UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGY

COMPUTER SCIENCE

PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

Subset Sum Problem

Author:
18521632 Nguyễn Văn
18521503 Đặng Hữu Toàn
17521272 Ngô Anh Vũ

Supervisor:
Phạm Nguyễn Trường An

Ngày 3 tháng 2 năm 2021

Mục lục

I Introduction

I.1 Mô tả bài toán

Subset sum là một dạng Decision problem (Yes, No question). Được mô tả như sau: Cho một cặp (A, Sum) trong đó A là một mảng {x1,x2 . . . , xN} và Sum là một số nguyên. Có cách nào để bất kỳ mảng con nào của A tổng lại bằng chính xác Sum hay không.

- Ví dụ: A = {-7, -3, -2, 9000, 5 , 8}
  Sum = 0

Có cách nào để cộng mảng con A thành Sum = 0 không ?
Câu trả lời là có:

Mảng con {-3. -2, 5} cho ra tổng Sum = -3 + (-2) + 5 = 0

I.2 Ứng dụng

1. Xếp ba lô

   - Giả sử có ba lô có sức chứa trọng lượng tối đa là M (ví dụ 15kg), ta có các đồ vật ở bên ngoài có trọng lượng là một mảng số nguyên A (ví dụ [3,4,5,6,7]). Vậy ta nên bỏ vào những đồ vật nào trong A vào ba lô để trọng lượng của các đồ vật đó bằng với trọng lượng tối đa M mà ba lô có thể chứa.

2. Bảo mật mật khẩu:

   - Khi máy tính lưu mật khẩu, hệ thống sẽ giữ một bản copy mật khẩu vào một file nội bộ nào đó, và khi người dùng nhập mật khẩu trong phần đăng nhập, chúng sẽ đối chiếu mật khẩu người dùng nhập với file copy đó.
   - Nếu có người ngoài truy cập được file mật khẩu copy đấy, họ sẽ có thể biết được mật khẩu truy cập vào được máy tính của người dùng.
   - Khi sử dụng subset-sum, máy tính chỉ cần lưu kết quả tổng, hệ thống sẽ giữ bản copy mật khẩu vào một file nội bộ (ví dụ: 500).Khi đăng nhập, người dùng chỉ có thể nhập trong khoảng giới hạn để mở khóa máy tính (ví dụ: từ 0-200) sao cho tổng của chúng cộng lại bằng 500
   - Nếu có người nào đó truy cập được file mật khẩu copy đấy, họ sẽ chỉ có thể biết được số Tổng (500) nhưng không thể biết cách thức mở khóa.

- Nguồn: http://www.math.stonybrook.edu/~scott/blair/Other_uses_subset_sum.html

3. Bảo mật mật khẩu(2):

- Bình thường máy tính chỉ có mật khẩu là các số mình nhập vào như 1,3,4,5 hay 5,7,8,9,... lúc đó người dùng sẽ phải nhớ tới tận 4 số, và khi người dùng không nhớ, họ sẽ lưu 4 số đó vào đâu đó trong máy tính hoặc điện thoại.
- Khi áp dụng phương pháp subset-sum này, người dùng chỉ cần nhớ 1 số tổng, ví dụ như số 1234. sau đó khi đăng nhập, máy tính sẽ tạo 1 trường ô imput nhập các số có giới hạn 0-500 ,sao cho các số nhập vào có tổng bằng 1234. Ví dụ người dùng A có thể nhâp vào 500, 499, 235 để vào máy tính

- Một trường hợp khác, người dùng cũng vẫn chỉ cần nhớ 1 số tổng, ví dụ như số 1234. sau đó máy tính sẽ tự động in ra một trong những mảng mà người dùng đã nhập trước ở trong máy, hoặc máy ngẫu nhiên random 1 mảng trong một khoảng giới hạn ví dụ như từ 0-500 (chắc chắn phải có các subset có tổng bằng 1234 ở trong đó). Sau đó khi đăng nhập người dùng sẽ phải bấm chọn các số trong mảng sao cho chúng có tổng lại bằng 1234
- *Tiện lợi hơn ở chỗ:*
  - Chỉ cần nhớ 1 số tổng
  - Nếu số tổng đó có bị lọt ra bên ngoài , người ngoài cũng không thể biết được cách thức mở khóa
  - Nếu cách thức mở khóa bị lộ, người ngoài cũng không thể biết được con số tổng
  - Nếu chỉ nhập 4 số như bình thưởng, người ngoài chỉ cần biết 4 số là nhập được. Tuy nhiên khi áp dụng phương pháp này, người ngoài phải biết 2 thứ: số Tổng và cách thức mở khóa

4. Các ứng dụng khác:

- Xác minh tin nhắn: http://www.math.stonybrook.edu/~scott/blair/Other_uses_subset_sum.html

- Crack mật khẩu: https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spring03/cs226/assignments/password

I.3 Đề bài với ngữ cảnh bài toán

Toàn là một người rất kín tiếng và có nhiều bí mật. Để bảo vệ bí mật của mình, Toàn đã nhờ Văn tạo ra một thuật toán để khởi tạo password để bảo vệ cái file quý của mình.

Thuật toán của Văn rất đơn giản gồm 3 bước:

Bước 1: Nhập một mảng A có độ dài là N với mảng khác rỗng

Bước 2: Nhập nguyên dương Sum, với Sum > 0. Sum sẽ là tổng mà mảng con của A phải tạo ra đề làm password

Bước 3: Kiểm tra xem tổng mảng con bất kì của A có trùng khớp với Sum không, nếu có in mảng đó ra, nếu không in mảng rỗng

- Giản lược:

  Input : Hàng đầu tiên chứa mảng A nhập từ bàn phím
  Hàng tiếp theo chứa số nguyên dương Sum

  Output: Nếu có Mảng con bất kì trong A có tổng bằng Sum, in nó ra

- Ví dụ:

  Input : Mảng A = [3 4 5 6]
  Sum = 10

  Output: [6,4]

II Design Algorithm: Backtracking

II.1 Phương Pháp: Backtracking

Quay lui (tiếng Anh: backtracking) là một chiến lược tìm kiếm lời giải cho các bài toán thỏa mãn ràng buộc. Người đầu tiên đề ra thuật ngữ này (backtrack) là nhà toán học người Mỹ D. H. Lehmer vào những năm 1950.

