DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico I

Rankeo

Métodos Numéricos
Primer Cuatrimestre (modalidad virtual) - 2020

Integrante	LU	Correo electrónico
Alexis Wolfsdorf	529/17	alexiswolfsdorf@gmail.com
Diego Senarruzza	449/17	diegosenarruzza@gmail.com
Tomás Ortner	147/17	tomyortner@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://www.fcen.uba.ar

Índice

1 Introducción

En el mundo del deporte existen momentos durante el transcurso de una liga, o torneo, en el que se necesita determinar cual o cuales de los equipos son candidatos a ganar (no solo importa quien se lleva el primer puesto, otras posiciones también necesitan ser consideradas). En el fútbol argentino, conocer la posición en la liga de cada equipo determina quienes pasaran a competir en los torneos internacionales, y quienes descienden. En el fútbol americano, se da el caso de que las posiciones de los equipos al finalizar la temporada determinan las prioridades a la hora de contratar nuevos talentos de las universidades.
Son precisamente los intereses en juego, los que hacen que haya que prestar atención a la hora de determinar la posición de los equipos. Para realizar esta comparación entre equipos, se confeccionan las *Tablas de posiciones* y *Rankings*, las cuales se basan en los resultados obtenidos por los equipos durante la competencia (a veces también se tienen en cuenta datos históricos u otro tipo de datos).

1.1 El problema

La confección de rankings no siempre resulta sencilla o trivial, existen distintos métodos y enfoques dependiendo de el deporte, el formato de competencia, o la naturaleza de los datos a comparar (algunos de ellos [1], [2]). Idealmente, quisiéramos que estos rankings se conformen únicamente con la información de victorias y derrotas de cada equipo, y que factores tales como puntajes históricos u opinión pública no se vean involucrados en la medición.
A lo largo de este trabajo, expondremos y desarrollaremos tres métodos distintos para conformar estos rankings, basándonos en resultados reales de temporada en distintos deportes.

- Winning Percentage (WP)
- Winning Percentage, variante con Laplace (WPL)
- Colley Matrix Method (CMM)

Realizaremos un análisis de los mismos mediante distintas experimentaciones, lo cual nos permitirá comparar y, de manera subjetiva pero justificada, decidir si alguno de ellos es mejor que otro.
Los algoritmos utilizados para cada método serán desarrollados en **C++**, mientras que las experimentaciones serán realizadas y medidas en **python**.
Es importante mencionar que ninguno de los métodos o implementaciones tiene en cuenta los empates entre equipos, solo se acepta que un equipo pueda ganar o perder.

2 Winning Percentage (WP)

Como ya hemos mencionado, a lo largo de este trabajo iremos recorriendo algunos métodos y definiciones acerca de como obtener un ranking. Sin embargo no podríamos abordar estas cuestiones si no empezamos desde el principio.
Con esto no nos referimos al comienzo de los rankeos (lo cual remontaría casi hasta el comienzo de la estadística), sino al método estadístico más sencillo (o básico) que existe para calcularlos.
En los deportes, un *winning-percentage* es la fracción de partidos que un equipo (o deportista) ha ganado. Se define como las victorias divididas por el número total de partidos jugados (victorias mas derrotas) $\frac{w}{P}$ (con P total de partidos jugados).

El método es sumamente sencillo y representa un calculo rápido y factible para determinar posiciones, además de implicar una implementación de las mismas características (sin importar el lenguaje en el que se este desarrollando).
Este último punto puede también considerarse una desventaja, planteamos el siguiente escenario. Supongamos que el equipo A gana en la primer fecha, y que el equipo B pierde, si ambos se enfrentan en la segunda fecha, A tendrá probabilidad 1 de ganar, mientras que B tendrá 0. En pocas palabras, este método es poco objetivo a la hora de asignar probabilidades en las primeras fechas.
La sencillez no es lo único bueno que tiene este método, otra ventaja es que es libre de *bias*, es decir los equipos no son ponderados de ninguna manera (por ejemplo con datos históricos, local o visitante, etc). Además a medida que avanzan las fechas se van acumulando más resultados, es decir tenemos una mayor muestra para medir nuestra probabilidad y en consecuencia, la probabilidad de cometer un error disminuye.
Un ejemplo de un problema generado por esto puede verse en deportes en los que se juegan torneos nacionales, en los que equipos de distintas categorías están involucrados. No sería lógico que un equipo de 4ta división de Inglaterra (que tiene buen promedio en victorias en la temporada), tenga tantas posibilidades de vencer a un equipo de la Premier League.

3 Winning Pecentage, variante con Laplace (WPL)

La variante con Laplace representa una extensión natural de *winning-percentage*. Pretende solucionar algunos de los problemas presentados en su predecesor.
La fórmula es similar, pero en lugar de sumar las victorias directamente, a estas se les suma 1, y en lugar de dividir por el total de partidos jugados, a este se le suma 2, uno perdido y uno ganado: $\frac{w+1}{P+2}$.
Un ejemplo de lo que esto resuelve, es el problema de la primer fecha. Todos los equipos del torneo empiezan con una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de ganar el primer partido (lo que tiene mucha lógica). Cuando el equipo A gana el primero, y el B lo pierde, al enfrentarse en la segunda fecha A se presenta con una probabilidad de $\frac{2}{3}$ de ganar, mientras que B con $\frac{1}{3}$. Es decir, este método otorga posibilidad más lógicas a los equipos/jugadores en las primeras fechas.

Sin embargo seguimos acarreando algunos de los problemas de su predecesor, como necesitar de muchos partidos jugados para conseguir un buen estimador, o cuando dos equipos de distintas categorías se enfrentan.

