ODE

Introduction

ⓘ **Definitions and classification**

- ODE: 方程式只有一個獨立變數 $\frac{du(x)}{dx} = f(x)$
- PDE: 方程式中有二個或以上的獨立變數 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = f(x,y)$
- Order: 待解函數最高被微分次冪
- Degree: 待解函數及其導函數 (derivatives) 這兩者中最高的次冪。
- Non-linear: degree > 1
- linear: degree=1
- 在 $L(u(x), x) = f(x)$ 中， L 是一個 linear differential operator，則此方程是

$$\begin{cases} \text{homogeneous}, & \text{if } f(x) = 0, \\ \text{non-homogeneous}, & \text{if } f(x) \neq 0. \end{cases}$$

Initial conditions (I.C.) and boundary conditions (B.C.)

Initial-value problem

在自變數 x 的 x_0 上，給定 $u(x_0)$ 及其導函數的值，這些給定值叫 initial condition (I.C.)

Boundary-value problem

在自變數 x 的某幾個特定值，給定 $u(x)$ 的值，這些給定值叫 boundary condition (B.C.)。

Notice

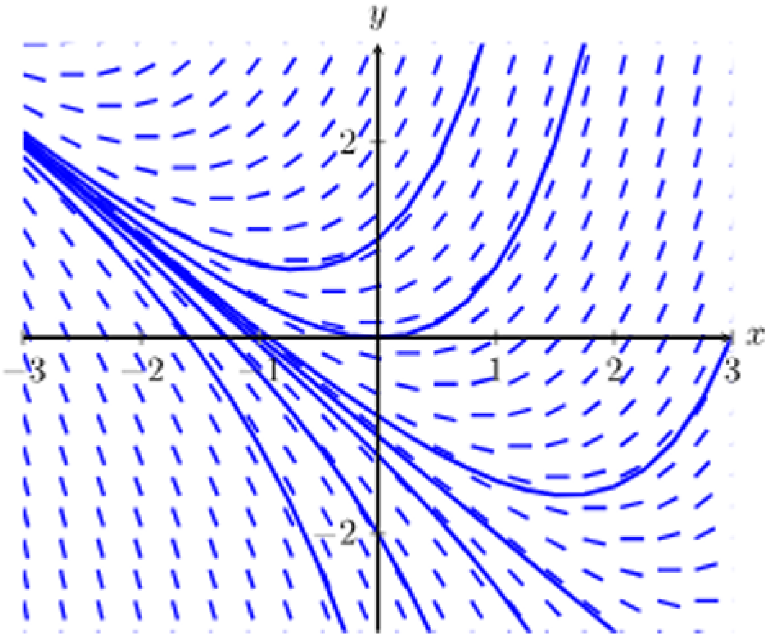
n 階線性 ODE 的解具有 n 個必要的常數，此種解的形式稱為 general solution (一般解)。在給定 I.C. 或 B.C. 後，這些任意的常數可被計算出來，使得解變成一個一般的函數，此種解的形式稱為 specific solution (特定解)。

Direction Field

其實有很多ODE的解析解 (analytical solution)並不存在，若它是 1st-order ODE 的話，我們常用 direction field 來處理，是屬於數值解 (numerical solution) 的一種方法。今考慮

