Autore : Tobia Vendrame
Anno accademico : 2019/20
Corso : FAMP/CAMP

Questo documento è stato creato in preparazione all'esame di FAMP/CAMP, esso non è pensato per sostituire i materiale dato dai docenti, ma crea una sintesi di veloce consultazione per i temi di notevole importanza del corso.

Saper distinguere la curva dal suo sostegno

CURVA

Una curva in $\mathbb{R}^n$ è una funzione CONTINUA a valori in $\mathbb{R}^n$ definita su un intervallo di $\mathbb{R}$: $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ con $f_1, f_2, \dots, f_n$ funzioni continue.

ES: $f(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ è una curva.

! Una curva è UNA FUNZIONE, quindi NON è un insieme di punti

DEF. Sia $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva.
Il SOSTEGNO di f è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ definito da:

$$\underbrace{\{ f(t) : t \in I \}} = \{ (f_1(t), \dots, f_n(t)) : t \in I \}$$

Si tratta dell'immagine di I tramite f

ES. Si lancia il pallone:
① CURVA: $t \longmapsto$ posizione del pallone
② Sostegno della curva: la traiettoria percorsa dal pallone

Lunghezza di una curva

DEF. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si dice che f è "rettificabile" se è finito l'estremo superiore delle somme

$\|f(t_1)-f(a)\| + \dots + \|f(b)-f(t_n)\|$ al variare

delle suddivisioni $a=t_0<t_1<\dots<t_n<b=t_{n+1}$. In tal caso tale estremo superiore si chiama la LUNGHEZZA della curva f.

TEOREMA. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ cioè f derivabile e f' continua. Allora f è rettificabile e

$$\text{Lungh}(f) = \int_a^b \|f'(t)\|\,dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{(f_1'(t))^2 + \dots + (f_n'(t))^2}\,dt$$

Calcolo in coordinate polari

ESEMPIO. Lunghezza di curve in coordinate polari

$f(t) = (\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t)$ $\quad \rho : [a,b] \to [0, +\infty[$

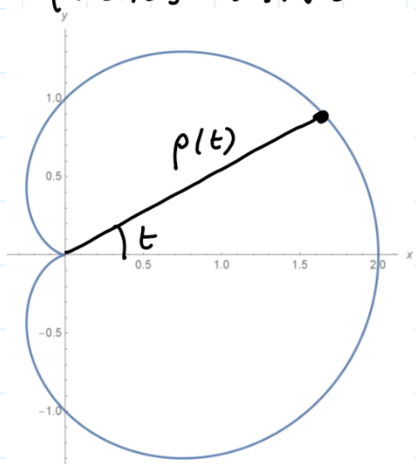
Lungh ($\rho \in \mathcal{C}^1$)

$$\int_a^b \|f'(t)\|\, dt .$$

$$f'(t) = (\rho'(t)\cos t - \rho(t)\sin t,$$
$$\rho'(t)\sin t + \rho(t)\cos t)$$

$$\|f'(t)\|^2 = \rho^2(t) + \rho'^2(t)$$

$$\boxed{\text{Lungh}(f) = \int_a^b \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)}\, dt}$$



Cardioide $\rho(t) = 1 + \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$

Utilizzare la derivata di una curva per approssimare i valori della funzione e individuare la retta tangente alla curva in un valore del parametro

④ Sia $f : [0,5] \to \mathbb{R}^2$ derivabile. Sappiamo che $f(3) = (1,2)$ e $f'(3) = (-3,4)$. Usando la definizione di derivata. Determinare un valore approssimato per la seconda componente di $f(3,1)$.

$\Rightarrow$ DEFINIZIONE $\rightarrow$ $\boxed{\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)}$ $\quad \Rightarrow f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + R(t)$

con $\lim_{t \to t_0} \frac{R(t)}{t - t_0} =$

$\Rightarrow f(3,1) = f(3) + f'(3)\cdot(0.1) + R(t)$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (0.1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \boxed{(0.7, \boxed{2.4})}$$

Saper calcolare la lunghezza d'arco s usando la derivata della parametrizzazione e riparametrizzare la curva con la lunghezza d'arco

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n \text{, curva.} \\ {[c,d]} \arrow[u, "\varphi \text{ continua}"] \arrow[ur, bend right, "f\circ\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$f \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ è curva.

Se fi è continua e biettiva, allora la lunghezza di f è uguale alla composta di (f o fi)

la lunghezza d'arco".

