概率论与数理统计 C（试卷 A）答案

一、 填空题（每题 3 分，共 24 分）

（1） 0.2； （2） 0.2 ； （3） $\frac{1}{2\pi}$ ； （4） 26;

（5）$N(1-\mu,13\sigma^2)$； （6） 2； （7）$\frac{1}{12}$； （8）6.58

二、 单选题（每题 3 分，共 21 分）

1. D； 2. B 3. C 4. B 5. A 6. C 7. D

三、 计算应用题（共 58 分）

1. 共 6 分

(1) 事件 A_i ="抽出的两份调查表来至第 i 个地区." B_1 = 表示了解，

则 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3};$ ………………………..1’

$P(B_1|A_1)=\frac{3}{10}$, $P(B_1|A_2)=\frac{7}{15}, P(B_1|A_3)=\frac{5}{25}$ ………………………..1

由全概率公式:

$P(B_1)=\frac{1}{3}(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25})=\frac{29}{90}$ ……………………….2’

(2) $P(A_i|\bar{B}_1)=\dfrac{\frac{1}{3}P(\bar{B}_1|A_i)}{P(\bar{B}_1)}$, $P(\bar{B}_1|A_3)=1-\frac{5}{25}=\frac{4}{5}$

来至第三个地区的可能性最大。 ……………………..2

2. 共 9 分

(1) $1=\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-|x-1|}dx=\int_{-\infty}^{1}Ae^{x-1}dx+\int_{1}^{+\infty}Ae^{1-x}dx=2A.$ ……………………….2’

$A=0.5$ ……………………… .1

(2) $x\le 1, F(x)=\int_{-\infty}^{x}Ae^{x-1}dx=\frac{1}{2}e^{x-1};$ ……………………….2’

$x>1, F(x)=\int_{-\infty}^{1}Ae^{x-1}dx+\int_{1}^{x}Ae^{1-x}dx=1-\frac{1}{2}e^{1-x};$ ……………………….2’

(3) $P=F(1)-F(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$ ………………..2’

3. 共 12 分

(1) $P(i,i)=\frac{1}{3}, i=1,2,3;$ …………………..1’

$P(i,j)=\frac{2}{9}, j<i$ …………………..2’

$P(i,j)=0, i<j$ …………………..1

Z2 \ Z1	1	2	3
1	1/9	2/9	2/9
2	0	1/9	2/9
3	0	0	1/9

（2）边缘分布　每个 2 分。

Zi	1	2	3
Z1	1/9	3/9	5/9
Z2	5/9	3/9	1/9

(3) $EZ_1=\frac{22}{9}, DZ_1=\frac{38}{81}$ ……………………………3’

(4) 不独立 ......………1’

4. 共 8 分

(1) 当$y\le 0, F(y)=0$ ………………1’

当$y>0, F(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-y}^{y}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{0}^{y}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$ …………………….2’

$f_Y(y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, y>0$ …………………….2’

$f_Y(y)=0, y\le 0$ …………………….1’

(2) $E|X|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$ …………………….2

5. 共 12 分

(1) 联合密度 $f(x,y)=\begin{cases}0, & 其他;\\ \dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1.\end{cases}$ ………………………1

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{(1-x^2)}, -1\le x\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases},$$ ……………………2'

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},\quad -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$$ ……………..2'

(2) $EX=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx=0$ .. ..……….2'

$$EXY^2=\int_{-\infty}^{\infty} xy^2 f(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} xdx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2dy=0$$ ......……….2'

(3)
$$P((x,y)\in R)=\iint_R f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}-|x|dx=\frac{1}{4}$$
…………………3

6. 共 8 分

(1) $EX=0, EX^2=\sigma^2$ ……………………………..1'

令$\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum X_i^{\,2}$,解得$\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum X_i^{\,2}}$ ………………………2;

(2) $L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}\right)\quad=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^2}$ ………………………….2'

取对数得，$\ln L(\sigma)=-\dfrac{n}{2}\ln 2\pi-n\ln\sigma-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^{\,2}$ …………………………..2'

求导得$\dfrac{1}{\sigma^3}\sum x_i^{\,2}-\dfrac{n}{\sigma}=0$， ,

$\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum x_i^{\,2}}$ ………………………………1'