$$\frac{du}{dx} = f(u, x)$$

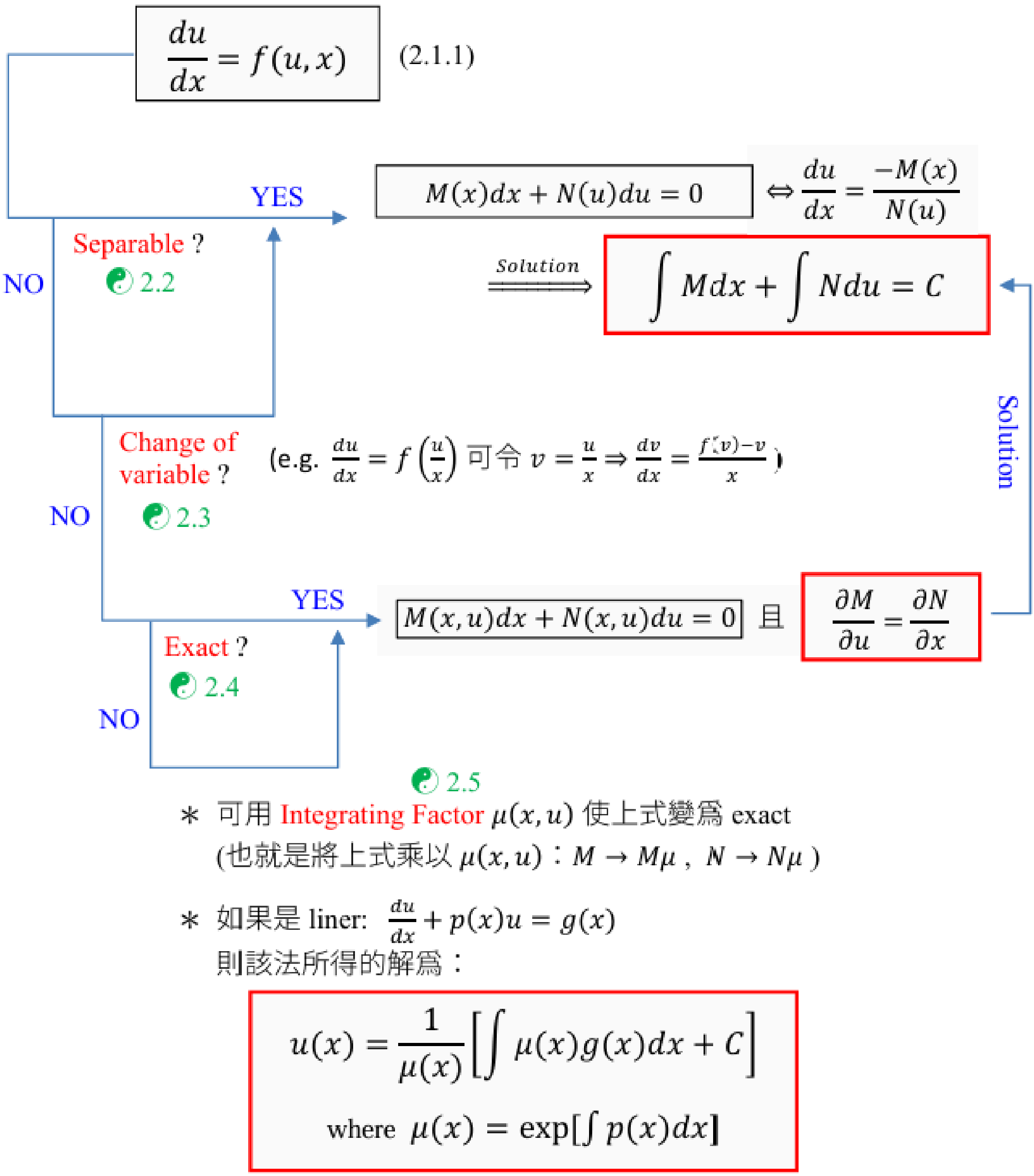
我們可以手工或電腦的方式在笛卡爾平面上的每個點畫出 u 在該點的斜率，稱為 rate function



⚠ **Equating Physical Problems**

寫下一個合理的或正確的 D.E. 來描述一個物理系統，通常比解一個 D.E. 還難。所以學術研究的關鍵通常在 Modeling & Equating (即寫下D.E.)，而不在解 D.E.。所以解 D.E. 應視為如蹲馬步的基本功，像九九乘法表一樣。

1st - order ODE



> **Tip**
>
> 通常先看他是否 separable，沒有就直接算 integrating factor。沒什麼人在乎 exact，除非他特別出一個很醜的函數那你就只能注意一下