ESEMPIO. $(R\cos t, R\sin t) = f(t) : t \in [0, 2\pi]$.

Parametrizzare f con la lunghezza d'arco

$$s = \lambda(t) = \int_0^t \|f'(u)\|\,du = \int_0^t R\,du = \underset{[0,2\pi R]}{Rt}$$

$t \in [0, 2\pi]$

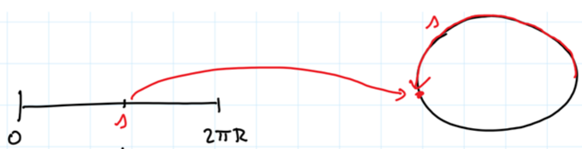
Poniamo $s = Rt$ cioè $t = \frac{s}{R}$

la par. di f con la lunghezza d'arco è

$$\left(R\cos\frac{s}{R},\ R\sin\frac{s}{R}\right) : s \in [0, 2\pi R]$$

33

4 Pagina 2



$$s(t) = \int_a^t \|f'(u)\|\,du \qquad \text{[Regola Mnemonica].}$$

$s'(t) = \|f'(t)\|$: si scrive $\boxed{ds = \|f'(t)\|\,dt}$ (regola mnemonica).

Definizione di punto interno

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme reale e sia $x_0 \in E$ un punto appartenente all'insieme. Diciamo che x_0 è un *punto interno* ad E se esiste almeno un intorno completo di x_0 tutto contenuto in E.

In simboli:

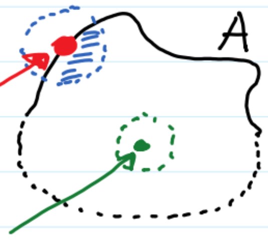
$$x_0 \in E \text{ è un punto interno di } E$$

$$\text{se } \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } B(x_0, \varepsilon) \subset E$$

Definizione insieme aperto e chiuso

DEF. $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A è aperto se e solo se $\forall p \in A$ esiste $B(p, r[\subseteq A$.

Nell'esempio A non è aperto: ogni disco centrato in • contiene punti non appartenenti ad A. Invece A è intorno di •



Saper tracciare indicativamente una curva espressa in coordinate polari e calcolarne la lunghezza

⑤ Sia $L(x)$ la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da $\rho(\theta) = e^{-3\theta}$ al variare di $\theta \in [0, x]$. Calcolare $\lim_{x \to +\infty} L(x)$

$\rho'(\theta) = -3e^{-3\theta}$

$$\Rightarrow L(x) = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2}\, d\theta = \int_0^x \sqrt{e^{-6\theta} + 9e^{-6\theta}}\, d\theta = \int_0^x \sqrt{10 e^{-6\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_0^x \sqrt{10}\, e^{-3\theta}\, d\theta = \sqrt{10} \int_0^x e^{-3\theta}\, d\theta = \sqrt{10} \cdot \left[-\frac{1}{3} e^{-3\theta}\right]_0^x = \sqrt{10}\left[-\frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{3}\left(1 - e^{-3x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} L(x) = \frac{\sqrt{10}}{3}(1 - 0) \approx 1.05$$

Utilizzare la definizione di integrale curvilineo di una funzione a valori reali per calcolare masse di una curva con densità asssegnata e baricentrio di una curva usando la parametrizzazione

Prendendo mu come una densità e suddividendo la poligonale in intervalli abbastanza piccoli il peso è dato da :

$$\boxed{\int_a^b \mu(f(t))\,\|f'(t)\|\,dt}$$

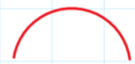
$$\boxed{\frac{1}{\text{Lungh.}\,\gamma} \int_\gamma x\, ds}$$

ESERCIZIO. Filo $f(t)=(R\cos t,\ R\sin t)$ $t\in[0,\pi]$

Densità

$\mu(x,y)=x^2 y$

Massa dell'arco di cerchio?



$$\text{MASSA} = \int_f x^2 y\, ds = \int_0^\pi (R\cos t)^2 (R\sin t) \underbrace{\|f'(t)\|}_{R}\, dt$$

$$= \int_0^\pi R^4 \cos^2 t \sin t\, dt = R^4 \int_0^\pi \cos^2 t \sin t\, dt$$

$$= R^4 \int_0^\pi \frac{d}{dt}\left(-\frac{\cos^3 t}{3}\right) dt = R^4 \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= R^4\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right] = \frac{2R^4}{3}$$

ESEMPIO. Semicerchio $f(t)=(R\cos t,\ R\sin t)$ $t\in[0,\pi]$.

