PDE

Introduction

A partial differential equation is any equation of the form

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots, x, y\right) = 0$$

決定 order、linearity 以及解的表示形式的規則都跟常微分方程差不多，我就不寫了

Physical example

Laplace's (or Poisson's) equation

Gravity

根據國中的物理知識，我們有

$$g = -\nabla \Phi \quad \nabla \cdot g = -4\pi G \rho$$

- Φ 為重力位能函數

合併兩式，得到

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

需注意的是，在質點外部 ($\rho = 0$) 時，$\nabla^2 \Phi = 0$

☰ **Electric field**

再根據一些高中知識，我們有

$$E = -\nabla\Phi \quad \nabla \cdot E = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

合併後得到

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Diffusion equation

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

- Q is the amount per unit volume
- $\mathbf{F}$ is the flux perunit area

把這式子兩邊積分會更直觀一些

$$\frac{d}{dt}\int_V Q\,dV = \int_V \frac{\partial Q}{\partial t}\,dV = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = -\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

通常來講，flux 會遵循一定的規則，像是沿著 Q 的梯度擴散(與其成正比)

$$\mathbf{F} = -\lambda\nabla Q$$

於是上式就變成

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda\nabla^2 Q$$

注意到這有 laplace's equation 那感覺

Wave equation

原始形式長這樣，可以發現這跟牛頓第二運動定律有點神似

$$(\rho\delta s)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \delta F_y \approx \frac{\partial F_y}{\partial x}\delta x$$

- ρ 為線密度
- F_y 是 y 方向上的張力
- δs 是繩上的一小段距離
- $\delta s \approx \delta x$

現在考慮

$$F_y = T\sin\theta \approx T\tan\theta \approx T\frac{dy}{dx}$$

合併上述式子和給定條件，並且引入 $c = \sqrt{T/\rho}$ ，得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

注意到 c 其實就是波速

Maxwell equation

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\
&\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\
&\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\
&\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0
\end{aligned}$$

上面式子湊一湊就能得到光速了

Other 2nd-order linear PDEs

Schrodinger's equation

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V(\mathbf{r})\psi$$

Helmholtz equation

$$\nabla^2u+k^2u=0$$

Klein-Gordon equation (wtf is this shit)

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2(\nabla^2u-m^2u)$$

nonlinear PDEs

Burger's equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\lambda\nabla^2u$$

Nonlinear Schrodinger equation

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\nabla^2\psi-|\psi|^2\psi$$

Separation of variables

diffusion equation

考慮該微分方程的解可被分開，也就是

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

代入 PDE 裡

$$X(x)T'(t) = \lambda X''(x)T(t) \implies \frac{T'(t)}{\lambda T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

想一下普化二教的，設兩邊會等於一個常數 $-k^2$ (這裡的負號只是為了求方便)

$$\begin{aligned} T' + \lambda k^2 T = 0 \\ X'' + k^2 X = 0 \end{aligned}$$

這時我們成功把一個 PDE 轉變成兩個 ODE (比較好解)

$$\begin{aligned} T &= A\exp(-\lambda k^2 t) \\ X &= B\sin(kx) + C\cos(kx) \end{aligned}$$

引入邊界條件

> ⓘ **Info**
>
> 這裡補充一下不同條件的名字：
>
> - 給定 u 的值 (Dirichlet boundary condition)
> - 給定 $\partial u/\partial x$ 的值 (Neumann boundary condition)

在 $x = 0, L$ 時 $\partial u/\partial x = 0$ ，我們就可以把 X 的 $\sin$ 消掉，然後也能求出 k ，所以解即為

$$u = A\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left(\frac{n^2\pi^2\lambda t}{L^2}\right)$$

再想一下普化二教的，我們可以藉由疊加構造出 general solution

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\lambda t}{L^2}\right)$$

以上是邊界都在有限長度的情況，若有一端為無限長，解變為

$$u=\int_0^\infty A(k)\cos(kx)\exp(-\lambda k^2 t)\;dk$$

因為此時 $k\neq n\pi/L$ 所以我們要考慮所有可能的 k，可以發現這是一種傅立葉積分

> ⚠ **Warning**
>
> 注意我們以上做的分離變數法以及將解合併的行為，並不適用於所有情況，因此在求解時要特別小心