Separable equations

將原方程改寫後，若可將具有 u 及 x 的項，分開置於等號的兩邊的 ODE，則該 ODE稱為 separable。若某式可改寫為

$$\frac{du}{dx} = -\frac{M(x)}{N(u)} \Leftrightarrow M(x)dx + N(u)du = 0$$

則經積分可得其解

$$\int M(x)dx + \int N(u)du = C$$

若有 I.C. 或 B.C.: $u(x_0) = u_0$，則上解變為

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{u_0}^{u} N(u)du = C$$

Change of variables

有時方程式乍看並非 separable，但可用變數變換 (change of variable) 使其變為 separable。

$$\frac{du}{dx} = f\left(\frac{u}{x}\right)$$

Example

常見的例子有：$xu\frac{du}{dx} - u^2 = x^2$，當 $x \neq 0$ 時，左右同除 x^2

$$\frac{u}{x}\frac{du}{dx} - \left(\frac{u}{x}\right)^2 = 1$$

令 $v = \frac{u}{x}$

$$v\left(x\frac{dv}{dx} + v\right) - v^2 = 1$$

然後你就會解了，而當 $x \neq 0$ 時，他就等於0

Tip

不知道為什麼滿多時候都是令 $v = \frac{u}{x}$

Exact equations

若一方程式可寫成

$$M(x,u)\,dx + N(x,u)\,du = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{du}{dx} = \frac{-M(x,u)}{N(x,u)}$$

且滿足

$$\frac{\partial M(x,u)}{\partial u} = \frac{\partial N(x,u)}{\partial x}$$

也就是說存在 $\phi(x,u)$ 使得

$$\frac{\partial \phi(x,u)}{\partial x} = M \quad \& \quad \frac{\partial \phi(x,u)}{\partial u} = N$$

即為

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial u}du = Mdx + Ndu = 0$$

當滿足了上述條件，稱此方程式 exact，接著就可以用上述的方法解他。通常解的形式為

$$\phi(x,u) = C \quad \text{or} \quad \int Mdx + \int Ndu = C$$

Example

例如求解： $-\frac{u}{x^2}dx + \frac{1}{x}du = 0$，先檢查此式是否 exact

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-u}{x^2}\right)=\frac{-1}{x^2},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x^2}$$

此式 exact，直接積

$$\phi(x,u)=\int M\,dx=\int\frac{-u}{x^2}\,dx=\frac{u}{x}+h(u)$$

$$\implies \frac{\partial\phi}{\partial u}=\frac{1}{x}+h'(u)=\left(N=\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow h(u)=C_0\Rightarrow\phi(x,u)=\frac{u}{x}+C_0=C$$

其實他就是 $u=ax$

Integrating Factor

若方程式不是 exact，可將該式乘上 integrating factor $\mu(x,u)$ 嘗試使其變為 exact。

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx+\mu(x,y)N(x,y)\,dy=0$$

變成exact後，則

$$\phi_{xy}=(\mu M)_y=(\mu N)_x$$

此式中，M、N 為已知，μ 為待解函數，故可將其展開寫成 μ 的微分方程式：

$$M\mu_y-N\mu_x+(M_y-N_x)\mu=0$$

Tip

滿足的 μ 通常不只一個，但所求得的 $y(x)$ 一定都相同。

一個常見的簡單情形為 $\mu(x,y)=\mu(x)$，則上述的微分方程可被化簡為

$$\mu_x = \frac{M_y - N_x}{N}\mu$$

此時若

$$\frac{M_y - N_x}{N} = J(x)$$

也就是該式僅為 x 的函數時，則該微分方程式可再被化簡為

$$\mu_x = J(x)\mu$$

顯然這式子很好解

$$\mu(x) = \exp\left[\int J(x)\,dx\right] = \exp\left[\int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx\right]$$

Tip

若我們的待解式為 linear ODE

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

我們可以寫出其解為

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)\,dx + C\right] \quad \text{where} \quad \mu(x) = \exp\left[\int p(x)\right.$$

我是覺得沒什麼人會在乎通式，記這個就夠了

Example

已知 $2y' + xy = 2,\ y'(0) = 1$，求 $y(x)$

首先注意到他不是 separable，又 $M_y \neq N_x$ 所以也不是 exact，這時就可以使用 integral factor。由於是 linear ODE，故可用上面的 tips 求解

$$\mu(x) = \exp\left[\frac{x^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow y(x) = \exp\left[\frac{-x^2}{4}\right]\left[\int \exp\left[\frac{x^2}{4}\right] dx + c\right]$$

$$\text{代入 } y(0) = 1 \Rightarrow y(x) = \exp\left[\frac{-x^2}{4}\right]\left[\int_0^x \exp\left[\frac{s^2}{4}\right] ds + 1\right]$$

