ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

<table>
<tr><td colspan="2">Học phần: CÁC PP TỐI ƯU</td><td>Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT</td></tr>
<tr><td colspan="2">Thời gian: Tuần 1 Tiết 1-3
GV giảng: 3, Bài tập: 0, Tự học :3</td><td>Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn
Vũ Anh Mỹ</td></tr>
<tr><td>Chương 1</td><td colspan="2">Bài toán tối ưu hoá và các vấn đề cơ sở</td></tr>
<tr><td>Các mục</td><td colspan="2">1.1 Bài toán TUH và phân loại bài toán.
1.2 Một số mô hình thực tế
1.3 Không gian Euclide n-chiều</td></tr>
<tr><td>Mục đích - yêu cầu</td><td colspan="2">- Nắm được ý nghĩa ứng dụng trong thực tiễn của các bài toán TUH
- Nhắc lại và bổ xung một số kiến thức ĐSTT có liên quan</td></tr>
</table>

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

Chương 1. BÀI TOÁN TỐI ƯU HÓA VÀ CÁC VẤN ĐỀ CƠ SỞ

1.1 BÀI TOÁN TỐI ƯU HÓA VÀ PHÂN LOẠI BÀI TOÁN

1.1.1 Bài toán tối ưu hoá tổng quát

$$\text{Min (hoặc Max) của hàm } f(x) \tag{1.1}$$

với các điều kiện
$$\begin{cases} g_i(x) \le, =, \ge b_i \ ; \quad i=\overline{1,m} \\ x \in X \subset R^n, \end{cases} \tag{1.2}$$

trong đó:

- $f(x)$: Hàm mục tiêu với *n* biến.
- $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$: Các hàm ràng buộc. Mỗi bất đẳng thức gọi là một ràng buộc.
- Tập $D=\left\{x \in X \subset R^n \mid g_i(x) \le, =, \ge b_i ; i=\overline{1,m}\right\}$ Miền ràng buộc (1.3)
- $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$: Phương án hay lời giải chấp nhận được.
- Phương án $x^* \in D$ làm cực đại (cực tiểu) hàm mục tiêu gọi là phương án hay lời giải tối ưu. Cụ thể là: $f(x^*) \ge f(x), \forall x \in D$ đối với bài toán max hay $f(x^*) \le f(x), \forall x \in D$ đối với bài toán min. Khi đó $f^* = f(x^*)$ gọi là giá trị tối ưu của bài toán.

1.1.2 Phân loại bài toán

Để tìm thuật giải hiệu quả cho các bài toán Tối ưu hoá cần phân loại các bài toán:

- Quy hạch tuyến tính (QHTT);
- Quy hoach phi tuyến (QHPT);
- Qui hoạch rời rạc (QHRR);
- Qui hoạch đa mục tiêu (QHĐMT).

1.2 MỘT SỐ MÔ HÌNH THỰC TẾ

1.2.1 Bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu

Một công ty muốn sản xuất 2 loại sản phẩm A và B bằng các loại nguyên liệu I, II và III. Chi phí sản xuất cho một đơn vị sản phẩm được cho trong bảng sau:

Sản phẩm / Nguyên liệu	A	B
I	2	1
II	1	2
III	0	1

Giả sử công ty có lương dự trữ nguyên liệu: $\begin{cases} \text{I} & 8 \\ \text{II} & 7 \\ \text{III} & 3 \end{cases}$ (Đơn vị nguyên liệu). Tiền lãi cho 1 đơn vị sản phẩm loại A và B tương ứng là: 4 và 5 (đơn vị tiền tệ). Cần lập kế hoạch sản xuất sao cho công ty thu được lãi nhiều nhất với điều kiện hạn chế về nguyên liệu như trên.

Kí hiệu x_1 và x_2 tương ứng là số lượng sản phẩm loại A và B cần sản xuất. Mô hình toán học của bài toán trên có dạng một bài toán QHTT:

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

với điều kiện $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Như vậy, bài toán lập kế hoạch sản xuất tổng quát có dạng:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

trong đó: + x_j : Số sản phẩm loại j ($j = \overline{1,n}$) cần sản xuất ;

+ c_j : Tiền lãi của một đơn vị sản phẩm loại j ;

+ a_{ij} : Suất chi phí nguyên liệu loại i($i = \overline{1,m}$) cho một đơn vị sản phẩm loại j ;

+ b_i : lượng dự trữ nguyên liệu loại i.

1.2.2 Bài toán vận tải

- Có m kho hàng chứa cùng một loại hàng hoá được đánh số thứ tự $i = \overline{1,m}$ gọi là điểm phát thứ i. Lượng hàng chứa tại điểm phát thứ i là a_i;
- Có n điểm tiêu thụ loại hàng hoá trên được đánh số thứ tự $j = \overline{1,n}$ gọi là điểm thu thứ j; Điểm thu thứ j có nhu cầu tiêu thụ hàng là b_j .
- Biết c_{ij} là cước phí vận chuyển 1 đơn vị hàng hoá từ điểm phát thứ i điển thu thứ j ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$).

Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ các điểm phát đến các điểm thu sao cho chi phí vận chuyển là ít nhất với điều kiện: Các điểm phát phải phát hết hàng và các điểm thu thì thoả mãn đủ nhu cầu.

Đặt x_{ij} là lượng hàng cần vận chuyển từ điểm phát A_i đến điểm thu B_j ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$). Khi đó mô hình toán học của bài toán vận tải (BTVT) có dạng:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

với điều kiện: $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Để bài toán có lời giải, thì nó phải thoả mãn điều kiện cân bằng thu phát: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

1.3 KHÔNG GIAN EUCLIDE n-CHIỀU TRÊN TRƯỜNG SỐ THỰC

1.3.1 Tích vô hướng của 2 vector

- Tích vô hướng trên không gian vector V là một hàm xác định trên $V \times V$ thoả mãn:

  i) $<x, y> = <y, x> \quad \forall x,y \in V$

  ii) $<x + y,z> = <x,z> + <y, z> \quad \forall x,y,z \in V$

  iii) $<\lambda x,y> = <x,\lambda y> = \lambda<x,y> \quad \forall x,y \in V, \forall \lambda \in R$

  iv) $<x,x> \geq 0$; $<x,x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- Nếu $<x,y> = 0$ ta nói 2 vector x và y trực giao với nhau.

1.3.2 Siêu phẳng và nửa không gian

Cho vector $a \in R^n$ và số thực α, siêu phẳng P trong không gian R^n là tập

$$P = \left\{ x \in R^n \mid \langle a,x \rangle = \alpha \right\}$$

Nếu $\alpha = 0$ thì P là một không gian con n-1 chiều. Mỗi siêu phẳng P chia không gian R^n thành 2 nửa không gian:

$$P_1 = \left\{ x \in R^n \mid \langle a,x \rangle \leq \alpha \right\} \quad : \text{Nửa không gian đóng}$$

$$P_2 = \left\{ x \in R^n \mid \langle a,x \rangle > \alpha \right\} \quad : \text{Nửa không gian mở}$$

1.3.3 Đa tạp tuyến tính

Định nghĩa 1.2 Giả sử $A = (a_{ij})_{mxn}$, $b \in R^m$ và $rank(A) = m$ khi đó tập:

$$A = \left\{ x \in R^n \mid Ax = b \right\}$$

được gọi là 1 đa tạp tuyến tính có thứ nguyên là $r = n\text{-}m$.

Nếu $b=0$ thì D là một không gian con r chiều. Như vậy siêu phẳng là 1 đa tạp tuyến tính có thứ nguyên n-1, đường thẳng là một đa tạp tuyến tính có thứ nguyên là 1, một điểm là đa tạp tuyến tính có thứ nguyên 0 và không gian R^n là một đa tạp tuyến tính có n thứ nguyên. Thứ nguyên của một tập hợp là thứ nguyên của đa tạp tuyến tính bé nhất chứa nó.

II. TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đức Nghĩa, Tối ưu hoá, Nxb GD, 1999
2. Trần Vũ Thiệu-Bùi Thế Tâm, Tối ưu hoá , Nxb GTVT, 2000
3. Nguyễn Địch, Lý thuyết tối ưu hoá, Nxb ĐHQG Hà nội, 2003

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

Học phần: **CÁC PP TỐI ƯU**		Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT
Thời gian: Tuần 2 Tiết 4-6 GV giảng: 3, Bài tập: 0, Tự học :3		Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn Vũ Anh Mỹ
Chương 1	**Bài toán tối ưu hoá và các vấn đề cơ sở**	
Các mục	1.3 Không gian Euclide n-chiều 1.4 Cơ sở giải tích lồi	
Mục đích - yêu cầu	- Nhắc lại và bổ xung một số kiến thức ĐSTT có liên quan - Nắm được cơ sở và ý nghĩa hình học của các khái niệm toán học	

NỘI DUNG

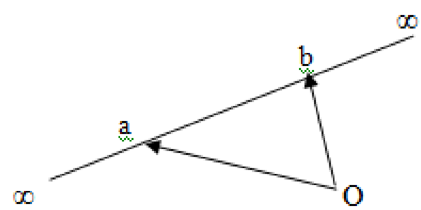
- **LÝ THUYẾT**

1.4 CƠ SỞ GIẢI TÍCH LỒI

1.4.1 Đường thẳng đi qua 2 điểm

Cho 2 điểm a và b∈R^n, đường thẳng đi qua a và b là tập :

$$\Delta = \{x \in R^n \mid x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in R\}.$$



Chú ý:

+ $\Delta_1 = \{x \in R^n \mid x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \geq 1\}$ = [a, ∞): Nửa đường thẳng xuất phát từ a.

+ $\Delta_2 = \{x \in R^n \mid x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \leq 0\}$ = [b, ∞): Nửa đường thẳng xuất phát từ b.

+ $\Delta_3 = \{x \in R^n \mid x = \lambda a + (1-\lambda)b, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ = [a,b]: Đoạn thẳng nối a với b.

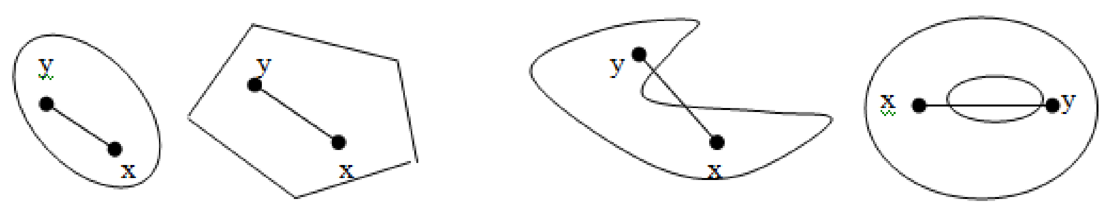
1.4.2 Tập hợp lồi

Định nghĩa 1.1 Tập C được gọi là một tập lồi nếu x, y ∈ C thì

$$\forall \lambda \in [0,1], x = \lambda a + (1-\lambda)b \in C \ \langle a_i, x\rangle \leq b_i$$

Nghĩa là nếu x,y∈ C thì C chứa cả đoạn thẳng nối x và y.

Thứ nguyên của tập lồi là thứ nguyên của đa tạp tuyến tính nhỏ nhất chứa nó.



Các tập lồi **Các tập không lồi**

Định lí 1.1 Giao của 2 tập lồi là tập lồi

Chứng minh:…

1.4.3 Tổ hợp lồi

Cho họ gồm m vector $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_m\} \subset R^n$. Tổ hợp lồi của họ S là biểu thức:

$$x := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \quad \text{với} \quad \lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,m} \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

Tập các tổ hợp lồi của S được gọi là bao lồi (convex hull) của S, kí hiệu conv(S).

Từ định nghĩa trên ta thấy đoạn thẳng [a,b] là bao lồi của 2 điểm a và b và cũng là tập lồi nhỏ nhất chứa a và b.

Định lý 1.2 Nếu *X* là tập lồi thì nó chứa tổ hợp lồi của một số điểm bất kỳ của nó.

Chứng minh: (Bằng phương pháp qui nạp theo *m*). Giả sử X là tập lồi và $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m \in X$. Đặt $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ với $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$ và $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Ta cần chứng minh $x \in X$.

Thật vậy:

- Với m =2 ta có $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ với $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ và $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Suy ra $x = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2 \in [x_1, x_2]$. Do đó $x \in X$.

- Giả sử định lý đúng cho m-1 điểm, tức là $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i$ với $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,m-1}$ và $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1$. Đặt $\alpha = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i$ ta có $\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\alpha} = 1$ và $\lambda_m = 1-\alpha \geq 0$ khi đó $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \alpha \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i + (1-\alpha) x_m$

Do giả thiết qui nạp ta có $\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i \in X$, hơn nữa và $x_m \in X$ nên $x \in X$ (đpcm).

1.4.4 Cấu trúc tập lồi

Định nghĩa 1.3. Cho X là một tập lồi đóng trong không gian R^n. Tập con F của X được gọi là một diện của F nếu F lồi và bất kỳ một đoạn thẳng nào nhận một điểm x của F làm điểm trong thì đoạn thẳng đó cũng nằm trong F.

- Diện có thứ nguyên 0 được gọi là đỉnh hay điểm cực biên của X. Nếu x là một điểm cực biên của X thì không có đoạn thẳng nào trong của X nhận x làm điểm trong. Tập các điểm cực biên của X gọi là viền của X và kí hiệu là V(X).

- Diện có thứ nguyên 1 được gọi là cạnh của X.

Định lý 1.4 Giả sử X là tập lồi đóng , giới nội và $x^0 \in X$. Khi đó x^0 là tổ hợp lồi của một số hữu hạn các điểm cực biên của X.

Chứng minh:

1.4.5 Tập lồi đa diện và đa diện lồi

Định nghĩa 1.4

+ Tập lồi đa diện (hay khúc lồi) là giao của số hữu hạn nửa không gian đóng.

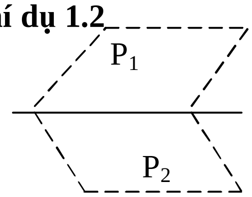
+ Đa diện lồi là một tập lồi đa diện giới nội.

Giả sử tập lồi đa diện D là giao của m nửa không gian đóng cho bởi các bất phương trình: $\langle a_i, x \rangle \leq b_i$ với $i = \overline{1,m}$, $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in R^n$.

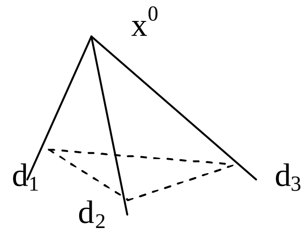
Khi đó m bất phương trình viết lại dưới dạng ma trận $Ax \leq b$ và tập

$D = \left\{ x \in R^n \mid Ax \le b_i ; i = \overline{1,m} \right\}$, với: $A = (a_{ij})_{mxn}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$ và $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in R^m$

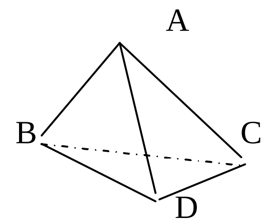
Thí dụ 1.2



Tập lồi đa diện
0 đỉnh, 1 cạnh



Tập lồi đa diện
1 đỉnh, 3 cạnh



Đa diện lồi 4 đỉnh,
6 cạnh và 4 diện 2 thứ nguyên

Định lý 1.5 Nếu x^0 là một đỉnh của tập lồi đa diện D, thì D được chứa trong nón G có đỉnh x^0 và có các cạnh sinh bởi các cạnh của D kề với x^0.

Chứng minh:

- **KIỂM TRA LÝ THUYẾT**
  - Kiến thức về giải tích lồi và ý nghĩa hình học
  - Biểu diễn toán học của một đa diện lồi.

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

<table>
<tr><td colspan="2">Học phần: CÁC PP TỐI ƯU</td><td>Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT</td></tr>
<tr><td colspan="2">Thời gian: Tuần 3 Tiết 7-9
GV giảng: 3, Bài tập: 0, Tự học :3</td><td>Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn
Vũ Anh Mỹ</td></tr>
<tr><td>Chương 2</td><td colspan="2">Bài toán Qui hoạch tuyến tính</td></tr>
<tr><td>Các mục</td><td colspan="2">2.1 Bài toán thực tế và ý nghĩa hình học
2.2 Bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc
2.3 Thuật toán đơn hình (Simplex)</td></tr>
<tr><td>Mục đích - yêu cầu</td><td colspan="2">- Giới thiệu một vài mô hình thực tiễn dẫn đến qui hoạch tuyến tính
- Học viên nắm được Thuật toán đơn hình và cơ sở toán học của nó</td></tr>
</table>

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

Chương 2. BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

2.1 BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ Ý NGHĨA HÌNH HỌC

2.1.1 Bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu

Bài toán có dạng: $$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \qquad (2.2)$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \qquad (2.3)$$

Hay dạng ma trận: $$F(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow max$$
$$Ax \le b\ ,\ x \ge 0$$

Bài toán (2.1)-(2.3) có hàm mục tiêu và các ràng buộc đều là hàm bậc nhất của các biến x_j nên đây là một bài toán QHTT.

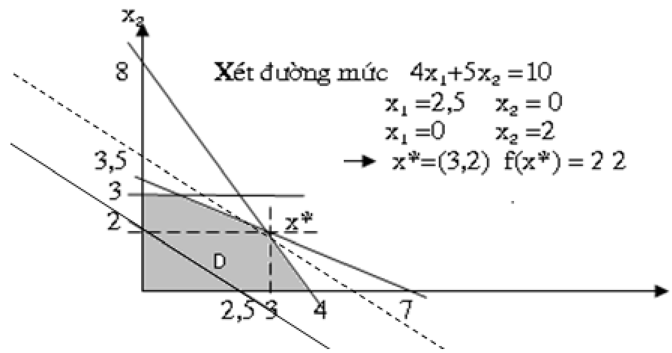
Vector $x \in R^n$ thoả mãn các điều kiện (2.2)-(2.3) được gọi là phương án chấp nhận được, nói gọn là phương án. Tập tất cả các phương án $D = \{x \in R^n \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$ được gọi là miền chấp nhận được. Dễ thấy D là một tập lồi đa diện. Nếu D giới nội thì D là một đa diện lồi. Các bài toán thực tế luôn luôn có thể giả thiết D là giới nội và vì vậy người ta thêm vào một ràng buộc có dạng:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le L$$ với L là một số dương đủ lớn.

2.1.2 Thí dụ thực tế và ý nghĩa hình học

Xét bài toán lập kế hoạch sản xuất sau: $F(x) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



2.2 BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHÍNH TẮC

2.2.1 Mô hình toán học

Phần này ta nghiên cứu bài toán QHTT có dạng sau:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min \qquad (2.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m} \qquad (2.5)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n} \qquad (2.6)$$

hay có thể viết dưới dạng ma trận: $F(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow min$

$$Ax = b\ ,\ x \geq 0$$

Không làm mất tính tổng quát ta có thể thêm các giả thiết: $b \geq 0$, *rank(A)=m* < *n*. Khi đó tập các phương án chấp nhận được $D=\{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ là đa diện có thứ nguyên *n-m*.

2.2.2 Các định lý cơ bản

Định lý 2.1 Nếu hàm F(x) đạt cực tiểu tại một điểm duy nhất x^*, thì x^* phải là một đỉnh của D.

Chứng minh…

Định lý 2.2 Nếu hàm F(x) đạt cực tiểu tại một vector x^* là điểm trong của [a,b] trong D thì F(x) đạt cực tiểu tại mọi điểm trên đoạn thẳng đó.

Chứng minh…

Hệ quả. Nếu bài toán QHTT có phương án tới ưu và tập D có đỉnh thì F(x) đạt giá trị tối ưu tại ít nhất một đỉnh của D.