4 Colley Matrix Method (CMM)

4.1 Introducción

A menudo equipos periodísticos, corredores de apuestas o incluso entrenadores, ponderan los equipos a la hora de realizar sus predicciones, ya sea por la historia, la tradición, el estado físico de algún jugador, etc. Como contrapartida CMM es un método que solamente utiliza los resultados de los partidos como dato para realizar su estadística, mas específicamente, quien gano y quien perdió (sin importar el margen de victoria o derrota). Esto hace que los resultados obtenidos se encuentren de alguna manera "libre de sesgos" al centrarse mas en el "mérito" de cada equipo en el campeonato (por este motivo, a CMM también se lo llama *bias free*).
Éste fue le método de rankeo oficial durante los *Bowl Games* entre 2001 y 2006, y se detalla con claridad en su web [3]. Esencialmente, CMM construye y resuelve un sistema de ecuaciones lineales. Cada ecuación en el sistema se corresponde con un equipo participante del torneo/liga, y el resultado respectivo será el ranking de ese equipo.
Para construir el sistema de ecuaciones, tal como se describe en CMM, utilizaremos el resultado probabilístico de la *Regla de Sucesión de Laplace*. Esta regla nos permite determinar la probabilidad de victoria de un equipo que haya jugado **P** partidos y haya ganado **W**. El calculo clásico ante estos datos sería el de calcular la probabilidad como $\frac{W}{P}$, sin embargo Laplace establece que el calculo de $\frac{W+1}{P+2}$ sería un mejor estimador que este, al dejar siempre un margen de probabilidad de perdida, sin importar que el el equipo haya ganado todos los partidos hasta el momento.
Sea $\Gamma = \{1, 2, ..., T\}$ los **T** equipos que participan en la competencia, n_{ij}, $1 \leq i, j, \leq T$ la cantidad de partidos jugados entre el equipo **i** y **j**, y sean w_i y l_i el número de partidos ganados y perdidos del equipo **i** respectivamente. Definimos $\forall i, j \in \Gamma$:

$$C_{ij} = \begin{cases} -n_{ij}, & \text{if } i \neq j \\ 2 + n_{ij}, & \text{if } i = j \end{cases} \tag{1}$$

$$b_i = 1 + \frac{(w_i - l_i)}{2} \tag{2}$$

Notemos que en este modelo el empate no es un resultado posible, por lo tanto

$$n_{ii} = w_i + l_i = \textit{cantidad de partidos jugados del equipo i.}$$

En lo que compete a este trabajo es la resolución del sistema $\mathbf{Cr} = \mathbf{b}$, donde $r \in \mathbb{R}^T$ es el ranking buscado, aplicando la técnica de *Eliminación Gaussiana* [5].

4.2 Cuestiones a tener en cuenta

La ecuación definida en **(1)** nos describe la matriz sobre la cual debemos resolver el sistema lineal, ¿Cómo podemos asegurar que este sistema tenga solución?, para eso analicemos la matriz **C**.
Para todo n_{ij}, excepto la diagonal, su valor será **0 - cantidad de partidos jugados entre el equipo i y j**, notemos que esto es lo mismo que $-n_{ji}$, dado que esto es cierto para todos los elementos, la matriz **C** es **simétrica**.
Cada elemento de la diagonal en cambio está definido como la cantidad de partidos jugados por el *i-ésimo* equipo más 2. Notemos con esto la siguiente propiedad:

$$\sum_{j=1}^{T} |-n_{ij}| \leq |n_{ii} + 2| \tag{3}$$

Cada elemento en la diagonal (en modulo) es mayor que el modulo de la suma de los elementos restantes en la fila, esto quiere decir que estamos frente a una matriz **estrictamente diagonal dominante**.

Como método para resolver este sistema mencionamos que vamos a utilizar la eliminación Gaussiana. Por propiedad sabemos que toda matriz estrictamente diagonal dominante tiene factorización LU, por lo tanto puede ser triangulada siguiendo este algoritmo.
Notemos que esta propiedad nos garantiza el no necesitar permutaciones para resolver la triangulación, de esta forma podemos asegurar una factorización LU sin una P (matriz) para permutar.
Dado que la matriz en cuestión cumple con estas propiedades, podemos garantizar que existe una solución al sistema, que es única, y que podemos hallarla mediante eliminación Gaussiana.

4.3 Desarrollo

Antes de adentrarnos en temas que competen puramente a la implementación de nuestros algoritmos, enumeremos lo que ocurre desde que los datos ingresan a nuestro programa, hasta la salida con el ranking deseado:

1 Leemos la lista de partidos jugados, y guardamos en memoria un *array* de un pequeña *clase* (al cual llamamos *partido*) con la información de cada uno (fecha, equipos y puntaje obtenido por cada uno).

2 Armamos la matriz **C** recorriendo la lista de partidos asignándole a cada equipo un número único entre $\{0, ..., T-1\}$ correspondiente con el id de equipo, y el vector **b** según lo descrito anteriormente.

3 Aplicamos el algoritmo de eliminación Gaussiana, el cual nos deja una matriz triangulada (con su correspondiente **b**).

4 A partir del **C** triangulado y el **b** resultante, aplicamos un algoritmo para resolver el sistema y obtener una lista con los rankings finales.

5 Devolvemos el resultado acorde al formato de salida esperado.

4.3.1 Estabilidad de las cuentas

Al resolver sistemas lineales utilizando aritmética finita, como es la de cualquier computadora, siempre nos encontraremos con el problema de la representación numérica. Es sabido que la aritmética de una computadora trabaja en base binaria, por lo que números racionales como 1.3, pasan a ser irracionales en esta base (1.0100110011...).
Cuando ejecutamos múltiples operaciones seguidas (suma, resta, multiplicación y división) vamos acumulando estos errores, por lo que perdemos precisión en el resultado final. Aunque esta perdida suele ser despreciable para muchos algoritmos, no es el caso la *Eliminación Gaussiana*. Realizar esta triangulación requiere un total de $O(n^3)$ operaciones, de modo que si no controlamos este error, el resultado puede diferir en gran medida del real.
La perdida de precisión es algo que queda fuera de nuestro alcance, pues es algo inherente en la aritmética finita, en cambio podemos intentar minimizar este error. ¿Como? observemos el siguiente gráfico:

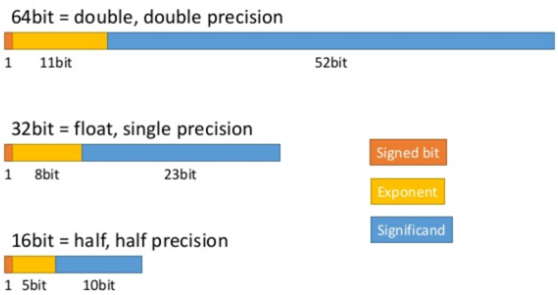

Figure 1: Diferencias de precisión

Existen tipos de dato de distinta capacidad para manejar números decimales, entre los más conocidos están *float* de 32 bits y *double* de 64 bits. Por supuesto que todo el sistema planteado debe ser homogéneo respecto del tipo de dato utilizado, y como a priori no sabemos que tanta precisión necesitarán nuestros cálculos, definimos los tipos de las estructuras utilizadas para que todos ellos dependan de un tipo primitivo.

```
typedef double ranking_t;
#define matrix vector<vector<ranking_t>>
```

El margen de precisión para este método es de $10^{-}4$ (0.0001). Utilizando como tipo de dato *double* el modulo del error obtenido se mantiene por debajo de este umbral.

