \in M_n(\mathbb{R}), AB = BA = I_n$$

Dans ce cas, on note $A^{-1} = B$, l'inverse de A.

Remarques

- Les matrices non carrées ne peuvent pas s'inverser.

Méthode d'inversion

Pour montrer que $A = \big(a_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est inversible et pour calculer son inverse, il suffit de montrer que :

$$\forall (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ \text{ le } \textbf{système } (1) : \forall i \in\ [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i\ ,\ \text{possède } \textbf{une unique solution}$$

Remarques

- En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, on a

$$(1) \iff \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \iff AX = Y$$

  Trouver une unique solution X (obtenue en fonction de A et Y) revient à inverser le système (1). On détiendra alors A^{-1} obtenue grace au système inverse $X = A^{-1}Y$.

- La résolution d'un système d'équations peut s'effectuer à l'aide du **pivot de Gauss** qui consiste à rendre le **système d'équations triangulaire inférieur** et de remonter le calcul afin de calculer toutes les composantes de X.

- L'implementation du calcul de A^{-1} peut s'effectuer à l'aide de la matrice A augmentée de I_n que l'on note $\big(A\ I_n\big)$. On a bien

$$AX = Y \iff AX = I_nY \iff A^{-1}AX = A^{-1}I_nY \iff I_nX = A^{-1}Y \iff X = A^{-1}Y$$

  qui se résume $(A\ I_n) \sim (I_n\ A^{-1})$

Exemple Inversion de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & I_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On vérifie que $A^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propriétés

Soient A, B inversibles d'ordre n, alors

- A^T inversible, d'ordre n et $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- AB inversible d'ordre n et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2.5 Déterminant

2.5.1 Définitions

Définitions récursives :

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$. Le **déterminant** de A, noté $det(A)$ ou $|A|$ est défini par

- un développement suivant une colonne $j \in [\![1, n]\!]$

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \triangle_{i,j}$$

- ou un développement suivant une ligne $i \in [\![1, n]\!]$

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \triangle_{i,j}$$

avec $\triangle_{i,j}$ le déterminant de la **sous-matrice** (ou **matrice extraite**) de A obtenue en supprimant la ième ligne et la jème colonne de A.

Condition d'arret

- $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Remarque

- $\left((-1)^{i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 2p} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & \ddots & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & \ddots & -1 \\ -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\left((-1)^{i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 2p+1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ -1 & \ddots & & & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & & & \ddots & -1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1-2) = -6$, développement suivant la colonne $j = 2$

2.5.2 Propriétés

- Soient $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$, une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a
  1. $|\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}| > 0$ ssi $\mathscr{B}$ est une **base directe** de $\mathbb{R}^n$.
     Dans ce cas, $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est un **repère direct**.
  2. $|\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}| < 0$ ssi $\mathscr{B}$ est une **base indirecte** de $\mathbb{R}^n$.
     Dans ce cas, $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est un **repère indirect**.
  3. $|\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}| = 0$, alors $\mathscr{B}$ n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et les vecteurs sont **linéairement dépendants**.
- Le déterminant est application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ **linéaire par rapport à chaque colonne**.
  Pour $A = (C_1, ..., C_n) \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $C_i \in \mathbb{R}^n$ ième vecteur colonne de A et $\alpha \in \mathbb{R}$,
  1. $|C_1, ..., C_{i-1}, \alpha C_i, C_{i+1}, ..., C_n| = \alpha|C_1, ..., C_i, ..., C_n|$
  2. $|C_1, ..., C_{i-1}, C_i + C_i', C_{i+1}, ..., C_n| = |C_1, ..., C_i, ..., C_n| + |C_1, ..., C_i', ..., C_n|$
- Le déterminant d'une matrice constituée de deux lignes (ou de deux colonnes) identiques est **nul**.
  Le déterminant d'une matrice constituée d'une ligne (ou d'une colonne) de 0 est **nul**.
- L'**échange** de deux colonnes (ou deux lignes) multiplie le déterminant par -1, on **inverse l'orientation**.
- Un déterminant dont une ligne (respectivement une colonne) est combinaison linéaire des **autres** lignes (respectivement colonnes) est **nul**.
- La valeur d'un déterminant ne change pas si l'on ajoute à une ligne (respectivement colonne) une combinaison linéaire des **autres** lignes (respectivement colonnes).
- Soient $(A, B) \in \left(M_n(\mathbb{R})\right)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
  1. $|\alpha A| = \alpha^n|A|$

2. $|AB| = |BA| = |A||B|$
3. A inversible $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$.
   Une matrice est donc **inversible** si ses **vecteurs lignes** (ou **colonnes**) sont **linéairement indépendants**.
4. $|A^T| = |A|$
5. Si A inversible d'ordre n, $|AA^{-1}| = |I_n| = 1$, donc $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

2.5.3 Inversion : co-matrice

Propriété

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, il est possible d'inverser A à l'aide de la méthode utilisant la **co-matrice** de A.

$$\text{Si } |A| \neq 0,\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}(com(A))^T$$

On définit la co-matrice de A par $com(A) = \left(c_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$c_{ij} = (-1)^{i+j}\triangle_{i,j}$, avec $\triangle_{i,j}$ le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en supprimant la ième ligne et la jème colonne de A.

Exemple

Reprise de l'exemple d'inversion de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On a $|A| = 1$ et

$$com(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(com(A))^T = (com(A))^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2.6 Matrice d'application linéaire

On notera le vecteur u par $\overrightarrow{u}$

Définition : application et transformation linéaire

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On dit que l'**application** $f : E \longrightarrow F$ est **linéaire** si

- $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E,\ f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y})$
- $\forall \overrightarrow{x} \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha \overrightarrow{x}) = \alpha f(\overrightarrow{x})$

De plus, si E=F=$\mathbb{R}^n$, on dit que f est une **transformation linéaire** de $\mathbb{R}^n$.