Định lý 2.2 và hệ quả của nó rất quan trọng trong xây dựng thuật toán giải QHTT. Do khẳng định nếu bài toán có lời giải tối ưu thì phải có lời giải tối ưu là đỉnh của đa diện ràng buộc D, mặt khác do D là tập lồi đa diện nên nó chỉ có một số hữu hạn đỉnh nên ta tập trung vào việc tìm phương án tối ưu của bài toán trên các đỉnh của đa diện.

2.3 THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH (Simplex Algorithm)

2.3.1 Đường lối chung

Thuật toán đơn hình bao gồm các bước cơ bản như sau:

Bước 1. Tìm phương án cực biên xuất phát

Kết quả của bước này là một trong hai khả năng:

- Phát hiện bài toán không có phương án.
- Tìm được phương án cực biên $x^0 \in D$.

Bước 2. Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu đối với phương án tìm được.

Có hai khả năng có thể xảy ra:

- Nếu x^0 thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu : Dừng thuật toán, đặt $x^* = x^0$ và tính $F^* = F(x^*)$.
- Nếu x^0 không thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu , thì chuyển sang bước 3.

Bước 3. Cải tiến phương án

- Tìm phương án cực biên x^1 tốt hơn phương án x^0 , tức là $F(x^1) < F(x^0)$.
- Lặp lại bước 2.

Do D là tập lồi đa diện nên nó chỉ có một số hữu hạn đỉnh. Vì vậy thuật toán sẽ kết thúc sau một số bước lặp, kết quả là hoặc tìm được phương án tối ưu x^* hoặc phát hiện bài toán không có phương án tối ưu.

2.3.2 Cơ sở thuật toán

Xét bài toán QHTT dạng chính tắc: $F(x) = \langle c, x\rangle \to min$

$$x \in D = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

với giả thiết $b \geq 0$ và rank(A)=m < n.

Bước 1. Tìm phương án cực biên xuất phát $x^0 \in D$

Do x^0 là phương án cực biên nên nó phải thỏa mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính. Do x^0 là một phương án nên x^0 đã thỏa *m* phương trình ràng buộc Ax=b, nên nó còn phải thỏa mãn chặt thêm *n-m* ràng buộc dạng $x_j = 0$ nữa. Không làm mất tính tổng quát, giả sử :

$$x^0_{m+1} = x^0_{m+2} = ... = x^0_n = 0 \tag{2.7}$$

Khi đó hệ phương trình để xác định *m* thành phần còn lại của x^0 là:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +... & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +... & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ ... & ... & +... & ... & = & ... \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +... & a_{mm}x_m & = & b_m \end{cases} \tag{2.8}$$

Ký hiệu J ={1,2,3,…m}: Tập chỉ số cơ sở của x^0;

$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $j=\overline{1,n}$: Cột thứ j của ma trận A, vector cơ sở;

$B=(A_1,A_2,\ldots,A_m) =(A_j)_{j\in J}$: Ma trận cơ sở và $x_J = (x_j)_{j\in J}$;

Các biến x_j với $j\in J$: Gọi là các biến cơ sở ; x_j với $j\notin J$: Gọi là các biến phi cơ sở.

Khi đó hệ phương trình (2.8) có thể viết thành $Bx_J = b$.

Do giả thiết rank(B) = rank(A) = m nên x^0_J là nghiệm của hệ (5.8) : $x^0_J = B^{-1}b \geq 0$ và

$$x^0 = (x^0_1, x^0_2, x^0_3, ..., x^0_m, 0,0.0,..,0)$$

Nếu $x^0_j > 0$ với $\forall j \in J$ thì x^0 gọi là phương án cực biên không suy biến (không thoái hóa); Ngược lại nếu $\exists j \in J$ để cho $x^0_j = 0$ thì x^0 gọi là phương án cực biên suy biến.

Từ các phân tích trên ta có nhận xét như sau: Giả sử ta tìm được tập $J \subset \{1,2,3,\dots,n\}$ sao cho $\|J\| = m$ và $B=(A_j)_{j\in J}$ là ma trận không suy biến. Khi đó:

- Nếu $B^{-1}b \geq 0$ thì B gọi là một cơ sở chấp nhận được của bài toán QHTT, nó xác định một phương án cực biên;

- Nếu điều kiện $B^{-1}b \geq 0$ không thỏa mãn thì B không phải là cơ sở chấp nhận được của bài toán, do đó ta phải chọn lại *m* cột độc lập tuyến tính khác của A…cứ như vậy cho đến khi ta tìm được cơ sở chấp nhận được.

Cách làm này mang nhiều tính may rủi, tốn công sức.

Bước 2. Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu

Giả sử ta đã tìm được phương án cực biên x^0 tương ứng với cơ sở $B=(A_j)_{j\in J}$.

Khi đó $x_j^0 \geq 0 \ \ j \in J$ và $x_k^0 = 0 \ \ k \notin J$.

Do $(A_j)_{j\in J}$ là một họ m vector độc lập tuyến tính trong không gian R^m, nên nó tạo thành một cơ sở trong không gian R^m. Ta có thể phân tích các vector A_k với $k \notin J$ theo cơ sở này:

$$A_k = \sum_{j\in J} v_{jk} A_j \quad k \notin J \tag{2.9}$$

Đặt
$$\Delta_k = \sum_{j\in J} v_{jk} c_j - c_k \quad k=1,2,\dots\text{: Các số kiểm tra} \tag{2.10}$$

Định lý 2.3 (Công thức số gia của hàm mục tiêu). Nếu x^0 là phương án cực biên tương ứng với cơ sở $B=(A_j)_{j\in J}$, thì $\forall x \in D$ ta có:

$$x_j = x_j^0 - \sum_{k\notin J} v_{jk} x_k \quad j \in J \tag{2.11}$$

$$F(x) = F(x^0) - \sum_{k\notin J} \Delta_k x_k \tag{2.12}$$

- **Ý nghĩa của các công thức (2.11) và (2.12)**

Đặt $\Delta x_j = x_j - x_j^0 = -\sum_{k\notin J} v_{jk} x_k$, $j \in J$: Số gia của biến x_j

$\Delta F(x) = F(x) - F(x^0) = -\sum_{k\notin J} \Delta_k x_k$: Số gia của hàm mục tiêu.

Từ đó: Các biến cơ sở và số gia của hàm mục tiêu là hàm tuyến tính của các biến phi cơ sở.

Định lý 2.4 (Tiêu chuẩn tối ưu). Nếu x^0 là phương án cực biên tương ứng với cơ sở $B=(A_j)_{j\in J}$, thì điều kiện để x^0 là phương án tối ưu là:

$$\Delta_k \leq 0 \text{ với } \forall \ k \notin J \tag{2.13}$$

Chứng minh…

Nều x^0 thỏa mãn tiêu chuẩn (2.13) thì x^0 là phương án tối ưu của bài toán QHTT . Còn nếu nó không thỏa mãn tiêu chuẩn (2.13) thì $\exists k \notin J$ $\Delta_k > 0$, ta cần cải tiến phương án. Tuy nhiên định lý sau đây giúp ta nhận biết bài toán không có phương án tối ưu.

Định lý 2.5 (Tiêu chuẩn nhận biết bài toán không có phương án tối ưu). Giả sử x^0 là phương án cực biên tương ứng với cơ sở $B=(A_j)_{j\in J}$. Nếu $\exists k \notin J$ $\Delta_k >0$ và $v_{jk} \le 0$ với $\forall j \in J$ thì bài toán không có phương án tối ưu.

Chứng minh…

Bước 3. Cải tiến phương án

Giả sử x^0 là phương án cực biên tương ứng với cơ sở $B=(A_j)_{j\in J}$. Nếu $\exists k \notin J$ để $\Delta_k >0$ thì x^0 không phải là phương án tối ưu. Ta cần tìm phương án cực biên x^1 tốt hơn x^0: $F(x^1) < F(x^0)$. Gọi B_1 là cơ sở tương ứng với x^1. Để đơn giản ta tìm x^1 là một đỉnh kề của x^0, nghĩa là hai cơ sở tương ứng chỉ khác nhau đúng 1 vector:

$$B_1 = B\setminus \{A_p\}\cup\{A_q\} \qquad p\in J \text{ và } q\notin J \tag{2.14}$$

Vấn đề còn lại là chọn A_p và A_q như thế nào.

a. Chọn vector A_q đưa vào cơ sở mới B_1

Do tiêu chuẩn tối ưu là $\Delta_k \le 0$ với $\forall k \notin J$ nên có thể chọn vector A_q bất kỳ tương ứng với $\Delta_q>0$. Tuy nhiên để tăng tốc độ giảm giá trị hàm mục tiêu ta chọn :

$$\Delta_q = \max_{k\notin J} \Delta_k \tag{2.15}$$

Khi đó A_q tương ứng với phương của cạnh có tốc độ giảm của hàm hàm mục tiêu nhanh nhất vì:

$$F(x^1) = F(x^0) - \sum_{k\notin J} \Delta_k x_k = F(x^0) - \Delta_q x_q^1$$

Có hai trường hợp có thể xảy ra:

- Nếu $v_{jq} \le 0$ với $\forall j\in J$ thì theo định lý 5.5 bài toán không có phương án tối ưu.
- Nếu $\exists j\in J$ $v_{jq} >0$ thì chuyển sang việc chọn A_p .

b. Chọn vector A_p đưa ra khỏi B

Chọn A_p tương ứng với
$$\frac{x_p^0}{v_{pq}} = \min_{v_{jq}>0} \frac{x_j^0}{v_{jq}} \tag{2.16}$$

Tính hợp lý của việc chọn A_p như trên được giải thích như sau: Việc chọn A_p phải bảo đảm $x^1 \ge 0$. Theo công thức (2.11) ta có :

$$x_j^1 = x_j^0 - \sum_{k\notin J} v_{jk} x_k^1 = x_j^0 - v_{jq} x_q^1 \ge 0 \quad j\in J_1 = J\setminus\{p\}\cup\{q\} \tag{2.17}$$

- Nếu $v_{jq} \le 0$ thì đương nhiên $x_j^1 \ge 0$

- Nếu $v_{jq} >0$ từ (5.17) suy ra $x_q^1 \le \dfrac{x_j^0}{v_{jq}}$, vì vậy $x_q^1 = \dfrac{x_p^0}{v_{pq}} = \min\limits_{v_{jq}>0} \dfrac{x_j^0}{v_{jq}}$

2.4 BẢNG ĐƠN HÌNH

2.4.1 Bảng đơn hình xuất phát

Xét bài toán QHTT dạng chính tắc: $F(x) = \langle c,x\rangle \to \min$

$$x \in D = \{x\in R^n \mid Ax = b,\ x \ge 0\}$$

Giả thiết : $b\ge 0$, rank(A)=m < n.

Giả sử đã tìm được cơ sở xuất phát $B=(A_j)_{j\in J}$. Lần lượt tính:

$$x_J^0 = B^{-1}b \quad H = B^{-1}A = (B^{-1}A_1, B^{-1}A_2,\ldots, B^{-1}A_n) = (V_1,V_2,\ldots,V_n)$$

Nếu J = {1,2,3,…,m} bảng đơn hình xuất phát có dạng.

- **Lập bảng đơn hình có dạng:**

B	c_J	x_J	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_q	…	c_n	h_j
			A_1	A_2	…	A_m	A_{m+1}	…	A_k	…	A_q	…	A_n	$v_{jq}>0$
A_1	c_1	x_1	1	0		0	$v_{1,m+1}$		$v_{1,k}$		$v_{1,q}$		$v_{1,n}$	
A_2	c_2	x_2	0	1		0	$v_{2,m+1}$		$v_{2,k}$		$v_{2,q}$		$v_{2,n}$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
A_j	c_j	x_j	0	0		0	$v_{j,m+1}$		$v_{j,k}$		$v_{j,q}$		$v_{j,n}$	$\frac{x_j}{v_{jq}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
A_p	c_p	x_p	0	0		0	$v_{p,m+1}$		$v_{p,k}$		$v_{p,q}$		$v_{p,n}$	$\frac{x_p}{v_{pq}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_m	x_m	0	0		1	$v_{m,m+1}$		$v_{m,k}$		$v_{m,q}$		$v_{m,n}$	
Δ_k			0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_q	…	Δ_n	

Với các số kiểm tra: $\Delta_k = \sum_{j\in J} v_{jk}c_j - c_k$ nếu $k \notin J$ và $\Delta_k = 0$ nếu $k \in J$.

- **Sử dụng bảng đơn hình**

  - Nếu $\forall\ k \in J\ \Delta_k \le 0$ thì dừng và x^0 là phương án tối ưu;

Ngược lại cần chọn A_q đưa vào B_1 theo qui tắc: $\Delta_q = \max_{k\in J} \Delta_k$

  - Nếu trên cột A_q: $v_{jq} \le 0\ \forall\ j \in J$ thì dừng: bài toán không có phương án tối ưu;

gược lại tính $h_j = \dfrac{x_j^0}{v_{jq}}$ và chọn A_p đưa ra khỏi B theo qui tắc : $h_p = \dfrac{x_p^0}{v_{pq}} = \min_{v_{jq}>0} h_j$

Gọi A_P là hàng xoay và cột A_q là cột xoay và v_{pq} là phần tử xoay. Khi đã xác định được phần tử xoay, ta lập bảng đơn hình mới với vớ B_1 đã tìm được.

2.4.2 Qui tắc chuyển bảng theo cơ sở mới

Việc tính toán các số liệu trong bảng đơn hình mới có thể làm như đối với cơ sở B. Tuy nhiên cách làm như vậy rất tốn công sức. Chỉ cần chú ý rằng cơ sở mới chỉ khác cơ sở cũ đúng một vector, ta có công thức đổi bảng như sau:

Định lý 2.6

$$x_j^1 = \begin{cases} x_j^0 - \dfrac{x_p^0}{v_{pq}} v_{jq} & \text{nếu } j \in J_1 \setminus \{q\} \\ \dfrac{x_p^0}{v_{pq}} & \text{nếu } j=q \end{cases} \qquad v_{jk}^1 = \begin{cases} v_{jk} - \dfrac{v_{pk}}{v_{pq}} v_{jq} & \text{nếu } j \in J_1 \setminus \{q\} \\ \dfrac{v_{pk}}{v_{pq}} & \text{nếu } j=q \end{cases}$$

$$\Delta_k^1 = \Delta_k - \frac{v_{pk}}{v_{pq}} \Delta_q \quad k \notin J_1$$

Chứng minh…(Giống như công thức Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính.)

Thí dụ 2.1 Giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình với cơ sở xuất phát $B=(A_1,A_2,A_3)$

$$F(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad +x_3 \; +3x_4 \; -x_5 = 9 \\ x_1 \; +x_2 \quad\quad +x_4 \; +x_5 = 7 \\ \quad +x_2 \; +x_3 \; +2x_4 \; +4x_5 = 6 \\ \quad\quad x_j \geq 0;\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Giải. Ta có B=(A_1,A_2,A_3) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$x_J = B^{-1}b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ và $H = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lập bảng đơn hình:

B	C_J	x_J	1	3	2	-3	6	h_J
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_1	1	5	1	0	0	1	-2	5
A_2	3	2	0	1	0	0	3	
A_3	2	4	0	0	1	**2**	1	**2**
Δ_k			0	0	0	**8**	3	
A_1	1	3	1	0	-1/2	0	-5/2	
A_2	3	2	0	1	0	0	3	
A_4	-3	2	0	0	1/2	1	1/2	
Δ_k			0	0	-4	0	-1	

Bài toán có phương án tối ưu $x^* = (3,2,0,2,0)$ $F^* = F(x^*) = 1x3 + 3x2 - 3x2 = 3$

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

Học phần: **CÁC PP TỐI ƯU**		Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT
Thời gian: Tuần 4 Tiết 10-12 GV giảng: 2, Bài tập: 1, Tự học :3		Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn Vũ Anh Mỹ
Chương 2	**Bài toán Qui hoạch tuyến tính**	
Các mục	2.4 Bảng đơn hình 2.5 Phương pháp đơn hình hai pha	
Mục đích - yêu cầu	- Giới thiệu phương pháp đơn hình hai pha: Tìm phương án xuất phát - Luyện tập giải QHTT dạng chính tắc	

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

2.5 PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH HAI PHA

2.5.1 Ý tưởng của phương pháp

Xét bài toán QHTT dạng chính tắc: $F(x) = \langle c, x \rangle \to min$

$$x \in D = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

Giả sử bài tính hay không. Vì vậy quá toán này ta chưa biết trước một cơ sở xuất phát nào, cũng chưa biết các ràng buộc có độc lập tuyến trình giải bài toán cần được chia làm 2 pha:

- Pha I : Tìm phương án cực biên xuất phát
- Pha II: Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình từ phương án xuất phát tìm được.

Pha II đã được nghiên cứu trong mục trên. Ta cần quan tâm đến việc giải quyết pha I.

2.5.2 Pha I: Tìm phương án cực biên xuất phát

Giả sử b ≥ 0. Giải bài toán QHTT phụ:

$$G(X) = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \ldots + x_{n+m} \to \min$$
$$X \in \{(x,y) \in R^{n+m} \mid Ax + y = b,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

Với $y = (x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m})^T$ gọi là các biến phụ hay biến giả. Rõ ràng, do giả thiết b ≥ 0, bài toán có cơ sở xuất phát $B=(A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m})$ có dạng ma trận đơn vị và hàm mục tiêu của bài toán phụ bị chặn dưới bởi 0 nen bài toán luôn luôn có lời giải tối ưu. Do đó giải bài toán QHTT phụ ta được lời giải $X^* = (x^*, y^*)$ với cơ sở tối ưu B*.

Định lý 2.7 Giả sử bài toán QHTT phụ ta được lời giải tối ưu $X^* = (x^*, y^*)$. Khi đó:

i) Nếu $y^* \neq 0$ thì bài toán gốc không có phương án: $D = \varnothing$

ii) Nếu $y^* = 0$ thì bài toán gốc có phương án cực biên xuất phát là x^*

- **Các tình huống xảy ra khi $y^* = 0$**

a) Nếu B* chỉ chứa các cột của biến gốc: Có thể chuyển sang pha II.

b) Nếu B*có chứa các cột của biến pha: Nghĩa là nó có chứa các cột A_p với p> n. Khi đó B* không phải là cơ sở của bài toán gốc .Có 2 trường hợp:

- Nếu $v_{pj} = 0$ với $\forall\ j \leq n$ thì ràng buộc p của bài toán là tổ hợp tuyến tính các ràng buộc còn lại, nên có thể xóa A_p trong B*;

- Nếu $\exists q \le n$, $v_{pq} \neq 0$ thì dùng v_{pq} làm phần tử xoay để thay A_p bởi A_q…

Tiếp tục như vậy đến khi ta được cơ sở của bài toán gốc thì chuyển sang pha 2.

Thí dụ 2.2 Giải bài toán QHTT

$$F(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 15 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 20 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = 52 \\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Giải. Lập bài toán phụ: $G(x) = x_5 + x_6 + x_7 \rightarrow min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 15 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 20 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 + x_7 = 52 \\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Giải bài toán phụ với cơ sở xuất phát B=(A_5, A_6, A_7)

B	C_J	x_J	0	0	0	0	1	1	1	h_J
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
A_5	1	15	**1**	-2	-1	0	1	0	0	**15**
A_6	1	20	1	-1	-1	1	0	1	0	20
A_7	1	52	2	0	-1	2	0	0	1	26
Δ_k			**4**	-3	-3	3	0	0	0	
A_1	0	15	1	-2	-1	0	1	0	0	
A_6	1	5	0	**1**	0	1	-1	1	0	**5**
A_7	1	22	0	4	1	2	-2	0	1	22/4
Δ_k			0	**5**	1	3	-4	0	0	
A_1	0	25	1	0	-1	2	-1	2	0	
A_2	0	5	0	1	0	1	-1	1	0	
A_7	1	2	0	0	**1**	-2	2	-4	1	
Δ_k			0	0	**1**	2	1	-5	0	
A_1	0	27	1	0	0	0	1	-2	1	
A_2	0	5	0	1	0	1	-1	1	0	
A_3	0	2	0	0	1	-2	2	-4	1	
Δ_k			0	0	0	0	-1	-1	-1	

- Cơ sở tối ưu của bài toán phụ chỉ chứa các cột của biến gốc→ Chuyển sang pha II.

