Green's function

Step function and delta function

我們想要處理一些極限值的問題時就會需要用到 Delta function，像是極短時間的運動或是質點的物理現象。首先我們定義 Heaviside unit step function

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

注意到我們沒有定義 $H(0)$，但這不是很重要。我

當 $\epsilon \to 0$ ，我們得到

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\, d\xi = H(x)$$

注意到我們這邊偷偷使 $H(0) = 0$

Example

考慮一個高中選修物理情境，算一下衝量，也就是動量的改變會滿足以下關係式

$$\delta p = \int_0^{\delta t} F(t)\, dt = I$$

如果經歷的時間無限小，此 $F(t)$ 即為一種脈衝力，根據我們上面的推導可以寫成以下形式

$$F(t) = I\, \delta(t)$$

此時你積分兩邊就會發現

$$p = I\ H(t)$$

酷吧

我們通常考慮 delta function 應該長成下面這樣

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

但科學家覺得這定義太狗屎，所以他們換成以下形式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$$

這裡的 $f(x)$ 可以是任意的連續函數。接下來我們驗證以下這東西到底能不能用，首先考慮 $f(x)$ 的反函數 $g(x)$，應該能看出有以下關係

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\epsilon(x-\xi)\,dx = \frac{1}{\epsilon}\int_{\xi}^{\xi+\epsilon} f(x)\,dx = \frac{g(\xi+\epsilon)-g(\xi)}{\epsilon}$$

看不出來回去複習一下 $\delta_\epsilon(x)$ 長怎樣，基本上就是把它提出來的概念。有了以上關係式後根據微分定義，我們得到

$$f(\xi) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\epsilon(x-\xi)\,dx = g'(\xi)$$

Tip

你也可以把 $\delta(x)$ 定義成下面這樣，會比較光滑

$$\frac{\epsilon}{\pi(x^2+\epsilon^2)} \quad \text{or} \quad (2\pi\epsilon^2)^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\epsilon^2}\right)$$

Differential equations containing delta functions

考慮一個穩定的簡諧系統，其微分方程應為

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

注意這邊的 x 代表時間。如果我們此時給他加一個脈衝力，此方程變為

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \delta(t)$$

此時發揮你驚人的注意力，此二階微方的解應為

$$y = \begin{cases} A\cos x + B\sin x, & x < 0 \\ C\cos x + D\sin x, & x > 0 \end{cases}$$

但二階微方應只能有兩任意常數，因此我們考慮以下積分

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d^2y}{dx^2}\,dx + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} y(x)\,dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)\,dx \\ y'(\epsilon) - y'(-\epsilon) + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} y(x)\,dx &= 1 \end{aligned}$$

而當 $\epsilon \to 0$ 時，我們得到並定義以下東東

$$\left[\frac{dy}{dx}\right] \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=-\epsilon}^{x=\epsilon} = 1$$

我們稱其為 jump condition

$$[y] = 0, \quad \left[\frac{dy}{dx}\right] = 1 \quad \text{at } x = 0$$

代進去算算常數後就能得到

$$y = \begin{cases} A\cos x + B\sin x, & x < 0 \\ A\cos x + (B+1)\sin x, & x > 0 \end{cases}$$

Inhomogeneous linear second-order ODEs

ⓘ Info

- Initial-value problem: 如果給定的兩個 BCs 都在同個點上

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t) \quad \text{for } t>0 \quad \text{subject to } x=0 \quad \frac{dx}{dt}=0 \quad \text{at } t=$$

- two-pint boundary-value problem: 兩 BCs 在不同點

$$y''(x)+y(x)=f(x) \quad \text{for } a\le x\le b \quad \text{subject to } y(a)=y(b)=$$

Green's function for an initial-value problem

我們想要解一個這樣的 ODE，滿足邊界條件 $y(0)=y'(0)=0$

$$y''(x)+py'(x)+qy(x)=f(x) \quad \text{for } x\ge 0$$

使用 Green's function $G(x,\xi)$，方程式改為

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+p\frac{\partial G}{\partial x}+qG=\delta(x-\xi)$$