Bernoulli equation

如果一個 ODE 的形式長以下這樣，我們稱作 Bernoulli equation

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

取 $z = y^{1-n}$，代入上式即可化簡為

$$\frac{dz}{dx} = (n-1)p(x)z + (1-n)q(x)$$

這個作法將原本 non-linear 的 Bernoulli equation 變成是 linear。

Non-linear and non-uniqueness

考慮一般的一階 ODE，在 xy 平面上給定初始條件 $y(x_0) = y_0$，考慮一個以初始點為中心點的矩形區域 $A(x, y)$

$$\alpha < x < \beta, \quad \gamma < y < \epsilon$$

若函數 f 和對 y 的偏導 f_y 在這個矩形區域內皆連續，在這樣的條件

下，該微分方程有唯一解存在於此區域內，且這個解滿足初始條件。須注意此定理反向不成立

Example

考慮 $y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0 \Rightarrow f = y^{1/3} \Rightarrow f_y = \frac{1}{3}y^{-2/3}$，由於 f' 在 IC 上不連續，故其解可能非唯一

其實他很好解，操作後得

$$y = \pm\left[\frac{2}{3}(x+c)\right]^{3/2}$$

代入 IC 後可得 $C = 0 \implies y = \pm\left[\frac{2x}{3}\right]^{3/2}$ 又 $y = 0$ 亦為解，故完整的解為：

$$y(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < x_0) \\ \pm\left[\frac{2}{3}(x+c)\right]^{3/2} & (x_0 \leq x) \end{cases}$$

注意到此時這兩個解都共用同個範圍 $x \geq 0$，因此我們可以任意選擇一個 x_0，使其切分的範圍不同。也就是說，這裡有無窮多個解，滿足同一個 IC。

Info

這個章節想講初始值的連續性很重要，沒啥重點

Iteration method

在一個方程式中，待求函數 (或待求的未知數) 出現在不只一項中，且無法再化簡時，常用此法。

Example

考慮以下方程式

$$e^t + t = 0$$

我們可以將它寫成另個形式

$$t = -e^t$$

首先找一個初始值 t_0 (通常是從畫圖的結果或經驗法則猜)，這裡我們取 $t_0 = -1$，接著開始迭代

$$\begin{aligned} t_0 = -1 \quad &\Rightarrow t_1 = -e^{-1} \approx -0.368 \Rightarrow t_2 = -0.692 \Rightarrow t_3 = -0.692 \\ &\Rightarrow t_9 = -0.565 \Rightarrow t_{10} = -0.568 \end{aligned}$$

到數值變化趨於平穩後，該值即為此方程的近似根

Example

另考慮一個方程式

$$y' = 2x(1+y), \quad y(0) = 0$$

將其寫成易迭代的形式

$$y = \int_0^x 2s(1+y(s))\,ds$$

取 $y_0 = 0$，迭代後你會發現他有一個規律為

$$y_n = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = e^{t^2} - 1$$

Important

- 如果過程中 $y_{n+1} = y_n$，則解即為 $y = y_n$
- 驗證所得是否為解，需直接代入原式。
- 若出現級數和 (如上例)，要注意該級數是否收斂。

Linear 2nd-order ODE

考慮以下方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p_0(x)\frac{du}{dx} + p_1(x)u = g(x) \quad I : a < x < b$$

要解這個 ODE 需要積分兩次，不論過程為何，它的解裡面都會出現兩個積分常數，因此需要兩個條件 (式子) 來定出這兩個常數。通常這兩個條件 (式子) 有兩種形式：

$$\begin{cases} \text{IC:} \quad u(x_0) = r_1, \quad u'(x_0) = r_2, \quad x_0 \in I \\ \text{BC:} \quad u(x_0) = r_3, \quad u(x_1) = r_4, \quad x_0, x_1 \in I \end{cases}$$

而當上述式子滿足以下兩條件

$$\begin{cases} p_0(x), p_1(x) \text{ are continuous in } I \\ g(x) \text{ is sectionally continuous in } I \end{cases}$$

此微分方程式有唯一解

♨ **解二階微分方程**

- 先看是不是 Cauchy-Euler equation
- 找 homogeneous 的解
- 找 u_p，用那些猜答案方法
- 自求多福

Basic

Linear Differential operator L

考慮一 Linear Differential operator $\hat{\mathcal{L}}$

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{d^2}{dx^2} + p_0(x)\frac{d}{dx} + p_1(x)$$