B	C_J	x_J	1	-2	1	-5	h_J
			A_1	A_2	A_3	A_4	
A_1	1	27	1	0	0	0	
A_2	-2	5	0	1	0	**1**	
A_3	1	2	0	0	1	-2	
Δ_k			0	0	0	**1**	
A_1	1	27	1	0	0	0	
A_4	-5	5	0	1	0	1	
A_3	1	12	0	2	1	0	
Δ_k			0	-1	0	0	

Bài toán gốc có phương án tối ưu: $x^* = (27, 0, 12, 5)$ và

$$F^* = F(x^*) = 1x27 - 5x5 + 1x12 = 14.$$

Chú ý khi giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình hai pha:

- Không cần lập bài toán phụ mà chỉ cần lập bảng đơn hình cho pha I ngay;
- Trong bảng đơn hình ở pha I không cần ghi các cột của các biến pha x_6, x_7, x_8 vì chúng không ảnh hưởng đến quá trình phân tích và giải bài toán.

Thí dụ 2.3 Giải bài toán QHTT

$$F(x) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 8 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_j \geq 0 \quad ; j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Giải.

Pha I. Giải bài toán phụ

B	C_J	x_J	0	0	0	0	0	h_J
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_6	1	5	1	1	1	1	1	5
A_7	1	8	1	1	2	2	2	4
A_8	1	2	1	1	0	0	0	
A_9	1	3	0	0	**1**	1	1	**3**
Δ_k			3	3	**4**	4	4	
A_6	1	2	1	1	0	0	0	2
A_7	1	2	1	1	0	0	0	2
A_8	1	2	**1**	1	0	0	0	**2**
A_3	0	3	0	0	1	1	1	
Δ_k			**3**	3	0	0	0	
A_6	1	0	0	0	0	0	0	
A_7	1	0	0	0	0	0	0	
A_1	0	2	1	1	0	0	0	
A_3	0	3	0	0	1	1	1	
Δ_k			0	0	0	0	0	

Cơ sở tối ưu của bài toán phụ có chứa cột A_6 và A_7 với $x_6 = x_7 = 0$, nhưng $v_{6j} = v_{7j} = 0$ với $\forall\ j \leq 5$ nên A_6 và A_7 có thể bỏ được trong cơ sở để chuyển sang pha II.

Pha II. Giải bài toán gốc.

B	C_J	x_J	2	-3	1	-2	-1	h_J
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_1	2	2	1	**1**	0	0	0	
A_3	1	3	0	0	1	1	1	
Δ_k			0	**5**	0	3	2	
A_2	-3	2	1	1	0	0	0	
A_3	1	3	0	0	1	**1**	1	

Δ_k			-5	0	0	**3**	2	
A_2	-3	2	1	1	0	0	0	
A_4	-2	3	0	0	1	1	1	
Δ_k			-5	0	-3	0	-1	

Bài toán gốc có phương án tối ưu: $x^* = (0, 2, 0, 3, 0)$ $F^* = F(x^*) = -3x2 - 2x3 = -12$.

II. BÀI TẬP

1. Giải bài toán QHTT với phương pháp đơn hình với cơ sở xuất phát $B=(A_1,A_2,A_3)$

$$F(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 + 4x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 6 \\ x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

- **Đs** : x* = (0, 0, 0, 45/34, 25/34,47/34) và F* = 9/2

2. Giải bài toán QHTT dạng chuẩn:

$$F(x) = x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \le 48 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 36 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \le 30 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

- **Đs** $X^* = (0, 6, 27)$ F*= 1 x 6 - 1x 27 = -21

3. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình 2 pha:

$$F(x) = 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 - x_6 = 10 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 14 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 - 6x_6 = 4 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

- **Đs** $x^* = (25/2, 0, 13/2, 0, 0, 5/2)$ F*= 2x25/2 +1 x 5/2 -2 x13/2 = 29/2

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

<table>
<tr><td colspan="2">Học phần: CÁC PP TỐI ƯU</td><td>Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT</td></tr>
<tr><td colspan="2">Thời gian: Tuần 5 Tiết 13-15
GV giảng: 1, Bài tập: 2, Tự học :3</td><td>Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn
Vũ Anh Mỹ</td></tr>
<tr><td>Chương 2</td><td colspan="2">Bài toán Qui hoạch tuyến tính</td></tr>
<tr><td>Các mục</td><td colspan="2">2.6 Phương pháp hàm phạt</td></tr>
<tr><td>Mục đích - yêu cầu</td><td colspan="2">- Giới thiệu phương pháp hàm phạt
- Luyện tập giải QHTT dạng chính tắc</td></tr>
</table>

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

2.6 PHƯƠNG PHÁP HÀM PHẠT

2.6.1 Mô tả phương pháp

Xét bài toán QHTT dạng chính tắc: $F(x) = \langle c, x\rangle \rightarrow min$

$$x \in D = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

Giả thiết b ≥ 0. Chưa biết hạng của ma trận A và tập D có phương án hay không.

- **Lập bài toán phạt (bài toán M)**

$$F_M(x,y) = \langle c,x\rangle + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \ldots + Mx_{n+m} \rightarrow \min$$

$$D_M \quad \begin{cases} Ax + y = b \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Trong đó $y=(x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m})^T \in R^n$ và M >>1.

Các biến $x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$ gọi là các biến phạt hay biến giả.

Định lý 2.8 Giả sử bài toán M có lời giải tối ưu $X^* =(x^*,y^*)$. Khi đó:

i) Nếu $y^* \neq 0$ thì bài toán gốc không có phương án: D =∅;

ii) Nếu $y^* = 0$ thì bài toán gốc có phương án tối ưu là x^*.

- **Định lý 2.9** Nếu bài toán M không có lời giải tối ưu (tức là $F_M(x,y) \rightarrow -\infty$) thì bài toán gốc cũng không có phương án tối ưu (tức là $F \rightarrow -\infty$).

2.6.2 Các thí dụ ứng dụng

Thí dụ 2.4 Giải bài toán QHTT bằng phương pháp hàm phạt:

$$F(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 9 \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Giải. Lập bài toán M:

$$F(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 + x_6 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_7 = 9 \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Rõ ràng là bài toán M có cơ sở chấp nhận được xuất phát là $B=(A_5,A_6,A_7)$.

- Lập bảng đơn hình giải bài toán M.

B	C_J	x_J	-3	1	3	-1	M	M	M	h_J
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
A_5	M	2	**1**	2	-1	1	1	0	0	**2**
A_6	M	6	2	0	-1	-1	0	1	0	3
A_7	M	9	1	-1	0	-1	0	0	1	9
Δ_k			3	-1	-3	1	0	0	0	
		M	**4**	1	-2	-1	0	0	0	
A_1	-3	2	1	2	-1	1	1	0	0	
A_6	M	2	0	-4	**1**	-3	-2	1	0	**2**
A_7	M	7	0	-3	1	-2	-1	0	1	7
Δ_k			0	-7	0	-2	-3	0	0	
		M	0	-7	**2**	-5	-4	0	0	
A_1	-3	4	1	-2	0	-2	-1	1	0	
A_3	3	2	0	-4	1	-3	-2	1	0	
A_7	M	5	0	1	0	1	1	-1	1	
Δ_k			0	-7	0	-2	-3	0	0	
		M	0	1	0	1	0	-2	0	
A_1	-3	14	1	0	0	0	1	-1	2	
A_3	3	17	0	-1	1	0	1	-2	3	
A_4	-1	5	0	1	0	1	1	-1	1	
Δ_k			0	-5	0	0	-1	-2	2	
		M	0	0	0	0	-1	-1	-1	

Bài toán có phương án tối ưu $x^* = (14,0,17,5)$ và $F^* = -3x14 +3x17-1x5 = 4$.

Thí dụ 2.5 Giải bài toán QHTT sau đây:

$$F(x) = x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 14 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Giải. Do chưa biết cơ sở chấp nhận được nào nên ta áp dụng phương pháp hàm phạt.

B	C_J	x_J	1	-4	-4	-2	3	h_J
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_6	M	8	1	-1	1	2	1	4
A_7	M	3	2	2	0	**1**	1	**3**
A_8	M	14	1	-3	2	3	2	14/3
Δ_k			-1	4	4	2	-3	
		M	4	-2	3	**6**	4	
A_6	M	2	-3	-5	**1**	0	-1	**2**
A_4	-2	3	2	2	0	1	1	
A_8	M	5	-5	-9	2	0	-1	5/2

Δ_k			-5	0	4	0	-5	
		M	-8	-14	**3**	0	-2	
A_3	-4	2	-3	-5	1	0	-1	
A_4	-2	3	2	2	0	1	1	3/2
A_8	M	1	1	**1**	0	0	1	**1**
Δ_k			7	20	0	0	-1	
		M	1	**1**	0	0	1	
A_3	-4	7	2	0	1	0	4	
A_4	-2	1	0	0	0	1	-1	
A_2	-4	1	1	1	0	0	1	
Δ_k			-13	0	0	0	-21	

Vậy bài toán gốc có lời giải tối ưu: $x^*=(0,1,7,1,0)$ và F*= -4 x7- 2x1- 4x1 = -34.

II. BÀI TẬP

1. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình hai pha:

$$F(x)= 6x_1 +6x_2 + x_3 - 5x_4 +2x_5 -x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 + x_6 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 - x_6 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 + x_6 = 18 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

- **Đs** x*=(7/2, 0, 8, 0, 0, 3) F* = 6x7/2- 1x3 + 1x8 = 26

2. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp hàm phạt :

$$F(x) =2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 +3x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 14 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

- **Đs** $X^*=(0 , 1, 7, 1, 0, 0)$ F*= -4 x 7 - 2 x 1 -4 x1 = -34

3. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp hàm phạt:

$$F(x) = 2x_1 -3x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 + 5x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = -12 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 12 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

- **Đs:** x* = (0, 17/2, 27/10 , 2/5, 0, 0) và F* = -106/5

4. Giải bài toán QHTT : $F(x) = x_1 +4 x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -10 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -6 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

- **Đs** $\mathbf{x}^*=(11,0 , 8, 0, 9)$ F*= 1 x 11 + 2 x 8 + 3 x 9 = 54

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

Học phần: **CÁC PP TỐI ƯU**	Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT
Thời gian: Tuần 6 Tiết 16-18 GV giảng: 2, Bài tập: 1, Tự học :3	Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn Vũ Anh Mỹ
Chương 2	**Bài toán Qui hoạch tuyến tính**
Các mục	2.7 Bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn 2.8 Xử lý các trường hợp bất thường
Mục đích - yêu cầu	- Hướng dẫn phương pháp đưa bài toán QHTT bất kỳ về dạng chính tắc - Luyện tập giải các bài toán QHTT dạng tổng quát

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

2.7 BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG HỖN HỢP

2.7.1 Bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn

Xét bài toán QHTT dạng chuẩn tắc:

$$F(x) = \langle c,x \rangle \to \min$$

$$x \in D = \{\, x \in R^n \mid A\,x \le b\,,\ x \ge 0 \}$$

Đưa bài toán về bài toán QHTT tương đương dạng chính tắc.

$$F(x) = \langle c,x \rangle \to \min$$

$$x \in D = \{\, x \in R^n \mid A\,x + y = b\,,\ x \ge 0\,, y \ge 0 \}$$

Trong đó $y=(x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m})^T \in R^n$.

Nếu $b \ge 0$ thì bài toán có cơ sở xuất phát dạng ma trận đơn vị $B=(A_{n+1},A_{n+2},\ldots,A_{n+m})$. Nên có thể lập ngay bảng đơn hình để giải bài toán. Ngược lại ta cần đổi dấu các ràng buộc vi phạm và giải bài toán bằng phương pháp hàm phạt hay đơn hình hai pha.

Thí dụ 2.6 Giải bài toán QHTT dạng chuẩn:

$$F(x) = x_1 - 6x_2 - 12x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7 \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 \le 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 3 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Giải. Bài toán QHTT dạng chính tắc tương đương:

$$F(x) = x_1 - 6x_2 - 12x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_6 = 3 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Bài toán tương đương có cơ sở xuất phát dạng ma trận đơn vị là B =(A_4,A_5,A_6).

B	C_J	x_J	1	-6	-12	0	0	0	h_J
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_4	0	7	5	4	**1**	1	0	0	**7**
A_5	0	10	6	6	1	0	1	0	10
A_6	0	3	4	3	-2	0	0	1	
Δ_k			-1	6	**12**	0	0	0	
A_3	-12	7	5	4	1	1	0	0	
A_5	0	3	1	2	0	-1	1	0	
A_6	0	17	14	11	0	2	0	1	
Δ_k			-61	-42	0	-12	0	0	

Vậy bài toán gốc có lời giải tối ưu: x^*=(0,0,7) và F*= -12 x7 = -84.

2.7.2 Bài toán QHTT tổng quát

Nguyên tắc chung: Đưa bài toán về dạng chính tắc tương đương, sau đó dùng phương pháp hàm phạt hay hai pha để giải.

- Trường hợp bài toán tìm max:

Nếu bài toán có dạng: $F(x)= \langle c,x\rangle \to \max,\ x\in D$ thì chuyển về bài toán

$$G(x)= - \langle c,x\rangle \to \min,\ x\in D$$

- Trường hợp ràng buộc bất đẳng thức:
  + Ràng buộc có dạng $\langle a_i ,x\rangle \le b_i$ được đổi thành $\langle a_i ,x\rangle + z_i = b_i$ và $z_i \ge 0$;
  + Ràng buộc có dạng $\langle a_i ,x\rangle \ge b_i$ được đổi thành $\langle a_i ,x\rangle - z_i = b_i$ và $z_i \ge 0$.
  Các biến mới z_i được gọi là biến bù.
- Các trường hợp về dấu của biến.
  + Ràng buộc $x_j \le 0$: Đổi biến $x_j' = - x_j \ge 0$;
  + Ràng buộc $x_j \ge d$: Đổi biến $x_j' = x_j - d \ge 0$;
  + Nếu x_j là biến không bị ràng buộc về dấu: Đổi biến $x_j = x_j' - x_j''$ và $x_j' \ge 0$, $x_j'' \ge 0$

Thí dụ 2.7 Giải bài toán QHTT:

$$F(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -3 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 \ge 18 \\ -x_2 - 3x_3 + 2x_5 \le 10 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Giải. Đưa ràng buộc về dạng chính tắc với b≥ 0

$$F(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 - x_6 = 18 \\ -x_2 - 3x_3 + 2x_5 + x_7 = 10 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

- Giải bài toán bằng phương pháp hàm phạt với cơ sở B=(A_8,A_9,A_7) …

Lời giải tối ưu của bài toán gốc: X*=(0,0,0,1,4) F*= 5x4 +3x1 =23.

Thí dụ 2.8 Giải bài toán Qui hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 48 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 30 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 23 \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Giải. Đưa bài toán về dạng chính tắc và biến đổi đơn giản:

$$f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \min \qquad f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 48 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 30 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_6 = 23 \\ x_j \geq 0\ \left(j = \overline{1,6}\right) \end{cases} \to \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 48 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 18 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 25 \\ x_j \geq 0\ \left(j = \overline{1,6}\right) \end{cases}$$

Ta đưa thêm vào một biến phạt x_7:

$$f_M(x) = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + Mx_7 \to \min$$

$$\to \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + x_7 = 48 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 18 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 25 \\ x_j \geq 0\ \left(j = \overline{1,7}\right) \end{cases}$$

Bảng đơn hình:

B	C_J	x_J	5	4	6	0	0	0	h_J
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_7	M	48	2	4	3	-1	0	0	12
A_5	0	18	-1	**2**	0	-1	1	0	**9**
A_6	0	25	1	1	-1	-1	0	1	25
Δ_k			-5	-4	-6	0	0	0	
		M	2	4	3	-1	0	0	
A_7	M	12	**4**	0	3	1	-2	0	**3**
A_2	4	9	-1/2	1	0	-1/2	1/2	0	
A_6	0	16	3/2	0	-1	-1/2	-1/2	1	32/3
Δ_k			-7	0	-6	-2	2	0	
		M	**4**	0	3	1	0	0	
A_1	5	3	1	0	3/4	1/4	-1/2	0	
A_2	4	21/2	0	1	3/8	-3/8	1/4	0	
A_6	0	23/2	0	0	-17/8	-7/8	1/4	1	
Δ_k			0	0	-3/4	-1/4	-3/2	0	

Lời giải tối ưu của bài toán gốc: X*=(3,21/2,0) F*= 5x3 +4x21/2 =57

II. CHỮA BÀI TẬP

1. Giải bài toán QHTT dạng hỗn hợp:

$$F(x) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 \le 12 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \ge 10 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

- **Đs** $X^*=(8, 2, 0)$ F*= -3 x 2 + 2 x 8 = 10

2. Giải bài toán QHTT:

$$F(x) = 2x_1 + 9x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 1 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

- **Đs** $\mathbf{x}^*=(1/2, 0, 19/4)$ F*= 2 x 19/4 + 2 x 1/2 = 21/2

3. Giải bài toán QHTT :

$$F(x) = 6x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 \ge -15 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \le 2 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

- **Đs** $\mathbf{x}^*=(0, 0, 5/3, 16/3)$ F*= 1 x 5/3 -4 x 16/3 = -59/3

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

<table>
<tr><td colspan="2">Học phần: CÁC PP TỐI ƯU</td><td>Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT</td></tr>
<tr><td colspan="2">Thời gian: Tuần 7 Tiết 19-21
GV giảng: 3, Bài tập: 0, Tự học :3</td><td>Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn
Vũ Anh Mỹ</td></tr>
<tr><td>Chương 3</td><td colspan="2">Lý thuyết đối ngẫu</td></tr>
<tr><td>Các mục</td><td colspan="2">3.1 Bài toán đối ngẫu không đối xứng
3.2 Bài toán đối ngẫu đối xứng</td></tr>
<tr><td>Mục đích - yêu cầu</td><td colspan="2">- Giới thiệu ý nghĩa của Lý thuyết đối ngẫu và các định lý đối ngẫu
- Giới thiệu ý nghĩa kinh tế của lý thuyết đối ngẫu
- SV cần nắm được phương pháp tìm bài toán đối ngẫu của bài toán QHTT dạng tổng quát.</td></tr>
</table>

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

Chương 3. LÝ THUYẾT ĐỐI NGẪU

3.1 CẶP BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU KHÔNG ĐỐI XỨNG

3.1.1 Khái niệm. Xét bài toán QHTT dạng chính tắc:

$$\begin{cases} F(x) = \langle c, x\rangle \to min \\ x \in D = \left\{ x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0 \right\} \end{cases} \quad (P)$$

trong đó: $c \in R^n$, $b \in R^m$ và $A = (a_{ij})_{mxn}$.

Bài toán QHTT sau đây: $\begin{cases} G(y) = \langle b, y\rangle \to min \\ x \in \overline{D} = \left\{ y \in R^m \mid A^T y \leq c \right\} \end{cases} \quad (\overline{P})$

được gọi là bài toán đối ngẫu của bài toán (P). Nói chung, bài toán này gọi là bài toán gốc thì bài toán kia gọi là bài toán đối ngẫu của nó.