$(x_1(t),\ x_2(t))$

$$\int_f x_1\, ds = \int_0^\pi (R\cos t)\|f'(t)\|\, dt = R^2\int_0^\pi \cos t\, dt = 0$$

$$\int_f x_2\, ds = \int_0^\pi (R\sin t)\|f'(t)\|\, dt = R^2\int_0^\pi \sin t\, dt$$

$$= R^2\left[-\cos t\right]_0^\pi = 2R^2$$

Baricentro: $\frac{1}{\text{Lung}(f)}(0,\ 2R^2) = \frac{1}{\pi R}(0,\ 2R^2) = \left(0,\ \frac{2}{\pi}R\right)$

Definizione di funzione continua in un punto

Tenendo a mente le definizioni di limite sinistro e destro, possiamo esprimere la condizione (●) in una forma del tutto equivalente:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

A parole, una funzione è continua in un punto di accumulazione se:

- i due limiti sinistro e destro esistono finiti ed hanno lo stesso valore;

- il comune valore dei due limiti sinistro e destro coincide con la valutazione della funzione nel punto.

Saper calcolare i limiti di funzioni di più variabili analizzando la funzione su opportune restrizioni ed eventualmente provandone l'esistenza attraverso opportune maggiorazioni in coordinate cartesiane o polari

① Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2-y^2}{x^2+y^2}$

↳ $y = mx \Rightarrow \frac{4x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} \rhd \frac{(4-m^2)}{(1+m^2)} \Rightarrow$ dipende da m $\Rightarrow$ NON ESISTE

Alcune tecniche di calcolo dei limiti.

1) Th. dei carabinieri:

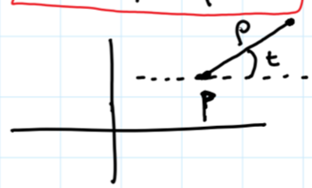
$$|f(x) - l| \le h(x) \qquad \lim_{x\to p} h(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to p} f(x) = l.$$

2) Passaggio in coordinate polari ($n=2$).

$p = (p_1, p_2)$. Si pone $\boxed{\begin{cases} x = p_1 + \rho\cos t \\ y = p_2 + \rho\sin t \end{cases}}$ $\quad \rho>0$, $t\in[0,2\pi]$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$



$$f(\rho\cos t, \rho\sin t) = \frac{\rho^2\cos t\sin t}{\rho^2\cos^2 t + \rho^2\sin^2 t} = \cos t\sin t.$$

$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos t, \rho\sin t) = \cos t\sin t$ dipende da t: il limite non esiste.

Saper calcolare la derivata direzionale di funzioni usando la definizione o, quando è il caso, la formula per funzioni di classe C^1

⑥ Calcolare se esiste la derivata direzionale di $f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}$ $(x,y)\neq(0,0)$, 0 se $(x,y)=(0,0)$ in $(0,0)$ rispetto al vettore $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\boxed{\text{DEF} \rightarrow \partial_{\vec{u}} f(p)=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h\vec{u})-f(p)}{h}}$$

curity settings

In $(0,0)$ devo applicare la definizione $\Rightarrow \partial_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(hu_1,hu_2)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3u_1^3}{h^3u_1^2+h^3u_2^2}$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\Big/\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)=\frac{2\sqrt{2}}{8}\approx 0.35$$

Individuare lo spazio tangente ad un grafico di funzioni di sue variabili, utilizzandone l'equazione per approssimare i valori della funzione attorno al punto considerato.

⑦ $f(x,y)=x^2+6xy-5y^2$. Determinare ω affinché $(1,2,\omega)\in$ al piano tangente al grafico in $(0,1,f(0,1))$

$\Rightarrow z=-5+6(x-0)+(-10)(y-1)$ $\Rightarrow \omega=5+6\cdot 1-10\cdot 2$

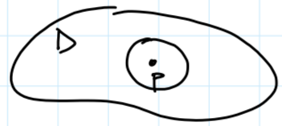
$=-5+6x-10y+10$ $=-9$

$$\boxed{\begin{aligned} &z-f(p)=\partial_{x_1} f(p)(x_1-p_1)+\partial_{x_2} f(p)(x_2-p_2)\\ &z=f(p)+\nabla f(p)\cdot(x-p) \qquad x=(x_1,x_2)\end{aligned}}$$