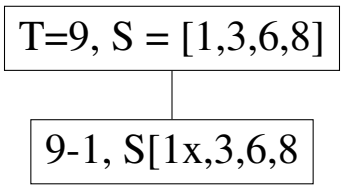
Tham khảo: https://vi.wikipedia.org/wiki/Quay_lui_(khoa_h%E1%BB%8Dc_m%C3%A1y_t%C3%ADnh)

II.2 Pseudo code

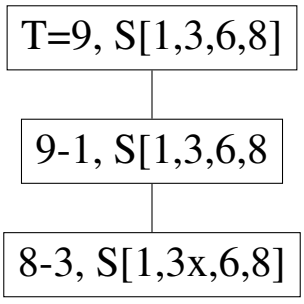
Để giải quyết bài toàn này ta có thể sử dụng ý tưởng của giải thuật DFS (Tìm kiếm theo chiều sâu)

Tham khảo: https://vi.wikipedia.org/wiki/T%C3%ACm_ki%E1%BA%BFm_theo_chi%E1%BB%81u_s%C3%A2u

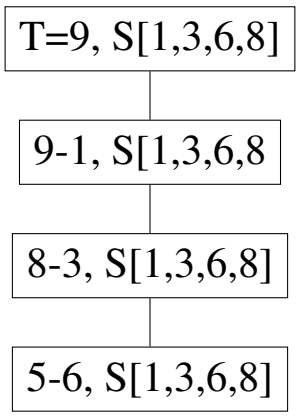
Ví dụ: Cho một mảng số nguyên S = [1,3,5,8] và target sum T = 9
Bước 1: Ta lấy phần tử đầu tiên S[0] = 1 trừ cho T



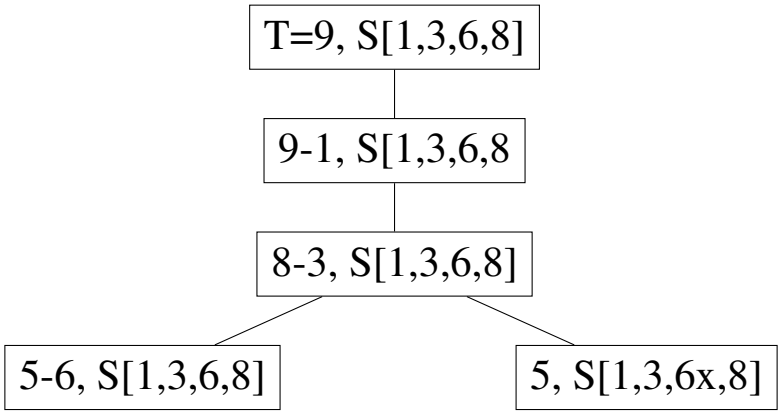
Do T = 8 != 0 nên ta tiếp tục sẽ lấy phần tử thứ 2, S[1] = 3 trừ tiếp cho T



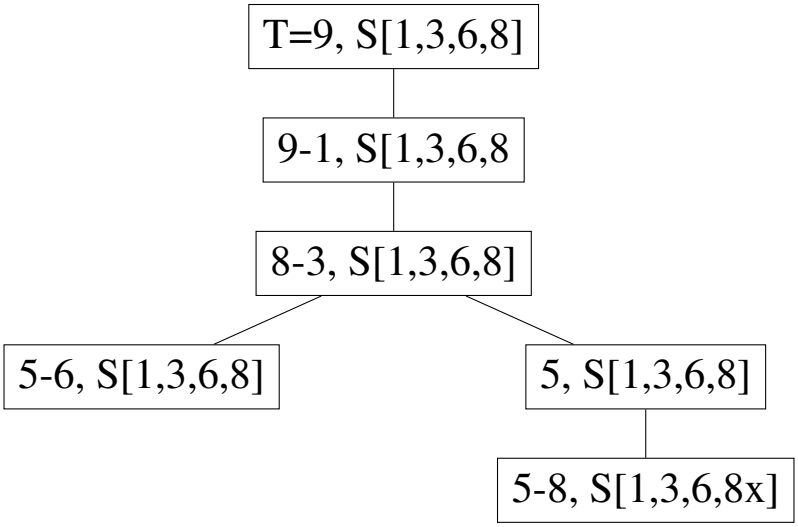
Do T = 5 != 0 nên ta tiếp tục lấy phần tử thứ 3, s[2] = 6 trừ tiếp cho T



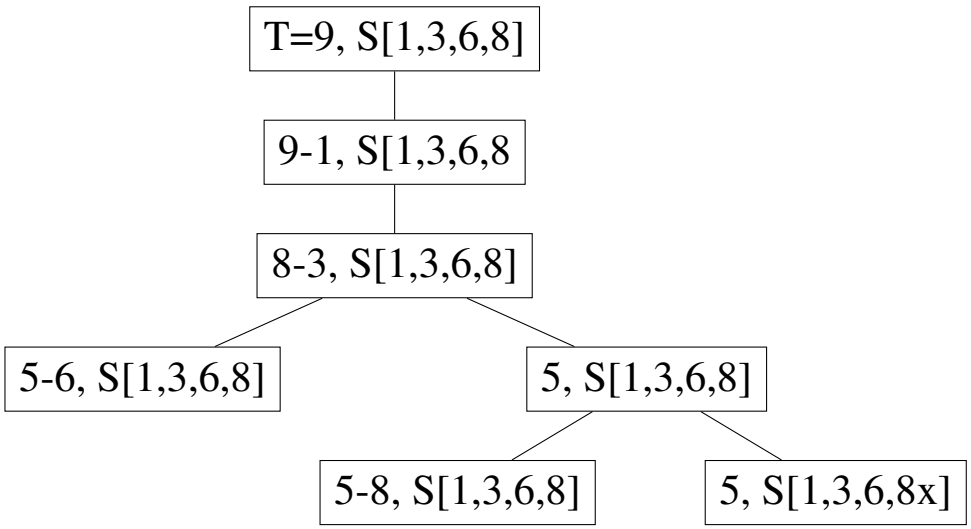
Do T < 0, Ta quay lui lại thay vì lấy phần tử thứ 3 trừ thì ta sẽ không trừ