Thí dụ 3.1 Bài toán $F(x) = x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +4x_4 - 5x_5 + 7x_6 = 8 \\ \qquad x_2 \qquad -2x_4 + 4x_5 - 2x_6 = -2 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 - 3x_5 + 2x_6 = 2 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

có bài toán đối ngẫu bất đối xứng là

$$G(y) = 8y_1 - 2y_2 + 2y_3 \to \text{Max}$$

$$\begin{cases} y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 1 \\ y_3 \leq 1 \\ 4y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 1 \\ -5y_1 + 4y_2 - 3y_3 \leq 3 \\ 7y_1 - 2y_2 + 2y_3 \leq 2 \end{cases}$$

- Tính chất đối ngẫu:

- Bài toán (P) tìm *min* thì bài toán $(\overline{P})$ tìm *max*;
- Bài toán (P) có *n* biến và *m* ràng buộc đẳng thức; Bài toán $(\overline{P})$ có *m* biến và *n* ràng buộc bất đẳng thức;
- Vector hệ số của hàm mục tiêu bài toán (P) là vế phải của bài toán $(\overline{P})$ và ngược lại.

- Tính chất bất đối xứng:

- Bài toán (P) *m* ràng buộc chặt; Bài toán $(\overline{P})$ có *n* ràng buộc lỏng;
- Bài toán (P) có *n* biến x_j không âm; Bài toán $(\overline{P})$ có *m* biến không đòi hỏi về dấu.

3.1.2 Các định lý đối ngẫu

Định lý 3.1 Nếu $D \neq \varnothing$ và $\overline{D} \neq \varnothing$ thì $\forall x \in D, \forall y \in \overline{D}$ ta có $G(y) \leq F(x)$.

Chứng minh. Giả sử $D \neq \varnothing$ và $\overline{D} \neq \varnothing$. Khi đó:

$\forall x \in D, \forall y \in \overline{D}$ ta có $G(y) = \langle b, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \left\langle x, A^T y \right\rangle \leq \langle x, c \rangle = F(x)$ (đpcm).

Định lý 3.2 Nếu bài toán này có phương án tối ưu thì bài toán kia cũng có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của chúng bằng nhau.

Chứng minh.

Chỉ cần chứng minh rằng nếu bài toán (P) có lời giải tối ưu là x^* thì bài toán cũng có lời giải tối ưu là y^* và F(x*)= G(y*).

Giả sử $B = \left(A_j\right)_{j \in J}$ với ||*J*|| = *m* là cơ sở tối ưu của bài toán (P). Ký hiêu $C_J = \left(c_j\right)_{j \in J}$. Đặt $y^* = \left(B^{-1}\right)^T C_J$ và $H = B^{-1}A = (V_1, V_2, ..., V_n)$ ta có: $A^T y^* = A^T \left(B^{-1}\right)^T C_J$ hay

$A^T y^* = H^T C_J = \begin{pmatrix} V_1 C_J \\ V_2 C_J \\ ... \\ V_n C_J \end{pmatrix}$. Suy ra $A^T y^* - C = \begin{pmatrix} V_1 C_J - c_1 \\ V_2 C_J - c_2 \\ ... \\ V_n C_J - c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ ... \\ \Delta_n \end{pmatrix} \leq 0$ và do đó y* là phương án của bài toán đối ngẫu. Theo định lý 3.1 thì G(y*) ≤ F(x*). Tuy nhiên ta có:

$$\mathrm{G}\left(\mathrm{y}^*\right) = \langle \mathrm{b}, \mathrm{y}^* \rangle = \left\langle b, \left(B^{-1}\right)^T C_J \right\rangle = \left\langle B^{-1} b, C_J \right\rangle = \left\langle x_J^*, C_J \right\rangle = \mathrm{F}\left(\mathrm{x}^*\right). \quad \text{(đpcm)}$$

Định lý 3.3 Nếu một trong hai bài toán không có phương án tối ưu thì bài toán kia không có phương án (vô nghiệm).

Chứng minh.

Giả sử bài toán (P) không có phương án tối ưu: $\forall M > 0, \exists \overline{x} \in D, F(\overline{x}) < -M$. Nếu bài toán $(\overline{P})$ có phương án: $\overline{D} \neq \varnothing$, thì theo định lý 3.1, ta có $\forall y \in \overline{D}$ $G(y) \leq F(\overline{x}) < -M$. Nói cách khác $\forall M > 0, \forall y \in \overline{D}, G(y) < -M$.

Điều này hoàn toàn vô lý, vì vậy $\overline{D} = \varnothing$. (đpcm)

3.2 CẶP BÀI TOÀN ĐỐI NGẪU ĐỐI XỨNG

3.2.1 Định nghĩa. Cặp bài toán QHTT sau đây

$$\begin{cases} F(x) = \langle c, x \rangle \to min \\ x \in D = \left\{ x \in R^n \mid Ax \geq b, x \geq 0 \right\} \end{cases} \quad (P)$$ với $c \in R^n$, $b \in R^m$ và $A = (a_{ij})_{mx}$

và $$\begin{cases} G(y) = \langle b, y \rangle \to min \\ x \in \overline{D} = \left\{ y \in R^m \mid A^T y \leq c \right\} \end{cases} \quad (\overline{P})$$

được gọi là cặp bài toán đối ngẫu đối xứng.

Thí dụ 3.2 Bài toán QHTT

$$F(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \geq -5 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geq -6 \\ -x_2 - 3x_3 + 2x_5 \geq 12 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Có bài toán đối ngẫu đối xứng là: $G(y) = -5y_1 - 6y_2 + 12y_3 \to \text{Max}$

$$\begin{cases} y_1 \leq 1 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \leq 3 \\ -y_1 - y_2 - 3y_3 \leq 2 \\ y_1 + 2y_2 \leq 3 \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 5 \\ y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

3.2.2 Định lý về độ lệch bù

Định lý 3.4 Điều kiện cần và đủ để cặp phương án (x,y) là lời giải tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu là:

$$\langle Ax - b, y \rangle = 0 \qquad (3.1)$$

$$\left\langle A^T y - c, x \right\rangle = 0 \qquad (3.2)$$

Chứng minh…

3.2.3 Ý nghĩa của độ lệch bù

3.2.4 Cặp bài toán đối ngẫu tổng quát

Bài toán (P)	**Bài toán** $(\overline{P})$
$\langle c, x \rangle \to \min$	$\langle b, y \rangle \to \max$
$\langle a_i, x \rangle \geq b_i$ với $i \in I_1$	$y_i \geq 0$ với $i \in I_1$
$\langle a_i, x \rangle \leq b_i$ với $i \in I_2$	$y_i \leq 0$ với $i \in I_2$
$\langle a_i, x \rangle = b_i$ với $i \in I_3$	y_i có dấu tùy ý với $i \in I_3$
$x_j \geq 0$ với $j \in J_1$	$\langle A_j, y \rangle \leq c_j$ với $j \in J_1$
$x_j \leq 0$ với $j \in J_2$	$\langle A_j, y \rangle \geq c_j$ với $j \in J_2$
x_j có dấu tùy ý với $j \in J_3$	$\langle A_j, y \rangle = c_j$ với $j \in J_3$

Thí dụ 3.3 Bài toán QHTT:

$$F(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -3 \\ \quad - x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geq 18 \\ \quad - x_2 - 3x_3 + 2x_5 \leq 10 \\ \quad x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Có phương án tối ưu x*=(0,0,0,1,4) và F*= 5x4 +3x1 =23

Bài toán QHTT đối ngẫu:

$$G(y) = -3y_1 + 18y_2 + 10y_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} y_1 \leq 1 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \leq 3 \\ -y_1 - y_2 - 3y_3 \leq 2 \\ y_1 + 2y_2 \leq 3 \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 5 \\ y_2 \geq 0 \quad , \quad y_3 \leq 0 \end{cases}$$

Có phương án tối ưu y* = (1/3, 4/3, 0) và G*= -3x1/3 + 18x4/3 = 23

Thí dụ 3.4 Bài toán QHTT:

$$F(x) = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 \geq -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 21 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ \quad x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

có phương án tối ưu x^{*}=(0,0,2,0,0) và F^{*}= -8

Bài toán QHTT đối ngẫu:

$$G(y) = -6y_1 + 21y_2 + 6y_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq -2 \\ y_1 + 3y_2 - y_3 \leq 3 \\ -2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq -4 \\ \quad -2y_2 + y_3 \leq 3 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0 \quad , \quad y_2 \leq 0 \end{cases}$$

có phương án tối ưu y^{*}= (0,0,-4/3)

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

Học phần: **CÁC PP TỐI ƯU**		Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT
Thời gian: Tuần 8 Tiết 22-24 GV giảng: 2, Bài tập: 1, Tự học :3		Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn Vũ Anh Mỹ
Chương 3	**Lý thuyết đối ngẫu**	
Các mục	3.3 Thuật toán đơn hình đối ngẫu	
Mục đích - yêu cầu	- Giới thiệu thuật toán đơn hình đối ngẫu - Hướng dẫn SV nắm được kỹ năng giải bài toán QHTT bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu .	

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

3.3 THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

3.3.1 Cơ sở gốc và cơ sở đối ngẫu

Xét bài toán QHTT dạng chính tắc: $\begin{cases} F(x) = \langle c, x\rangle \to min \\ x \in D = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \end{cases}$ (P)

trong đó: $c \in R^n$, $b \in R^m$, $A = (a_{ij})_{mxn}$ và bài toán QHTT đối ngẫu:

$$\begin{cases} G(y) = \langle b, y\rangle \to max \\ x \in \overline{D} = \{y \in R^m \mid A^T y \leq c\} \end{cases} \quad (\overline{P})$$

Giả sử *rank(A) = m* và $B=(A_j)_{j\in J}$ với $||J|| = m$ là *m* vecto cột của A, độc lập tuyến tính. Khi đó B là một cơ sở của không gian R^m. Nếu $x_J=B^{-1}b\geq 0$ thì B là cơ sở chấp nhận được của bài toán gốc và được gọi là cơ sở gốc. Nếu $y=(B^{-1})^T c_J$ thỏa mãn điều kiện $A^T y \leq c$ thì B là cơ sở chấp nhận được của bài toán đối ngẫu, được gọi là cơ sở đối ngẫu. Trong trường hợp tổng quát có thể xảy ra những tình huống sau đây:

a. B không phải là cơ sở gốc, cũng không phải là cơ sở đối ngẫu;

b. B là cơ sở gốc mà không là cơ sở đối ngẫu;

c. B là cơ sở đối ngẫu mà không phải là cơ sở gốc;

d. B vừa là cơ sở gốc vừa là cơ sở đối ngẫu.

Hãy xét trường hợp d: B vừa là cơ sở gốc: $x_J=B^{-1}b\geq 0$, B vừa là cơ sở đối ngẫu: $A^T y \leq c$ với $y=(B^{-1})^T c_J$. Ta thấy rằng với $y=(B^{-1})^T c_J$ thì điều kiện $A^T y\leq c$ tương đương với điều kiện $\Delta_k \leq 0, k = \overline{1,n}$. Điều này có nghĩa là B là cơ sở tối ưu của cả cặp bài toán đối ngẫu và do đó $x_J = B^{-1}b \geq 0$ là giá trị của các biến cơ sở của phương án tối ưu.

3.3.2 Ý tưởng của thuật toán đơn hình đối ngẫu

Thuật toán đơn hình xuất phát từ việc tìm một cơ sở gốc B, thường chưa phải là tối ưu nghĩa là B chưa phải cơ sở đối ngẫu, sau đó ta tìm cơ sở gốc B_1, rồi cơ sở gốc B_2… sao cho cuối cùng đạt được cơ sở tối ưu B* (nếu có), khi đó B* vừa là cơ sở gốc, vừa là cơ sở đối ngẫu.

Thuật toán đơn hình đối ngẫu thực hiện theo hướng ngược lại. Đầu tiên là tìm một cơ sở đối ngẫu B, thường chưa phải là tối ưu, nghĩa là B chưa phải là một cơ sở gốc, sau đó ta tìm cơ sở đối ngẫu B_1, rồi cơ sở đối ngẫu B_2… sao cho cuối cùng đạt được cơ sở tối ưu B* (nếu có); tức là tìm được một cơ sở vừa là đối ngẫu, vừa là cơ sở gốc.

3.3.3 Bảng đơn hình đối ngẫu và tiêu chuẩn tối ưu

Giả sử tìm được $B=(A_j)_{j\in J}$ là một cơ sở đối ngẫu; trong đó A_j là các vecto cột của ma trận A và ||J||=m. Lần lượt tính các đại lượng B^{-1}, $H= B^{-1}A$, $\overline{x_J} = B^{-1}b$ và các số kiểm tra Δ_k với $k\notin J$.

Đổi tiêu đề cột thứ 3 "x_J" trong bảng đơn hình bởi "$\overline{x_J}$" ($\overline{x}$ được gọi là giả phương án) và bỏ cột "h_J" thì ta được bảng đơn hình đối ngẫu. Trong bảng đơn hình đối ngẫu, các số $\Delta_k \le 0, \forall k$; còn các số ở cột $\overline{x_J}$ ($j\in J$) không nhất thiết phải thỏa mãn $\overline{x_J} \geq 0$ với $\forall$ $j\in J$.

Nếu $\overline{x_J} \geq 0$ $\forall$ $j\in J$ nghĩa là $\overline{x_J} = B^{-1}b \geq 0$ thì B là cơ sở gốc, có nghĩa là B là cơ sở tối ưu và $x_J=\overline{x_J}$. Vậy tiêu chuẩn tối ưu của thuật toán đơn hình đối ngẫu là: $\overline{x_J} \geq 0$.

3.3.4 Cải tiến phương án

Nếu $\exists\ \overline{x_j} < 0$ thì B không phải là cơ sở tối ưu, ta cần tìm cơ sở đối ngẫu B_1 chỉ khác B bởi đúng một vector, nghĩa là:

$$B_1 = B \setminus \{A_p\} \cup \{A_q\},\ p\in J, q\notin J, J_1 = J \setminus \{p\} \cup \{q\}$$

Làm như thế ta vẫn sử dụng được các quy tắc chuyển bảng của thuật toán đơn hình. Vấn đề đặt ra ở đây là phải chọn các vector A_p và A_q như thế nào để B_1 vẫn là cơ sở đối ngẫu.

a. Chọn vector A_p đưa ra khỏi cơ sở

Do tiêu chuẩn tối ưu của thuật toán đơn hình đối ngẫu là $\overline{x_J} \geq 0$, nên nếu $\exists\ \overline{x_j} < 0$ thì A_j là cột bất hợp lý. Vì thế ta có thể chọn A_p để đưa khỏi cơ sở nếu $\overline{x_p} < 0$; tuy nhiên để tăng tốc độ giải bài toán thì nên chọn A_p thỏa mãn: $\overline{x_p} = \min\limits_{j\in J} \overline{x_j}$.

Hàng *p* được gọi là hàng xoay. Trước khi chọn vector A_q đưa vào cơ sở ta cần kiểm tra lại tính tương thích của bài toán có thỏa mãn không, nghĩa là xét xem $D \neq \varnothing$ hay không. Nếu ở hàng *p* mà $v_{pk} \geq 0$ $\forall k$ thì các ràng buộc tương ứng với dòng đó là không tương thích ($D \neq \varnothing$), vì rằng: $\overline{x_p} = \sum_{k=1}^{n} v_{pk} x_k$ mâu thuẫn với $\overline{x_p} < 0$, $v_{pk} \geq 0$ và $x_k \geq 0$ với $\forall k$.

Nếu ngược lại, nghĩa là $\exists v_{pk} < 0$. Khi đó ta sẽ chọn A_q theo quy tắc sau.

b. Chọn vector A_q đưa vào cơ sở cơ sở

Nếu $\dfrac{\Delta_q}{v_{pq}} = \min\limits_{v_{pk}<0} \dfrac{\Delta_k}{v_{pk}}$ thì đưa Δ_q vào cơ sở. (3.3)

Khi ấy cột A_q gọi là cột xoay và phần tử xoay $v_{pq}<0$. Lý giải các quy tắc chọn A_q như sau: Chọn A_q để đưa vào cơ sở phía bảo đảm B_1 vẫn phải là một cơ sở đối ngẫu: Các số kiểm tra Δ_k^1 trong bảng đơn hình mới ứng với cơ sở B_1 phải thỏa mãn điều kiện $\Delta_k^1 \le 0$ với $\forall k$, việc chọn A_q theo quy tắc (3.3) đạt được yêu cầu này, bởi vì theo công thức đổi cơ sở ta có:

$$\Delta_k^1 = \Delta_k - \frac{v_{pk}}{v_{pq}}\Delta_q$$

+ Nếu $v_{pk} \ge 0$ thì $\Delta_k^1 \le 0$ vì $\Delta_k \le 0, \Delta_q \le 0$ và $v_{pq} < 0$

+ Nếu $v_{pk} \ge 0$ thì $\Delta_k^1 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{\Delta_q}{v_{pq}} \le \dfrac{\Delta_k}{v_{pk}} \Rightarrow \dfrac{\Delta_q}{v_{pq}} = \min\limits_{v_{pk}<0} \dfrac{\Delta_k}{v_{pk}}$

Sau khi có cơ sở B_1, áp dụng các quy tắc chuyển bảng như trong thuật toán đơn hình để lập bảng đơn hình đối ngẫu mới. Tiếp tục kiểm tra và cải tiến thì sau một số hữu hạn bước thì ta sẽ đạt được phương án tối ưu (nếu có) hoặc phát hiện bài toán không có phương án.

Thí dụ 3.5. Giải bài toán QHTT :

$$F(x) = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 10x_4 - 6x_5 + 65x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad -x_4 \qquad\qquad -4x_6 = 8 \\ \quad +x_2 \qquad +x_4 \; -2x_5 \; +6x_6 = 19 \\ \qquad\quad x_3 \; +2x_4 \; +3x_5 \; +x_6 = 21 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Giải. Giả sử biết cơ sở đối ngẫu xuất phát B=(A_2,A_3,A_3) = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ta có $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \overline{x_J} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 27 \\ 37 \\ -8 \end{pmatrix}; H = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 7 & -7 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

B	C_J	$\overline{x_J}$	3	-2	-4	10	-6	65
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	-2	27	1	1	0	0	0	2
A_3	-4	37	2	0	1	0	7	-7
A_4	10	**-8**	-1	0	0	1	**-2**	4
Δ_k			-23	0	0	0	-42	-1
Δ_k/v_{pk} $v_{pk}<0$			23				**21**	
A_2	-2	27	1	1	0	0	0	2
A_3	-4	9	-3/2	0	1	7/2	0	7
A_5	-6	4	1/2	0	0	-1/2	1	-2
Δ_k			-2	0	0	-21	0	-85

Lời giải tối ưu của bài toán: x*=(0, 27, 9, 0 ,4 ,0) F*= -2x27 - 4x9 - 6x4 = -114

Bài toán đối ngẫu bất đối xứng:

$$G(y) = 8y_1 + 19y_2 + 21y_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} y_1 & & & \le & 3 \\ & y_2 & & \le & -2 \\ & & y_3 & \le & -4 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & \le & 10 \\ 2y_1 & -2y_2 & +3y_3 & \le & -6 \\ -4y_1 & +6y_2 & +y_3 & \le & 65 \end{cases}$$

Theo định lý về độ lệch bù: $\begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = -4 \\ 2y_1 - 2y_2 + 3y_3 = 6 \end{cases} \rightarrow y^* = (1, -2, -4)$

$$G^* = 8x1 - 19x2 - 21x4 = -114$$

3.3.5 Giải bài toán khi không biết trước cơ sở đối ngẫu

Giả sử ta tìm được cơ sở $B=(A_j)_{j \in J}$ nhưng B không phải là một cơ sở đối ngẫu. Để giải bài toán đã cho, ta lập bài toán mở rộng:

$$F(x)=\langle c,x\rangle \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_0 + \sum\limits_{j \notin J} x_j = M \\ Ax = b \\ x \ge 0;\ x_0 \ge 0 \end{cases} \quad \text{với } M >>1$$

Bài toán phụ có một cơ sở $\overline{B} = \left(\overline{A_0}, \overline{A_j}\right)_{j \in J}$ và giả phương án $\overline{x_J} = \overline{B}^{-1} b$, có số Δ_k không thay đổi và $\Delta_0 = 0$. Chọn cột xoay A_q thỏa mãn $\Delta_q = \max \Delta_k$ và hàng xoay A_0, ta được bảng mới là bảng đơn hình đối ngẫu của bài toán mở rộng.