Elegir correctamente el tipo de dato a utilizar es importante para determinar la precisión con la que nuestras operaciones se realizarán, sin embargo, este no es el único factor a tener en cuenta. El orden de las operaciones también es un punto clave.
Para la construcción de la matriz **C** no necesitamos ninguna clase de precisión, puesto que solo son valores enteros (con tipo de dato *double* pero con matiza en cero), para el vector **b** hay que tener un poco más de cuidado ya que realizamos una división. La construcción de **b** se realiza al mismo tiempo que la construcción de la matriz, por lo que podemos descomponer la ecuación original (2) como:

$$1 + (0.5 * \sum w_i) - (0.5 * \sum l_i) \tag{4}$$

Es decir, cada vez que encontramos una victoria sumamos 0.5, y le restamos lo mismo cuando encontramos una derrota. Dado que 0.5 es un número que se puede representar con exactitud en binario, no surge ningún problema de redondeo a la hora de realizar las operaciones de esta manera.
Tanto en el algoritmo de eliminación Gaussiana como el algoritmo que resuelve el sistema (tomando la matriz triangular resultante) es más complicado tener control sobre las operaciones. Para evitar realizar excesivos productos o divisiones intentamos, siempre que se pueda, aprovechar la propiedad de distribución de ambos, acumulando sumas y restas para al final aplicar dichas operaciones. Por ejemplo en un sistema de 4x4, en el algoritmo que resuelve el sistema (a partir de la matriz triangulada), hacemos algo como lo que se muestra a continuación:

```
X[4] = b[4] / C[4][4]
X[3] = b[3] - C[3][4] * X[4]
X[3] = X[3] / C[3][3]
.
.
.
X[1] = b[2] - C[1][4]*X[4] - C[1][3]*X[3] - C[1][2]*X[2]
X[1] = X[1] / C[1][1]
```

Si bien de realizar todos los productos no nos podemos escapar, de un total de $O(n^2)$ operaciones solo realizamos $O(n)$ divisiones.

5 Experimentación

5.1 Diferencia de precisión

Hasta aquí hemos hablado sobre distintos métodos para calcular el ranking de equipos en una competencia. Si bien alguno es más elaborado que otro, eso no quita merito al resultado obtenido, pues a veces la simpleza es mas eficiente que lo complejo.
Debemos tener siempre en cuenta la importancia respecto a la precisión de las operaciones y del error que se puede acarrear con ellas. De los métodos que hemos implementado el *CMM* es sin duda el más elaborado, y por lo tanto el que más error acarrea (ya que realiza mas operaciones), sin embargo ni *WP* ni *WPL* se encuentran exentos de falta de precisión.
Nuestra intención sera entonces la de medir esta precisión, con el fin de poder ayudar a futuras decisiones acerca de que método elegir para alguna competencia.

Contamos con un conjunto de test para cada uno de los métodos, los cuales incluyen los datos de los equipos para realizar el ranking, y el ranking esperado. Dados estos conjuntos mediremos la diferencia de nuestros resultados contra los esperados tomando, para cada ranking, la diferencia en valor absoluto del ranking esperado contra el ranking obtenido, y dado que analizar individualmente el ranking obtenido en cada uno de los test no tendría demasiado sentido (ya que un único resultado no nos dice nada respecto del rendimiento global), tomaremos el promedio del ranking.

$$resultado\ del\ test = \sum_{i=1}^{T} \frac{|esperado_i - obtenido_i|}{T} \tag{5}$$

Dicho esto y dado que suponemos haber controlado correctamente el problema de precisión, tenemos un error mínimo al que aceptamos como valido para afirmar que nuestros algoritmos no generan un error que provoque una falla de precisión:

- Para *CMM*, esperamos obtener una promedio de error estrictamente menor que 10^{-4}.
- Tanto para *WP* como para *WPL*, los cuales realizan menos operaciones que el método restante, esperamos obtener un error promedio estrictamente menor que 10^{-7}.

En otras palabras, penalizamos la simpleza contra la complejidad según corresponda.
Es importante mencionar que, a diferencia de otro tipo de experimentos, en este caso solo ejecutaremos **una vez** cada test y nos quedaremos con ese resultado. La razón es quizás trivial, el resultado nunca varía, sin importar cuantas veces lo realicemos (al menos sobre una misma computadora como son estos casos).

5.1.1 Resultados

Empecemos por *CMM*, a continuación podemos ver el detalle de los resultados:

Table 1: Precisión CMM

Nombre del test	Cant. de Equipos	Cant. de Partidos	Diferencia obtenida
test1	6	13	0.00000001280866
test-prob-2	6	12	0.00000000952300
test-prob-1	6	11	0.00000001254863
test2	6	10	0.00000001489541
test_completo_10_1	10	45	0.00000000538957
test_completo_100_4	100	12410	0.00000082638561
test_completo_100_8	100	22318	0.00000246762399
test_completo_1000_2	1000	749273	0.00001493596596
test_completo_1000_8	1000	2248231	0.00006738284039

La mayor perdida de precisión la encontramos en el último test, *test_completo_1000_8*, en donde el promedio de error nos dio menor a 10^{-4} y por lo tanto cumple con la cota que le impusimos.
Al observar los resultados en (1) surge una cuestión. Supongamos que en alguno de los rankings (por algún motivo) uno de los *scores* haya tenido un error grande, y que el promedio este diluyendo este error. La cuestión en realidad plantea una pregunta, ¿puede estar pasando esto?, y en caso de ocurrir, ¿es importante?. La respuesta rápida es que no.
La cantidad de partidos jugados va incrementando en cada uno de los test. Si en alguno de estos ocurriese este error, el mismo sería acarreado hasta el final de las operaciones realizadas, y por lo tanto o bien lo veríamos en el diferencia calculada, o bien resulta ser insignificante respecto del *score* del propio equipo (pues el mismo se “diluye” a lo largo de sus operaciones), y por lo tanto irrelevante.
Vayamos ahora con *WP* y *WPL*, vale la pena analizarlos al mismo tiempo. Para estos casos usaremos un conjunto de tests menor al anterior (debido a que tuvimos que calcularlo de “a mano”).