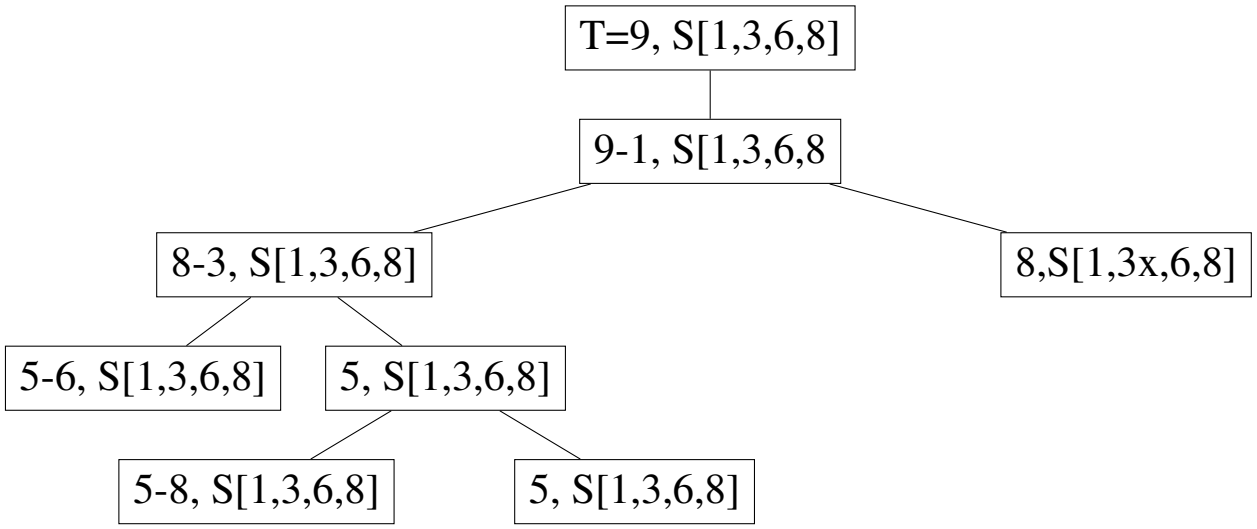
Do T = 5 != 0, bên nhánh này thay vì ta lấy phần tử thứ 3 trừ thì ta lấy phần tử thứ 4 trừ cho 5, S[3] = 5



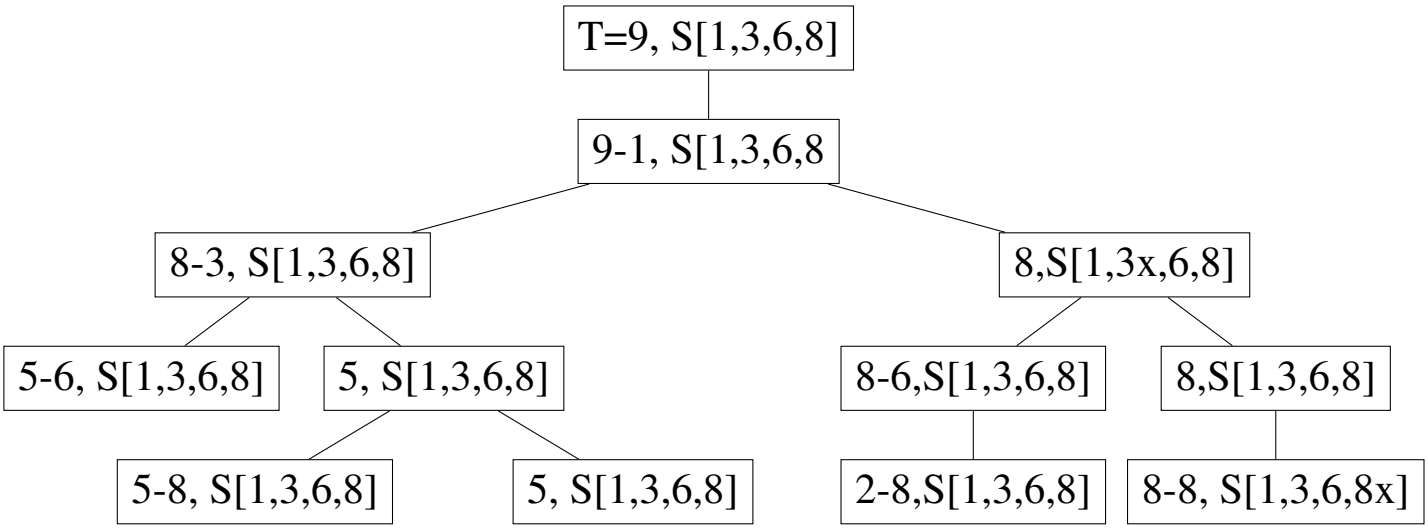
Do T < 0, nên ta sẽ loại nhánh này, quay lui và sang nhánh không trừ T cho phần tử thứ 4



Do nhánh này cũng sai ta sẽ quay lui lại đến trước khi trừ cho phần tử thứ 3, ta sẽ không lấy S[2] trừ cho T



Bước 2: Tiếp tục lặp đề tìm toàn bộ các nhánh, nếu có nhánh nào mà T = 0, => có subset, hoặc nếu không thì không có Subset. Từ cây nhị phân này ta có thể truy ngược lại các phần tử có trong có trong subset



Trong ví dụ này thì ta thấy nhánh bên phải cùng có Subset = 1,8 cho ra

Target = 9

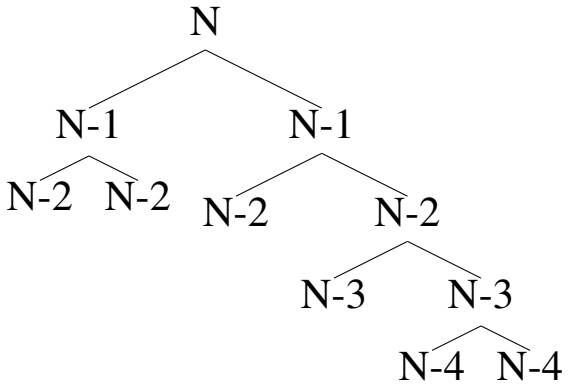
PseudoCode:

```
Subset Sum (S,i,T):
  If T == 0:
      Return true
  Else if T < 0 or i = 0:
      Return false
  Else:
  Return Subset Sum(S,i-1,T) or Subset Sum(S,i-1,T-X[i])
```