- Kết thúc giải bài toán mở rộng có các tình huống:

a. Nếu tồn tại $x_j<0$ và $v_{jk} \ge 0$, $\forall$ k thì bài toán gốc không có phương án: $D \ne \varnothing$.

b. Nếu giải bài toán mở rộng ta được phương án tối ưu: $X^* = \left(x_0^*, x^*\right)$

- Nếu x_0^* là một biến cơ sở thì giá trị hàm mục tiêu không phụ thuộc M nên x^* là phương án tối ưu của bài toán gốc.
- Nếu x_0^* là một biến phi cơ sở thì biến gốc x^* phụ thuộc M. Có 2 trường hợp:
  + Nếu $F(x^*)$ phụ thuộc M thì bài toán gốc không có phương án tối ưu: $F(x) \rightarrow -\infty$;
  + $F(x^*)$ không phụ thuộc M thì giá trị của $F(x^*)$ là giá trị tối ưu của bài toán gốc.

Khi đó cần chọn M sao cho $x^* \ge 0$.

Thí dụ 3.6 Giải bài toán QHTT :

$$F(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - 4x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 & & & +x_4 & -2x_5 & -x_6 & = & -5 \\ & +x_2 & & & +2x_5 & -x_6 & = & 1 \\ & & x_3 & +3x_4 & +x_5 & -4x_6 & = & 8 \\ & & & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Giải. B=(A_1,A_2,A_3) không phải cơ sở đối ngẫu nên cần giải bài toán mở rộng:

B	C_J	$\overline{x_J}$	0	1	3	-1	1	1	-4
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_0	0	M	1	0	0	0	1	1	**1**
A_1	1	-5	0	1	0	0	1	-2	-1
A_2	3	1	0	0	1	0	0	2	-1
A_3	-1	8	0	0	0	1	3	1	-4
Δ_k			0	0	0	0	-3	2	**4**
A_6	-4	M	1	0	0	0	1	1	1
A_1	1	-5+M	1	1	0	0	2	-1	0
A_2	3	1+M	1	0	1	0	1	3	0
A_3	-1	8+4M	4	0	0	1	7	5	0
Δ_k			-4	0	0	0	-7	-2	0

Bài toán mở rộng có cơ sở tối ưu B=(A_6,A_1,A_2,A_3) nên x^* phụ thuộc vào M.

$$F(x^*) = -4M + 1x(-5+M) + 3x(1+M) -1x(8+4M) = -10-4M$$

Suy ra bài toán gốc không có phương án tối ưu.

Thí dụ 3.7 Giải bài toán QHTT :

$$F(x) = 3x_1 - 4x_2 - x_3 - 8x_4 + 4x_5 + x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad -x_4 + x_5 - x_6 = -7 \\ \quad +x_2 \quad\quad +x_4 + x_5 - 2x_6 = 2 \\ \quad\quad x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 8 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Giải. B =(A_1,A_2,A_3) không phải cơ sở đối ngẫu nên cần giải bài toán mở rộng:

B	C_J	$\overline{x_J}$	0	3	-4	-1	-8	4	1
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_0	0	M	1	0	0	0	1	1	**1**
A_1	3	-7	0	1	0	0	-1	1	-1
A_2	-4	2	0	0	1	0	1	1	-2
A_3	-1	8	0	0	0	1	2	-1	1
Δ_k			0	0	0	0	-1	-4	**3**
A_6	1	M	1	0	0	0	1	1	1
A_1	3	-7+M	1	1	0	0	0	2	0
A_2	-4	2+2M	2	0	1	0	3	3	0
A_3	-1	**8-M**	**-1**	0	0	1	1	-2	0
Δ_k			**-3**	0	0	0	-4	-7	0
A_6	1	8	0	0	0	1	2	-1	1
A_1	3	1	0	1	0	1	1	0	0
A_2	-4	18	0	0	1	2	5	-1	0
A_0	0	M-8	1	0	0	-1	-1	2	0
Δ_k			0	0	0	-3	-7	-1	0

Bài toán gốc có lời giải tối ưu: x*=(1, 18, 0, 0, 0, 8) F*=1x8 +3x1 - 4x18 = -61.

Thí dụ 3.8 Giải bài toán QHTT :

$$F(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 - x_5 - x_6 = 2 \\ \quad + x_2 + x_4 + x_6 = 6 \\ x_1 + x_2 \quad x_3 + 4x_4 - 3x_5 - 5x_6 = 10 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Giải. Bài toán tương đương với bài toán

$$F(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - x_5 - 2x_6 = -4 \\ \quad + x_2 + x_4 + x_6 = 6 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Bài toán có cơ sở $B=(A_1,A_2,A_3)$ không phải cơ sở đối ngẫu nên cần giải bài toán mở rộng:

B	C_J	$\overline{x_J}$	0	1	2	-1	3	1	-1
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_0	0	M	1	0	0	0	1	1	**1**
A_1	1	-4	0	1	0	0	1	-1	-2
A_2	2	6	0	0	1	0	1	0	1
A_3	-1	8	0	0	0	1	2	-2	-4
Δ_k			0	0	0	0	-2	0	**5**
A_6	-1	M	1	0	0	0	1	1	1
A_1	1	-4+2M	2	1	0	0	3	1	0
A_2	2	**6-M**	-1	0	1	0	0	**-1**	0
A_3	-1	8+4M	4	0	0	1	6	2	0
Δ_k			-5	0	0	0	-7	**-5**	0
A_6	-1	6	0	0	1	0	1	0	1
A_1	1	2+M	1	1	1	0	3	0	0
A_5	1	**-6+M**	1	0	-1	0	0	1	0
A_3	-1	20+2M	2	0	2	1	6	0	0
Δ_k			0	0	-5	0	-7	0	0

Bài toán mở rộng có cơ sở tối ưu $B=(A_6,A_1,A_5,A_3)$ nên x^* phụ thuộc vào M.

$$F(x^*) = -1x6 + 1x(2+M) + 1x(-6+M) -1x(20+2M) = -30$$

Do $F(x^*)$ không phụ thuộc M, nên chọn M thích hợp ta giải hệ:

$$\begin{cases} 2+M \ge 0 \\ -6+M \ge 0 \\ 20+2M \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \ge -2 \\ M \ge 6 \\ M \ge -10 \end{cases} \Rightarrow M \ge 6$$

Chọn M=6 thì bài toán có lời giải tối ưu $x^* = (8, 0, 32, 0, 0, 6)$ và $F^* = -30$.

II. CHỮA BÀI TẬP

1. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp hàm phạt, lập và giải bài toán đối ngẫu:

$$F(x) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -12 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

- **Đs:** x* = (0, 17/2, 27/10 , 2/5) F* = -106/5

  Bài toán đối ngẫu:

$$G(y) = 10y_1 - 12y_2 + 12y_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \le 2 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \le -3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1 \\ -3y_1 - y_2 + 2y_3 \le 4 \end{cases}$$

2. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu, lập và giải bài toán đối ngẫu::

$$F(x) = 6x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 \ge -15 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \le 2 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

- **Đs:** x^*=(0, 5/3 ,0, 16/3) F*= 1 x 5/3 -4 x 16/3 = -59/3

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

Học phần: **CÁC PP TỐI ƯU**		Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT
Thời gian: Tuần 9 Tiết 25-27 GV giảng:1, Bài tập: 2, Tự học :3		Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn Vũ Anh Mỹ
Chương 3	**Lý thuyết đối ngẫu**	
Các mục	3.4 Ý nghĩa của lý thuyết đối ngẫu	
Mục đích - yêu cầu	- Giới thiệu ý nghĩa kinh tế của lý thuyết đối ngẫu - Luyện tập thuật toán đơn hình đối ngẫu	

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

3.4 Ý NGHĨA CỦA LÝ THUYẾT ĐỐI NGẪU

II. CHỮA BÀI TẬP

1. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp hàm phạt, lập và giải bài toán đối ngẫu:

$$F(x) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -12 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

- **Đs:** $x^* = (0, 17/2, 27/10, 2/5)$ $F^* = -106/5$
  $y^* = (-7/5, 1, 2/5)$ $G^* = -106/5$

2. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu, lập và giải bài toán đối ngẫu :

$$F(x) = 6x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 \geq -15 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

- **Đs:** $x^* = (0, 5/3, 0, 16/3)$ $F^* = 1 \text{ x } 5/3 - 4 \text{ x } 16/3 = -59/3$

  Bài toán đối ngẫu

$$G(y) = 7y_1 - 15y_2 + 2y_3 \to \text{Max}$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 6 \\ y_1 - 4y_2 - 2y_3 \leq 1 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 \leq -2 \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq -4 \\ y_1 \leq 0 \quad , \quad y_2 \geq 0 \quad , \quad y_3 \leq 0 \end{cases}$$

Giải bài toán đối ngẫu $Y^* = (-7/3, 0, -5/3)$, $G^* = -7\text{x}7/3 - 2\text{x}5/3 = -59/3$

3. Giải bài toán QHTT, lập và giải bài toán đối ngẫu :

$$F(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & +2x_4 & \le & 4 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & \le & 6 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & \le & 8 \\ & & x_j \ge 0, \ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

- **Đs:** $x^* = (0,8,0,10)$ $F^* = F(x^*) = -2x10 -1x8 = -28$

  Lập bài toán đối ngẫu và giải bài toán đối ngẫu:

$$G(y) = 4y_1 + 6y_2 + 8y_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} 2y_1 & +y_2 & -y_3 & \le & 2 \\ -2y_1 & +2y_2 & -y_3 & \le & -1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & \le & 1 \\ 2y_1 & -y_2 & +y_3 & \le & -2 \\ & y_i \le 0 & i = \overline{1,3} \end{cases}$$

$y^* = (-5/2, -3, 0)$ $G^* = -28$

4. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu với cơ sở xuất phát $B=(A_1,A_2,A_3)$

$$F(x) = 3x_1 - 4x_2 - x_3 - 8x_4 + 4x_5 + x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & -2x_4 & & +x_6 & = & -9 \\ & x_2 & +x_3 & +3x_4 & & -x_6 & = & 10 \\ -x_1 & & +x_3 & +3x_4 & -2x_5 & +2x_6 & = & 15 \\ & & & x_j \ge 0, \ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

- **Đs:** $x^* = (1, 18, 0, 0, 0, 8)$ $F^* = 3x1 - 4x18 +1x8 = - 61$

5. Giải QHTT bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu, lập và giải bài toán đối ngẫu:

$$F(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & -3 \\ & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & +4x_5 & \ge & 18 \\ & -x_2 & -3x_3 & & +2x_5 & \le & 10 \\ & & & x_j \ge 0, \ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

- **ĐS:** $X^*=(0,0,0,1,4)$ $F^*= 5x4 +3x1 =23$

  Bài toán đối ngẫu và giải bài toán đối ngẫu:

$$G(y) = -3y_1 + 18y_2 + 10y_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} y_1 & & & \le & 1 \\ 2y_1 & -y_2 & -y_3 & \le & 3 \\ -y_1 & -y_2 & -3y_3 & \le & 2 \\ y_1 & +2y_2 & & \le & 3 \\ -y_1 & +4y_2 & +2y_3 & \le & 5 \\ y_2 \ge 0 & , & y_3 \le 0 \end{cases}$$

$y^* = (1/3, 4/3, 0)$ $G^*= -3x1/3 + 18x4/3 = 23$

6. Giải QHTT bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu, lập và giải bài toán đối ngẫu:

$$F(x) = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 \geq -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 21 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

- **Đs:** Lời giải tối ưu của bài toán gốc : $X^{*}=(0,0,2,0,0)$ $F^* = -8$

  Bài toán đối ngẫu

$$G(y) = -6y_1 + 21y_2 + 6y_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq -2 \\ y_1 + 3y_2 - y_3 \leq 3 \\ -2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq -4 \\ -2y_2 + y_3 \leq 3 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0 \quad , \quad y_2 \leq 0 \end{cases}$$

  Giải bài toán đối ngẫu**:** $y^* = (0,0,-4/3)$

7. Giải QHTT bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu, lập và giải bài toán đối ngẫu:

$$F(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -3 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \leq 4 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

- **Đs:** Lời giải tối ưu $x^{*}=(0,0,3,0,0)$ $F^* = 6$

  Bài toán đối ngẫu

$$G(y) = -3y_1 - 2y_2 + 4y_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 \leq 3 \\ -y_1 - 3y_2 + y_3 \leq 4 \\ -y_1 - y_2 - 2y_3 \leq 2 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ y_1 + y_2 - 3y_3 \leq 5 \\ y_i \leq 0 \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

  Giải bài toán đối ngẫu**:** $y^* = (-2,0,0)$

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

Học phần: **CÁC PP TỐI ƯU**		Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT
Thời gian: Tuần 10 Tiết 28-30 GV giảng: 3, Bài tập: 0, Tự học :3		Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn Vũ Anh Mỹ
Chương 4	**Bài toán vận tải**	
Các mục	4.1 Mô hình toán học của bài toán vận tải 4.2 Giải BTVT bằng phương pháp thế vị	
Mục đích - yêu cầu	- Giới thiệu mô hình bài toán vận tải - Nắm được các bước của thuật toán thế vị	

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

Chương 4. BÀI TOÁN VẬN TẢI

4.1 MÔ HÌNH TÁN HỌC CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

4.1.1 Phát biểu bài toán

- Có m kho hàng chứa cùng một loại hàng hoá được đánh số thứ tự $i = \overline{1,m}$ gọi là điểm phát thứ i. Lượng hàng chứa tại điểm phát thứ i là a_i;
- Có n điểm tiêu thụ loại hàng hoá trên được đánh số thứ tự $j = \overline{1,n}$ gọi là điểm thu thứ j; Điểm thu thứ j có nhu cầu tiêu thụ hàng là b_j .
- Biết c_{ij} là cước phí vận chuyển 1 đơn vị hàng hoá từ điểm phát thứ i điển thu thứ j ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$). Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ các điểm phát đến các điểm thu sao cho chi phí vận chuyển là ít nhất với điều kiện : Các điểm phát thì phát hết hàng và các điểm thu thì thoả mãn nhu cầu.

Đặt x_{ij} là lượng hàng cần vận chuyển từ điểm phát A_i đến điểm thu B_j ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$). Khi đó mô hình toán học của bài toán vận tải (BTVT) có dạng:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

với điều kiện: $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ ;\ i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ ;\ j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \ge 0 \quad i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

4.1.2 Điều kiện cân bằng thu phát

Định lý 4.1 BTVT có lời giải tối ưu khi và chỉ khi nó thoả mãn điều kiện:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

4.2 GIẢI BÀI TOÁN VẬN TẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ VỊ

4.2.1 Tìm phương án xuất phát

a. Phương pháp góc tây bắc. Đầu tiên ta lập bảng vận tải có dạng:

A \ B	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Xét ô góc tây bắc của bảng: Ô (i,j) (ban đầu là ô (1,1). Ta cấp phát cho ô (i, j) một lượng bằng $x_{ij} = \min(a_i,b_j)$. Khi đó có 3 trường hợp:

+ Nếu $x_{ij} = a_i < b_j$: Kho A_i đã cấp hết hàng. Nhu cầu của B_j chỉ còn $b_j - a_i$. Ta bỏ hàng i và khi đó ô góc tây bắc mới là (i+1, j).

+ Nếu $x_{ij} = b_j < a_i$: Điểm thu B_j đã nhận đủ nhu cầu về hàng. Lượng hàng trong A_i chỉ còn $a_i - b_j$. Ta bỏ cột j và khi đó ô góc tây bắc mới là (i, j+1).

+ Nếu $x_{ij} = a_i = b_j$: Kho A_i đã cấp hết hàng và điểm thu B_j đã nhận đủ nhu cầu về hàng. Ta bỏ hàng i và cột j, khi đó ô góc tây bắc mới là (i+1, j+1).

Do mỗi lần cấp phát ta bỏ đi một hàng hoặc một cột, lần cuối cùng sẽ bỏ cả hàng và cột, cho nên không quá m+n=1 lần cấp phát ta được phương án của BTVT.

Thí dụ 4.1 Tìm phương án xuất phát theo phương pháp góc tây bắc của BTVT với dữ liệu:

Lượng phát a = (50,70,40) , Lượng thu b = (30, 60, 45, 25)

Ma trận chi phí $C=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Giải.

A \ B	30	60	45	25
50	30 / 7	20 / 5	6	4
70	4	40 / 6	30 / 5	2
40	6	4	15 / 8	25 / 7

Ta có phương án:

$$X=\begin{pmatrix}30 & 20 & 0 & 0\\ 0 & 40 & 30 & 0\\ 0 & 0 & 15 & 25\end{pmatrix},\ F(X)=30x7+20x5+40x6+30x5\ 15x8+25x7=995.$$

b. Phương pháp cực tiểu cước phí toàn bảng

Phương pháp góc tây bắc ưu tiên ô góc tây bắc của bảng để cấp phát trước mà không chú ý đến cước phí của các ô. Vì thế, nếu các ô dọc theo đường chéo chính của bảng có cước phí lớn thì kết quả ta được phương án tồi vì có tổng chi phí lớn.

Phương pháp cực tiểu cước phí toàn toàn lại ưu tiên chọn ô có cước phí bé nhất trong bảng cấp phát trước. Quá trình cấp phát cho các ô trong bảng cũng giống như trên.

Thí dụ 4.2 Tìm phương án xuất phát theo phương pháp cực tiểu cước phí toàn bảng cho BTVT trong thí dụ 6.1.

A \ B	30	60	45	25
50	7	20 / 5	30 / 6	4
70	30 / 4	6	15 / 5	25 / 2
40	6	40 / 4	8	7

Ta có phương án:

$$X=\begin{pmatrix}0 & 30 & 30 & 0\\ 30 & 0 & 15 & 25\\ 0 & 40 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad F(X)=20x5+30x6+30x4+15x5+25x2+40x4=685.$$

Ta thấy phương án này tốt hơn phương án tìm được trong thí dụ trước.

4.2.2 Tiêu chuẩn tối ưu và kiểm tra tính tối ưu

Định nghĩa 6.1 Chu trình trong bảng vận tải là tập các ô được sắp xếp thành một dãy có các tính chất sau:

+ Hai ô xếp cạnh nhau ở cùng hàng hoặc cùng cột;
+ Hai ô đầu và ô cuối dãy ở cùng hàng hoặc cùng cột;
+ Trên mỗi hàng hay mỗi cột của bảng vận tải: Hoặc có đúng 2 ô hoặc không có ô nào trong chu trình.

Định lý 4.2 Phương án $X=(x_{ij})_{mxn}$ của BTVT là phương án cực biên khi và chỉ khi tập các ô chọn G(X) không chứa chu trình.

Định lý 4.3 Giả sử X là phương án của BTVT và G(X) có chưa chu trình thì tồn tại một phương án $\overline{X}$ mà G($\overline{X}$) không chứa chu trình thỏa mãn: F($\overline{X}$) ≤ F(X).