Table 2: Precisión WP y WP Laplace

Nombre del test	Cant. de Equipos	Cant. de Partidos	Dif WP	Dif WPL
test1	6	13	0.0	0.0
test-prob-2	6	12	0.0	0.0
test-prob-1	6	11	0.0	0.0
test2	6	10	0.0	0.0
test_completo_10_1	10	45	0.0	0.0

Los resultados son tal cual los vemos en (2), el experimento no mostró ningún margen de error respecto a los resultados esperados. Podemos decir que efectivamente ambos métodos se ajustan a las cotas propuestas. Sin embargo no nos interesa tanto saber **cual** es el resultado, sino más bien saber **por qué** fue tan preciso.
No hace falta analizar en demasiada profundidad para averiguarlo, ya que el propio desarrollo de los métodos nos los dice. En ambos casos lo que se hizo fue sumar los partidos ganados y dividirlos por el total de partidos jugados (con la respecta conversión en el caso de Laplace). Dado que el orden de las operaciones fue, sumar todos los partidos ganados y al final dividir por el total, reducimos la cantidad de operaciones al mínimo. Sabemos que al sumar números enteros no tenemos perdidas de precisión (excepto que sean números que superen la representación, lo cual no es el caso), y como solo realizamos una única división, tenemos un solo punto en donde podríamos perder precisión.
Tomar un conjunto más grande de datos tampoco haría la diferencia, pues se seguirían cumpliendo los mismos puntos.

5.2 Calidad de los métodos

Siempre que hablamos de un método de rankeo se nos puede venir a la cabeza el saber qué tan bueno es, lo que hace inevitable tender a compararlo con otros métodos.
En este informe planteamos pruebas basadas en datos empíricos de torneos reales en donde podremos notar si cada método tuvo una buena correlación con la realidad. Esto se basará en la cantidad de aciertos en los que el rankeo predecía el resultado del siguiente enfrentamiento de los equipos, con lo que finalmente ocurrió en esos enfrentamientos.
También utilizaremos un coeficiente de acierto. Definido como:

$$F_p = \begin{cases} |S_1 - S_2|, & \text{si acertó} \\ -\,|S_1 - S_2|, & \text{si no acertó} \end{cases} \tag{6}$$

Básicamente es el módulo de la diferencia entre las probabilidades de ganar que tenía el equipo 1 con las del equipo 2. En el caso de que ganara el equipo que predecía el método, nos quedaremos con esta diferencia. En cambio, si no acertó la predicción, con el negativo del módulo.

Así, además de contabilizar la cantidad de aciertos, analizamos que tantas probabilidades le daba a cada equipo de ganar. En el caso de que la diferencia de probabilidades hubiese sido baja (digamos que no se la "jugaba" por un equipo) y el método erraba el resultado, no se lo penalizaba tanto como si la diferencia hubiese sido más amplia (se la "jugó" por un equipo y falló).

Al final de cada tabla, contaremos el total de aciertos, y el promedio de los coeficientes de aciertos. Si nuestro promedio de coeficiente da positivo pero el total de aciertos es chico, será porque erró partidos en los que no estaba muy convencido, y/o que acertó partidos en los que al ganador lo elegía por amplio margen. Si tenemos un promedio de coeficiente negativo y muchos aciertos, será porque ganó partidos que estaban muy parejos y/o erró partidos donde elegía a un equipo por sobre el otro con un gran margen. En estos casos diremos que nuestro estimador tuvo un éxito medio. En los casos en los que obtenemos promedio de coeficiente positivo y muchos aciertos, diremos que nuestro estimador fue exitoso, y en los que tengamos promedio de coeficiente negativo y pocos aciertos, diremos que nuestro estimador fue un fracaso.

Para estos experimentos tomamos datos reales de los resultados del torneo de Basketball de la NBA 2016 (2015-2016). De estos datos tomamos 2 puntos de partida para hacer los siguientes experimentos:

- 5.2.1 Después de la primera fecha de enfrentamientos, donde esperamos ver diferencias entre los métodos de CMM, WP y WPL de manera más expuesta. Con esto queremos decir que esperamos notar:
  - Que el uso de CMM es bueno hasta en casos con pocos datos muestrales de partidos anteriores.
  - Los problemas que WP nos va a dar, en su mayoría (porque hay equipos que juegan mas de 1 vez), 1's y 0's. Esto generará que no tenga muchos aciertos.
  - La diferencia entre WP y WPL, es decir, que tanto influye usar Laplace.
- 5.2.2 Después de la ante última fecha, aquí querríamos notar que funcionan todos los métodos casi por igual, decimos esto porque se eligieron métodos de rankeo conocidos y usados, ninguno de estos es malo o no hacen lo que se espera, tienen casos buenos y malos, pero a la larga todos tendrían que tender a medir lo mismo.

5.2.1 Después de la primer fecha

Table 3: Aciertos CMM después de la primer fecha

Equipo 1	Resultado	Equipo 2	Score equipo 1	Score equipo 2	Acertó?	Coef
Memphis	112 - 103	Indiana	0.33928571428571	0.375	no	-0.036
Atlanta	112 - 101	New York	0.4	0.625	no	-0.225
LA Clippers	104 - 88	Dallas	0.625	0.625	no	0
Cleveland	102 - 92	Miami	0.51785714285714	0.625	no	-0.107
Oklahoma City	139 - 136	Orlando	0.625	0.375	si	0.250
Utah	99 - 71	Philadelphia	0.4	0.375	si	0.025
Toronto	113 - 103	Boston	0.625	0.625	no	0
Detroit	98 - 94	Chicago	0.7	0.73214285714286	no	-0.032
Atlanta	97 - 94	Charlotte	0.4	0.375	si	0.025
Washington	118 - 113	Milwaukee	0.625	0.375	si	0.250
San Antonio	102 - 75	Brooklyn	0.375	0.41071428571429	no	-0.036
Minnesota	95 - 78	Denver	0.625	0.625	no	0
Golden State	112 - 92	Houston	0.6	0.375	si	0.225
Sacramento	132 - 114	LA Lakers	0.375	0.375	no	0
Phoenix	110 - 92	Portland	0.375	0.6	no	-0.225
Utah	97 - 76	Indiana	0.4	0.375	si	0.025
Total de Aciertos: 6 de 16 (37.5%)			Promedio coeficiente: 0.009			

