Cours d'Arithmétique
division

BTS SIO

Table des matières

1 Division euclidienne

Théorème 1.1 (Division euclidienne)**.** *Pour tout entier naturel a et tout entier naturel non nul b, il existe des entiers uniques q et r tels que :*

$$a = bq + r \quad \textit{avec} \quad 0 \leq r < b.$$

Définition 1.1 (Quotient et reste)**.**
— *q : quotient de la division euclidienne de a par b.*
— *r : reste de cette division.*

Remarque 1.1. *On peut lire : « q est le nombre de fois entier que b rentre dans a ; r est ce qui reste, toujours plus petit que b. »*

Exemple 1.1. $145 \div 11$ *: on a* $145 = 11 \times 13 + 2$*. Donc* $q = 13$*,* $r = 2$*.*

Exercices

1. Effectuez les divisions euclidiennes suivantes : $37 \div 5$, $128 \div 12$, $256 \div 17$, $523 \div 9$, $999 \div 25$.
2. Vérifiez si les égalités suivantes sont bien des divisions euclidiennes : $792 = 21 \times 37 + 15$, $807 = 21 \times 37 + 30$, $819 = 21 \times 37 + 42$.
3. Alphabet répété : quelle est la 10 000^{e} lettre écrite en répétant l'alphabet ? Combien d'alphabets complets sont écrits ?
4. Mise en page : un texte a 6245 lignes. a) Avec 72 lignes par page, combien de lignes comporte la dernière page ? b) Avec 95 pages dont la dernière fait 52 lignes, combien de lignes ont les autres pages ?

2 Multiples et diviseurs

Définition 2.1. *Soient* $a, b \in \mathbb{Z}$ *avec* $b \neq 0$ *:*

— a *est un multiple de* b *si* $\exists k \in \mathbb{Z},\ a = b \times k$.

— b *est un diviseur de* a *si* a *est multiple de* b.

Notation : $b \mid a$ *ou* $b \nmid a$.

Exemple 2.1. $24 = 6 \times 4 \Rightarrow 6 \mid 24$ *et* $4 \mid 24$.

Exercices

1. Dire si vrai/faux : $5 \mid 45$, $7 \mid 50$, $12 \mid 144$, $8 \mid 260$, $19 \mid 190$.
2. Même consigne : $-4 \mid 20$, $6 \mid -54$, $0 \mid 15$, $15 \mid 0$, $-7 \mid -49$.
3. Donner l'ensemble des diviseurs de : 18, 28, 36, 47.
4. Donner un nombre entre 20 et 30 ayant : a) 2 diviseurs ; b) 3 diviseurs ; c) 4 diviseurs.
5. Montrer : a) si n est pair, n^2 est pair. b) si n est impair, n^2 est impair.
6. Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 3.
7. Vérifier la divisibilité par 7 des nombres : 203, 532, 1001, 245.

3 Critères de divisibilité

— Par 2 : dernier chiffre pair.

— Par 3 : somme des chiffres divisible par 3.

— Par 4 : deux derniers chiffres divisibles par 4.

— Par 5 : dernier chiffre = 0 ou 5.

— Par 6 : divisible par 2 et 3.

— Par 9 : somme des chiffres divisible par 9.

— Par 10 : dernier chiffre = 0.

— Par 11 : différence (somme chiffres impairs – somme chiffres pairs) multiple de 11.

— Par 7 : règle des dizaines + 5× unités.

Corrigés des exercices

Division euclidienne

- $37 = 5 \times 7 + 2$; $128 = 12 \times 10 + 8$; $256 = 17 \times 15 + 1$; $523 = 9 \times 58 + 1$; $999 = 25 \times 39 + 24$.
- Seules la première égalité est une vraie division euclidienne ($r = 15 < 21$). Les autres ont un reste trop grand.
- $10000 = 26 \times 384 + 16$; donc 384 alphabets complets, et la 16$^{\text{e}}$ lettre est P.
- a) $6245 = 72 \times 86 + 53 \to$ dernière page : 53 lignes. b) 6193 lignes sur 94 pages $\to$ 65 lignes/page + dernière de 52 lignes.

Multiples et diviseurs

- Vrai, Faux, Vrai, Faux, Vrai.
- Vrai, Vrai, Faux, Vrai, Vrai.
- $\text{Div}(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; $\text{Div}(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$; $\text{Div}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$; $\text{Div}(47) = \{1, 47\}$.
- 23 (premier), 25 (5^2), 21 (3×7).
- a) $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \to$ pair. b) $n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = 4k^2+4k+1 = 2m+1$ $\to$ impair.
- $n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1) \to$ divisible par 3.
- Tous les nombres donnés sont divisibles par 7.