則上例的微分方程式可以被寫成 $\hat{\mathcal{L}}u = g(x)$，且滿足以下關係

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{L}}[0] = 0 \\ \hat{\mathcal{L}}[cu] = c\hat{\mathcal{L}}[u] \\ \hat{\mathcal{L}}[u+v] = \hat{\mathcal{L}}[u] + \mathcal{L}[v] \end{cases}$$

ⓘ **Info**

若 u_1、u_2 是 $\hat{\mathcal{L}}u = 0$ 的兩個解，且

$$W = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{bmatrix} \neq 0$$

則稱 u_1、u_2 是 $\hat{\mathcal{L}}u=0$ 的 basic solution set，或 fundamental set of solutions。

ⓘ **Abel's Theorem**

就 $\hat{\mathcal{L}}u=0$ 而言

$$W'=(u_1u_2'-u_1'u_2)'=u_1u_2''-u_1''u_2$$

帶入原微分方程

$$=u_1(-p_0u_2'-p_1u_2)-(-p_0u_1'-p_1u_1)u_2$$

化簡後 $W'=-p_0W$

$$W(u_1,u_2;x)=C\exp\left(-\int p_0(x)dx\right)$$

General solution (GS)

Homogeneous: $\hat{\mathcal{L}}u=u''+p_0u'+p_1u=0$，其 General solution 為

$$u_h(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$$

其中 u_1、u_2 是 basic solution set，u_h 即為 homogeneous solution。如果你把 IC 代入計算常數時會發現

$$\begin{cases} c_1u_1(x_0)+c_2u_2(x_0)=r_1 \\ c_1u_1'(x_0)+c_2u_2'(x_0)=r_2 \end{cases}$$

而此聯立方程式有解的條件正好就是 $W\neq 0$，而 basic solution set 保證 $W\neq 0$，所以 c_1、c_2 一定有解。(高中克拉瑪)

Non-honogeneous: $\hat{\mathcal{L}}u = u'' + p_0 u' + p_1 u = g(x)$，其 General solution 為

$$u(x) = u_p(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = u_p + u_h$$

其中 u_p 為 $\hat{\mathcal{L}}u = g(x)$ 的 particular solution

Homogeneous ODE with constant coefficients

考慮一典型微分方程(1)

$$u'' + au' + bu = 0$$

其必存在解 $u(x) = e^{mx}$，代入(1)可得 $(m^2 + am + b)e^{mx} = 0$ 此式對任意 x 皆成立故稱 $m^2 + am + b$ 為 characteristic equation。經過一些國中數學，我們可以解得

$$u(x) = e^{m_\pm x}, \quad m_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = a^2 - 4b$$

其 worksian 即為

$$W = \begin{bmatrix} e^{m_+ x} & e^{m_- x} \\ m_+ e^{m_+ x} & m_- e^{m_- x} \end{bmatrix} = (m_- - m_+)e^{(m_+ + m_-)x} = -\sqrt{\Delta}e^{-ax}$$

因此只要 $m_+ \neq m_-$ (即 $\Delta \neq 0$)，也就是特徵方程式無重根，則(1)的 GS 即為

$$u(x) = c_1 e^{m_+ x} + c_2 e^{m_- x}$$

> **Important**
>
> $$\Delta > 0 : u(x) = e^{-\frac{ax}{2}}\left[c_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}x}{2}} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}x}{2}}\right] = e^{-\frac{ax}{2}}\left[A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}x}{2} + B\right.$$
> $$= c_3 e^{-\frac{a}{2}x} \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x + c_4\right)$$

$\Delta < 0 : u(x) = e^{-\frac{ax}{2}} \left[c_1 e^{\frac{\sqrt{-\Delta} x}{2}} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{-\Delta} x}{2}} \right] = e^{-\frac{ax}{2}} \left[A \sin \frac{\sqrt{-\Delta} x}{2} + \right.$
$= c_3 e^{-\frac{a}{2}x} \cos \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x + c_4 \right)$