Table 4: Aciertos WP después de la primer fecha

Equipo 1	Resultado	Equipo 2	Score equipo 1	Score equipo 2	Acertó?	Coef
Memphis	112 - 103	Indiana	0.0	0.0	no	0
Atlanta	112 - 101	New York	0.0	1.0	no	-1.000
LA Clippers	104 - 88	Dallas	1.0	1.0	no	0
Cleveland	102 - 92	Miami	0.5	1.0	no	-0.500
Oklahoma City	139 - 136	Orlando	1.0	0.0	si	1.000
Utah	99 - 71	Philadelphia	0.0	0.0	no	0
Toronto	113 - 103	Boston	1.0	1.0	no	0
Detroit	98 - 94	Chicago	1.0	1.0	no	0
Atlanta	97 - 94	Charlotte	0.0	0.0	no	0
Washington	118 - 113	Milwaukee	1.0	0.0	si	1.000
San Antonio	102 - 75	Brooklyn	0.0	0.0	no	0
Minnesota	95 - 78	Denver	1.0	1.0	no	0
Golden State	112 - 92	Houston	1.0	0.0	si	1.000
Sacramento	132 - 114	LA Lakers	0.0	0.0	no	0
Phoenix	110 - 92	Portland	0.0	1.0	no	-1.000
Utah	97 - 76	Indiana	0.0	0.0	no	0
Total de Aciertos: 3 de 16 (18.75%)			Promedio coeficiente: 0.031			

Table 5: Aciertos WPL después de la primer fecha

Equipo 1	Resultado	Equipo 2	Score equipo 1	Score equipo 2	Acertó?	Coef
Memphis	112 - 103	Indiana	0.33333333333333	0.33333333333333	no	0.0
Atlanta	112 - 101	New York	0.33333333333333	0.6666666666666701	no	- 0.333
LA Clippers	104 - 88	Dallas	0.6666666666666701	0.6666666666666701	no	0.0
Cleveland	102 - 92	Miami	0.5	0.6666666666666701	no	-0.167
Oklahoma City	139 - 136	Orlando	0.6666666666666701	0.33333333333333	si	0.333
Utah	99 - 71	Philadelphia	0.33333333333333	0.33333333333333	no	0.0
Toronto	113 - 103	Boston	0.6666666666666701	0.6666666666666701	no	0.0
Detroit	98 - 94	Chicago	0.75	0.75	no	0.0
Atlanta	97 - 94	Charlotte	0.33333333333333	0.33333333333333	no	0.0
Washington	118 - 113	Milwaukee	0.6666666666666701	0.33333333333333	si	0.333
San Antonio	102 - 75	Brooklyn	0.33333333333333	0.33333333333333	no	0.0
Minnesota	95 - 78	Denver	0.6666666666666701	0.6666666666666701	no	0.0
Golden State	112 - 92	Houston	0.6666666666666701	0.33333333333333	si	0.333
Sacramento	132 - 114	LA Lakers	0.33333333333333	0.33333333333333	no	0.0
Phoenix	110 - 92	Portland	0.33333333333333	0.6666666666666701	no	-0.333
Utah	97 - 76	Indiana	0.33333333333333	0.33333333333333	no	0.0
Total de Aciertos: 3 de 16 (18.75%)				Promedio coeficiente: 0.01		

Aquí podemos notar varias cosas de las que hablamos anteriormente:

- El porcentaje de aciertos del método CMM (3) es mucho mejor que en los otros casos, esto muestra que este tipo de rankeo tiene un mejor entendimiento de los resultados en las primeras fechas del torneo que otros métodos más simples.
- Se ve lo que queríamos ver en el caso del método WP (4), casi todos los equipos aparecen con un puntaje de 1 o 0, esto deja en vista un claro sesgamiento del método.
- Entre WP(4) y WPL (5), la diferencia entre estos métodos se encuentra en los scores obtenidos, no así en el porcentaje de aciertos de cada ranking.
- Aún teniendo solo 3 aciertos, los promedios de coeficientes de WP y WPL son positivos y hasta mejores que el del CMM. Esto se debe a la cantidad de empates que pronosticaban (es decir, equipo1 vs equipo2, ambos tenían el mismo score).

5.2.2 Después de la ante última fecha

Table 6: Aciertos última fecha CMM

Equipo 1	Resultado	Equipo 2	Score equipo 1	Score equipo 2	Acertó?	Coef
Washington	124 - 81	Detroit	0.47674058296766997	0.5082577085329301	no	-0.032
Dallas	107 - 96	Charlotte	0.49376668394021006	0.5659957169120601	no	-0.072
Miami	124 - 119	Denver	0.57222825110249	0.4323223853533	si	0.140
Chicago	109 - 107	Toronto	0.50740840048821	0.6647823102373399	no	-0.157
Houston	130 - 81	Memphis	0.50338257657567	0.57094509001024	no	-0.068
Oklahoma City	128 - 94	Portland	0.6501953244433001	0.5210264895641	si	0.129
Utah	94 - 85	Cleveland	0.47712225629024996	0.70290997198364	no	-0.226
Phoenix	107 - 104	Minnesota	0.29166627305928006	0.32793102034608	no	-0.036
Golden State	125 - 107	New Orleans	0.8736895389079801	0.3841532924453	si	0.490
Indiana	103 - 98	Boston	0.54083991052217	0.57294353835916	no	-0.032
Orlando	116 - 110	Denver	0.42488081833271996	0.4323223853533	no	-0.007
Brooklyn	131 - 114	Philadelphia	0.28605425274025	0.15605313285932998	si	0.130
Toronto	107 - 89	Milwaukee	0.6647823102373399	0.43891036165152	si	0.226
San Antonio	108 - 87	LA Clippers	0.79884713767618	0.6339314797515301	si	0.165
Sacramento	106 - 98	LA Lakers	0.40804505745523995	0.24127852969615998	si	0.167
Total de Aciertos: 7 de 15 (46.66%)			Promedio de coeficiente: 0.054			