Tham khảo:
https://www.youtube.com/watch?v=kyLxTdsT8ws&t=6s&ab_channel=AbdulBari

https://courses.engr.illinois.edu/cs473/sp2017/notes/02-backtracking.pdf

II.3 Phân tích độ phức tạp bằng toán



T(0) = 2 = c T(1) = 4 + c T(2) = 8 + c T(n) = 2*(T(n-1)) + C => T(n) = 2*2*2* . . .* n lần => $O(2^n)$

Space complexity: $O(2^n)$

II.4 Mã nguồn cài đặt

```
  def subset_sum(array, target_sum, start=0, target_array=[]):
    solutions = set()

    for idx in range(start, len(array)):
        target_array.append(array[idx])

        if sum(target_array) == target_sum:
            solutions.add(tuple(target_array))
            target_array.pop()
            solutions |= subset_sum(array, target_sum, start + 1)
            break

        solutions |= subset_sum(array, target_sum, idx + 1)
        target_array.pop()

    return solutions

a = list(map(int,input("\nEnter the numbers : ").strip().split()))
summ = int(input())

SS-BackTracking = subset_sum(a,summ)
print(SS-BackTracking)
```

Listing 1: Code Demo

Tham khảo: https://stackoverflow.com/questions/56487300/recursive-backtracking-to-list-all-subsets-with-a-given-

II.5 Cách thức phát sinh Input/Output để kiểm tra tính đúng đắn

Cho một mảng S[1,2,...,n] với n $\in$ N* và Target Sum gọi là T $\in$ N*

Base Case 1: T = 0, $\forall$ S thì luôn có S' = $\varnothing$ cộng lại thành T, Output = True

Case 2: T < 0 hoặc S = $\varnothing$ thì Output = False

Chứng minh: Cho Len(S) = n > 1

Dòng 7, *Return Subset Sum (S,len(S)-1, T) or Subset Sum(S,len(S)-1,T-S[i])*: Theo như giải thích của phần Pseudo Code, Dòng này sẽ chạy hết toàn bộ các khả năng, và có 2 trường hợp sẽ xảy ra:

Case 1: Trừ từng phần tử trong S Cho T cho đến khi S = $\varnothing$, Nếu T = 0 tức là có Subset cộng được cho ra T

Case 2 : Nếu cho đến khi len(S) = 0 và T $\neq$ 0 thì không có subset nào.

=> Giải thuật đúng $\forall$ T $\in$ N* và S[1,2,...,n] với n $\in$ N*

Tham khảo: https://courses.engr.illinois.edu/cs473/sp2017/notes/02-backtracking.pdf

II.6 Phân tích độ phức tạp bằng thực nghiệm

n : kích thước mảng
T(n): thời gian chạy thực nghiệm tương ứng với kích thước mảng

n	T(n)	sqrt(n)*712.30043498		lg(n)*1100.23489163		n*78.99504265	
15	0.062	2758.727722	7610236.567	4298.497351	18476546.47	1184.92564	1403901.845
16	0.121	2849.20174	8117261.063	4400.939567	19367204.06	1263.920682	1597189.637
17	0.241	2936.889931	8623906.942	4497.169236	20222363.56	1342.915725	1802775.417
18	0.486	3022.034807	9129757.192	4587.896982	21044339.52	1421.910768	2020448.37
19	0.963	3104.845614	9634087.278	4673.718067	21834639.92	1500.90581	2249828.434
20	1.949	3185.504386	10135024.9	4755.136089	22592787.5	1579.900853	2489932.05
21	3.891	3264.170661	10629423.47	4832.580884	23316245.99	1658.895896	2739041.205
* 22	7.864	3340.985186	11109696.84	4906.422264	23995873.06	1737.890938	2992993.207
23	16.709	3416.07288	11555674.79	4976.980699	24604295.32	1816.885981	3240637.163
24	38.536	3489.545219	11909464.63	5044.53572	25060033.2	1895.881024	3449730.537
25	59.243	3561.502175	12265819.33	5109.332612	25503405.09	1974.876066	3669650.045
26	127.159	3632.033818	12284147.49	5171.587784	25446261.76	2053.871109	3712219.551
27	260.217	3701.221631	11840512.87	5231.493136	24713586.42	2132.866152	3506814.845
28	485.865	3769.139619	10779892.23	5289.219622	23072215.62	2211.861194	2979062.862
29	1058.179	3835.855235	7715485.264	5344.920194	18376150.06	2290.856237	1519493.17
30	2066.716	3901.43016	3366176.047	5398.732243	1110233224	2369.85128	91890.99768
	MSE		9794160.43		21795517.49		2466600.583

n*lg(n)*13.59733924		n^2*1.8782545		n^3*0.05704409		(2^n)*1.92941792e-06	
796.849752	634870.7218	422.6072625	178544.4989	192.5238038	37041.5459	6.32E-02	1.49614E-06
870.2297114	757089.1696	480.833152	231084.1731	233.6525926	54537.00476	1.26E-01	2.96625E-05
944.836521	892260.6983	542.8155505	294387.1429	280.2576142	78409.30421	2.53E-01	0.000141435
1020.597927	1040628.344	608.554458	369747.2496	332.6811329	110353.6063	5.06E-01	0.000391459
1097.449718	1202283.122	678.0498745	458446.6356	391.2654133	152335.9738	1.01E+00	0.002359109
1175.33445	1376833.413	751.3018	561529.6189	456.35272	206482.7407	2.02E+00	0.005496936
1254.200431	1563273.673	828.3102345	679667.0742	528.2853175	274989.4002	4.05E+00	0.024112701
* 1334.0009	1758639.077	909.075178	812181.5874	607.4054703	359449.9746	8.09E+00	0.052242096
1414.693349	1954360.241	993.5966305	954309.4426	694.055443	458798.2039	1.62E+01	0.274439149
1496.238973	2124897.956	1081.874592	1088555.418	788.5775002	562562.252	3.24E+01	38.01633497
1578.6022	2308452.378	1173.909063	1242480.431	891.3139063	692341.993	6.47E+01	30.2227525
1661.750309	2354970.486	1269.700042	1305400.033	1002.606926	766409.0709	1.29E+02	5.391892018
1745.653097	2206520.399	1369.247531	1229948.718	1122.798823	744047.4022	2.59E+02	1.57480015
1830.2826	1807458.684	1472.551528	973550.3045	1252.231864	587318.1697	5.18E+02	1027.790969
1915.612853	735192.8118	1579.612035	271892.4095	1391.248311	110935.1659	1.04E+03	498.657557
2001.619681	4237.530713	1690.42905	141591.8687	1540.19043	277229.1759	2.07E+03	24.80753864
	1420123.044		674582.2878		342077.5615		101.6763161

Vì MSE sai số toàn phương $O(2^n)$ = 101.6763161 bé nhất
=>Theo kết quả thực nghiệm thì độ phức tạp của giải thuật này là $O(2^n)$

III Design Algorithm: Dynamic Programing

III.1 Phương pháp: Dynamic Programming

Trong ngành khoa học máy tính, quy hoạch động (tiếng Anh: dynamic programming) là một phương pháp giảm thời gian chạy của các thuật toán thể hiện các tính chất của các bài toán con gối nhau (overlapping subproblem) và cấu trúc con tối ưu (optimal substructure).