Chứng minh. Giả sử phương án $X=(x_{ij})_{m\times n}$ của BTVT mà G(X) có chứa chu trình K. Trên K đánh dấu luân phiên + và - . Gọi K^+ là tập các ô mang dấu + và K^- là tập các ô mang dấu -.

Giả thiết $\sum_{(i,j)\in K^+} C_{ij} \le \sum_{(i,j)\in K^-} C_{ij}$. Xây dựng phương án $\overline{X} = (\overline{x}_{ij})_{m\times n}$ như sau:

$$\overline{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta \text{ khi } (i,j) \in K^+ \\ x_{ij} - \theta \text{ khi } (i,j) \in K^- \\ x_{ij} \quad \text{ khi } (i,j) \notin K \end{cases} \qquad \text{với } \theta = \min_{(i,j)\in K^-} x_{ij}.$$

Dễ dàng kiểm tra $\overline{X}$ là một phương án của BTVT. Mặt khác:

$$F(\overline{X}) = \sum_{\forall i,j} c_{ij}\overline{x}_{ij} = \sum_{\forall i,j} c_{ij}x_{ij} + \theta\left(\sum_{(i,j)\in K^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in K^-} c_{ij}\right) \le F(X) \text{ (đpcm).}$$

Định lý 4.4 Với mọi m,n ≥ 2, mọi tập G của bảng vận tải có chứa m+n ô bất kỳ thì đều chứa chu trình.

Chứng minh. (Bằng phương pháp qui nạp theo m và n)

Như vậy phương án X của BTVT là phương án cực biên nếu số ô chọn |G(X)| ≤ m+n-1. Nếu |G(X)| = m+n-1 thì nó được gọi là phương án cực biên không suy biến, ngược lại thì nó được gọi là phương án cực biên suy biến.

Định lý 4.5 (Điều kiện đủ của tối ưu) Giả sử X^* là phương án cực biên không suy biến của BTVT. Nếu tồn tại một bộ hệ số u_i, v_j ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$) thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_i + v_j = 0 \text{ khi } (i,j) \in G(X^*) \\ u_i + v_j \le 0 \text{ khi } (i,j) \notin G(X^*) \end{cases}$$

thì X^* là phương án tối ưu của BTVT.

Chứng minh. Ta có: $F(X^*) = \sum_{\forall i,j} c_{ij}x^*_{ij} = \sum_{\forall i,j} c_{ij}x^*_{ij} = \sum_{\forall i,j} (u_i + v_j)x^*_{ij} =$

$$\sum_i u_i(\sum_j x^*_{ij}) + \sum_j v_j(\sum_i x^*_{ij}) = \sum_i u_i a_i + \sum_j v_j b_j$$

Mặt khác, với mọi phương án X của BTVT thì:

$$F(X) = \sum_{\forall i,j} c_{ij}x_{ij} = \sum_{\forall i,j} c_{ij}x_{ij} \ge \sum_{\forall i,j} (u_i + v_j)x_{ij} =$$

$$\sum_i u_i(\sum_j x_{ij}) + \sum_j v_j(\sum_i x_{ij}) = \sum_i u_i a_i + \sum_j v_j b_j = F(X^*)$$

Vậy X^* là phương án tối ưu của BTVT (Đpcm).

- **Các tính các số thế vị u_i, v_j ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$):**

Giải hệ phương trình $u_i + v_j = 0$ với $(i,j) \in G(X)$.

Đây là hệ m+n-1 phương trình tuyến tính với m+n ẩn số u_i và v_j với $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. Để nghiệm của hệ là duy nhất ta cho u_1=0. Khi đó ta sẽ tính được các số thế vị u_i và v_j khác.

Đặt $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ (đóng vai trò của Δ_k trong bảng đơn hình) với $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. Khi đó $\Delta_{ij} = 0$ với $\forall(i,j) \in G(X)$. Vì vậy nếu $\Delta_{ij} \le 0$ với $\forall(i,j) \notin G(X)$ thì X là phương án tối ưu. Ngược lại, nếu $\exists(i,j) \notin G(X)$ để $\Delta_{ij} > 0$ thì X không phải phương án tối ưu, khi đó ta cần phải cải tiến phương án.

4.2.3 Cải tiến phương án

a. Chọn ô điều chỉnh. Chọn ô thể hiện sự bất hợp lý nhất:

Nếu $\Delta_{kl} = \max\limits_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij}$ (Đóng vai trò Δ_q trong bảng đơn hình) thì chọn ô (k,l).

b.Lập chu trình điều chỉnh

Vì X là phương án cực biên không suy biến nên |G(X)|=m+n-1. Do đó G(X)$\cup${(k,l)} chứa một chu trình K. Do G(X) không chứa chu trình nên K phải chứa ô (k,l).

c. Tính lượng điều chỉnh

Trong chu trình K đánh dấu luân phiên + và - băt đầu từ ô (k,l) mang dấu +.

$$\theta = \min_{(i,j)\in K^-} x_{ij}$$

d. Điều chỉnh phương án

+ Thêm lượng θ vào ô mang dấu +;
+ Bớt lượng θ trong các ô mang dấu -;
+ Các ô không có trong chu trình giữ nguyên giá trị cũ.

Ta được phương án mới tốt hơn phương án cũ.

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

Học phần: **CÁC PP TỐI ƯU**		Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT
Thời gian: Tuần 11 Tiết 31-33 GV giảng: 2, Bài tập:1, Tự học :3		Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn Vũ Anh Mỹ
Chương 4	**Bài toán vận tải**	
Các mục	4.2 Giải BTVT bằng phương pháp thế vị 4.3 Trường hợp phương án xuất phát suy biến	
Mục đích - yêu cầu	- Trình bày kỹ thuật khử suy biến cho BTVT - Luyện tập thuật toán thế vị giải BTVT	

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

Thí dụ 4.3 Cho bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát $a = (100,120,80)$;

Lượng thu $b = (70, 80, 90, 60)$

Ma trận chi phí $C=\begin{pmatrix} 7 & 10 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Tìm phương án xuất phát theo phương pháp góc tây bắc. Giải bài toán bằng phương pháp thế vị theo phương án xuất phát này.

Giải. Ta có $\sum_i a_i = \sum_j b_j = 300$ → Đây là bài toán vận tải cân bằng thu phát

Bảng 1

A \ B	70	80	90	60	u_i
100	70 7	30- 10	0 12	**1** + 5	**0**
120	-1 2	50+ 4	70- 6	-3 3	**-6**
80	0 5	0 8	20+ 10	60- 4	**-2**
v_j	**7**	**10**	**12**	**6**	**θ=30**

Bảng 2

B / A	70	80	90	60	u_i
100	70- 7	-1 10	-1 12	30+ 5	**0**
120	0 2	80 4	40 6	-3 3	**-5**
80	**1** + 5	0 8	50 10	30- 4	**-1**
v_j	**7**	**9**	**11**	**5**	**θ=30**

Bảng 3

B / A	70	80	90	60	u_i
100	40 7	0 10	0 12	60 5	**0**
120	-1 2	80 4	40 6	-4 3	**-6**
80	30 5	0 8	50 10	-1 4	**-2**
v_j	**7**	**10**	**12**	**5**	

Ta có phương án tối ưu:

$$X^*=\begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 80 & 40 & 0 \\ 30 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix},\ F(X^*)=40x7+60x5+80x4+40x6+30x5+50x10=1790$$

4.3 TRƯỜNG HỢP PHƯƠNG ÁN XUẤT SUY BIẾN

Giả sử đang xét phương án X của BTVT. Nếu X là phương án cực biên suy biến thì số ô chọn ít hơn m+n-1 nên không thể tính được các số thế vị. Để khắc phục ta bổ xung vào G(X) một số ô chọn giả sao cho đủ m+n-1 ô và chúng cùng với các ô của G(X) không tạo thành chu trình. Đánh dấu các ô chọn giả bằng cách cấp cho chúng một lượng hàng (số ε>0) rất bé, xem như bằng không. Khi đó thuật toán thế vị có thể tiến hành bình thường.

Thí dụ 4.4 Cho bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát a = (60, 50, 70) Lượng thu b =(35, 75, 40, 30)

Ma trận chi phí $C=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 8 & 5 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

Tìm phương án xuất phát theo phương pháp góc tây bắc. Giải bài toán bằng phương pháp thế vị theo phương án xuất phát này.

Giải. Ta có $\sum_i a_i = 60 + 50 + 70 = 180$ và $\sum_j b_j = 35 + 75 + 40 + 30 = 180 \rightarrow$ đây là bài toán vận tải cân bằng thu phát.

Bảng 1

A \ B	35	75	40	30	u_i
60	35 4	25 6	-4 7	-10 6	**0**
50	-1 7	50- $\boxed{8}$	ε+ 5	-10 8	**2**
70	4 6	**9** + 3	40- 9	30 2	**6**
v_j	**4**	**6**	**3**	**-4**	**θ=40**

Bảng 2

A \ B	35	75	40	30	u_i
60	35 4	25 6	-4 7	-1 6	**0**
50	-1 7	10 8	40 5	-1 8	**2**
70	-5 6	40 3	-9 9	30 2	**-3**
v_j	**4**	**6**	**3**	**5**	

Phương án tối ưu $X^* = \begin{pmatrix} 35 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 40 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 30 \end{pmatrix}$,

$F^* = 35x4 + 25x6 + 10x8 + 40x5 + 40x3 + 30x2 = 750$

II. CHỮA BÀI TẬP

1. Giải bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát a = (70, 80, 90, 65) , Lượng thu b = (55, 60, 75, 85)

Ma trận chi phí $C=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

- **Đs** $X^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 75 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ $F^* = 1230$

2. Giải bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát a = (30, 100, 55, 65), Lượng thu b = (70, 55, 75, 50)

Ma trận chi phí $C=\begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

- **Đs** $\mathbf{X^*=}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 0 \\ 15 & 55 & 0 & 30 \\ 55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45 & 20 \end{pmatrix}$ $F^* = 1005$

3. Cho bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát a = (10,14,20); Lượng thu b = (18, 6, 8, 12)

Ma trận chi phí $C=\begin{pmatrix} 9 & 9 & 12 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

- **Đs** $X^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $F^*= 258$

4. Cho bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát a = (50,95,55); Lượng thu b = (80, 20, 60, 40)

Ma trận chi phí $C=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

- **Đs** $\mathbf{X^*=}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 40 \\ 15 & 20 & 60 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $F^* = 1045$

5. Cho bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát a = (30,125,50) ; Lượng thu b = (70, 20, 50, 40,25)

Ma trận chi phí $C=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 & 7 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

- **Đs** $\mathbf{X^*=}\begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 & 10 \\ 70 & 0 & 50 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 10 \end{pmatrix}$ $F^*= 1035$

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

Học phần: **CÁC PP TỐI ƯU**	Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT
Thời gian: Tuần 12 Tiết 34-36 GV giảng: 1, Bài tập:2, Tự học :3	Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn Vũ Anh Mỹ
Chương 4	**Bài toán vận tải**
Các mục	4.4 Bài toán VT không cân bằng thu phát
Mục đích - yêu cầu	- Trình bày phương pháp đưa BTVT về dạng cân bằng thu phát - Luyện tập thành thục của thuật toán thế vị giải BTVT

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

4.4 Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

4.4.1 Trường hợp phát lớn hơn thu

Xét trường hợp $\beta = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0$. Khi đó ta có bài toán vận tải mở rộng:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

với điều kiện: $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \ ;\ i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ ;\ j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \ge 0 \quad i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Nếu ta thêm vào bài toán một điểm phát giả A_{m+1} với lượng phát $a_{m+1} = \beta$ thì BTVT mở rộng trở thành cân bằng thu phát nên giải được bằng phương pháp thế vị.

Thí dụ 4.5 Cho bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát a = (70, 50, 40)

Lượng thu b =(45, 55, 35)

Ma trận chi phí $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

Tìm phương án xuất phát theo phương pháp góc tây bắc. Giải bài toán bằng phương pháp thế vị theo phương án xuất phát này

Giải. Ta có $\sum_i a_i = 70 + 50 + 40 = 160$ $\sum_j b_j = 45 + 55 + 35 = 135 \rightarrow$ đây là trường hợp phát > thu với β =160-135=25.

Bảng 1

A \ B	45	55	35	25	u_i
70	45 5	25 6	-3 7	-1 0	**0**
50	-3 7	30 5	20 3	-2 0	**-1**
40	-2 8	-4 9	15 5	25 0	**1**
v_j	**5**	**6**	**4**	**-1**	

Bài toán có phương án tối ưu $X^* = \begin{pmatrix} 45 & 25 & 0 \\ 0 & 30 & 20 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$, $F^* = 660$

4.4.2 Trường hợp phát nhỏ hơn thu

Xét trường hợp $\beta = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i > 0$. Khi đó ta có bài toán vận tải mở rộng:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện: } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ ;\ i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \ ;\ j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \ge 0 \quad i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Nếu ta thêm vào bài toán một điểm phát giả A_{m+1} với lượng phát $a_{m+1} = \beta$ thì BTVT mở rộng trở thành cân bằng thu phát nên giải được bằng phương pháp thế vị.

Thí dụ 4.6 Cho bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát a = (65, 45,50) ; Lượng thu b =(80, 70, 50)

Ma trận chi phí $C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Tìm phương án xuất phát theo phương pháp góc tây bắc. Giải bài toán bằng phương pháp thế vị theo phương án xuất phát này

Giải. Ta có $\sum_i a_i = 65 + 45 + 50 = 160$ $\sum_j b_j = 80 + 70 + 50 = 200$

Suy ra đây là trường hợp phát < thu với β =200-160=40.

Bảng 1

B / A	80	70	50	u_i
65	65 4	-3 8	-1 7	**0**
45	15 3	30 4	-3 8	**-1**
50	-3 7	40 5	10 6	**0**
40	-2 0	-1 0	40 0	**-6**
v_j	**4**	**5**	**6**	

Phương án tối ưu $X^* = \begin{pmatrix} 65 & 0 & 0 \\ 15 & 30 & 0 \\ 0 & 40 & 10 \end{pmatrix}$, $F^* = 685$

II. CHỮA BÀI TẬP

1. Cho bài toán toán vận tải với các dữ liệu**:**

Lượng phát $a = (70, 80, 90, 65)$;

Lượng thu $b = (55, 60, 75, 85)$

Ma trận chi phí $C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Tìm phương án xuất phát theo phương pháp góc tây bắc.Giải bài toán bằng phương pháp thế vị

- **Đs** $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 75 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ $F^* = 1195$

2. Cho bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát $a = (80, 65, 95, 70)$;

Lượng thu $b = (60, 55, 75,90)$

Ma trận chi phí $C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 7 & 3 \\ 10 & 7 & 6 & 5 \\ 10 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Tìm phương án xuất phát theo phương pháp góc tây bắc.Giải bài toán bằng phương pháp thế vị

- **Đs** $\mathbf{X}^{*}=\begin{pmatrix} 45 & 0 & 5 & 0 \\ 10 & 55 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}$ $F^{*} = 1485$

3. Cho bài toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát a = (80, 75, 90, 80);

Lượng thu b = (40, 90, 75, 95)

Ma trận chi phí $C=\begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Giải bài toán bằng phương pháp thế vị theo phương án xuất phát sau đây:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 40 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 75 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Đs $\mathbf{X}^{*}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 75 & 0 \\ 40 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 65 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ $F^{*} = 1120$

4 Cho bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát a = (17,14, 21,43); Lượng thu b = (19, 22, 23,17,14)

Ma trận chi phí $C=\begin{pmatrix} 12 & 11 & 27 & 17 & 21 \\ 25 & 12 & 8 & 5 & 14 \\ 13 & 4 & 28 & 15 & 21 \\ 32 & 6 & 4 & 27 & 25 \end{pmatrix}$

Tìm phương án xuất phát theo phương pháp góc tây bắc.Giải bài toán bằng phương pháp thế vị

- **Đs** $X^{*}=\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 20 & 23 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $F^{*} = 859$

5. Giải bài toán toán vận tải với các dữ liệu:

Lượng phát a = (70, 80, 90, 65) , Lượng thu b = (55, 60, 75, 85)

Ma trận chi phí $C=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Tìm phương án xuất phát theo phương pháp góc tây bắc.Giải bài toán bằng phương pháp thế vị

- **Đs** $X^{*}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 75 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ $F^{*} = 1230$

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

<table>
<tr><td colspan="2">Học phần: CÁC PP TỐI ƯU</td><td>Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT</td></tr>
<tr><td colspan="2">Thời gian: Tuần 13 Tiết 37-39
GV giảng: 2, Bài tập:1, Tự học :3</td><td>Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn
Vũ Anh Mỹ</td></tr>
<tr><td>Chương 5</td><td colspan="2">Qui hoạch tham số</td></tr>
<tr><td>Các mục</td><td colspan="2">5.1 Đặt bài toán
5.2 Bài toán thứ nhất: Hàm mục tiêu phụ thuộc tham số</td></tr>
<tr><td>Mục đích - yêu cầu</td><td colspan="2">- Giới thiệu ý nghĩa của QHTS
- Trình bày phương pháp giải bài toán QHTS thứ nhất
- Luyện tập giải các bài toán QHTS thứ nhất</td></tr>
</table>

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

Chương 5. QUI HOẠCH THAM SỐ

5.1 ĐẶT VẤN ĐỀ

Xét bài toán QHTT:
$$F(x) = \langle c,x\rangle \to min$$
$$Ax = b \ , x \geq 0$$

Dữ liệu của bài toán là ma trận *A*, vector *b* và vector *c* có được là do một quá trình nghiên cứu, đo đạc và tính toán được. Sau khi giải bài toán ta tìm được phương án tối ưu *x**, áp dụng vào thực tế ta phát hiện thấy dữ liệu của bài toán đã bị thay đổi. Liệu phương án tối ưu *x** còn phù hợp với mô hình mới hay không. Trong chương này ta sẽ xét trường hợp đơn giản hơn: Các vector *b* hoặc *c* thay đổi đến mức độ nào thì *x** vẫn còn là phương án tối ưu của bài toán.

5.2 BÀI TOÁN THỨ I : HÀM MỤC TIÊU PHỤ THUỘC BẬC NHẤT MỘT THAM SỐ

Xét bài toán QHTT:
$$F(x,\lambda) = \langle c+\lambda c',x\rangle \to min \qquad (5.1)$$
$$Ax = b,\ x \geq 0 \qquad (5.2)$$

trong đó: $c, c' \in R^n; b \in R^m; A = (a_{ij})_{m\times n}$, λ là một tham số thực.

Rõ ràng tập ràng buộc của bài toán $D = \{Ax = b, x \geq 0\}$ không phụ thuộc vào tham số λ. Giả thiết rằng $D \neq \emptyset$. Khi đó với mỗi giá trị của tham số $\lambda \in R$ bài toán (5.1)-(5.2) là một bài toán QHTT dạng chính tắc. Giả sử với $\lambda = \gamma$ cụ thể bài toán (5.1)-(5.2) có lời giải tối ưu là x^1. Khi λ thay đổi nhỏ xung quanh γ, do F(x, λ) liên tục nên x^1 có thể vẫn là phương án tối ưu. Như vậy ta cần tìm khoảng số thực $T_1 \subset R$ sao cho x^1 là phương án tối ưu với $\forall\lambda \in T_1$. Khi λ thay đổi lớn, ra khỏi khoảng T_1, thì x^1 không còn là phương án tối ưu. Khi đó cần phải tìm phương án tối ưu khác là x^2 và khoảng số thực T_2 tương ứng với nó…Từ đó dẫn đến việc cần tìm một phân hoạch $T_1, T_2, \ldots, T_k$ của *R* và các lời giải tối ưu $x^1, x^2, ..., x^k$ tương ứng sao cho x^i là phương án tối ưu của bài toán (5.1)-(5.2) với $\forall\lambda \in T_i$.