Definizione e calcolo delle derivate direzionali usando la definizione

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$p \in \mathring{D}$



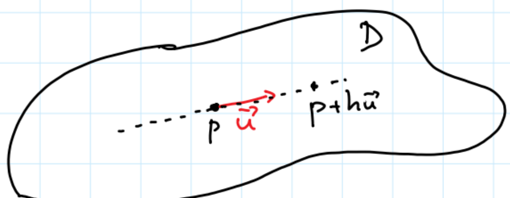
$\mathring{D}$ = il più grande aperto contenuto in D.

$p \in \mathring{D} \iff \exists\, r > 0 \quad B(p, r[\subseteq D$.

$\vec{u} \in \mathbb{R}^n \quad \|\vec{u}\| = 1$.

DEF. La **derivata direzionale** di f in p lungo $\vec{u}$ è (se esiste finito)

$$\begin{array}{l} D_{\vec{u}} f(p) \\ \partial_{\vec{u}} f(p) \end{array} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h\vec{u}) - f(p)}{h}$$



OSS : Posto $g(t) = f(p + t\vec{u})$

$$D_{\vec{u}} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0)$$

Le derivate direzionali sono delle derivate.

ESEMPIO. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Sia $\vec{u} = (u_1, u_2) \quad \|\vec{u}\| = 1 \quad (u_1^2 + u_2^2 = 1)$

Calcoliamo, se esiste, $\partial_{\vec{u}} f(0,0)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h\vec{u}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(hu_1, hu_2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{(h^2 u_1^2)(hu_2)}{h^4 u_1^4 + h^2 u_2^2} = \lim_{h \to 0} \frac{u_1^2 u_2}{h^2 u_1^4 + u_2^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } u_2 = 0 \\ \frac{u_1^2}{u_2} & \text{se } u_2 \neq 0 \end{cases}$$

In questo esempio f NON ha limite in $(0,0)$

Calcolare le derivate parziali usando la definizione o derivando (quando possibile) rispetto alle singole variabili

CASO PARTICOLARE: le derivate parziali.

Si indica

$$\partial_{x_i} f(P) = D_{\vec{e}_i} f(P) \quad , \text{ dove}$$

$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$

Si tratta della derivata in p_i di

$$x \longmapsto f(p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, x, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

Infatti $(n=2)$

$$\partial_{x_1} f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + t\vec{e}_1) - f(p)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1 + t, p_2) - f(p_1, p_2)}{t}$$

$$\underset{x = p_1 + t}{=} \lim_{x \to p_1} \frac{f(x, p_2) - f(p_1, p_2)}{x - p_1}$$

ES. $f(x,y) = x^2 y + x \sin 3y$

$$\partial_x f(x,y) = 2xy + \sin 3y \; ; \; \partial_y f(x,y) = x^2 + x(\cos 3y) 3 .$$

Riconoscere una funzione C^1 e calcolarne le derivate direzionali usando la formula del gradiente: saper individuare direzione di massima crescita, massima discesa.

La funzione è C^1 se esiste la sua derivata prima è continua

① Si supponga che la temperatura in un punto (x,y,z) dello spazio sia data da $T(x,y,z) = \dfrac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$. Nel punto $(1,1,-2)$

$1 + 1 + 2 + 12$

$\partial_x T(x,y,z) = \dfrac{-80 \cdot 2x}{D^2}$

$\partial_y T(x,y,z) = \dfrac{-80 \cdot 4y}{D^2}$

$\partial_z T(x,y,z) = \dfrac{-80 \cdot 6z}{D^2}$

$\Rightarrow$ Direzione max crescita $\Rightarrow \nabla(1,1,-2) = (1,-2,6)$

$\hookrightarrow$ Massima velocità di variazione $\Rightarrow \|\nabla(1,1,-2)\| = \sqrt{\left(\frac{160}{16^2}\right)^2 + \left(\frac{320}{256}\right)^2 + \left(\frac{960}{256}\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{25 + 100 + 900}{64}} = \sqrt{\frac{1025}{8^2}} = 4.00195$

Definizione di funzione differenziabile

DEF. Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, p interno a D.
Esista $\nabla f(p)$. Si dice che f è differenziabile in p se

$$f(x) = \underbrace{f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p)} + R(x) \quad \text{con} \quad \frac{R(x)}{\|x-p\|} \xrightarrow[x \to p]{} 0$$

77

5 Pagina 3

$z = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p)$ è il piano tangente.