Nhà toán học Richard Bellman đã phát minh phương pháp quy hoạch động vào năm 1953. Ngành này đã được thành lập như là một chủ đề về kỹ nghệ và phân tích hệ thống đã được tổ chức IEEE thừa nhận.

Tham khảo: `https://vi.wikipedia.org/wiki/Quy_ho%E1%BA%A1ch_%C4%91%E1%BB%99ng`

III.2 Pseudo code

Input: Set[1,2,3,4,5,...,n] chứa n phần tử, mỗi phần tử là số nguyên dương
Target sum = K là tổng mà ta cần tìm subset cho, giá trị Target sum là số nguyên dương

Để giải quyết bài toàn này bằng phương pháp Dynamic programming thì ta làm như sau:

Bước 1: ta tạo một ma trận 2 chiều type boolean gọi là M[i][j] với:
-i : length của mảng chứa các phần tử cần có để tìm Subset
-j : giá trị của target sum cần tìm subset

Bước 2: Nếu như phần tử ở vị trí thứ ith trong Mảng đang lớn hơn giá trị Sum lúc đấy ta copy đáp án của phần tử ở vị trí M[i-1][j].
Nếu như phần tử ở vị trí thứ ith hiện tại đang nhỏ hơn thì ta so sánh phần tử ở vị trí M[i-1][j] và Phần tử ở vị trí M[i-1][j-Set[i]]

Bước 3: Lặp đến cuối ma trận, Nếu ô cuối là True thì tìm được Subset và ngược lại nếu là False thì Set không có Subset nào cộng lại ra được Target Sum

Ví dụ: Set là [1,2,3,4,5] và Target sum là 10

Ta tạo ma trận với chiều dài là Target sum+1 và chiều rộng là len(Set)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1											
2											
4											
3											
5											

Cột 0 là giá trị target sum = 0, Do ta lúc nào cũng có thể tạo ta subset rỗng nên giá trị 0 luôn luôn đúng nên ta điền True vào toàn bộ cột 0

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T										
2	T										
4	T										
3	T										
5	T										

Tiếp theo là cột Target sum = 1, hàng 1 có giá trị 1 = Target sum nên là True do 1 = 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	T									
2	T										
4	T										
3	T										
5	T										

Cột tiếp theo Target sum = 2, kết quả là False do 1 != 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	T	F								
2	T										
4	T										
3	T										
5	T										

Ta tiếp tục làm vậy đến cột target sum = 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
2	T										
4	T										
3	T										
5	T										

Đến hàng 2 có giá trị = 2, ở cột target sum = 1 do 1<2 nên ta copy giá trị ở hàng 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
2	T	T									
4	T										
3	T										
5	T										

Đến cột target sum = 2 cũng giống như ở hàng 1 do 2=2 nên cột này là T

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
2	T	T	T								
4	T										
3	T										
5	T										

Đến cột Target Sum = 3, do 3 >2 nên ta nhìn vào hàng trước đó là hàng 1, lấy Target sum - giá trị ở hàng thứ ith là 3 -2 =1
Ta thấy cột Target Sum = 1 ở hàng 1 là T, ngoài ra ta cũng phải xem ở vị trí target sum = 3 hiện tại ở hàng 1 là giá trị gì, lần này là F.
Ta sẽ lấy cột nào có giá trị T làm giá trị cho vị trí hiện tại, nếu cả 2 đều là False thì giá trị ở vị trí hiện tại sẽ là False

	0	3-2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	T<-	F	F	F	F	F	F	F	F	F
2	T	T	T	T							
4	T										
3	T										
5	T										

Tương tự như trên là cột Target sum = 4, ta nhìn vào hàng trước đó là hàng 1, lùi 2 bước 4-2 = 2, giá trị ở đây là F nên giá trị ở hàng 2 cột 4 cũng là False

	0	1	4-2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	T	F<-	F	F	F	F	F	F	F	F
2	T	T	T	T	F						
4	T										
3	T										
5	T										

Tương tự như trên là cột Target sum = 4, ta nhìn vào hàng trước đó là hàng 1, lùi 2 bước 4-2 = 2, giá trị ở đây là F nên giá trị ở hàng 2 cột 4 cũng là False

	0	1	4-2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	T	F<-	F	F	F	F	F	F	F	F
2	T	T	T	T	F						
4	T										
3	T										
5	T										

Lặp lại cho đến hết hàng 3 có giá trị là 4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
2	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F
4	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F
3	T										
5	T										

Ở hàng 4 giá trị là 3, cột Target sum = 7, như đã nói ở trên ta xem vị trí target sum = 7 ở hàng trước là giá trị gì, trong trường hợp này là False, và vị trí target sum - giá trị hàng hiện tại lúc này là = 3, vị trí 7-3 = 4, trong trường hợp này là T, ta lấy giá trị T

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
2	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F
4	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F
3	T	T	T	T	T	T	T	T			
5	T										

Tiếp tục lặp cho đến cuối Matrix

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
2	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F
4	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F
3	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F
5	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Kết luận ở cột 10 hàng 5 là T => Có subset cộng lại = target sum = 10

Ta cũng có thể dò lại bảng và biết được các giá trị nào cộng lại ra Target Sum

Pseudo code: Mã giả áp dụng ý tưởng trên:

```
Subset-sum(Set,Target Sum):
    Initialize M[i][0] = False, i = 0, . . . n
```

```
Initialize M[0][j] =False, j = 1, . . . Sum+1
for i from 0,...,n
      M[i][0] <- True
For i from 1, . . ., n:
     For j from 1, . . ., Sum:
          If j < X[i-1]:
               M[i][j] <- M[i-1][j]
          If j >= X[i-1]:
               M [i][j] <- M[i-1][j] or M [i - 1][j-X [i-1]]

Return M[len(set)-1][Sum]
```