Table 7: Aciertos última fecha WP

Equipo 1	Resultado	Equipo 2	Score equipo 1	Score equipo 2	Acertó?	Coef
Washington	124 - 81	Detroit	0.46153846153846	0.51515151515152	no	-0.054
Dallas	107 - 96	Charlotte	0.5	0.56923076923077	no	-0.069
Miami	124 - 119	Denver	0.57575757575757799	0.42424242424242	si	0.152
Chicago	109 - 107	Toronto	0.5	0.6875	no	-0.188
Houston	130 - 81	Memphis	0.5	0.5909090909090899	no	-0.091
Oklahoma City	128 - 94	Portland	0.6666666666666701	0.5223880597014899	si	0.144
Utah	94 - 85	Cleveland	0.46969696969697	0.7230769230769201	no	-0.253
Phoenix	107 - 104	Minnesota	0.25757575757576	0.31818181818182	no	-0.061
Golden State	125 - 107	New Orleans	0.90769230769231	0.36923076923077003	si	0.538
Indiana	103 - 98	Boston	0.53030303030303	0.5909090909090899	no	-0.061
Orlando	116 - 110	Denver	0.43076923076922996	0.42424242424242	si	0.007
Brooklyn	131 - 114	Philadelphia	0.27272727272727	0.13636363636364	si	0.136
Toronto	107 - 89	Milwaukee	0.6875	0.43283582089552003	si	0.255
San Antonio	108 - 87	LA Clippers	0.84848484848485	0.64615384615385	si	0.202
Sacramento	106 - 98	LA Lakers	0.38461538461538003	0.2089552238806	si	0.176
Total de Aciertos: 8 de 15 (53.33%)			Promedio coeficiente: 0.056			

Table 8: Aciertos última fecha WPL

Equipo 1	Resultado	Equipo 2	Score equipo 1	Score equipo 2	Acertó?	Coef
Washington	124 - 81	Detroit	0.46268656716418	0.51470588235294	no	-0.052
Dallas	107 - 96	Charlotte	0.5	0.56716417910448	no	-0.067
Miami	124 - 119	Denver	0.57352941176471	0.42647058823529	si	0.147
Chicago	109 - 107	Toronto	0.5	0.6818181818181801	no	-0.182
Houston	130 - 81	Memphis	0.5	0.58823529411765	no	-0.088
Oklahoma City	128 - 94	Portland	0.66176470588235	0.52173913043478	si	0.140
Utah	94 - 85	Cleveland	0.47058823529412	0.71641791044776	no	-0.246
Phoenix	107 - 104	Minnesota	0.26470588235294	0.32352941176471	no	-0.059
Golden State	125 - 107	New Orleans	0.8955223880597	0.37313432835821003	si	0.522
Indiana	103 - 98	Boston	0.52941176470588	0.58823529411765	no	-0.059
Orlando	116 - 110	Denver	0.43283582089552003	0.42647058823529	si	0.006
Brooklyn	131 - 114	Philadelphia	0.27941176470588	0.14705882352941002	si	0.132
Toronto	107 - 89	Milwaukee	0.6818181818181801	0.43478260869565005	si	0.247
San Antonio	108 - 87	LA Clippers	0.8382352941176501	0.6417910447761199	si	0.196
Sacramento	106 - 98	LA Lakers	0.38805970149253993	0.21739130434783	si	0.171
Total de Aciertos: 8 de 15 (53.33%)				Promedio coeficiente: 0.054		

En este caso de experimentación podemos notar una discrepancia respecto del resultado que esperábamos. Se nota una superioridad en los métodos más simples (7) y (8) sobre el CMM (6). Una explicación a esto puede encontrarse si lo analizamos desde el campo de la probabilidad y estadística. La Ley de Grandes Números [6] nos indica que el promedio de un conjunto muestral siempre tiende a la esperanza de la distribución. Dado que ambos estimadores (WP y WPL) son calculados mediante el promedio y que la cantidad de partidos involucrados es suficientemente grande (con que sea mayor a 30 es suficiente), es natural encontrarse con este resultado.
Respecto a los promedios de los coeficientes podemos observar los 3 son muy parejos. Más aún, observamos que CMM a pesar de tener un acierto menos que WPL, tienen el mismo promedio de coeficiente. Esto se debe a que el partido que CMM no pudo acertar (6), no estaba muy decidido sobre cual de los dos equipos debía ganar. Además, en todos los otros partidos que ninguno de los dos métodos pudieron acertar, CMM tenía probabilidades más parejas. Esto es lo que termina generando este empate en el promedio de sus coeficientes.

Otra observación es que los promedios de los coeficientes en la penúltima fechas son varias veces mas grandes que en la segunda fecha. Tambien su total de aciertos. Esto se debe a que para la etapa final de la temporada, tenemos más datos para analizar, ya que estos métodos no utilizan datos de temporadas anteriores.

Como conclusión de estos experimentos, podríamos decir que WP salió "ganador" respecto de las predicciones para el próximo partido.
Por supuesto, que esto no indica que sea un estimador superior a los otros, todavía quedan puntos por analizar entre ellos.

5.3 El favorito

Hasta aquí, hemos estado comparando a los métodos intentando ver, bajo ciertos criterios, cual es mejor. Pero también podemos preguntarnos, ¿que pasa dentro del propio ranking? es decir, ¿los resultados reflejan correctamente la posición de los equipos en el torneo?
Usemos como referencia nuestro experimento anterior. Tomamos el ranking de la primer fecha y calculamos el score para la segunda, hacemos lo mismo con la ante última fecha y la ultima respectivamente. En la presentación de *WP* (2) y *WPL* (3), mencionamos la principales falencias de estos métodos, por lo cual podemos determinar con certeza las posiciones de los equipos ganadores y de los equipos perdedores (o mejor dicho, su score al cabo de la primer fecha).
No tanto así cuando del *CMM* (4) se trata, ya que el rating de un equipo depende del rating contra los que jugó, es decir que ganar contra un equipo que haya ganado es más "importante" que ganar contra un equipo que perdió. Análogamente perder contra un equipo que viene perdiendo resta más puntaje que perder contra un equipo que va en el podio del ranking.

Dados estos los dos rankings descriptos (el de la segunda y el de la última fecha) podemos pronosticar los resultados que veremos.

- Segunda fecha: tanto *WP* como *WPL* pronosticarán resultados mas bien binarios, dado que no tienen suficiente información acumulada para determinar un correcto score a cada equipo. *CMM* sin embargo nos mostrará resultados mas bien parciales.
- Ultima fecha: llegados a este punto ningún método tiene ventaja sobre otro, cuando tendemos los tres al infinito, los resultados son prácticamente los mismos *(la temporada con la que se calcularon los resultados tiene 1002 partidos, suficiente para hacer tender la probabilidad).*

5.3.1 Análisis de los resultados

Los resultados los podemos ver en (9) ranking de la segunda fecha y en (10) ranking de la última fecha.