Exemples

- L'homothétie vectorielle $f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$.
- L'application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$, telle que $f(X) = AX$, avec $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est linéaire.

Notations

- On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.
- On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$.

Remarques

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$
- Si $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_p)$ défini dans l'espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_p})$. On a :

$$f(\overrightarrow{x}) = f\Big(\sum_{j=1}^{p} x_j \overrightarrow{e_j}\Big) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(\overrightarrow{e_j})$$

Définition : matrice d'une application linéaire

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels tels que $dim(E) = p$ et $dim(F) = n$.

On note $\mathscr{B}_1 = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_p})$ une base de E et $\mathscr{B}_2 = (\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_n})$ une base de F. On pose $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

La matrice de f de la base $\mathscr{B}_1$ vers la base $\mathscr{B}_2$, notée $M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$, est constituée des vecteurs colonnes $f(\overrightarrow{e_j})$, $j \in [\![1, p]\!]$, dont les composantes sont exprimées dans la base $\mathscr{B}_2$. On a :

$$M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(\overrightarrow{e_1}) & \cdots & f(\overrightarrow{e_j}) & \cdots & f(\overrightarrow{e_p}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{f_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{f_n} \end{array}$$

On remarque que $\forall j \in [\![1, p]\!], f(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{f_i}$

Utilisation

Soient $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \overrightarrow{e_j}$ et $\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{f_i}$, tels que $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$

En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$, on a $Y = AX$

Notation

- Si $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$, alors la matrice de f de $\mathscr{B}_1$ vers $\mathscr{B}_1$ s'appelle matrice de f dans $\mathscr{B}_1$ et se note $M_{\mathscr{B}_1}(f)$.

Exemple

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ -x+2y-z \\ x-y-z \end{pmatrix} \end{cases}$. On a $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

- On remarque que $\forall X \in \mathbb{R}^3, f(X) = AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Déterminons $M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$, avec $\mathscr{B}_1 = \left(\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

  et $\mathscr{B}_2 = \left(\overrightarrow{f_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{f_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- On pose $M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{f_1} \\ \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_3} \end{array}$. On cherche $a_1, ..., a_9 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = a_1\overrightarrow{f_1} + a_2\overrightarrow{f_2} + a_3\overrightarrow{f_3} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = a_4\overrightarrow{f_1} + a_5\overrightarrow{f_2} + a_6\overrightarrow{f_3} \\ f(\overrightarrow{e_3}) = a_7\overrightarrow{f_1} + a_8\overrightarrow{f_2} + a_9\overrightarrow{f_3} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} & \overrightarrow{f_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{pmatrix}$$

Le calcul de l'inverse vient de l'exercice précédent et finalement, on trouve

$$M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7 Propriétés

- Soient E, F et G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p, n, m.
  On pose $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ les bases respectives de E, F et G.
  De plus, on suppose que $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors

$$M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(g) M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$$

- Soient E, F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions n ayant $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ comme bases respectives. On suppose que $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

$$f \text{ bijective } \iff M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) \text{ est inversible}$$

  Dans ce cas, on a $\left(M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)\right)^{-1} = M_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(f^{-1})$

- Soient E, F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p, n.
  On pose $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ les bases respectives de E, F .
  De plus, on suppose que $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(\alpha f + g) = \alpha M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) + M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(g)$$

2.8 Matrice de passage

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel tel que $dim(E) = n$.

Soient $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_p})$ base de E (appelée ancienne base) et $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e_1'}, ..., \overrightarrow{e_n'})$ base de E (appelée nouvelle base).

Les composantes d'un vecteur dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont appelées respectivement anciennes et nouvelles composantes.

La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, est constituée des vecteurs colonnes $\overrightarrow{e'_j}$, $j \in [\![1,n]\!]$, dont les composantes sont exprimées dans la base $\mathscr{B}$. On a :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overrightarrow{e'_1} & \cdots & \overrightarrow{e'_j} & \cdots & \overrightarrow{e'_n} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{array}$$

On remarque que $\forall j \in [\![1,n]\!], \overrightarrow{e'_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overrightarrow{e_i}$

Utilisation

Soient $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i} = \sum_{j=1}^{n} x'_j\overrightarrow{e'_j}$.

En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}'$, on a

$$X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}X'$$

Explications et remarques

- En reprenant les hypothèses de la définition, on a $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id)$, avec $Id : \overrightarrow{x} \longmapsto \overrightarrow{x}$, l'**application identité** dans $\mathbb{R}^n$.

  Bien entendu Id est **bijective**, avec $Id^{-1} = Id$, donc
  $$\big(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\big)^{-1} = \big(M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id)\big)^{-1} = M_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(Id) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$
- Si l'on veut exprimer X' en fonction de X, on notera
  $$X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}X' \Longleftrightarrow \big(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\big)^{-1}X = X' \Longleftrightarrow P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}X = X'$$
- En notant $\mathscr{C}$ la base canonique, on a
  $$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}P_{\mathscr{C},\mathscr{B}'} = \big(P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\big)^{-1}P_{\mathscr{C},\mathscr{B}'}$$
- $I_n = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e'_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e'_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On cherche $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, avec $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ et $\mathscr{B}' = \{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}\}$

En reprenant la méthode de la partie 1, avec $f = Id$, et en posant $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 4 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2.9 Matrice d'une application linéaire dans des bases différentes

Propriété : Soient

. E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. On note $f \in \mathscr{L}(E, F)$

. $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$ deux bases de E, on note $P = P_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}'_1}$

. $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}'_2$ deux bases de F, on note $Q = P_{\mathscr{B}_2, \mathscr{B}'_2}$

. On note $A = M_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(f)$ et $A' = M_{\mathscr{B}'_1, \mathscr{B}'_2}(f)$

Alors $A' = Q^{-1}AP$

Démonstration

Soient $(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}) \in E \times F$, tels que $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$.