$\Delta = 0 : u(x) = e^{-\frac{ax}{2}} (c_1 + c_2 x)$

Reduction of order

在這三者之中 $\Delta = 0$ 最為特別，在求解此情況的 general solution 時，我們首先可以算出第一個解 $c_1 e^{-\frac{ax}{2}}$，再來我們另第二個解為 $u(x) = v(x) e^{mx}$ ，代入 (1) 可得

$$(m^2 e^{mx} + ame^{mx} + be^{mx})v + (2me^{mx} + ae^{mx})v' + e^{mx} v'' = 0$$

注意到 v、v' 括號裡的項根據我們前面的推導都為 0，因此 v'' 也必須為 0，得

$$v = cx, \quad u(x) = xe^{-\frac{ax}{2}}$$

以上這解題方法最常見的例子就是 damping oscallation system，由於胡德邦教過我就略過

Nonhomogeneous ODE with constant coefficients

考慮以下方程式(2)

$$u'' + au' + bu = g(x)$$

當 $g(x) \neq 0$ 時，我們先令 $g(x) = 0$ 求出 homogeneous solution，再依 $g(x)$ 的函數形式假設 $u_p(x)$ 的函數形式，代入 (2) 求係數，以下是一些假設法

猜答案

$g(x)$ 為 n 階多項式$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ $(a_n \neq 0)$:

- 特徵方程無零根 $u_p(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$
- 有一個零根 $u_p(x) = x(A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)$
- 有兩零根 $u_p(x) = x^2(A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)$

$g(x) = Ce^{kx}$:

- k 不是特徵方程的根 $u_p(x) = Ae^{kx}$
- k為單根 $u_p(x) = x(Ae^{kx})$
- k為重根 $u_p(x) = x^2(Ae^{kx})$

$g(x) = C\cos kx + D\sin kx$:

- ik 不是特徵方程的根 $u_p(x) = A\cos kx + B\sin kx$
- ik 是特徵方程的根 $u_p(x) = x(A\cos kx + B\sin kx)$

Note

這東西常拿來解 forced damping oscallition，由於胡德邦講很爛這邊再重學一次，考慮以下方程

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + C\frac{dy}{dt} + ky = F(t), \quad F(t) = F_0 \cos \omega t$$

由於我們前面已經求過 homogeneous 的解，這邊直接令 $u_p = D\cos\omega t + E\sin\omega t$ 代入解得 GS 為

$$e^{-\frac{Ct}{2M}}[Ae^{\Omega t}+Be^{-\Omega t}]+\Delta\cos(\omega t-\alpha), \quad \Delta=\frac{F_0}{\sqrt{M^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+}}$$

接著討論以下三種情況，首先是 Resonance, $C=0$:

$$u(t)=G\cos(\omega_0 t-\delta)+\frac{F_0}{M(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t$$

他的特別處在於 $\omega=\omega_0$ 時。注意到這時 $i\omega=i\omega_0$ 為特徵方程的根，因此可以令 $u_p=t(D\cos\omega t+E\sin\omega t)$ 代入原 ODE ，得到解

$$y_p(t)=\frac{F_0}{2M\omega_0}t\sin\omega_0 t$$

Near resonance, $C=0, y'(0)=0, y(0)=0$:

$$y(t)=\frac{F_0}{M(\omega_0^2-\omega^2)}[\cos\omega t-\cos\omega_0 t]$$

若 $\omega\approx\omega_0$ 則
$\frac{\omega+\omega_0}{2}\approx\omega, \frac{\omega_0-\omega}{2}=\epsilon\left(\left|\frac{\epsilon}{\omega_0}\right|\ll 1\right)\Rightarrow y(t)=\frac{2F_0}{M(\omega_0^2-\omega^2)}(\sin\epsilon t)(\sin\omega t)$
震盪幅度會比共振要小一點，可以看做共振是能量轉移和振幅的峰值

Forced oscillations with damping：
我們解出來的完整版 GS 稱為 transient solution，也就是該解會在 $t\to\infty$ 時趨向特解的形式，這時我們稱特解 u_p 為 steady state solution

Cauchy-Euler (C-E) equations of order 2

考慮以下方程式

$$x^2u''+axu'+bu=0$$

我們假設解的形式為 x^m，其特徵方程為

$$m^2+(a-1)m+b=0$$

當 $\Delta \neq 0$ 時，其通解即為

$$u(x)=c_1|x|^{m_+}+c_2|x|^{m_-}$$

如果不幸的 $\Delta=0$ 我們可以用前面講過的 reduction of order，求出此情況的 GS 為

$$u(x)=(c_1+c_2\ln|x|)|x|^m$$

> **Important**
>
> 藉由觀察我們發現原式若取變數變換，令 $z=-x$，則原式長相不變，故解 $u(x)$ 必為偶函數 $u(-x)=u(x)$，但這樣也代表解在 $x=0$ 處可能不可微，所以上列之解不包含原點。