- **Giải thuật.** Giả sử $rank(A)= m$.

Chọn $\lambda = \gamma$ và giải bài toán (5.1)-(5.2). Có hai trường hợp có thể xảy ra:

1. **Trường hợp 1:** Với $\lambda = \gamma$ bài toán có phương án tối ưu là x^1 và cơ sở tối ưu tương ứng là $B_1=(A_j)_{j \in J}$, $\| J_1 \| = m$. Khi đó, $x^1_{J_1} = B_1^{-1} b \ge 0$ và

$$\Delta_k = \sum_{j\in J_1} v_{jk}\left(c_j + \lambda c_j^{'}\right) - \left(c_k + \lambda c_k^{'}\right) = \left(\sum_{j\in J_1} v_{jk} c_j - c_k\right) + \gamma\left(\sum_{j\in J_1} v_{jk} c_j^{'} - c_k^{'}\right)$$

$$= \alpha_k + \gamma\beta_k \le 0 \text{ với } k = \overline{1,n}.$$

Nếu $\beta_k = 0$ thì $\alpha_k \le 0$, nếu $\beta_k > 0$ thì $\gamma \le -\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}$ và nếu $\beta_k < 0$ thì $\gamma \ge -\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}$

Đặt $\underline{\lambda}_1 = \max\limits_{\beta_k < 0}\left(-\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}\right)$ và nếu $\beta_k \ge 0$ với $\forall k$ thì đặt $\underline{\lambda}_1 = -\infty$.

Đặt $\overline{\lambda}_1 = \min\limits_{\beta_k > 0}\left(-\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}\right)$ và nếu $\beta_k \le 0$ với $\forall k$ thì đặt $\overline{\lambda}_1 = +\infty$.

Rõ ràng với $\forall \lambda \in T_1 = [\underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1]$ thì x^1 vẫn còn là phương án tối ưu của bài toán và khi $\lambda \notin T_1$ thì x^1 không còn là phương án tối ưu nữa. Ta cần phải tiếp tục giải bài toán (5.1)-(5.2) với $\lambda > \overline{\lambda}_1$ nếu $\overline{\lambda}_1 < +\infty$, gọi là phát triển bài toán sang phải, và giải bài toán (5.1)-(5.2) với $\lambda < \underline{\lambda}_1$ nếu $\underline{\lambda}_1 > -\infty$, gọi là phát triển bài toán sang trái.

A. Phát triển bài toán sang phải

Giả sử $\overline{\lambda}_1 < +\infty$. Khi $\lambda > \overline{\lambda}_1$ thì x^1 và B_1 không còn là phương án và cơ sở tối ưu, ta cần tìm x^2 và cơ sở B_2 tương ứng. Áp dụng giải thuật đơn hình, ta tìm cơ sở B_2 sao cho nó chỉ khác B_1 đúng một vector, nghĩa là $B_2 = B_1 \setminus \{A_q\} \cup \{A_q\}$.

a. Tìm A_q, đưa vào cơ sở mới theo tiêu chuẩn: $-\dfrac{\alpha_q}{\beta_q} = \min\limits_{\beta_k > 0}\left(-\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}\right) = \overline{\lambda}_1$, vì khi λ tăng vượt qua $\overline{\lambda}_1$ thì Δ_q là số kiểm tra đầu tiên tăng qua 0. Xét cột A_q:

+ Nếu $\forall j \in J,\ v_{jq} \le 0$ thì bài toán không có phương án tối ưu với $\forall\ \lambda > \overline{\lambda}_1$ nên ta kết thúc phát triển bài toán sang phải;

+ Nếu $\exists j \in J,\ v_{jq} > 0$ thì chuyển sang chọn A_p.

b. Chọn A_p và đưa ra khỏi B_1 theo tiêu chuẩn: $\dfrac{x_p^1}{v_{pq}} = \min\limits_{v_{jq}>0} \dfrac{x_j^1}{v_{jq}}$ (FF đơn hình).

Định lý 5.1

i. x^2 là phương án tối ưu với $\lambda = \overline{\lambda}_1$;

ii. Nếu x^2 là phương án tối ưu với $\forall \lambda \in T_2 = [\underline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_2]$ thì $\underline{\lambda}_2 = \overline{\lambda}_1$.

Chứng minh…

B. Phát triển bài toán sang trái

Giả sử $\underline{\lambda}_1 > -\infty$. Khi $\lambda < \underline{\lambda}_1$ thì x^1 và B_1 không còn là phương án và cơ sở tối ưu, ta cần tìm x^0 và cơ sở B_0 tương ứng. Áp dụng giải thuật đơn hình, ta tìm cơ sở B_0 sao cho nó chỉ khác B_1 đúng một vector, nghĩa là $B_0 = B_1 \setminus \{A_q\} \cup \{A_q\}$.

a. Tìm A_q, đưa vào cơ sở mới theo tiêu chuẩn: $-\dfrac{\alpha_q}{\beta_q} = \max\limits_{\beta_k<0}\left(-\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}\right) = \underline{\lambda}_1$, vì khi λ giảm vượt qua $\underline{\lambda}_1$ thì Δ_q là số kiểm tra đầu tiên tăng qua 0. Xét cột A_q:

+ Nếu $\forall j \in J,\ v_{jq} \le 0$ thì bài toán không có phương án tối ưu với $\forall\ \lambda < \underline{\lambda}_1$ nên ta kết thúc phát triển bài toán sang phải;

+ Nếu $\exists j \in J,\ v_{jq} > 0$ thì chuyển sang chọn A_p.

b. Chọn A_p và đưa ra khỏi B_1 theo tiêu chuẩn: $\dfrac{x_p^1}{v_{pq}} = \min\limits_{v_{jq}>0} \dfrac{x_j^1}{v_{jq}}$ (FF đơn hình)

Định lý 5.2

i. x^0 là phương án tối ưu với $\lambda = \underline{\lambda}_1$;

ii. Nếu x^0 là phương án tối ưu với $\forall\lambda \in T_0 = [\underline{\lambda}_0, \overline{\lambda}_0]$ thì $\overline{\lambda}_0 = \underline{\lambda}_1$.

Chứng minh…

2. **Trường hợp 2:** Với $\lambda = \gamma$ bài toán không có phương án tối ưu.

Khi đó $\exists q \in J, \Delta_q > 0$ và $\forall j \in J, v_{jq} \le 0$

a. Nếu $\beta_q > 0$ thì từ $\Delta_q = \alpha_q + \gamma\beta_q > 0$ suy ra $\gamma > -\dfrac{\alpha_q}{\beta_q}$. Do đó $\forall\lambda > -\dfrac{\alpha_q}{\beta_q}$ bài toán không có phương án tối ưu. Ta chỉ cần phải xét bài toán với $\lambda \le -\dfrac{\alpha_q}{\beta_q} = \gamma^*$.

Giải bài toán với $\lambda = \gamma^*$. Nếu bài toán có phương án tối ưu (trường hợp 1) thì ta tiếp tục phát triển sang trái. Nếu không có phương án tối ưu (trường hợp 2) thì ta sẽ tìm được γ^* mới và giải bài toán với $\lambda = \gamma^*$…

b. Nếu $\beta_q < 0$ thì từ $\Delta_q = \alpha_q + \gamma\beta_q > 0$ suy ra $\gamma < -\dfrac{\alpha_q}{\beta_q}$. Do đó $\forall\lambda < -\dfrac{\alpha_q}{\beta_q}$ bài toán không có phương án tối ưu. Ta chỉ cần phải xét bài toán với $\lambda \ge -\dfrac{\alpha_q}{\beta_q} = \gamma^*$.

Giải bài toán với $\lambda = \gamma^*$. Nếu bài toán có phương án tối ưu (trường hợp 1) thì ta tiếp tục phát triển sang phảii. Nếu không có phương án tối ưu (trường hợp 2) thì ta phải tìm γ^* mới giải bài toán với $\lambda = \gamma^*$…

Thí dụ 5.1 Giải bài toán Qui hoạch tham số:

$$F(x,\lambda) = (6+\lambda)\,x_1 + (1-2\lambda)x_2 - \lambda x_3 - 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 \ge -15 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \le 1 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4};\ \lambda \in R \end{cases}$$

Giải. Đầu tiên đưa bài toán về dạng QHTT dạng chính tắc:

$$F(x,\lambda) = (6+\lambda)\, x_1 + (1-2\lambda)x_2 - \lambda x_3 - 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ -3x_1 \quad 4x_2 - 4x_3 - x_4 + x_6 = 15 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 1 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7};\ \lambda \in R \end{cases}$$

Ta có bảng đơn hình sau xuất phát

B	C_J	x_J	$6+\lambda$	$1-2\lambda$	$-\lambda$	-4	0	0	0	h_J	T= [$\underline{\lambda}$, $\overline{\lambda}$]
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7		
A_5	0	7	1	1	1	1	1	0	0	7/1	
A_6	0	15	-3	4	-4	-1	0	1	0		
A_7	0	1	1	-2	1	**1**	0	0	1	**1/1**	
Δ_k		α	-6	-1	0	**4**	0	0	0		
		β	-1	2	1	0	0	0	0		
A_5	0	6	0	**3**	0	0	1	0	-1	**6/3**	$\underline{\lambda}$=-10
A_6	0	16	-2	2	-3	0	0	1	1	16/2	$\overline{\lambda}$= -7/2
A_4	-4	1	1	-2	1	1	0	0	1		T_0=
Δ_k		α	-10	7	-4	0	0	0	-4		[-10,-7/2]
		β	-1	2	1	0	0	0	0		
		$-\alpha/\beta$	**-10**	**-7/2**	4	\	\	\	\		
Phát triển sang phải từ Bảng 2											
A_2	$1-2\lambda$	2	0	1	0	0	1/3	0	-1/3		
A_6	0	12	-2	0	-3	0	-2/3	1	**5/3**	**36/5**	$\underline{\lambda}$=-7/2
A_4	-4	5	1	0	1	1	2/3	0	1/3	15	$\overline{\lambda}$= 5/2
Δ_k		α	-10	0	-4	0	-7/3	0	-5/3		T_1=
		β	-1	0	1	0	-2/3	0	2/3		[-7/2,5/2]
		$-\alpha/\beta$	-10	\	4	\	**-7/2**	\	**5/2**		
A_2	$1-2\lambda$	22/5	-2/5	1	-3/5	0	1/5	1/5	0		
A_7	0	36/5	-6/5	0	-9/5	0	-2/5	3/5	1		$\underline{\lambda}$= 5/2
A_4	-4	13/5	7/5	0	**8/5**	1	4/5	-1/5	0		$\overline{\lambda}$= 35/11
Δ_k		α	-12	0	-7	0	-3	1	0		T_2=
		β	-1/5	0	11/5	0	-2/5	-2/5	0		[5/2,35/11]
		$-\alpha/\beta$	-60	\	**35/11**	\	-15/2	**5/2**	\		
A_2	$1-2\lambda$	43/8	1/8	1	0	3/8	1/2	1/8	0		
A_7	0	81/8	3/8	0	0	9/8	1/2	3/8	1		$\underline{\lambda}$= 35/11
A_3	$-\lambda$	13/8	7/8	0	1	5/8	1/2	-1/8	0		$\overline{\lambda}$= +∞
Δ_k		α	-47/8	0	0	35/8	1/2	1/8	0		T_3=
		β	-17/8	0	0	-11/8	-3/2	-1/8	0		[35/11,+∞)
		$-\alpha/\beta$	-47/17	\	\	**35/11**	1/3	1	\		

- **Phát triển sang trái từ Bảng 2**

A_5	0	6	0	**3**	0	0	1	0	-1		$\underline{\lambda}=-10$ $\overline{\lambda}=-7/2$ $T_0=[-10,-7/2]$
A_6	0	16	-2	2	-3	0	0	1	1		
A_4	-4	1	**1**	-2	1	1	0	0	1		
Δ_k		α	-10	7	-4	0	0	0	-4		
		β	-1	2	1	0	0	0	0		
		-α/β	**-10**	**-7/2**	4	\	\	\	\		
A_5	0	6	0	3	0	0	1	0	-1		$\underline{\lambda}=-\infty$ $\overline{\lambda}=-10$ $T_{-1}=(-\infty,-10]$
A_6	0	18	0	-2	-1	2	0	1	3		
A_1	6+λ	1	1	-2	1	1	0	0	1		
Δ_k		α	0	-13	6	10	0	0	6		
		β	0	0	2	1	0	0	1		
		-α/β	\	\	-3	**-10**	\	\	-6		

- Tổng hợp kết quả:

λ	-∞ -10	-10 -7/2	-7/2 5/2	5/2 35/11	35/11 +∞
B*	(A_5, A_6, A_1)	(A_5, A_6, A_4)	(A_2, A_6, A_4)	(A_2, A_7, A_4)	(A_2, A_7, A_3)
x_J^*	$x_5=6$ $x_6=18$ $x_1=1$	$x_5=6$ $x_6=16$ $x_4=1$	$x_2=2$ $x_6=12$ $x_4=5$	$x_2=22/5$ $x_7=36/5$ $x_4=13/5$	$x_2=43/8$ $x_7=81/8$ $x_3=13/8$
F(x*,λ)	6 + λ	-4	-18-4λ	-6-44λ/5	43/8 -99λ/8

Thí dụ 5.2 Giải bài toán Qui hoạch tham số:

$$F(x,\lambda)) = (1-\lambda)x_1 + (2+\lambda)x_2 + (3-\lambda)x_3 + (4+\lambda)x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \le 8 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \le 10 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4} \end{cases}$$

Giải. Đưa về dạng chính tắc. Lập bảng đơn hình xuất phát:

B	C_J	x_J	1 - λ	2 + λ	3 - λ	4 + λ	0	0	0	h_J	$T=[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7		
A_5	0	6	**1**	2	1	2	1	0	0	**6/1**	$\underline{\lambda}=-2$ $\overline{\lambda}=1$ $T_0=[-2,1]$
A_6	0	8	1	-1	-2	1	0	1	0	8/1	
A_7	0	10	-1	2	3	-1	0	0	1		
Δ_k		α	-1	-2	-3	-4	0	0	0		
		β	1	-1	1	-1	0	0	0		
		-α/β	**1**	**-2**	3	-4	\	\	\		
A_1	1-λ	6	1	2	1	2	1	0	0		$\underline{\lambda}=1$ $\overline{\lambda}=+\infty$ $T_1=[1,+\infty)$
A_6	0	2	0	-3	-3	-1	-1	1	0		
A_7	0	16	0	4	4	1	1	0	1		
Δ_k		α	0	0	-2	-2	1	0	0		
		β	0	-3	0	-3	-1	0	0		
		-α/β	\	0	\	**-2/3**	1	\	\		

- **Phát triển sang trái.**

A_5	0	6	1	**2**	1	2	1	0	0	**6/2**	$\underline{\lambda}=-2$ $\overline{\lambda}=1$ $T_0=[-2,1]$
A_6	0	8	1	-1	-2	1	0	1	0		
A_7	0	10	-1	2	3	-1	0	0	1	10/2	
Δ_k		α	-1	-2	-3	-4	0	0	0		
		β	1	-1	1	-1	0	0	0		
		-α/β	**1**	**-2**	3	-4	/	/	/		
A_2	2+λ	3	1/2	1	1/2	1	1/2	0	0		$\underline{\lambda}=-\infty$ $\overline{\lambda}=-2$ $T_{-1}=(-\infty,-2]$
A_6	0	11	3/2	0	-3/2	2	1/2	1	0		
A_7	0	4	-2	0	2	-3	-1	0	1		
Δ_k		α	0	0	-2	-2	1	0	0		
		β	3/2	0	3/2	0	1/2	0	0		
		-α/β	0	/	4/3	/	**-2**	/	/		

- Tổng hợp kết quả:

λ	-∞ -2	1	+∞
B*	(A_2, A_6, A_1)	(A_5, A_6, A_4)	(A_1, A_6, A_7)
x_J^*	$x_2 = 3$ $x_6 = 11$ $x_7 = 4$	$x_5 = 6$ $x_6 = 8$ $x_7 = 10$	$x_1 = 6$ $x_6 = 2$ $x_7 = 16$
F(x*,λ)	6 + 3λ	0	6 - 6λ

II. CHỮA BÀI TẬP

1. Giải bài toán qui hoạch tham số sau:

$$F(x) = (3-2\lambda)x_1 + (-4+\lambda)x_2 + (-1-\lambda)x_3 + (-8+2\lambda)x_4 + (4+2\lambda)x_5 + (1+\lambda)x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 + x_6 = -9 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 - x_6 = 10 \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 15 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6};\ \lambda \in R \end{cases}$$

- Tổng hợp kết quả:

λ	-∞ -1/4	3/2	4	+∞
B*		A_1, A_2, A_6	A_3, A_2, A_6	A_4, A_2, A_6
x_J^*	F(x)→-∞	(1,18,8)	(1,16,7)	(1, 13, 6)
F(x*,λ)		-61 + 24λ	-58+22λ	-54+21λ

2 . Giải bài toán qui hoạch tham số sau:

$$F(x) = (3+2\lambda)x_1 + (4-2\lambda)x_2 + (2+\lambda)x_3 + (1+3\lambda)x_4 + (5-\lambda)x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \le -3 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \le -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \le 4 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5};\ \lambda \in R \end{cases}$$

- Tổng hợp kết quả:

<table>
<tr><td>λ</td><td colspan="5">$-\infty$ $-3/4$ 0 2 $17/7$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>B*</td><td></td><td>A_3, A_7, A_8</td><td>A_2, A_7, A_8</td><td>A_2, A_7, A_6</td><td></td></tr>
<tr><td>x_J^*</td><td>$F(x) \rightarrow -\infty$</td><td>(3,1,10)</td><td>(3/2, 5/2, 5/2)</td><td>(4, 10, 5)</td><td>$F(x) \rightarrow -\infty$</td></tr>
<tr><td>$F(x^*,\lambda)$</td><td></td><td>$6 + 3\lambda$</td><td>$6 - 3\lambda$</td><td>$16 - 8\lambda$</td><td></td></tr>
</table>

3. Giải bài toán qui hoạch tham số sau:

$$F(x) = (1+\lambda)x_1 + (-2-3\lambda)x_2 + x_3 + (-5+3\lambda)x_4 + (-4-\lambda)x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 35 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = -20 \\ x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 = 32 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5};\ \lambda \in R \end{cases}$$

- Tổng hợp kết quả:

<table>
<tr><td>λ</td><td colspan="2">$-\infty$ $1/6$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>B*</td><td>A_1, A_4, A_3</td><td>A_1, A_2, A_3</td></tr>
<tr><td>x_J^*</td><td>(27,5,12)</td><td>(27, 5, 2)</td></tr>
<tr><td>$F(x^*,\lambda)$</td><td>$14 + 42\lambda$</td><td>$19 + 12\lambda$</td></tr>
</table>

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

Học phần: **CÁC PP TỐI ƯU**		Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT
Thời gian: Tuần 14 Tiết 40-42 GV giảng: 2, Bài tập:1, Tự học :3		Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn Vũ Anh Mỹ
Chương 5	**Qui hoạch tham số**	
Các mục	5.3 Bài toán thứ hai: Vế phải phụ thuộc tham số	
Mục đích - yêu cầu	- Trình bày phương pháp giải bài toán QHTS thứ hai - Luyện tập giải các bài toán QHTT tham số	

NỘI DUNG

I. LÝ THUYẾT

Chương 5. QUI HOẠCH THAM SỐ

5.3 BÀI TOÁN THỨ II : VẾ PHẢI PHỤ THUỘC THAM SỐ

Xét bài toán QHTT:

$$F(x,\lambda) = \langle c,x\rangle \to \min \tag{5.3}$$

$$Ax = b+\lambda b', x \geq 0 \tag{5.4}$$

trong đó: $c \in R^n; b, b' \in R^m, A=(a_{ij})_{m\times n}$, λ là một tham số thực. Khi đó miền ràng buộc:

$D(\lambda)=\{x \mid Ax = b+\lambda b', x\geq 0, \lambda \in R\}$ phụ thuộc vào tham số λ.