Empecemos por la segunda fecha (9), *WP* no nos brinda ninguna información relevante, ya que tal como mencionamos sus predicciones son binarias, 0 si el equipo perdió su primer partido y 1 si lo ganó (el caso de *Cleveland* con 0.5 puntos es porque jugo 2 partidos en un mismo conjunto de fechas).
Nos llevamos una sorpresa sin embargo, al notar que tanto *WPL* como *CMM* tienen predicciones similares, y es que al momento de armar nuestras conjeturas nos olvidamos un detalle importante, ambos métodos son muy similares en las primeras (2 o 3) fechas, y con mucho sentido. La información que tenemos del campeonato es poca, por lo que *CMM* deja a todos los equipos dentro del mismo rango de probabilidad (si un equipo gano, solo gano un partido, respectivamente si perdió, por lo que todavía no es un dato relevante para esta estadística), por su parte el *WPL* realiza sus cálculos de manera muy similar, ya que ambos están basados en la *regla de Laplace*.
Estas no son todas las conclusiones que podemos extraer de este análisis. Si prestamos atención a lo que hemos mencionado al principio notaremos que, en el caso de CMM, los cálculos de los rankings se ven condicionados respecto de los resultados de otros equipos. ¿Podríamos entonces afirmar que este método no es "justo", con equipos que hayan ganado pocos partidos?, la respuesta a nuestro parecer es que no exactamente. Esta es la forma en que *CMM* penaliza, de alguna manera más "light" que simplemente descontarles puntos, a aquellos equipos que no han hecho suficiente merito por estar primeros. En realidad, podríamos decir que su voto de confianza en ese equipo disminuye en tanto menos partidos gane, y sin embargo al ganarle a un equipo con buen puntaje lo favorece. Del otro lado el caso es análogo.

Miremos ahora la última fecha (10). Rápidamente podemos notar que los 3 rankings son muy similares, lo cual tampoco es una sorpresa. No esperábamos notar grandes diferencias en la etapa final del campeonato, y es que en los casos tanto de *WP* como *WPL*, el score es determinado por un par de algoritmos casi estáticos, los cuales no aportan ningún tipo de peso o sesgo a su propia estadística. En el caso del algoritmo para *CMM*, cualquier discrepancia o error al haber otorgado más "confianza" a un equipo que a otro ya se habrá diluido. Por lo tanto no es raro encontrar que los resultados son similares, en el fondo todos convergen a lo mismo.

5.3.2 Un pasito más

Retomemos CMM y al resultado anterior. Ya hemos hablado de como, de alguna manera, este método pondera las victorias y derrotas dentro de su ranking. Observemos el resultado de la ante última fecha (10), y propongámonos considerar una estrategia ganadora para la temporada **2016-2017** (la próxima temporada).
Supongamos que somos asesores de *Brooklyn*, un equipo que ha quedado entre los peores de la temporada anterior. Sabemos que ganar todos los partidos, es una realidad difícil de alcanzar para un equipo que ha quedado con un score tan bajo. Sin embargo podemos intentar asegurarnos de que este acumule la mayor cantidad de victorias al principio de la temporada, por lo menos, la primera vez que se enfrenta a cada equipo. De esta manera cada vez que se calcule su ranking, tendrá una buen score asegurado por la suma del rating, de los equipos potencialmente fuertes a los que le pudo haber ganado.

Pongámonos ahora en el lugar contrario, y tomemos a *Toronto*, un equipo que ha quedado entre los primeros de la temporada. En este caso se cuenta con cierta ventaja, pues ya sabemos que es un buen equipo, por lo tanto podemos ser observadores al comienzo de la temporada y esperar a ver que equipos se fortalecen, y que equipos quedan abajo. Con esto no queremos decir que se deje ganar, sino mas bien que guarde sus fuerzas para mediados del torneo, en donde las posiciones más bajas habrán quedado definidas y por lo tanto, son esos equipos con quienes se irá acumulando buen puntaje.

Table 9: Scores de equipos según método en la segunda fecha

Team	CMM score	WP score	WPL score
Atlanta	0.4	0.0	0.33333333333333
Boston	0.625	1.0	0.6666666666666701
Brooklyn	0.41071428571429	0.0	0.33333333333333
Charlotte	0.375	0.0	0.33333333333333
Chicago	0.73214285714286	1.0	0.75
Cleveland	0.51785714285714	0.5	0.5
Dallas	0.625	1.0	0.6666666666666701
Denver	0.625	1.0	0.6666666666666701
Detroit	0.7	1.0	0.75
Golden State	0.6	1.0	0.6666666666666701
Houston	0.375	0.0	0.33333333333333
Indiana	0.375	0.0	0.33333333333333
LA Clippers	0.625	1.0	0.6666666666666701
LA Lakers	0.375	0.0	0.33333333333333
Memphis	0.33928571428571	0.0	0.33333333333333
Miami	0.625	1.0	0.6666666666666701
Milwaukee	0.375	0.0	0.33333333333333
Minnesota	0.625	1.0	0.6666666666666701
New Orleans	0.3	0.0	0.25
New York	0.625	1.0	0.6666666666666701
Oklahoma City	0.625	1.0	0.6666666666666701
Orlando	0.375	0.0	0.33333333333333
Philadelphia	0.375	0.0	0.33333333333333
Phoenix	0.375	0.0	0.33333333333333
Portland	0.6	1.0	0.6666666666666701
Sacramento	0.375	0.0	0.33333333333333
San Antonio	0.375	0.0	0.33333333333333
Toronto	0.625	1.0	0.6666666666666701
Utah	0.4	0.0	0.33333333333333
Washington	0.625	1.0	0.6666666666666701