Tham khảo: https://www.youtube.com/watch?v=s6FhG--P7z0&t=327s&ab_channel=TusharRoy-CodingMadeSimple

https://www.geeksforgeeks.org/subset-sum-problem-dp-25/

III.3 Phân tích độ phức tạp bằng phương pháp toán học

Do Matrix[i][j] được tạo ra từ Len(set) và Sum nên độ phức tạp
Time Complexity là O(len(set)*sum)
Space Complexity là O(len(set)*sum)

Tham khảo:
https://www.geeksforgeeks.org/subset-sum-problem-dp-25/
https://www.faceprep.in/data-structures/space-complexity/

III.4 Mã nguồn cài đặt

```
def find_subset(weight: list, req_sum: int):
    l = len(weight)

    # ROWS : array
    # COL : range(sum)
    row = l
    col = req_sum + 1

    # 2d array storing Sum
    dp_array = [[0] * col for i in range(row)]

    for i in range(row):
        for j in range(1, col):
            # Row 0
            if i == 0:
                if j >= weight[i]:
                    dp_array[i][j] = weight[i]
                else:
                    continue
            else:
                if j - weight[i] >= 0:
                    dp_array[i][j] = max(dp_array[i - 1][j], (weight[i] + dp_array[i - 1][j - weight[i]]))
                elif j >= weight[i]:
                    # take from row above it
                    dp_array[i][j] = max(dp_array[i - 1][j], weight[i])
                else:
                    dp_array[i][j] = dp_array[i - 1][j]

    # Find out which Numbers should be in the subset
    # give from index 0
    row -= 1
    col -= 1
    sum_subset = []

    # check if the Subset is possible : if not, return None
    if dp_array[row][col] != req_sum:
        return None

    # get the subset
    while col >= 0 and row >= 0 and req_sum > 0:
        # First Row
        if (row == 0):
            sum_subset.append(weight[row])
            break

        # Bottom-Right most ele
        if (dp_array[row][col] != dp_array[row - 1][col]):
            # print(req_sum,' : ',dp_array[row][col],dp_array[row-1][col],' : ',weight[row])
            sum_subset.append(weight[row])
            req_sum -= weight[row]
            col -= weight[row]
            row -= 1
        else:
            row -= 1

    return sum_subset

# main
if __name__ == "__main__":
    array = list(map(int, input().split()))
```

```
    req_sum = int(input())

    # Sort by ascending order
    array.sort()
    sum_subset = find_subset(array, req_sum)

    # If Sum is not possible
    if sum_subset is None:
        print("Sum :", req_sum, "is not possible")
    else:
        print("Subset for sum", req_sum, ' :')
        print(' '.join(str(x) for x in sum_subset))
```

Listing 2: Code Demo

Tham khảo: https://github.com/kaushikthedeveloper/GeeksforGe
blob/master/Scripts/Subset%20sum%20problem.py

III.5 Cách thức phát sinh Input/Output để kiểm tra tính đúng đắn

Ví dụ: List S[1,3,4,5] và Target T = 7
=> Matrix[i][j] với i = len(S) và j = T

	0	1	2	3	4	5	6	7
1	T							
3	T							
4	T							
5	T							

Ta giả sử rằng có thêm 1 hàng nữa là hàng rỗng 0 trước 1

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	T	F	F	F	F	F	F	F
1	T							
3	T							
4	T							
5	T							

Do hàng rỗng này chỉ cho kết quả cho Target = 0 nên toàn bộ cột Target khác = 0

Tiếp tục theo thuật toán ở phần 2: Pseudo code thì nếu j >= S[i-1], lúc này S[i-1] = 1 thì ta so sánh 2 kết quả ở M[i-1][j] và M[i-1][j-S[i-1]]. Có nghĩa là ta lấy kết quả của M[i-1][j] hoặc M[i-1][j-S[i-1]] cộng với S[i-1] = j thì đúng

Hiện tại M[i-1][j] = 1 và M[i-1][j-S[i-1]] = 0
S[i-1] + M[i-1][j] = 2 và S[i-1] + M[i-1][j-S[i-1]] = 1 == j => Kết quả là đúng

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	T	F	F	F	F	F	F	F
1	T	T						
3	T							
4	T							
5	T							

Tiếp tục với j = 2, điều kiện vẫn là j >= S[n-1] = 1 ta tiếp tục
M[i-1][j] = 2 và M[i-1][j-S[i-1]] = 1
S[i-1] + M[i-1][j] = 3 và S[i-1] + M[i-1][j-S[i-1]] = 2 => kết quả là F.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	T	F	F	F	F	F	F	F
1	T	T	F					
3	T							
4	T							
5	T							

Ta tiếp tục làm cho đến hết hàng

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	T	F	F	F	F	F	F	F
1	T	T	F	F	F	F	F	F
3	T							
4	T							
5	T							

Tại j = 1, S[i-1] = 3 do J < S[i-1] nên ta chỉ đơn giản là hạ kết quả từ M[i-1][j] xuống làm kết quả.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	T	F	F	F	F	F	F	F
1	T	T	F	F	F	F	F	F
3	T	T						
4	T							
5	T							

Tiếp tục lặp như vậy cho đến hết bảng

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	T	F	F	F	F	F	F	F
1	T	T	F	F	F	F	F	F
3	T	T	F	T	T	F	F	F
4	T	T	F	T	T	T	F	T
5	T	T	F	T	T	T	T	T

Do giải thuật này tìm tổng của toàn bộ các subset có trong S và đưa kết quả vào trong bảng, Nếu như có subset mà tìm ra được Target thì kết quả ở ô dưới cùng phải sẽ là True và ngược lại => Giải thuật đúng

Tham khảo: `https://www.youtube.com/watch?v=s6FhG--P7z0&t=327s&ab_channel=TusharRoy-CodingMadeSimple`

III.6 Phân tích độ phức tạp bằng thực nghiệm

n : kích thước mảng
Sum: tổng mà các subset cần đạt được
T(n): thời gian chạy thực nghiệm tương ứng với kích thước mảng
T(Sum): thời gian chạy thực nghiệm tương ứng với độ lớn của tổng