On note X, X' (respectivement Y, Y') les vecteurs colonnes des composantes de $\overrightarrow{x}$ dans $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}'_1$ (respectivement $\mathscr{B}_2, \mathscr{B}'_2$). On a :

$$X = PX', \quad Y = QY', \quad Y = AX, \quad Y' = A'X'$$

Donc

$$QY' = APX' \Longleftrightarrow Y' = Q^{-1}APX' \Longleftrightarrow A'X' = Q^{-1}APX'$$

Conclusion $A' = Q^{-1}AP$

Propriété : Soient

. E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ une transformation linéaire de E

. $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, on note $P = P_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}$

. On note $A = M_{\mathscr{B}}(f)$ et $A' = M_{\mathscr{B}'}(f)$

Alors $A' = P^{-1}AP$, A et A' sont dites **semblables**.

Démonstration

C'est la propriété précédente avec $Q = P = P_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}$, $A = M_{\mathscr{B}}(f)$ et $A' = M_{\mathscr{B}'}(f)$.

Exemple : Soient

$E = F = \mathbb{R}^3$, on note $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$ telles que

$\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ soit la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})$.

On note $P = P_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $A = M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

On a $A' = M_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha - \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & 0 \\ \beta & 2\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix}$

2.10 Exercices

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour les questions ci dessous, effectuer le calcul demandé s'il existe. S'il n'existe pas expliquer pourquoi.

$$2A, \quad (A^T)A, \quad A(A^T), \quad A^2, \quad A+3, \quad AB, \quad BA, \quad (B^T)B, \quad B(B^T), \quad tr((A^T)A + I_4)$$

Exercice 2

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs de $k \in \mathbb{R}$, s'il y en a, qui font que $AB = BA$?
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $AB = AC$ alors que $B \neq C$.
3. Trouver deux matrices non triviales A et B de genre $(2, 2)$ tel que $AB = 0$

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les deux premières colonnes de la matrice B.

Exercice 4

Résoudre les systèmes d'équations suivants et représenter l'ensemble des solutions graphiquement dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$:

$$(R) : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}, \quad (S) : \begin{cases} -4x + y = 3 \\ 8x - 2y = -6 \end{cases} \quad \text{et } (T) : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Exercice 5

Pour la question 1, calculer l'ensemble des solutions, pour les deux autres, dessiner les parties de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$

1. $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + 3y = 1 \text{ et } -3x + 2y = 2\}$
2. $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \text{ et } 2x + y \leqslant 1\}$
3. $\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$

Exercice 6

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(R) : \left\{ \begin{array}{r} 22a + 32b + 42c = 104 \\ 47b + 62c = 186 \\ 82c = 246 \end{array} \right. , \; (S) : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 3z = 3 \\ 2x - y - 4z = 7 \\ 3x - 3y - 5z = 8 \end{array} \right.$$

Exercice 7

Soient X et Y deux produits concurrentiels. Les parts de marché de X et Y à la date t sont représentées par $M_t = \begin{pmatrix} x_t & y_t \end{pmatrix}$. La répartition probable à la date $t+1$ est $M_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{t+1} & y_{t+1} \end{pmatrix}$.
On suppose que, pour tout naturel t : $M_{t+1} = M_t \times K$, avec $K = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$. K est dite matrice de transition.

1. Prouver que : $\forall t \in \mathbb{N}$, $x_{t+1} + y_{t+1} = x_t + y_t$. (Cela signifie qu'aucun produit nouveau n'est apparu sur le marché).
2. Dans la suite de l'exercice, on pose $M_t = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.
   a. Indiquer, en pourcentage, la part de marché du produit X à la date t.
   b. Calculer M_{t+1} et en déduire la part de marché de X à la date $t+1$.
3. Calculer M_{t+2} en fonction de M_t et de K.
4. a. Par généralisation des résultats précédents, proposer, pour tout naturel non nul n une relation entre M_{t+n} et M_t.
   b. En déduire le pourcentage de la part de marché de X à la date $t+3$.

Exercice 8

Chaque année, environ 5% de la population d'une ville va s'installer dans la banlieue environnante et environ 4% de la population de la banlieue déménage en ville. En 2016, ils étaient 600 000 citadins et 400 000 banlieusards. Traduire cette situation en une équation de récurrence où x_0 est la population en 2016. Estimer ensuite la population de la ville et de la banlieue deux ans plus tard, en 2018.

Exercice 9

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(A) : \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -4 & 2 \\ 3 & 9 & -6 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } (B) : \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 12 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \text{ poser } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ comme vecteur inconnu.}$$

Exercice 10

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui donner leur matrice inverse respective.

Exercice 11

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - 3A^3 + A - I_n = 0$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 12

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible, puis calculer A^{-1}.

   N.B. : vous prendrez soin de vérifier au final que $AA^{-1} = I_3$.

2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \\ (x, y, z) \mapsto (x + z,\ -x + y - z,\ 2x - y + z) \end{cases}$

   Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 13

Dans $\mathbb{R}^2$, soient $X = (3, 5)$, une base $\mathscr{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$ et $A(2, -1)$

1. Sans la formule des matrices de passage, donner $X_{\mathscr{B}}$ les coordonnées de X dans $\mathscr{B}$
2. Retrouver le résultat précédent à l'aide des matrices de passage
3. Donner les coordonnées de X dans le repère $(A, \mathscr{B})$

Exercice 14

Soient $B = \{b_1, b_2\}$ et $C = \{c_1, c_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de passage de B à C et la matrice de passage de C à B dans las cas suivants :

1. $b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 15

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.
On pose $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

1. Chercher une base $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de A vers B.
2. Chercher une base $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de B vers C.