Significato: f differenziabile in $p \Longleftrightarrow$ la funzione
$x \longmapsto f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p)$
approssima bene f attorno a p.

RIASSUNTO:

$$f \text{ è } \mathcal{C}^1$$
$$\Downarrow$$
$$f \text{ differenziabile}$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$f \text{ continua} \qquad D_{\vec{u}} f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{u}$$

Interpretazione del gradiente per la massima/minima pendenza

Interpretazione del gradiente
lunedì 10 ottobre 2016 22:24

$$D_{\vec{u}} f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{u} \quad (f \in \mathcal{C}^1)$$

La direzione e il verso di MASSIMA PENDENZA.

Sia $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ attorno a $p \in \mathring{D}$ e $\nabla f(p) \neq 0$.

$\text{MAX}\{D_{\vec{u}} f(p) : \|\vec{u}\| = 1\}$ raggiunto per $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$;

$\text{MIN}\{D_{\vec{u}} f(p) : \|\vec{u}\| = 1\}$ raggiunto per $\vec{u} = -\dfrac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$.

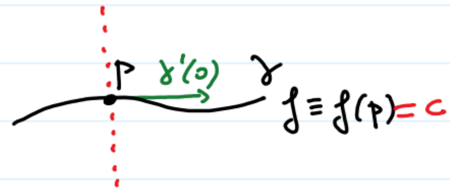
Gradiente ortogonale alle sue curve di livello

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ l'insieme di livello c di f

è $\{x \in D : f(x) = c\}$ $\qquad \boxed{f(p) = c}$

Supponiamo che f sia $\mathcal{C}^1$ e attorno a $p \in D$ l'insieme di livello $f(p)$ sia il sostegno di una curva $\gamma :]-\delta, \delta[\longrightarrow D$

$\gamma(0) = p$



Allora $\boxed{\nabla f(p) \perp \gamma'(0)}$

Dim. $\quad \boxed{f(\gamma(t)) = c} \quad \forall t \in]-\delta, \delta[\qquad \gamma(0) = p.$

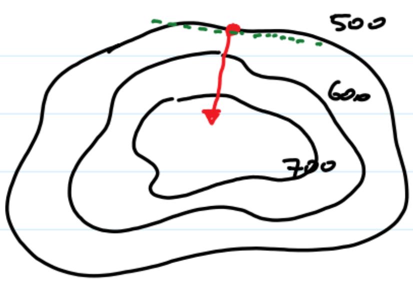
$t \longmapsto f(\gamma(t)) \equiv c$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}(f(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \quad \forall t$

scalare

Per $t = 0$: $\quad \nabla f(\underbrace{\gamma(0)}_{p}) \cdot \gamma'(0) = 0 \Rightarrow \gamma'(0) \perp \nabla f(p)$ #

ES



Regola della catena

ES. $r(t) = (\cos t, t^3)$ $\qquad f(x,y) = x^2 + y^2$

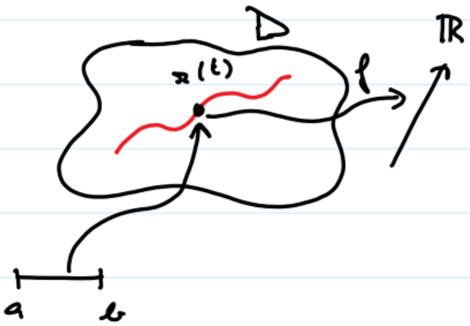
$(f \circ r)(t) = f(r(t)) = f(\cos t, t^3) = (\cos t)^2 + (t^3)^2$

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ $(\partial_{x_i} f \in \mathcal{C}(D))$

aperto

$r : [a,b] \longrightarrow D$ curva $\mathcal{C}^1$

$r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$



$$\frac{d}{dt}(f \circ r)(t) = \underbrace{\partial_{x_1} f(r(t))\, r_1'(t)} + \dots + \underbrace{\partial_{x_n} f(r(t))\, r_n'(t)}$$

$$= \nabla f(r(t)) \bullet r'(t)$$

prodotto scalare

NB. $\frac{d}{dt}(f \circ r)(t)$: derivata di $t \mapsto f(r(t))$

$\partial_{x_1} f(r(t))$: $\partial_{x_1} f$ calcolata in $r_1(t)$

① $\partial_{x_i} f(x_1, \dots, x_n)$

② Valutarla in $r(t)$

③ Moltiplicare ciascuna per $r_i'(t)$.