- Giải thuật: Giả sử *rank(A)= m.*

Chọn $\lambda=\gamma$ và giải bài toán (5.3)-(5.4). Có ba trường hợp có thể xảy ra:

1. Trường hợp 1: Với $\lambda=\gamma$ bài toán có phương án tối ưu là x^1 và cơ sở tối ưu tương ứng là $B_1=(A_j)_{j\in J}, \|J\|=m$. Khi đó $\Delta_k \leq 0$ với $\forall$ k và $x_J^1 = B_1^{-1}(b+\gamma b') \geq 0$.

Hay $x_j^1 = \alpha_j + \gamma\beta_j \geq 0$ với $j \in J$ và $x_j^1 = 0$ với $j \notin J$. Vì vậy:

+ Nếu $j \in J$ mà $\beta_j = 0$ thì $\alpha_j \geq 0$

+ Nếu $j \in J$ mà $\beta_j > 0$ thì $\gamma \geq -\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}$;

+ Nếu $j \in J$ mà $\beta_j < 0$ thì $\gamma \leq -\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}$.

Đặt $\underline{\lambda}_1 = \max\limits_{\beta_j>0}\left(-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$, nếu $\beta_j \leq 0 \ \forall$ j $\in J_1$ thì đặt $\underline{\lambda}_1 = -\infty$, (5.5)

và $\overline{\lambda}_1 = \min\limits_{\beta_j<0}\left(-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$, nếu $\beta_j \geq 0 \ \forall$ j $\in J_1$ thì đặt $\overline{\lambda}_1 = +\infty$. (5.6)

Rõ ràng với $\forall\lambda \in T_1=[\underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1]$ thì x^1 vẫn còn là phương án tối ưu của bài toán và khi $\lambda \notin T_1$ thì x^1 không còn là phương án tối ưu nữa. Ta cần phải tiếp tục giải bài toán (5.3)-(5.4) với $\lambda > \overline{\lambda}_1$ nếu $\overline{\lambda}_1 < +\infty$, gọi là phát triển bài toán sang phải, và giải bài toán (5.3)-(5.4) với $\lambda < \underline{\lambda}_1$ nếu $\underline{\lambda}_1 > -\infty$, gọi là phát triển bài toán sang trái.

- **Phát triển bài toán sang phải**

Giả sử $\bar{\lambda}_1 < +\infty$. Khi $\lambda > \bar{\lambda}_1$ thì x^1 và B_1 không còn là phương án và cơ sở tối ưu, ta cần tìm x^2 và B_2. Áp dụng giải thuật đơn hình đối ngẫu, ta tìm cơ sở B_2 sao cho nó chỉ khác B_1 đúng một vector: $B_2 = B_1 \backslash \{A_q \cup \{A_q\}$.

a. Tìm A_p đưa ra khỏi cơ sở B_1, theo tiêu chuẩn: $-\dfrac{\alpha_p}{\beta_p} = \min\limits_{\beta_j<0}\left(-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}\right) = \bar{\lambda}_1$, vì khi λ tăng vượt qua $\bar{\lambda}_1$ thì x_p^1 là thành phần đầu tiên của x^1 trở thành âm. Xét hàng A_p:

+ Nếu $v_{pk} \geq 0$ với $\forall k$ thì bài toán không có phương án ($D(\lambda) = \varnothing$) với $\forall\ \lambda > \bar{\lambda}_1$ nên ta kết thúc phát triển bài toán sang phải;

+ Nếu $\exists\ k\ \ v_{pk} < 0$ thì chuyển sang chọn A_q.

b. Chọn A_q và đưa vào B_2 theo tiêu chuẩn:

Nếu $\dfrac{\Delta_q}{v_{pq}} = \min\limits_{v_{pk}<0} \dfrac{\Delta_k}{v_{pk}}$ thì đưa A_q vào cơ sở B_2

Định lý 5.3

i. B_2 là cơ sở tối ưu với $\lambda = \bar{\lambda}_1$;

ii. Nếu B_2 là cơ sở với $\forall\ \lambda \in T_2 = [\underline{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2]$ thì $\underline{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_1$.

Chứng minh…

- **Phát triển bài toán sang trái**

Giả sử $\underline{\lambda}_1 > -\infty$. Khi $\lambda < \underline{\lambda}_1$ thì x^1 và B_1 không còn là phương án và cơ sở tối ưu, ta cần tìm x^0 và B_0. Áp dụng giải thuật đơn hình đối ngẫu, ta tìm cơ sở B_0 sao cho nó chỉ khác B_1 đúng một vector: $B_0 = B_1 \backslash \{A_q \cup \{A_q\}$.

a. Tìm A_p đưa ra khỏi cơ sở B_1, theo tiêu chuẩn: $-\dfrac{\alpha_p}{\beta_p} = \max\limits_{\beta_j>0}\left(-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}\right) = \underline{\lambda}_1$, vì khi λ giảm vượt quá $\underline{\lambda}_1$ thì x_p^1 là thành phần đầu tiên của x^1 trở thành âm. Xét hàng A_p:

+ Nếu $v_{pk} \geq 0$ với $\forall k$ thì bài toán không có phương án ($D(\lambda) = \varnothing$) với $\forall\ \lambda < \underline{\lambda}_1$ nên ta kết thúc phát triển bài toán sang phải;

+ Nếu $\exists k\ \ v_{pk} < 0$ thì chuyển sang chọn A_q.

b. Chọn A_q và đưa vào B_0 theo tiêu chuẩn:

Nếu $\dfrac{\Delta_q}{v_{pq}} = \min\limits_{v_{pk}<0} \dfrac{\Delta_k}{v_{pk}}$ thì đưa A_q vào cơ sở B_2

Định lý 5.4

i. B_0 là cơ sở tối ưu với $\lambda = \underline{\lambda}_1$;

ii. Nếu B_0 là cơ sở với $\forall\ \lambda \in T_0 = [\underline{\lambda}_0, \bar{\lambda}_0]$ thì $\bar{\lambda}_0 = \underline{\lambda}_1$.

Chứng minh…

2. Trường hợp 2: Với $\lambda = \gamma$, $D(\lambda) = \varnothing$.

Khi đó $\exists p \in J_1$ sao cho $x_p^1 = \alpha_p + \gamma\ \beta_p < 0$ và với $\forall k, v_{pk} \geq 0$. Do đó:

+ Nếu $\beta_p = 0$ thì $\alpha_p < 0$, khi đó $D(\lambda) = \varnothing$ với $\forall\lambda$

+ Nếu $\beta_p > 0$ thì $\gamma < -\dfrac{\alpha_p}{\beta_p} = \lambda^*$. Vì vậy $\forall\ \lambda < \lambda^*$ thì $D(\lambda) = \varnothing$, chỉ còn phải xét $\lambda \in [\lambda^*, +\infty)$. Nếu chọn $\lambda = \lambda^*$, khi giải bài toán sẽ có một trong ba trường hợp xảy ra:

- Nếu bài toán có phương án tối ưu: Trường hợp 1;
- Nếu nếu bài toán không có phương án tối ưu: Trường hợp 3.
- Nếu $D(\lambda) = \varnothing$ bài toán trở về trường hợp 2. Ta cần xác định λ^* mới thay λ^*cũ.

+ Nếu $\beta_p < 0$ thì $D(\lambda) = \varnothing$ với $\forall\ \lambda > \lambda^*$. Do đó chỉ còn phải xét $\lambda = (-\infty, \lambda^*]$. Khi chọn $\lambda = \lambda^*$ cũng sẽ xảy ra một trong ba trường hợp như trên.

3. Trường hợp 3: Với $\lambda = \gamma$ bài toán (5.3)-(5.4) không có phương án tối ưu.

Khi bài toán đã cho không có phương án tối ưu thì bài toán đối ngẫu của nó không có phương án, nghĩa là $\overline{D} = \varnothing$. Xét bài toán đối ngẫu:

$$G(y) = \langle b + \lambda b', y \rangle \to max$$

$$x \in \overline{D} = \left\{ y \in R^m \mid A^T y \le c \right\}$$

Ta thấy rằng tập phương án $\overline{D}$ của bài toán đối ngẫu không phụ thuộc vào λ. Do đó với $\forall \lambda \in R$ thì $\overline{D} = \varnothing$. Vì vậy $\forall \lambda \in R$ bài toán gốc sẽ hoặc không có phương án tối ưu hoặc không có phương án.

Thí dụ 5.3 Giải bài toán qui hoạch tham số

$$F(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & \le & 2+2\lambda \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & \le & 4-2\lambda \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & \le & 5-\lambda \\ & & x_j \ge 0; j = \overline{1,4}; \lambda \in R & & & \end{cases}$$

Giải. Đưa bài toán về dạng chính tắc. Lập bảng xuất phát và phát triển sang phải.

B	C_J	x_J		$-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}$	1	2	4	3	0	0	0	$T = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$
		α_J	β_J		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
A_5	0	2	2	-1	2	3	1	1	1	0	0	$\underline{\lambda}=-1$
A_6	0	4	-2	**2**	**-1**	1	-1	2	0	1	0	$\overline{\lambda} = 2$
A_7	0	5	-1	5	1	-1	2	-1	0	0	1	$T_0 = [-1,2]$
Δ_k					-1	-2	-4	-3	0	0	0	
Δ_k/v_{pk} , $v_{pk}<0$					**1**		4					
A_5	0	10	-2	5	0	5	-1	5	1	2	0	$\underline{\lambda}=2$
A_1	1	-4	2	2	1	-1	1	-2	0	-1	0	$\overline{\lambda}=3$
A_7	0	9	-3	**3**	0	0	1	1	0	1	1	$T_1=[2,3)$
Δ_k					0	-3	-3	-5	0	-1	0	

- Tổng hợp kết quả:

λ	$-\infty$ -1	2	3	$+\infty$
B*		(A_5, A_6, A_7)	(A_5, A_1, A_7)	
x_J^*	$D(\lambda) = \varnothing$	$x_5 = 2 + \lambda$ $x_6 = 4 - 2\lambda$ $x_7 = 5 - \lambda$	$x_5 = 10 - 2\lambda$ $x_1 = -4 + 2\lambda$ $x_7 = 9 - 3\lambda$	$D(\lambda) = \varnothing$
F(x*)		0	$-4 + 2\lambda$	

Thí dụ 5.4 Giải bài toán qui hoạch tham số

$$F(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 & +6x_2 & -2x_3 & -4x_4 & \leq & 12+2\lambda \\ x_1 & -2x_2 & & -4x_4 & \leq & -3+\lambda \\ -3x_1 & -5x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq & 10-\lambda \\ & & x_j \geq 0;\ j=\overline{1,4};\ \lambda \in R \end{cases}$$

Giải. Đưa bài toán về dạng chính tắc. Lập bảng xuất phát và phát triển sang phải.

B	C_J	x_J		$-\frac{\alpha_j}{\beta_j}$	2	4	1	6	0	0	0	T= [$\underline{\lambda}$, $\overline{\lambda}$]
		α_J	β_J		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
A_5	0	12	2	-6	2	6	-2	-4	1	0	0	$\underline{\lambda}$=3, $\overline{\lambda}$= 10, T_0= [3,10]
A_6	0	-3	1	**3**	1	-2	0	-4	0	1	0	
A_7	0	10	-1	**10**	**-3**	-5	1	1	0	0	1	
Δ_k					-2	-4	-1	-6	0	0	0	
Δ_k/v_{pk} , v_{pk}<0					**2/3**	4/5						
A_5	0	56/3	4/3	-14	0	8/3	-4/3	-10/3	1	0	2/3	$\underline{\lambda}$=10 $\overline{\lambda}$=+∞, T_1=[10,+∞)
A_6	0	1/3	2/3	-1/2	0	-11/3	1/3	-11/3	0	1	1/3	
A_1	2	-10/3	1/3	**10**	-1	5/3	-1/3	-1/3	0	0	-1/3	
Δ_k					0	-2/3	-5/3	-20/3	0	0	-2/3	

- **Phát triển sang trái.**

A_5	0	12	2	-6	2	6	-2	-4	1	0	0	$\underline{\lambda}$=3, $\overline{\lambda}$= 10, T_0= [3,10]
A_6	0	-3	1	**3**	1	-2	0	**-4**	0	1	0	
A_7	0	10	-1	10	-3	-5	1	1	0	0	1	
Δ_k					-2	-4	-1	-6	0	0	0	
Δ_k/v_{pk} , v_{pk}<0						2		**3/2**				
A_5	0	15	1	**-15**	1	8	**-2**	0	1	-1	0	$\underline{\lambda}$=-15 $\overline{\lambda}$=3, T_{-1}=[-15,3]
A_4	6	3/4	-1/4	3	-1/4	1/2	0	1	0	-1/4	0	
A_7	0	37/4	-3/4	37/3	-11/4	-11/2	1	0	0	1/4	1	
Δ_k					-7/2	-1	-1	0	0	-3/2	0	
Δ_k/v_{pk} , v_{pk}<0							1/2			3/2		
A_3	1	-15/2	-1/2	**-15**	-1/2	- 4	1	0	-1/2	1/2	0	$\underline{\lambda}$=-∞, $\overline{\lambda}$=-15, T_{-1}=(-∞,-15]
A_4	6	3/4	-1/4	3	-1/4	1/2	0	1	0	-1/4	0	
A_7	0	67/4	-1/4	67	-9/4	-3/2	0	0	1/2	-1/4	1	
Δ_k					-4	-5	0	0	-1/2	-1	0	

- Tổng hợp kết quả:

λ	-∞ -15	3	10	+∞
B*	(A_3, A_4, A_7)	(A_5, A_4, A_7)	(A_5, A_6, A_7)	(A_5, A_6 ,A_1)
x_J^*	x_3 =-15/2-λ/2 x_4 =3/4-λ/4 x_7 =67/4-λ/4	x_5 = 15+λ x_4 =3/4-λ/4 x_7= 37/4-λ/4	x_5 = 12+2λ x_6 =-3+λ x_7 = 10-λ	x_5 =56/3+4λ/3 x_6 =1/3+2λ/3 x_1 =-10/3+λ/3
F(x*)	3-2λ	9/2 -3λ/2	0	-20/3+2λ/3

II. CHỮA BÀI TẬP

1. Giải bài toán qui hoạch tham số sau:

$$F(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & +2x_4 & \le & 4+3\lambda \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & \le & 6+2\lambda \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & \le & 8-5\lambda \\ & & x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4};\ \lambda \in R \end{cases}$$

- Tổng hợp kết quả:

λ	$-\infty$ $\quad -2$	$12/13$	4	$+\infty$
B*		A_4, A_2, A_7	A_4, A_2, A_1	
x_J^*	$D(\lambda) = \varnothing$	$x_4 = 10 + 5\lambda$ $x_2 = 8 + 7\lambda/2$ $x_7 = 6 - 13\lambda/2$	$x_4 = 19 - 19\lambda/4$ $x_2 = 14 - 3\lambda$ $x_1 = -3 + 13\lambda/4$	$D(\lambda) = \varnothing$
F*		$-28 - 27\lambda/2$	$-58 + 19\lambda$	

2. Giải bài toán qui hoạch tham số sau:

$$F(x) = x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 & & & +4x_4 & -5x_5 & +7x_6 & = & 11-3\lambda \\ & x_2 & & -2x_4 & +4x_5 & -2x_6 & = & 7-9\lambda \\ & & x_3 & +x_4 & -3x_5 & +2x_6 & = & 1+\lambda \\ & & & x_j \ge 0,\ j=\overline{1,6};\ \lambda \in R \end{cases}$$

- Tổng hợp kết quả:

λ	$-\infty$ $\quad -1$	$7/9$	$25/21$	$+\infty$
B*	A_1, A_2, A_5	A_1, A_2, A_3	A_1, A_4, A_3	
x_J^*	$x_1 = 28/3 - 14\lambda/3$ $x_2 = 25/3 - 23\lambda/3$ $x_5 = -1/3 - \lambda/3$	$x_1 = 11 - 3\lambda$ $x_2 = 7 - 9\lambda$ $x_3 = 1 + \lambda$	$x_1 = 25 - 21\lambda$ $x_4 = -7/2 + 9\lambda/2$ $x_3 = 9/2 - 7\lambda/2$	$D(\lambda) = \varnothing$
F*	$22/3 - 26\lambda/3$	$8 - 8\lambda$	$1 + \lambda$	

3. Giải bài toán Qui hoạch tham số:

$$F(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -x_3 & -2x_4 & \le & 6-\lambda \\ x_1 & -2x_2 & & -4x_4 & \le & -3+\lambda \\ 3x_1 & -5x_2 & +x_3 & +x_4 & \le & 10-\lambda \\ & x_j \ge 0;\ j=\overline{1,4};\ \lambda \in R \end{cases}$$

- Tổng hợp kết quả:

λ	$-\infty$ $\quad 3$	6	8	$+\infty$
B*	(A_3, A_4, A_7)	(A_5, A_6, A_7)	(A_3, A_6, A_7)	(A_3, A_6, A_2)
x_J^*	$x_3 = 15/2 - 3\lambda/2$ $x_4 = 3/4 - \lambda/4$ $x_7 = 37/4 - 3\lambda/4$	$x_5 = 6 - \lambda$ $x_6 = -3 + \lambda$ $x_7 = 10 - \lambda$	$x_3 = -6 + \lambda$ $x_6 = -3 + \lambda$ $x_7 = 16 - 2\lambda$	$x_3 = -30 + 4\lambda$ $x_6 = -19 + 3\lambda$ $x_1 = -8 + \lambda$
F(x*)	$9/2 - 3\lambda/2$	0	$-6 + \lambda$	$-62 + 8\lambda$

ĐỀ CƯƠNG BÀI GIẢNG

Học phần: **CÁC PP TỐI ƯU**		Đơn vị: Bộ môn Toán, Khoa CNTT
Thời gian: Tuần 15 Tiết 43-45 GV giảng: 1, Kiểm tra:2, Tự học :3		Giáo viên: Nguyễn Trọng Toàn Vũ Anh Mỹ
	Ôn tập và kiểm tra	
Các mục		
Mục đích - yêu cầu	- Giới thiệu chương trình ôn tập - Giải đáp thắc mắc	

NỘI DUNG

II. LÝ THUYẾT

- Ôn tập các chương 2,3,4,5
- Giải đáp thắc mắc
- Kiểm tra theo một đề thi mẫu 90 phút

Giáo trình, tài liệu tham khảo

TT	**Tên giáo trình, tài liệu**	**Tình trạng giáo trình, tài liệu**			
	Giáo trình	Có ở thư viện (website)	Giáo viên hoặc khoa có	Đề nghị mua mới	Đề nghị biên soạn
1	Tối ưu hoá, Nguyễn Đức Nghĩa, Nxb GD, 1999	x			
2	Lý thuyết tối ưu hoá, Nguyễn Địch, Nxb ĐHQG Hà nội, 2003		x		
3	Tối ưu hoá, Bùi Minh Trí, Nxb KHKT, 2005		x		
4	Tối ưu hoá ,Trần Vũ Thiệu-Bùi Thế Tâm, Nxb GTVT, 2000	x			
5	Qui hoạch tuyến tính (Tiếng Nga), D.B. Iudin, E.G Golstein, 1963	x			