Exercice 16

Soient E un $\mathbb{R}$-ev muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ pour matrice dans la base B. On définit : $\begin{cases} u = 2e_1 + e_2 \\ v = -e_1 - e_2 \\ w = e_3 - e_1 \end{cases}$

1. Montrer que $B^{'} = (u, v, w)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $B^{'}$.

Exercice 17

Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

1. Si A est semblable à B, alors A^2 est semblable à B^2.
2. Si B et C sont semblables à A, alors B est semblable à C.
3. Si A est semblable à B, alors $tr(A) = tr(B)$.

3 Dénombrement

3.1 Définitions

- Une **p-liste** d'un ensemble E à n éléments est une suite ordonnée de p éléments de E distincts ou non. Le nombre de p-listes d'un ensemble E à n éléments est n^p.
  Ex : $E = \{a,b,c,d,e\}$ alors $(a,b,c),(a,a,b),(e,e,e)$ sont des 3-listes d'éléments de E. Il y en a $5^3 = 125$

- Un **arrangement** à p éléments d'un ensemble E à n éléments est une suite ordonnée de p éléments de E distincts. On a obligatoirement $p \leqslant n$. Le nombre d'arrangements à p éléments d'un ensemble E à n éléments est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)...(n-p+1)$.
  Ex : $E = \{a,b,c,d,e\}$ alors $(a,b,c),(a,c,b),(c,d,e)$ sont des arrangements à 3 éléments de E. Il y en a $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

- Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un arrangement à n éléments de E. C'est un cas particulier d'arrangement avec $p = n$. Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments est $A_n^n = n!$
  Ex : $E = \{a,b,c,d,e\}$, alors $(a,b,c,d,e),(b,c,a,e,d),(c,a,b,d,e)$ sont des permutations de E. Il y en a $5! = 120$

- On appelle **combinaison** de p éléments d'un ensemble E à n éléments toute partie de E à p éléments. On a obligatoirement $p \leqslant n$.
  rq : il y a A_n^p arrangements de p éléments pris parmi n. Toute permutation de p éléments donne la même combinaison. Pour chaque combinaison, il y a $p!$ arrangements. Il y a donc $p!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons.
  Ainsi, le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n est $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
  Ex : $E = \{a,b,c,d,e\}$ alors $(a,b,c),(a,b,d),(a,b,e)$ sont des combinaisons à 3 éléments de E. Il y en a $C_5^3 = \dfrac{60}{3!} = 10$

Convention : $0! = 1$

Exemple à savoir : $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ et $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

3.2 Propriétés liées aux combinaisons

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$. On a :

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$
2. avec $n, p \neq 0$, $\quad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
3. avec $n, p \neq 0$, $\quad pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

3.3 Exercices

Exercice 1

1. Combien de chaînes de n lettres peut-on construire avec des lettres prises dans l'alphabet $E = \{a, b, c\}$?
2. Étant donné un ensemble de n lettres différentes, combien peut-on construire de sous-ensembles ?
3. Étant donné une chaîne de $n \geqslant 5$ lettres différentes, combien peut-on construire de sous-chaînes de 5 lettres ?
   Rq : une sous-chaîne hérite de la chaîne principale, donc conserve les mêmes caractéristiques.
4. Donner le nombre d'anagrammes du mot FACILE, puis du mot DIFFICILE. Ici, les anagrammes sont considérés comme des mots quelconques obtenus par permutation de lettres.

Exercice 2

Le digicode ci-dessous se trouve à l'entrée d'un immeuble. Pour ouvrir, il faut composer un code formé d'abord de deux lettres, puis de trois chiffres. Par exemple : CB445.

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

1. Déterminer le nombre total de codes possibles.
2. Parmi ces codes, combien y en a-t-il qui :
   a. ont leur trois chiffres pairs ?
   b. ont trois chiffres distincts ?
   c. ont deux lettres distinctes et trois chiffres distincts, sans que les chiffres ne soient ordonnés ?
3. A l'aide du même digicode, déterminer le nombre total de codes en composant 2 lettres et 3 chiffres quelconques sans contrainte d'ordre d'apparition. Par exemple B44C5 et 445CB deviennent possibles.

Exercice 3

Une entreprise fabrique 3 types de pièces différentes. On dispose d'un stock de 20 pièces de type A, 10 pièces de type B et 10 pièces de type C. Le service de vente se propose de faire des lots de pièces.

1. Combien de lots de 4 pièces ayant au moins une pièce A peut-on former ?
2. Combien de lots de 4 pièces ayant au moins une pièce A et au moins une pièce B peut-on former ?

Exercice 4

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On appelle "main" toute combinaison de 5 cartes.

1. Donner le nombre de mains contenant exactement 2 rois.
2. Donner le nombre de mains contenant un carré.
3. Donner le nombre de mains contenant un full.
4. Donner le nombre de mains contenant exactement une paire.
5. Donner le nombre de mains contenant une double paire.

4 Calcul des probabilités et probabilités conditionnelles

On utilise les notions vues sur les ensembles.

4.1 Vocabulaire

Soit l'**expérience aléatoire** : on lance un dé.

- L'**univers** Ω est l'ensemble des résultats possibles (ou **éventualité**).
  Pour le lancer d'un dé on a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Un **évènement** A est une partie de Ω, c'est à dire $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.
  Par ex, si A : "le nombre obtenu est pair", $A = \{2, 4, 6\}$.
- L'**ensemble des évènements** est l'ensemble des parties de Ω, c'est à dire $\mathscr{P}(\Omega)$.
- Un **évènement élémentaire** est un évènement ne comportant qu'un seul élément. Par ex $\{6\}$.
- L'**évènement impossible** est $\emptyset$, il ne se réalise jamais (il ne contient aucun élément).
- L'**évènement certain** est Ω, qui se réalise toujours.
- L'**évènement contraire**, noté $\overline{A}$, de l'évènement A est l'ensemble des évènements de Ω qui ne sont pas dans A.
- L'**évènement** $A \cap B$ est l'évènement constitué des éléments de Ω qui appartiennent à la fois à A et B. A et B sont donc réalisés simultanément.
- L'**évènement** $A \cup B$ est l'évènement constitué des éléments de Ω qui appartiennent à A **ou** B. Ici le **ou est inclusif** (ne pas confondre avec ou bien).
- A et B sont des **évènements incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$, c'est à dire que A et B ne se réalisent pas simultanément.