Determinare la matrice Hessiana, usare le derivate seconde per stimare l'errore nella approssimazione con il piano tangente

Matrice hessiana di f è

$$Hess\, f(x) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1 x_1} f(x), & \dots & \partial^2_{x_1 x_n} f(x) \\ \partial^2_{x_2 x_1} f(x) & \dots & \partial^2_{x_2 x_n} f(x) \\ \vdots & & \\ \partial^2_{x_n x_1} f(x) & \dots & \partial^2_{x_n x_n} f(x) \end{pmatrix}$$

Riga i colonna j: $\partial^2_{x_i x_j} f(x)$.

Calcolare l'integrale curvilineo di un campo vettoriale

Un campo vettoriale su uno spazio euclideo è una costruzione del calcolo vettoriale che associa a ogni punto della regione un vettore dello spazio stesso.

ESEMPIO. $\vec{F}(x,y) = (\cos x, e^{xy})$

$\alpha(t) = (t^2, 2t) \qquad t \in [0,1]$

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot d\alpha = \int_0^1 \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ e^{t^2(2t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix} dt$$

$$\parallel$$

$$\int_\alpha \cos x\, dx + e^{xy}\, dy = \int_0^1 \cos(t^2)(t^2)' + e^{t^2(2t)}(2t)'\, dt$$

Sapere cos'è un campo conservativo

Un campo si dice conservativo se esiste U: D →R di classe C^1 t.c :

$$\boxed{\nabla U = \vec{F}}$$

una primitiva di $\vec{F}$

Cercare $U : \nabla U = \vec{F}$ significa risolvere

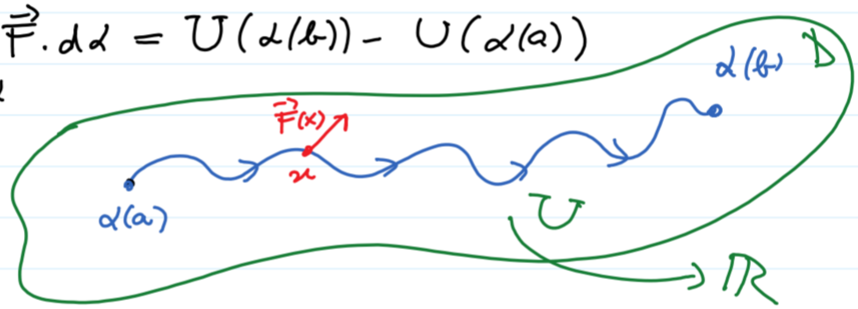
$$\begin{cases} \partial_{x_1} U = F_1 \\ \vdots \\ \partial_{x_n} U = F_n \end{cases}$$

Teorema fondamentale del calcolo di campi conservativi

TEOREMA FONDAMENTALE del CALCOLO per i CAMPI CONSERVATIVI.

Sia $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ conservativo, U primitiva di $\vec{F}$. Allora, se $\alpha : [a,b] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} D$

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot d\alpha = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$$



Dim. $u(t) = U(\alpha(t))$: $[a,b] \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{U} \mathbb{R}$, $U \circ \alpha$

$$U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)) = u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t)\, dt$$

$$u'(t) = \nabla U(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)$$

$$U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)) = \int_a^b \nabla U(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

$$= \int_\alpha \vec{F} \cdot d\alpha \qquad \#$$

Riconoscere se un campo è irrotazionale e sapere in quali condizioni ciò implica che il campo sia conservativo

DEF. Sia $\vec{F}: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ campo di classe $\mathcal{C}^1$.
Si dice che $\vec{F}$ è IRROTAZIONALE se

$$\vec{F} = (F_1, .., F_n) \qquad \boxed{\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_j} F_i} \qquad \forall i, j.$$

Abbiamo quindi provato che

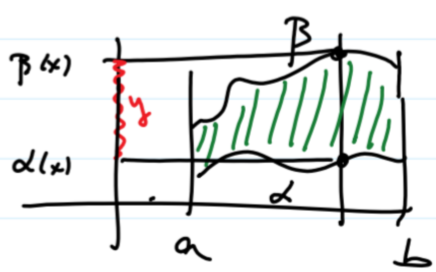
$$\boxed{\vec{F} \in \mathcal{C}^1 + \text{CONSERVATIVO} \Rightarrow \vec{F} \text{ è IRROTAZIONALE}}$$

Ma non è vero viceversa, bisogna valutare entrambe le condizioni!