且滿足以下邊界條件

$$G(0,\xi)=\frac{\partial G}{\partial x}(0,\xi)=0$$

ⓘ Info

須注意

- $G(x,\xi)$ 在 $x \geq 0$ 和 $\xi \geq 0$ 有定義
- $G(x,\xi)$ 滿足原方程的各種條件

若 $G(x,\xi)$ 可被求出，則上述微分方程的解為

$$y(x) = \int_0^\infty G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

自行驗證，我懶得打。接下來我們用跟上一節一樣的方法，兩邊積分消掉沒用的，得到 jump condition

$$\left[\frac{\partial G}{\partial x}\right] \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{x=\xi-\epsilon}^{x=\xi+\epsilon} = 1, \quad [G] = 0, \quad \text{at } x = \xi$$

再來先別急著代，利用二階線性微分方程的性質，發現 $G(x,\xi)$ 可以被寫成以下形式

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A(\xi)y_1(x) + B(\xi)y_2(x), & 0 \leq x < \xi \\ C(\xi)y_1(x) + D(\xi)y_2(x), & x > \xi \end{cases}$$

接著代入 boundary condition

$$\begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\xi) \\ B(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意到左邊是 Worksian $W(0)$，在這裡不為 0。因此唯一解只有 $A(\xi) = B(\xi) = 0$。再來我們討論 jump condition

$$\begin{bmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(\xi) \\ D(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解為

$$\begin{bmatrix} C(\xi) \\ D(\xi) \end{bmatrix} = \frac{1}{W(\xi)} \begin{bmatrix} y_2'(\xi) & -y_1(\xi) \\ -y_2'(\xi) & y_1(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_2(\xi)/W(\xi) \\ y_1(\xi)/W(\xi) \end{bmatrix}$$

而 Green's function 的解即為

$$G(x,\xi)=\begin{cases}0, & 0\le x\le \xi\\ \frac{1}{W(\xi)}[y_1(\xi)y_2(x)-y_1(x)y_2(\xi)], & x\ge \xi\end{cases}$$

Green's function for an boundary-value problem

我們想要解個 ODE，對於 $a\le x\le b$ 他滿足以下的邊界條件

$$Ly=f,\quad \begin{aligned}\alpha_1 y'(a)+\alpha_2 y(a)=0\\ \beta_1 y'(b)+\beta_2 y(b)=0\end{aligned}$$

跟上面一樣的套路，會出現這三個式子

$$\begin{gathered}LG=\delta(x-\xi)\\ \alpha_1\frac{\partial G}{\partial x}(a,\xi)+\alpha_2 G(a,\xi)=0\\ \beta_1\frac{\partial G}{\partial x}(b,\xi)+\beta_2 G(b,\xi)=0\end{gathered}$$

接著，我們考慮一解 $y_a(x)$，其滿足左邊界條件。同理另考慮一解 $y_b(x)$ 滿足又邊界條件，此時格林函數可以被寫成以下形式

$$G(x,\xi)=\begin{cases}A(\xi)y_a(x), & a\le x\le \xi\\ \\ B(\xi)y_b(x), & \xi\le x\le b\end{cases}$$

接著代入 jump condition $[G]=0$ 和 $[\partial G/\partial x]=1$ ，解 AB

$$\begin{bmatrix}y_a(\xi) & y_b(\xi)\\ y_a'(\xi) & y_b'(\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-A(\xi)\\ B(\xi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

過程

$$\begin{bmatrix}-A(\xi)\\ B(\xi)\end{bmatrix}=\frac{1}{W(\xi)}\begin{bmatrix}y_b(\xi) & -y_a(\xi)\\ -y_b'(\xi) & y_a'(\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y_b(\xi)/W(\xi)\\ y_a'(\xi)/W(\xi)\end{bmatrix}$$

得到 Green's function 的形式為

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{W(\xi)}[y_a(x)y_b(\xi)], & a \le x \le \xi \\ \frac{1}{W(\xi)}[y_a(\xi)y_b(x)], & \xi \le x \le b \end{cases}$$

Important

我這邊沒打範例，反正就照抄上面的形式應該都能解