4.2 Probabilité d'un évènement

Définition :

Soit Ω un univers fini. On définit une probabilité en associant à chaque évènement, un nombre compris entre 0 et 1. Une probabilité est donc une application $P : \Omega \longrightarrow [0,\ 1]$, qui vérifie de plus :

- $P(\Omega)$=1
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pour tous les évènements A et B incompatibles.

On déduit du deuxième point que $P(\emptyset) = 0$.

4.3 Équiprobabilité

Il y a équiprobabilité lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité. Ainsi, on notera pour tout évènement A d'un univers Ω fini

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Par exemple, si le dé est non truqué, il y a équiprobabilité d'apparition des faces.

4.4 Propriétés

Soient Ω un univers et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Pour le troisième point, on peut se servir d'un dessin, puis remarquer :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

4.5 Probabilités conditionnelles

Définition :

Soit P une probabilité sur un univers fini Ω et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, tel que $P(B) \neq 0$.

On définit la probabilité de $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ sachant que B est réalisé par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P_B(A).P(B)$$

Remarque : si $P(A) \neq \emptyset$, on a

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P_B(A).P(B)}{P(A)}$$

Définition : partitionnement de Ω

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n évènements d'une même expérience aléatoire. On dit que cette famille réalise une **partition** de l'univers Ω si :

- $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i \neq \emptyset$
- $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j,\ A_i \cap B_j = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Formule des probabilités totales :

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n évènements réalisant une **partition** de l'univers Ω. Alors pour tout B de Ω,

$$P(B) = P(B \cap A_1) + ... + P(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

Ou encore

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + ... + P(A_n)P_{A_n}(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$$

En particulier,

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

4.6 Évènements indépendants

Définition :

Deux évènements A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Remarque importante :

Deux évènements de probabilité non nulle sont indépendants si la réalisation de l'un n'agit pas sur la réalisation de l'autre. On a aussi :

$$P_B(A) = P(A) \qquad \text{et} \qquad P_A(B) = P(B)$$

Propriété :

Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

4.7 Exercices

Exercice 1

Un lot de 100 pièces comprend 5 pièces défectueuses.

Partie A
On tire au hasard avec remise 10 pièces dans le lot.

1. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse parmi les 10 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir une seule pièce défectueuse parmi les 10 ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse parmi les 10 ?

Partie B
On tire au hasard sans remise 10 pièces dans le lot.

1. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse parmi les 10 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir une seule pièce défectueuse parmi les 10 ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse parmi les 10 ?

Exercice 2

Une urne contient 5 boules rouges, 3 vertes et 2 bleues.

1. On tire au hasard 2 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 rouges ? 1 rouge et une bleue ? 2 boules de même couleur ?
2. On tire au hasard 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ? au moins une rouge ? au plus une bleue ?

Exercice 3

Une grande compagnie aérienne a, au 1er janvier 2016, un parc d'avions composé ainsi :

- 40 avions ont moins de 3 ans ; 75 avions ont entre 3 et 7 ans ; 35 ont plus de 7 ans.
  On admet que, pour un avion pris au hasard dans le parc :
- la probabilité qu'il soit victime de plus d'un incident technique en cours de vol dans l'année sachant qu'il a moins de 3 ans est égale à 0.05 ;
- la probabilité qu'il soit victime de plus d'un incident technique en cours de vol dans l'année sachant qu'il a entre 3 et 7 ans est égale à 0.09 ;
- la probabilité qu'il soit victime de plus d'un incident technique en cours de vol dans l'année sachant qu'il a plus de 7 ans est égale à 0.11.

On choisit un avion au hasard dans le parc.

1. a. Calculer la probabilité pour qu'il ait moins de 3 ans.

   b. Calculer la probabilité pour qu'il ait entre 3 et 7 ans.

   c. Calculer la probabilité pour qu'il ait plus de 7 ans.

2. Calculer la probabilité pour qu'il soit victime de plus d'un incident technique en cours de vol dans l'année.

Exercice 4

Une usine produit en grande série des tiges métalliques.
La production est assurée par 2 machines A et B fournissant respectivement 40% et 60% de la production. Un contrôle d'aspect sur la totalité de la production fait apparaître que le pourcentage de pièces défectueuses est de 3% sur la machine A et 6% sur la machine B.

1. Montrer que le pourcentage de tiges défectueuses pour l'ensemble de la production est de 4.8%.

2. On prélève une tige au hasard dans la production, calculer la probabilité pour qu'elle provienne de la machine A, sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice 5

Dans un parking d'un centre ville, les différents niveaux sont desservis par deux ascenseurs A et B qui fonctionnent indépendamment l'un de l'autre.
On s'intéresse au fonctionnement de ces ascenseurs.
Pour chaque ascenseur, la probabilité de tomber en panne au cours d'une année est 0.1. On considère les événements suivants :
E_1 : "aucun des deux ascenseurs ne tombe en panne au cours d'une année" ;
E_2 : "au moins un ascenseur tombe en panne au cours d'une année".

Calculer les probabilités des événements E_1 et E_2. Sont-ils indépendants ?

Exercice 6

Lors d'une épidémie, 15% des animaux d'un élevage de lapins des hautes terres d'Ecosse sont atteints par la maladie du lapin fou du Loch Ness (la MLFLC). On décide d'effectuer un dépistage.
La probabilité qu'un animal atteint par la MLFLC ait une réaction positive au test est 0.9.
La probabilité qu'un animal non atteint par la MLFLC ait une réaction négative au test est 0.8.