Distinguere se un dominio è semplice rispetto ad una direzione e saperlo descrivere in quanto tale

D è semplice rispetto a x se esistono $a < b$,
$\alpha, \beta: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$ e

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

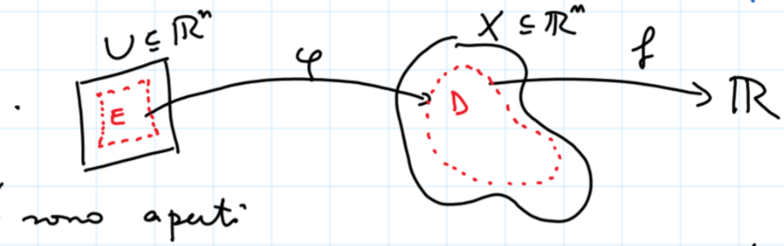


In tal caso

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \underbrace{\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy}_{\text{Funzione di } x}\,dx$$

Saper calcolare un integrale doppio con un campo di variabile, in particolare tramite le coordinate polari o cambi di coordinate lineari.

TEOREMA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILE ($n=2$).



- U, X sono aperti
- φ di classe $\mathcal{C}^1$: $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1$
- φ sia biiettiva
- $\det \varphi'(u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in U$ ($\Rightarrow \varphi^{-1}$ è $\mathcal{C}^1$)

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile.

Allora

$$\boxed{\forall D \subseteq X} \qquad \int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_E f(\varphi(u,v))\underbrace{\left|\det \varphi'(u,v)\right|}\,du\,dv$$

dove $E = \varphi^{-1}(D) = \{(u,v) \in U : \varphi(u,v) \in D\}$.
$= \{(u,v) \in U \ (x(u,v), y(u,v)) \in D\}$.
(cioè $\varphi(E) = D$)

OSS:

1) Si richiede che U, X siano aperti: ciò serve anche per poter parlare di derivabilità di f e φ.
2) La formula vale su qualunque sottoinsieme D di X. Così ad esempio se si pone

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} = \varphi_1(u,v) \\ y = \frac{u-v}{2} = \varphi_2(u,v) \end{cases}$$ la applicazione

$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(u,v) \longmapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ è definita su $\mathbb{R}^2$,

poi uno applica la formula nel dominio di interesse. Ad esempio

$$\int_{\substack{1 \le x+y \le 3 \\ -2 \le x-y \le 1}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{[1,3]_u \times [-2,1]_v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) |\varphi'(u,v)|\,du\,dv$$

$$\begin{pmatrix} u = x+y \\ v = x-y \end{pmatrix}$$

ed è $|\varphi'(u,v)| = \left|\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$

da cui $$\int_{\substack{1 \le x+y \le 3 \\ -2 \le x-y \le 1}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{[1,3]\times[-2,1]} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \frac{1}{2}\,du\,dv.$$

Formula di riduzione integrali doppi

PROPOSIZIONE. Sia $f: [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile. il suo integrale doppio coincide con entrambi gli integrali iterati, cioè

$$\underbrace{\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{integrale doppio di } f \text{ su } [a,b]\times[c,d]} = \underbrace{\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy}_{\text{integrale iterato}} = \underbrace{\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx}_{\text{integrale iterato}}$$

FORMULA di RIDUZIONE

$\updownarrow$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

Calcolare un'area attraverso un'integrale doppio (da approfondire/esercizio)

$$\boxed{\text{Area}(D) = \int_D 1\, dx\,dy = \int_E |\varphi'(u,v)|\, du\, dv \quad , \quad E = \varphi^{-1}(D).} \ (*)$$