Techniques for general cases

Variation of parameters

若我們已經解出來 $u''+p_0u'+p_1u=g(x)$ 的 $u_h=c_1u_1+c_2u_2$ 則

$$u_p=-u_1\int\frac{u_2g}{W}dx+u_2\int\frac{u_1g}{W}dx$$

W 是 worksian，證明留給看到這裡的你

Change of dependent variables

一樣先考慮 $u''+p_0u'+p_1u=0$ (3)，令 $u(x)=f(x)y(x)$ (4) 其中 $f(x)$ 為選定，$y(x)$ 為待求。代入後得

$$fy'' + (2f' + p_0 f)y' + (f'' + p_0 f' + p_1 f)y = 0$$

要解上式，有以下兩種選擇來進行：

選擇 A：(基本上就是reduction of order)

當已經知道 u_1、而不知第二個解 u_2 時，可選定 $y = u_1$，此時 y 的括號項等於 0 ，而上式變為 y' 的一階微分方程式，就很好解了。

選擇 B：

使 (a)=0，即為

$2f' + p_0 f = 0 \Rightarrow f = \exp\left(-\frac{1}{2}\int p_0 dx\right) \Rightarrow f'' = -\frac{1}{2}p_0' f - \frac{1}{2}p_0 f'$ 代入原式得

$$y'' + I_u y = 0, \quad I_u = \frac{f''}{f} + p_0 \frac{f'}{f} + p_1$$

前者我們稱 (3) 在 $g = 0$ 時的 normal form，後者我們稱 (3) 在 $g = 0$ 時的 invariant。求 normal form 的解再代回去 (4) 就可以找出 u_1、u_2

Change of independent variables

設 $z = h(x)$ ，代入使 $u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}$，然後換一換就跟原本一樣能解了，原解應為

$$u(x) = \hat{u}(z) = \hat{u}(h(x))$$

Higher Order Linear ODE

基本上這邊跟前面都挺像，只是多了一些酷酷的次方，考慮以下方程式(6)

$$\hat{\mathcal{L}}u = g(x) \quad \text{where} \quad \hat{\mathcal{L}} = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)$$

若：

- 在 open interval I 中，$p_1, p_2, \ldots, p_n$ 為連續
- 給定 IC 或 BC 共 n 個獨立式
  則在 I 中 (6) 有唯一解 $u = \phi(x)$

當 (6) 為 homogeneous 時，若：

- 以上之第 1 點成立
- $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 為 basic solution set
  則在 I 中的任何解，皆可表示為 $u_h = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$

當 (6) 為 non-honogeneous 時: $\hat{\mathcal{L}}u = g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ 則其GS為
$u(x) = u_p + u_h$

定理講完了我們來講一些解的形式，基本上跟我們在上面討論過得差不多，只是多了一些酷酷的次方

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + a_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = g(x)$$

Tip

必存在 homogeneous solution $u(x) = e^{mx}$

- 若無重根，則 $u_h = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{m_i x}$
- 若有 s 重根 m_r，則 $u_h = \sum_{i=1}^{n-s} c_i e^{m_i x} + \sum_{j=1}^{s} (d_j x^{j-1}) e^{m_r x}$

Tip

$g(x)$ 為 n 階多項式$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ $(a_n \neq 0)$:

- 特徵方程無零根 $u_p(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$
- 有 p 個零根 $u_p(x) = x^p(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)$

$g(x) = Ce^{kx}$:

- k 不是特徵方程的根 $u_p(x) = Ae^{kx}$
- k為單根 $u_p(x) = x(Ae^{kx})$
- k為p 重根 $u_p(x) = x^p(Ae^{kx})$

$g(x) = C\cos kx + D\sin kx$:

- ik 不是特徵方程的根 $u_p(x) = A\cos kx + B\sin kx$
- ik 是特徵方程的根 $u_p(x) = x^p(A\cos kx + B\sin kx)$