1. Quelle est la probabilité qu'un lapin ayant eu un test positif soit réellement atteint par la maladie ?

2. Quelle est la probabilité qu'un lapin ayant eu un test négatif soit réellement atteint par la maladie ?

5 Variables aléatoires discrètes

5.1 Définitions

- Soit une expérience aléatoire. On se munit d'un univers Ω et de P : probabilités sur Ω. On appelle **variable aléatoire réelle** (**var**) toute fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
- La **loi de probabilité** de X est la fonction qui, pour chaque valeur x_i prise par X, associe la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$ qui est donc composé de tous les antécédents de x_i dans Ω.
- **Exemple** : lancer d'un dé équilibré à six faces. Règle :
  obtention d'un chiffre impair : perte de $4e$, Obtention de 1 ou 3 : gain de $1e$, obtention du 6 : gain de $6e$

  On pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et la var X donnant le gain algébrique (+ ou -) après le lancer.

  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que $X(\Omega) = \{-4, 1, 6\}$, plus précisément $X(\{2, 4, 6\}) = \{-4\}$, $X(\{1, 3\}) = \{1\}$ et $X(\{6\}) = \{6\}$. La loi de probabilité de X est :

Valeurs prises par X	$x_1 = -4$	$x_2 = 1$	$x_3 = 6$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

5.2 Espérance et écart-type

- L'**espérance** d'une var X telle que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i$$

  C'est en fait la moyenne (espérée) de X.

- En reprenant l'exemple, $E(X) = \dfrac{1}{2}(-4) + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}(6) = \dfrac{-2}{3}$.

  $E(X) < 0$, le jeu n'est pas intéressant. Si $E(X) = 0$, on le dit équitable.

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ E(aX + b) = aE(X) + b$
- La **variance** d'une var X telle que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ est :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

  $V(X)$ permet de mesurer la dispersion au carré de X par rapport à sa moyenne. On effectue la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

- L'**écart-type**, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, la racine carré permet de revenir à l'unité. L'écart-type permet de mesurer la dispersion de X par rapport à sa moyenne

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ V(aX+b) = a^2V(X)$
- Soit X une var d'espérance m et d'écart-type $\sigma \neq 0$, alors $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ est centrée réduite. On a $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1 = \sigma_{X^*}$

5.3 Loi Binomiale

- Une var X suit la loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ quand :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

  on note que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$

- Cas où $n = 1$. On a $X \sim \mathscr{B}(1,p)$, appelée aussi variable de Bernouilli. Sa loi de probabilité est :

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

  On a un schéma de Bernouilli, deux possibilités : le succès (de proba p) et l'échec (de proba $1-p$).

- Domaine d'application de la loi Binomiale :

  1) Soit A un évènement lié à une épreuve aléatoire donnant un schéma de Bernouilli
  2) On réalise n fois cette épreuve.
  3) Les n épreuves sont indépendantes

  Alors, si X est la var donnant le nombre de succès, $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

- Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

5.4 Loi de Poisson

- Une var X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ quand :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

  on note que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- Domaine d'application :

  1) Il est très rare d'avoir deux succès simultanément (voire impossible)
  2) Le nombre moyen de succès pendant une période de temps T ne dépend que de la durée
  3) L'arrivée d'un succès est indépendant du précédent (et ainsi de suite)

  Alors, si X est le nombre de succès durant T et λ le nombre moyen de succès durant T, on a $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

- Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$ et $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

5.5 Exercices

Exercice 1

Dans un jeux vidéo, on vise une cible circulaire avec un rayon laser. La cible est formée de trois cercles concentriques, de rayons $r_1 = 10$, $r_2 = 20$ et $r_3 = 30$. Le disque de rayon r_1 est colorié en rouge, la couronne de rayon $r_2 - r_1$ en vert et la couronne de rayon $r_3 - r_2$ en bleue. Chaque rayon laser touche la cible et une probabilité est proportionnelle à l'aire de la zone touchée.

1. Calculer, pour un lancer et pour chaque zone la probabilité de toucher cette zone.
2. Une partie se déroule en deux lancers. A chaque lancer, si l'on touche la zone rouge, on marque 10 pts, la zone verte 5 pts et la zone bleue 1 pt.On appelle X la var qui, à chaque partie, associe le nombre de points obtenus. On suppose que les résultats des deux lancers sont indépendants.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de X
   c. Calculer $E(X)$

Exercice 2

Dans une urne, on a placé 20 boules, dont 4 noires. On tire successivement, avec remise, 8 boules de l'urne. Soit X la var qui est égal au nombre de boules noires tirées.

1. Calculer la probabilité de tirer exactement une boule noire
2. Calculer la probabilité de ne tirer aucune boule noire
3. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule noire
4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Interpréter.

Exercice 3

Un évènement E se réalise avec une probabilité de 0.01. On répète n fois cet évènement, les résultats sont indépendants. Soit X la var qui à chaque épreuve associe le nombre de réalisations de E

1. Quelle loi suit X ?
2. Combien d'épreuves doit-on faire pour que la probabilité que E se réalise au moins une fois soit supérieure à 0.95.