*Bởi độ phức tạp cần chứng minh là O(n*Sum)=> n và Sum tỉ lệ thuận*
*Nên n tăng O(n*Sum) tăng, n giảm O(n*Sum) giảm*
*Tương tự, Sum tăng O(n*Sum) tăng, Sum giảm O(N*Sum) giảm*

- Thay đổi n , Sum cố định

	n	T(n)	sqrt(n)*1.63250947		lg(n)*7.05058841		n*0.04568461	
	10	0.447	5.162448227	22.23545198	23.42154772	527.8298432	0.4568461	9.69457E-05
	20	0.857	7.300804298	41.52261383	30.47213613	877.0562883	0.9136922	0.003214006
	50	2.128	11.54358517	88.65324402	39.79250704	1418.615091	2.2842305	0.024407969
	80	3.434	14.6016086	1247154817	44.57331295	1692.44307	3.6547688	0.048738863
	100	4.247	16.3250947	145.8803716	46.84309545	1814.427348	4.568461	0.103337175
	150	7.271	19.99407601	161.8766631	50.96742528	1909.377582	6.8526915	0.174982001
	200	8.42	23.08717033	215.1258855	53.89368386	2067.855924	9.136922	0.513977154
	250	10.787	25.81224113	225.7578712	56.16346635	2059.023699	11.4211525	0.402149393
	300	14.421	28.27589346	191.9580728	58.01801369	1900.699602	13.705383	0.512107691
	350	15.137	30.54145559	237.2972519	59.58601112	1975.714589	15.9896135	0.72694978
	400	17.415	32.6501894	232.1109961	60.94427227	1894.797544	18.273844	0.737613016
*	450	19.875	34.6307555	217.7323203	62.14234352	1786.528328	20.5580745	0.466590773
	500	22.077	36.50402149	208.138949	63.21405476	1692.257275	22.842305	0.585691743
	550	24.537	38.28574073	189.0278717	64.18353551	1571.847778	25.1265355	0.347552106
	600	26.962	39.98815202	169.6806364	65.0686021	1452.113123	27.410766	0.201390923
	650	29.019	41.62098822	158.8101071	65.88278443	1358.938602	29.6949965	0.456971268
	700	31.566	43.19214071	135.1671477	66.63659953	1229.946951	31.979227	0.170756554
	750	33.724	44.7081131	120.6507407	67.33838459	1129.926851	34.2634575	0.291014394
	800	36.592	46.17434066	91.82125259	67.99486068	986.1396588	36.547688	0.001963553
	850	38.624	47.59542094	80.48639363	68.61152517	899.2516661	38.8319185	0.043230103
	900	40.843	48.9752841	66.13404468	69.19293193	803.7186402	41.116149	0.074610376
	950	43.157	50.31732118	51.27019946	69.74289553	706.8098412	43.4003795	0.059233581
	1000	46.252	51.62448227	28.86356574	70.26464317	576.6070322	45.68461	0.321931412
		MSE		139.3442232		1405.735927		0.272543947

n*lg(n)*0.00451603		n^2*4.43992465e-05		n^3*4.70042114e-08	
0.150019269	0.088197554	0.004439925	0.19585942	4.70042E-05	0.19976698
0.390359139	0.217753693	0.017759699	0.704324283	0.000376034	0.73380462
1.274391193	0.728647995	0.110998116	4.068296599	0.005875526	4.503412281
2.284001355	1.322496884	0.284155178	9.921522405	0.024066156	11.62764882
3.000385387	1.554047994	0.443992465	14.46286631	0.047004211	17.63996462
4.896834311	5.636662721	0.998983046	39.33819667	0.158639213	50.58567596
6.903976774	2.298326423	1.77596986	44.1431365	0.376033691	64.70539398
8.993430201	3.216892625	2.774952906	64.19289863	0.734440803	101.0539464
11.14847762	10.70940272	3.995932185	108.6820389	1.269113708	172.972113
13.35807302	3.164581196	5.438907696	94.05299433	2.015305564	172.1788649
15.61436555	3.242284432	7.10387944	106.3192072	3.00826953	207.5538828
* 17.91148512	3.855390673	8.990847416	118.4647775	4.283258764	243.1023948
20.2448754	3.356680544	11.09981163	120.4986646	5.875526425	262.487746
22.61089646	3.709874836	13.43077207	123.3482989	7.820325672	279.4472006
25.00657324	3.823693804	15.98372874	120.5224399	10.15290966	282.545518
27.42942842	2.526737802	18.75868165	105.2741327	12.90853156	259.5471935
29.87736704	2.851481266	21.75563079	96.24334413	16.12244451	238.5034062
32.34859425	1.891740966	24.97457616	76.5524176	19.82990168	193.045968
34.84155509	3.064057366	28.41551776	66.85486182	24.06615624	156.896762
37.35488938	1.610641763	32.0784556	42.84415154	28.86646133	95.20956097
39.88739725	0.913176624	35.96338967	23.81059702	34.26607011	43.25600677
42.43801236	0.516943227	40.07031997	9.527593631	40.30023575	8.161101985
45.0057808	1.553062287	44.3992465	3.432695532	47.0042114	0.56582199
	2.689251104		60.58501375		124.6314415

Vì MSE sai số toàn phương O(n) = 0.272543947 bé nhất
=>Theo kết quả thực nghiệm thì độ phức tạp giải thuật là O(n) nếu Sum cố định và n thay đổi