Table 10: Scores de equipos según método en la última fecha

Team	CMM score	WP score	WPL score
Atlanta	0.558822	0.567164	0.565217
Boston	0.56569	0.58209	0.57971
Brooklyn	0.290736	0.283582	0.289855
Charlotte	0.558224	0.560606	0.558824
Chicago	0.516007	0.507692	0.507463
Cleveland	0.692428	0.712121	0.705882
Dallas	0.502178	0.507463	0.507246
Denver	0.420858	0.411765	0.414286
Detroit	0.50025	0.507463	0.507246
Golden State	0.874063	0.909091	0.897059
Houston	0.511327	0.507463	0.507246
Indiana	0.547962	0.537313	0.536232
LA Clippers	0.629708	0.636364	0.632353
LA Lakers	0.236722	0.205882	0.214286
Memphis	0.563176	0.58209	0.57971
Miami	0.577367	0.58209	0.57971
Milwaukee	0.435025	0.426471	0.428571
Minnesota	0.319984	0.313433	0.318841
New Orleans	0.384521	0.363636	0.367647
New York	0.414393	0.411765	0.414286
Oklahoma City	0.655552	0.671642	0.666667
Orlando	0.432244	0.439394	0.441176
Philadelphia	0.150813	0.134328	0.144928
Phoenix	0.298952	0.268657	0.275362
Portland	0.515941	0.514706	0.514286
Sacramento	0.412817	0.393939	0.397059
San Antonio	0.803976	0.850746	0.84058
Toronto	0.659347	0.681818	0.676471
Utah	0.487206	0.477612	0.478261
Washington	0.483709	0.469697	0.470588

6 Conclusiones

Si buscamos en la literatura o en internet, existen muchos y diversos métodos a la hora de calcular un ranking. La variedad de ellos es una implicación directa de la cantidad de deportes, cada uno tiene sus reglas, ya que cada uno tiene sus propios torneos (con más reglas), en consecuencia es casi imposible que uno solo de esos métodos pueda denominarse como "el mejor". Sin embargo, algunos de estos métodos son lo suficientemente generales como para poder analizarlos e intentar compararlos entre si.
Esta fue la hipótesis bajo la que se confeccionó este trabajo. Hemos visto 3 métodos distintos, todos de alguna manera relacionados entre si casi de manera evolutiva.

Winning percentage fue el primero que vimos. Conocemos las ventajas y claras desventajas de este método, sin embargo se utiliza de manera casi natural a la hora de confeccionar (en general y no solo en los deportes) una tabla de posiciones, o a la hora de elegir un candidato a ganador. Esto se debe a que es el más "democrático", o mas bien "meritócrata", quien más gana es quien más se lo merece y punto.
Hemos visto como, en las primeras fechas o primeros partidos en un torneo, se podría decir que los *scores* obtenidos no son un buen estimador de la realidad, ya que se encuentran absolutamente sesgados por los resultados, sin considerar ninguna equi-probabilidad entre los equipos (en otras palabras, si no gano antes, es "imposible" que gane).
Debido a los problemas que surgen de este método es que propusimos utilizar la *Regla de Laplace*, una fórmula introducida por el matemático (entre muchas cosas) *Pierre-Simon-Laplace*. Para empezar, soluciona el problema de probabilidad binaria, 0 o 1, en el caso de acumuladas derrotas o victorias respectivamente. En el experimento al que llamamos "aciertos en segunda fecha WPL" (5) se puede notar de manera concisa esta diferencia. Las operaciones para calcular esta fórmula son igual de básicas que su versión anterior, lo cual favorece a la disminución de error respecto de las operaciones a 0 como pudimos ver (o a un número tan cercano a cero que lo hace casi despreciable).
Si bien este método realza algunas cuestiones, no dejó de estar exento de problemas tales como, la cantidad de partidos que necesita que hayan pasado para realizar un ranking mas adecuado.
Como una continuación o extensión casi natural de la *Regla de Laplace* presentamos el *Colley Matrix Method*, sin ser necesariamente esa la intención, pues los puntos que intentamos abordar con este método fueron encaminados hacia otro lado. Tomando la idea de *Wesley N. Colley*, armamos la matriz que él mismo plantea como solución general al problema de rankeo, construyendo una matriz y un sistema de ecuaciones lineales a resolver. Al igual que *WP* y *WPL*, este método se encuentra libre de *bias*, sin embargo como resultado de realizar operaciones (ligeramente) más complejas, el score obtenido para cada equipo se encuentra de alguna manera más objetivo, es decir que penaliza menos la pérdida de un partido. En el experimento "cuantitativo CMM" (1) pudimos apreciar que pese a los cálculos realizados, el error acarreado por estos no es realmente preocupante (por lo menos con la implementación que hemos propuesto).
Es claro que comparar los primeros métodos que hemos visto con *CMM* es casi injusto, pues es un método que pretende mucho más respecto a estos. Si nos preguntasen cual de estas tres técnicas nos parece la más adecuada, no dudaríamos en decidir por el escrito de *Colley*, pues es mas ambiciosa en ciertos aspectos y por lo tanto menos perjuiciosa respecto a los resultados generales en un torneo.
Nos parece importante destacar que en ninguno de los métodos hemos tenido en cuenta posibles errores por suma o resta, es decir, problemas con *overflow*. Dadas las magnitudes de números que manejamos es casi imposible que esto ocurra, siendo que todos los algoritmos fueron corridos en maquinas de 64 bits.
Por supuesto que esto no es todo lo que existe para hablar acerca del rankeo, tampoco son todos los puntos a analizar. Tomando como punto de partida este escrito, sería interesante proponer una comparativa del *CMM* con métodos un poco más sofisticados, como ser el *GeM Ranking Method* el cual hereda el algoritmo de *page-rank* de *Google* generando una matriz de adyacencia entre los equipos que hayan competido entre si, ponderando las aristas según la cantidad de veces que alguno haya ganado.
O bien podríamos puntualizar en algún deporte como el *Baseball* y medir los resultados contra el conocido método de *Pythagorean expectation* formulado exclusivamente para este deporte (basado en la cantidad de carreras que un equipo convirtió o permitió).

7 Referencias

References

[1] Ranking Mundial FIBA
https://es.wikipedia.org/wiki/Ranking_Mundial_FIBA

[2] FIFA World Ranking system (2006–2018)
https://en.wikipedia.org/wiki/FIFA_World_Ranking_system_(2006-2018)

[3] Colley's Bias Free Matrix Rankings
https://www.colleyrankings.com/

[4] Rule of succession
https://en.wikipedia.org/wiki/Rule_of_succession

[5] Eliminación Gaussiana
https://es.wikipedia.org/wiki/Eliminaci%C3%B3n_de_Gauss-Jordan

[6] Ley de Grandes Números
https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_los_grandes_n%C3%BAmeros