Exercice 4

Sachant que le nombre moyen de communications téléphoniques reçues par un standard entre 10h et 11h est de 1.8 par minute et que les appels sont indépendants les uns des autres, calculer la probabilité pour qu'entre 10h45 et 10h46, il y ait :

1. aucun appel
2. un appel
3. au moins deux appels
4. plus de deux appels

Exercice 5

M.Donald gère un parc de 100 flippers placés dans des cafés/casino. Il a remarqué que, sur les 100 flippers, 20 n'avaient jamais eu de panne. On suppose que le nombre de pannes d'un flipper suit une loi de poisson

1. Calculer le paramètre λ à 10^{-1} près
2. Calculer la probabilité pour qu'un flipper ait plus de deux pannes

6 Série statistique à une et deux variables

6.1 Série statistique à une variable

6.1.1 Vocabulaire

- **Population** : ensemble que l'on observe et dont chaque élément est appelé **individu**
- **Échantillon** : c'est une partie de la population
- Le **caractère** étudié est la propriété que l'on veut observer sur la population. Il peut être **qualitatif** ou **quantitatif**
- La **fréquence** d'une modalité ou d'une valeur du caractère est le quotient de l'effectif de la modalité (ou valeur) par l'effectif total

6.1.2 Caractéristiques

- **Moyenne**
$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{N}, \qquad \text{où } N = \sum_{i=1}^{n} n_i$$
avec n_i le nombre de x_i avec $i \in [\![1, n]\!]$
- **Médiane** : permet de séparer en deux une série statistique. Si on ordonne la série par ordre croissant, la médiane M est :
1) x_k, avec $k = \lceil \frac{N}{2} \rceil$, si N est impair
2) $\dfrac{x_{k+1} + x_k}{2}$, avec $k = di\frac{N}{2}$, si N est pair
- **Mode** : valeur de la fréquence du caractère
- **Étendue** : si la série est ordonnée par ordre croissant, c'est $x_n - x_1$
- **Variance et écart-type**
$$V_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x})^2}{N} \qquad \text{et } \sigma_x = \sqrt{V_x}$$
- **Quartiles** : $Q(u)$ permet de séparer en 4 parts une série statistique. Si on ordonne la série par ordre croissant, $Q(u)$, $u = 0.25$ ou $u = 0.75$ est la valeur du terme x_k de cette série dont l'indice $k = \lceil Nu \rceil$ et $Q(0.5) = M$ la médiane.

  Notation $Q_1 = Q(0.25)$, $Q_2 = Q(0.5) = M$ et $Q_3 = Q(0.75)$

6.2 Série statistique à 2 variables : approximation par moindres carrés

6.2.1 Présentation

Cette fois-ci une population donnée possède deux caractères. Le but étant de déterminer un lien entre ces deux caractères (s'il existe !), de le quantifier, puis éventuellement de faire des prévisions (si le modèle est précis).

On notera les valeurs de ces deux caractères sous forme de couple (x_i, c_i) pour la population étudiée. On considérera un nuage de points $\{(x_i, c_i),\ i = 0, ..., n\}$ dans le plan.

6.2.2 Principe et critère des moindres carrés

Soient $\{(x_i, c_i),\ i = 0, ..., n\}$ un ensemble de $n+1$ points du plan. On cherche à construire une courbe qui approxime (ou approche) cet ensemble de points. Ces points pouvant provenir de mesures (donc contenir des erreurs expérimentales) ne nécessitent pas forcément d'être interpolés.

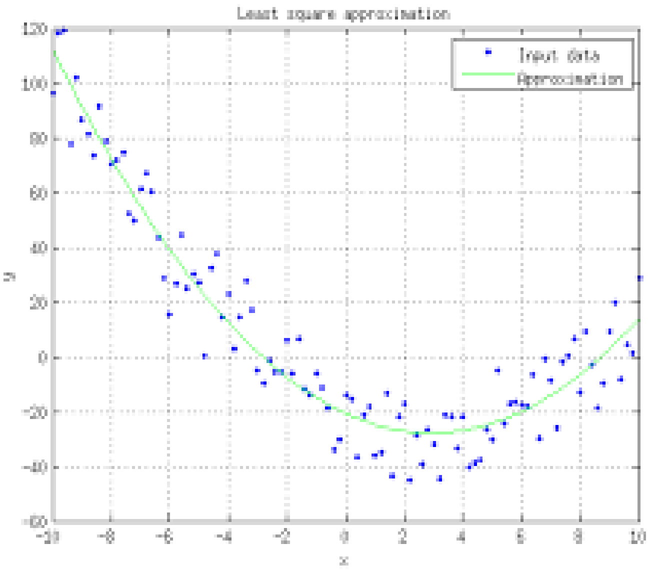

FIGURE 1 – Approximation polynômiale

On note $p(x)$ la fonction d'approximation appelée aussi modèle qui dépend de paramètres (dans la cas polynômial, ce sont les coefficients). Il s'agit donc de déterminer les paramètres les mieux adaptés afin que le modèle soit le plus précis possible (passe au plus près des points donnés).

La recherche de la meilleure approximation $p(x)$ est déterminée par le critère des moindres carrés qui consiste à rechercher le minimum de la fonction

$$\sum_{i=0}^{n} (c_i - p(x_i))^2$$

qui permettra le calcul des paramètres de $p(x)$ correspondant ainsi à l'ajustement du modèle par rapport aux points donnés.

6.2.3 Régression linéaire

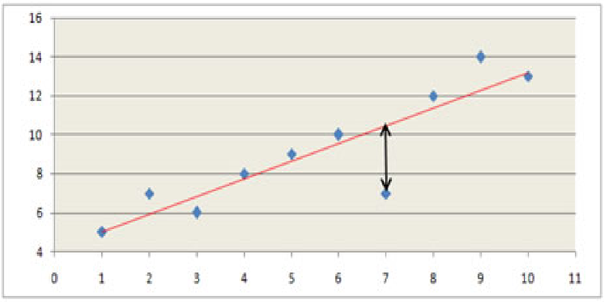

FIGURE 2 – Regression linéaire

On recherche la droite d'équation $y = ax+b$ la plus proche de $\{(x_i, c_i),\ i = 0, ..., n\}$ au sens des moindres carrés. En notant $e_i = c_i - (ax_i + b)$ l'erreur d'approche pour $x = x_i$, on cherche le minimum de

$$F(a,b) = \sum_{i=0}^{n} e_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (c_i - ax_i - b)^2$$

afin d'obtenir a et b les paramètres du modèle. Le minimum est atteint si

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0 \text{ et } \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0$$