Variation of parameters

設 $\{u_i\}$ 為 (1) 的一組 basic solution set。可得

$$u_p = \sum_{i=1}^{n} f_i u_i$$

f_i 是個變數，因此此式有 n 個自由度，因此允許我們設定 n-1 個式子消去這多餘的n-1 個自由度。以下我們可以用一些微分技巧

$$\implies u_p^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} f_i u_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} u_f f_i^{(1)}$$

注意到我們可以設後面那項為 0，以此類推

$$
\begin{gathered}
u_p^{(2)}=\sum_{i=1}^n f_i u_i^{(2)}+\sum_{i=1}^n u_i^{(1)} f_i^{(1)} \\
\vdots \\
u_p^{(n-1)}=\sum_{i=1}^n f_i u_i^{(n-1)}+\sum_{i=1}^n u_i^{(n-2)} f_i^{(1)} \\
u_p^{(n)}=\sum_{i=1}^n f_i u_i^{(n)}+\sum_{i=1}^n u_i^{(n-1)} f_i^{(1)}
\end{gathered}
$$

在最後一行比較不一樣，我們使 $\sum_{i=1}^n u_i^{(n-1)} f_i^{(1)}=g(x)$而不是 0，這樣這坨屎就變成了一組 n 元一次方程式，國中生也會做。寫成矩陣形式後長這樣

$$
\begin{bmatrix}
u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\
u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \cdots & u_n^{(1)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
f_1^{(1)} \\
f_2^{(1)} \\
\vdots \\
f_n^{(1)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
\vdots \\
g(x)
\end{bmatrix}
$$

故可得

$$
u_p=\sum_{i=1}^n u_i \int f_i^{(1)} d x
$$

注意到這邊又有傻逼 worksian，所以前面一些技巧不要忘記

Series Method

首先複習一下微四教過的東西，考慮 $u''+p_0 u'+p_1 u=0$，若 p_0, p_1 在 x = a 為analytic，則 $x=a$ 是上式的 ordinary point，否則為 singular point

ⓘ Info

定理 若 $x=0$ 是上式的 ordinary point，則該式必有 basic solution set 可表為

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad u_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

其各自的收斂半徑必 $\geq p_0, p_1$ 在 $a=0$ 時之收斂半徑的較小者。

Series solutions of ODE

根據上述定理，可令 $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ，代入 ODE 求解 b_n。這邊我們來算 $u'' + x^2 u = 0$ ，代入可得

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) b_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0 \\ \implies & 2b_2 + 6b_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n+2)(n+1) b_{n+2} + b_{n-2}] x^n = 0 \end{aligned}$$

比較係數可以發現以下關係式

$$\begin{cases} x^0 :\ 2b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 0 \\ x^1 :\ 6b_3 = 0 \Rightarrow b_3 = 0 \\ x^n :\ b_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} b_{n-2}\ (n \geq 2) \\ b_2 = b_6 = b_{10} = \cdots = 0 \\ b_3 = b_7 = b_{11} = \cdots = 0 \end{cases}$$

這時你應該會發現我們可以搞出兩種 b_n，這正好對應一個二階 ODE 應該要有兩種解的情況，首先我們另 $n = 4k-2$ 帶入第三式

$$b_{4k} = -\frac{b_{4k-4}}{4k(4k-1)} \implies \prod_{k=1}^{m} b_k = \prod_{k=1}^{m} \frac{-b_{4k-4}}{4k(4k-1)} \Rightarrow b_{4m} = \frac{(-1)^m b_0}{\prod_{k=1}^{m} 4k(4k-1)}$$

取 $b_0 = 1$ 得 $u_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{4m} x^{4m}$

再來我們令 $n = 4k-1$ 代入，同理可得

$$b_{4m+1} = \frac{(-1)^m b_1}{\prod_{k=1}^{m} 4k(4k-1)}$$

取 $b_1=1$ 得 $u_2(x)=x+\sum_{m=1}^{\infty} b_{4m+1}x^{4m+1}$，故可得

$u_h(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$

$$=c_1\left(1-\frac{x^4}{12}+\frac{x^8}{672}+\cdots\right)+c_2\left(x-\frac{x^5}{20}+\frac{x^9}{1440}+\cdots\right)$$

值得注意的是 $p_0=0,\ p_1=x^2$ 對所有 x 皆收斂，故上面我們求出來的東東適用於所有 x。另外，依據收斂半徑的定義可以求出這兩個解的 $R\to\infty$