- Thay đổi Sum, n cố định

Sum	T(Sum)	sqrt(Sum)*0.06922314		lg(Sum)*7.80286957		Sum*5.35591186e-05	
1000	0.024	2.189027892	4.687345773	77.76171494	6043.152323	0.053559119	0.000873741
5000	0.141	4.894815171	22.59875868	95.87941701	9165.844492	0.267795593	0.016077122
10000	0.374	6.922314	42.88041624	103.6822866	10672.60208	0.535591186	0.026111711
20000	0.892	9.789630342	79.1678257	111.4851562	12230.84619	1.071182372	0.032106322
30000	1.398	11.98979955	112.1862178	116.0495422	13144.97614	1.606773558	0.043586399
40000	1.956	13.844628	141.3394757	119.2880257	13766.80426	2.142364744	0.034731818
50000	2.448	15.47876467	169.8008278	121.7999887	14244.8972	2.67795593	0.05287973
60000	2.95	16.95613714	196.1718776	123.8524118	14617.39318	3.213547116	0.069457082
70000	3.454	18.31472134	220.8410388	125.5877109	14916.64333	3.749138302	0.087106617
80000	3.976	19.57926068	243.461744	127.0908953	15157.27744	4.284729488	0.095313897
90000	4.585	20.766942	261.8552469	128.4167979	15334.31417	4.820320674	0.05537582
* 100000	5.248	21.89027892	276.9654476	129.6028582	15464.13076	5.35591186	0.01164497
200000	10.252	30.95752933	428.7189449	137.4057278	16168.07049	10.71182372	0.211437853
300000	15.53	37.91507528	501.0915953	141.9701139	15987.1024	16.06773558	0.289159554
400000	20.658	43.78055784	534.652681	145.2085974	15512.8513	21.42364744	0.586216002
500000	25.684	48.94815171	541.2207547	147.7205603	14892.92205	26.7795593	1.20025018
600000	31.035	53.62001368	510.0828429	149.7729835	14098.70872	32.13547116	1.211036774
700000	36.129	57.91623415	474.6835719	151.5082825	13312.37883	37.49138302	1.856087493
800000	41.845	61.91505866	402.8072547	153.0114669	12357.98337	42.84729488	1.004595026
900000	47.575	65.67083676	327.4593079	154.3373696	11398.20355	48.20320674	0.394643708
1000000	52.331	69.22314	285.3443938	155.5234299	10648.67758	53.5591186	1.508275296
1500000	79.643	84.7806857	26.39581432	160.087816	6471.368416	80.3386779	0.483967741
2000000	108.299	97.89630342	108.2160962	163.3262994	3028.003684	107.1182372	1.39420079
	MSE		263.836972		12982.1431		0.42140613

Sum*lg(Sum)*0.00451603		Sum^2*4.43992465e-05		Sum^3*4.70042114e-08	
0.025796706	3.22815E-06	2.88463E-05	0.000574616	1.40001E-08	0.000575999
0.159035405	0.000325276	0.000721156	0.019678154	1.75001E-06	0.019880507
0.343956085	0.000902637	0.002884626	0.137726621	1.40001E-05	0.139865528
0.73968272	0.023200554	0.011538502	0.775212449	0.000112001	0.795464203
1.154949824	0.059073388	0.02596163	1.882489287	0.000378002	1.953347249
1.582906538	0.139198731	0.04615401	3.647511706	0.000896005	3.82243163
2.020299158	0.18292801	0.07211564	5.644826491	0.00175001	5.984139012
2.465211297	0.235020087	0.103846522	8.100589621	0.003024018	8.68466744
2.916376669	0.289038846	0.141346655	10.97367218	0.004802028	11.89696665
3.372895273	0.363735311	0.184616039	14.37459234	0.007168042	15.75162711
3.834094181	0.563859549	0.233654674	18.93420614	0.01020606	20.92873959
* 4.299451063	0.899745085	0.288462561	24.59701161	0.014000082	27.39475514
9.116607621	1.289115854	1.153850244	82.77632898	0.112000659	102.8195866
14.12916888	1.962327821	2.596163049	167.2841383	0.378002225	229.5830366
19.26862623	1.930359473	4.615400976	257.3649834	0.896005274	390.5364356
24.50244265	1.396077781	7.211564025	341.2308909	1.7500103	572.835863
29.81145425	1.497064212	10.3846522	426.4368644	3.024017798	784.6151239
35.18299818	0.894919447	14.13466549	483.7507506	4.802028263	981.3791582
40.60807444	1.529984851	18.4616039	546.783213	7.168042189	1202.491403
46.07995372	2.235163376	23.36546744	586.1014667	10.20606007	1396.437672
51.59341276	0.544034934	28.8462561	551.533196	14.0000824	1469.259244
79.6614064	0.000338795	64.90407623	217.235874	47.2502781	1049.288432
108.3638805	0.004209475	115.3850244	50.2117418	112.0006592	13.70228083
	0.728928057		170.4357181		376.2099279

Vì MSE sai số toàn phương O(Sum) =0.42140613 bé nhất
=>Theo kết quả thực nghiệm thì độ phức tạp giải thuật là O(Sum) nếu cố định và Sum thay đổi

==>Vì Sum và n tỉ lệ thuận
=>Độ phức tạp của giải thuật là O(n*Sum) theo thực nghiệm

IV References

- Ứng dụng của subset:

  http://www.math.stonybrook.edu/~scott/blair/Other_uses_subset_sum.html
  https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spring03/cs226/assignments/password

- BackTracking:

  Định nghĩa:
  https://vi.wikipedia.org/wiki/Quay_lui_(khoa_h%E1%BB%8Dc_m%C3%A1y_t%C3%ADnh)

  Pseudo code:
  https://vi.wikipedia.org/wiki/T%C3%ACm_ki%E1%BA%BFm_theo_chi%E1%BB%81u_s%C3%A2u
  https://www.youtube.com/watch?v=kyLxTdsT8ws&t=6s&ab_channel=AbdulBari
  https://courses.engr.illinois.edu/cs473/sp2017/notes/02-backtracking.pdf

  Nguồn cài đặt:
  https://stackoverflow.com/questions/56487300/recursive

  Kiểm tra tính đúng đắn:
  https://courses.engr.illinois.edu/cs473/sp2017/notes/02-backtracking.pdf

- Dynamic Programming:

  Định nghĩa:
  https://vi.wikipedia.org/wiki/Quy_ho%E1%BA%A1ch_%C4%91%E1%BB%99ng

  Pseudo code:
  https://www.youtube.com/watch?v=s6FhG--P7z0&t=327s&ab_channel=TusharRoy-CodingMadeSimple
  https://www.geeksforgeeks.org/subset-sum-problem-dp-25

  Phân tích độ phức tạp:
  https://www.geeksforgeeks.org/subset-sum-problem-dp-25
  https://www.faceprep.in/data-structures/space-complexi

Mã nguồn cài đặt:
https://github.com/kaushikthedeveloper/GeeksforGeeks-p
blob/master/Scripts/Subset%20sum%20problem.py

Kiểm tra tính đúng đắn:
https://www.youtube.com/watch?v=s6FhG--P7z0&t=327s&
ab_channel=TusharRoy-CodingMadeSimple