Résolution du système linéaire d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = -2\sum_{i=0}^{n} x_i(c_i - ax_i - b) = 0 \\ \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = -2\sum_{i=0}^{n} (c_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

. C'est à dire

$$\begin{cases} a\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i c_i \\ a\sum_{i=0}^{n} x_i + (n+1)b = \sum_{i=0}^{n} c_i \end{cases}$$

En notant $\overline{x}$ et $\overline{c}$ les moyennes des x_i et c_i, de la dernière équation, on a

$$b = \overline{c} - a\overline{x}$$

En substituant dans la première équation, on a

$$a\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + (\overline{c} - a\overline{x})\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i c_i$$

En utilisant la variance,

$$V_x = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2$$

on a

$$a(n+1)V_x = (\sum_{i=0}^{n} x_i c_i) - (n+1)\overline{x}\,\overline{c}$$

et on déduit

$$a = \frac{(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i c_i) - (n+1)\overline{x}\,\overline{c}}{(n+1)V_x}$$

6.2.4 Généralisation aux modèles linéaires

A partir des données (x_i, c_i), $0 \leqslant i \leqslant n$, on introduit un modèle d'approximation linéaire plus général du type :

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x)$$

Les fonctions ϕ_j sont connues (ex : ln, exp, cos, monôme,...) alors que les coefficients α_j sont les paramètres à ajuster par rapport aux données concernées.
Un tel modèle est appelé linéaire de par son expression linéaire par rapport aux paramètres α_j.

Remarque : on retrouve le modèle de régression linéaire en posant $m = 1$, $\phi_0(x) = 1$ et $\phi_1(x) = x$. On a bien $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$.

Comme pour le calcul de regression linéaire, on applique le critère des moindres carrés qui consiste à rechercher le minimum de la fonction

$$\begin{aligned} S(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m) &= \sum_{i=0}^{n} (c_i - p(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n} (c_i - \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x_i))^2 \end{aligned}$$

Ce minimum est atteint lorsque les dérivées partielles de S par rapport à chaque coefficient α_k, $k = 0, ..., m$, sont nulles. On a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S(\alpha_0, ..., \alpha_m)}{\partial \alpha_k} = 0 \\ &2\sum_{i=0}^{n} (c_i - \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x_i))(-\phi_k(x_i)) = 0 \\ &\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x_i)\phi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_k(x_i) \\ &\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \sum_{i=0}^{n} \phi_j(x_i)\phi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) c_i \end{aligned}$$

En faisant varier $k = 0, ..., m$, on a un système linéaire de $m + 1$ équations à $m + 1$ inconnues α_j, $j = 0, ..., m$. D'où

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \sum_{i=0}^{n} \phi_j(x_i)\phi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) c_i, \text{ pour } k = 0, ..., m$$

signifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j \sum\limits_{i=0}^{n} \phi_0(x_i)\phi_j(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} \phi_0(x_i) c_i \\ ... \\ \sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j \sum\limits_{i=0}^{n} \phi_m(x_i)\phi_j(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} \phi_m(x_i) c_i \end{array} \right.$$

En posant la matrice $F = (F_{ji})_{\substack{0\leqslant j\leqslant m\\0\leqslant i\leqslant n}} = (\phi_j(x_i))_{\substack{0\leqslant j\leqslant m\\0\leqslant i\leqslant n}}$, on constate que

$$F(F^T) = (\sum_{i=0}^{n} \phi_j(x_i)\phi_k(x_i))_{\substack{0\leqslant j\leqslant m\\0\leqslant k\leqslant m}}$$

En posant les vecteurs $X^T = (\alpha_0 \ ... \ \alpha_m)$ et $C^T = (c_0 \ ... \ c_n)$, on obtient finalement

$$F(F^T)X = FC$$

Et avec $A = F(F^T)$, symétrique d'ordre $m+1$ et $Y = FC$, si A est inversible, on déduit

$$X = A^{-1}Y$$

6.3 Exercices

Exercice 1

On donne la série unidimensionnelle suivante, correspondant à la répartition des entreprises du secteur automobile en fonction de leur chiffre d'affaire en millions d'euros.

Chiffres d'affaires	$[0, 0.25[$	$[0.25, 0.5[$	$[0.5, 1[$	$[1, 2.5[$	$[2.5, 5[$	$[5, 10[$
Nombres d'entreprises	137	106	112	154	100	33

1. Calculer le chiffre d'affaire moyen et l'écart-type de la série.
2. Construire l'histogramme des fréquences.
3. Construire les deux polygones (croissant et décroissant) des fréquences cumulées
4. Calculer la médiane, les quartiles et la proportion d'entreprises dont le chiffre d'affaire est supérieur à 3 millions d'euros.

Exercice 2

Donner deux exemples de series statistiques unidimensionnelles telles que :

1. pour la première, il est plus pertinent de calculer la médiane plutôt que la moyenne.
2. pour la seconde, il est plus pertinent de calculer la moyenne plutôt que la médiane.

Exercice 3

Soient les points $\{(1,1),(2,3),(4,5),(6,10),(7,15)\}$. A l'aide du critère des moindres carrés, calculer la droite d'approximation affine de cet ensemble de points. Retrouver ce résultat en traduisant le problème matriciellement.

Exercice 4

Soient les points $\{(0,7),(1,4),(2,2),(4,4),(6,12)\}$. Placer les points et choisir un modèle d'approximation linéaire. A l'aide du critère des moindres carrés, calculer les paramètres du modèle choisi.

Exercice 5

L'indice moyen d'un salaire a évolué de la façon suivante :

année	1	2	3	4	5	6	7
indice	165	176	193	202	222	245	253

1. Représenter cette série statistique par un nuage de points.
2. En utilisant la méthode des moindres carrées, calculer l'équation de la droite représentant l'indice en fonction de l'année.
3. Comment pourrait-on prévoir l'indice à l'année 9 ?

Prévoir un **TP**, pour étudier une population à effectif élevé.