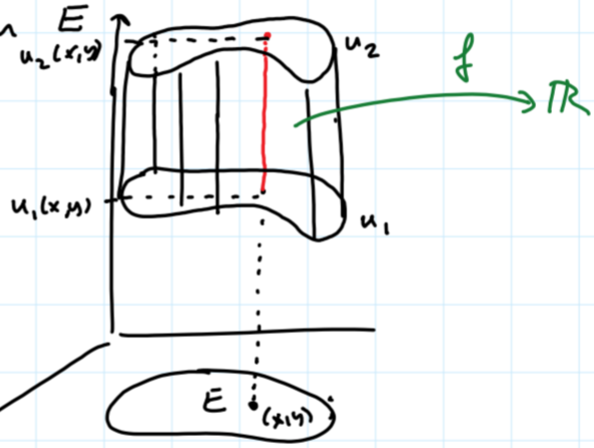
Calcolo di integrali/volumi per fili paralleli ad un asse coordinato o per fette parallele ad un piano coordinato

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in E \subseteq \mathbb{R}^2 ; \ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y) \}$$

OSS: E = proiezione di D su x,y

Dominio semplice risp. a (x,y)

con $\boxed{u_1 \le u_2}$ su E



$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_D f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

integrale triplo di f su D

$$= \int_E \underbrace{\left\{ \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right\}}_{\text{Funzione di } (x,y)} dx\,dy$$

OSS: Se $f = 1$ $\displaystyle\int_D 1\, dx\,dy\,dz =: \text{Vol}(D).$

La formula dice che $\displaystyle \text{Vol}(D) = \int_E \underbrace{\text{Lungh}\,[u_1(x,y), u_2(x,y)]}_{= u_2(x,y) - u_1(x,y)}\, dx\,dy$

ESEMPIO. Volume della palla di raggio R.

$$Vol(B_R) = \int_{-R}^{R} Area(B_R)_z \, dz$$

$$D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in D\}$$

$$(B_R)_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+z^2 \le R^2\} = \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2 - z^2\}$$

$= $ Disco centro 0, raggio $\sqrt{R^2 - z^2}$

$$Vol(B_R) = \int_{-R}^{R} Area((B_R)_z)\, dz = \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - z^2)\, dz$$

$$= 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2)\, dz = 2\pi \left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^R$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{2R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Formula di Guldino per i solidi di rotazione

FORMULA di GULDINO per i solidi di rotazione.

$A^\alpha \subseteq \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando $A \subseteq \mathbb{R}_{x \ge 0} \times \mathbb{R}_z$ attorno a z di un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Allora

$$Vol(A^\alpha) = \alpha \int_A x \, dx\, dz$$

$$= \alpha \times Area(A) \times x_A \qquad \left(x_A = \frac{\int_A x \, dx\, dz}{Area(A)} \right)$$

dove x_A = ascissa del baricentro di A

= distanza del baricentro dall'asse di rotazione.

Dim.

$$Vol(A^\alpha) = \int_0^\alpha \int_A 1\, \rho \, d\rho\, dz \; dt = \alpha \int_A \rho \, d\rho\, dz.$$

camb. in coordinate cilindriche

Definizione area parametrica

DEF. Una superficie parametrica in $\mathbb{R}^3$ è una FUNZIONE $p: \underset{\text{CHIUSO}}{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ di classe $\mathcal{C}^1$

$$p: \underbrace{(u,v)}_{\text{parametri}} \longmapsto (p_1(u,v),\ p_2(u,v),\ p_3(u,v))$$

p_1, p_2, p_3 $\mathcal{C}^1$ (in un aperto contenente D)

OSS: ricordare il concetto di curva: FUNZIONE

$$\gamma: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ o } \mathbb{R}^2$$

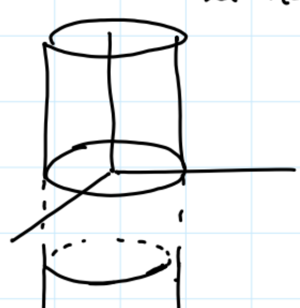
Il sostegno della superficie parametrica è l'insieme

$$p(D) = \{p(u,v) : (u,v) \in D\}.$$

ESEMPIO. $R > 0$ $\qquad (R\cos t, R\sin t, z)$

$t \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, h]$

$(R\cos t)^2 + (R\sin t)^2 = R^2 \Rightarrow (R\cos t, R\sin t) \in$ cerchio di raggio R.



Tale insieme è il sostegno della superficie param.

$$(t, z) \longmapsto (R\cos t, R\sin t, z).$$

saper calcolare un'area di una superficie

SUPERFICIE CARTESIANA

$$p(x,y) = (x, y, f(x,y)) \qquad f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Area di } p \ \left(\text{cartesiana } p(x,y) = (x,y,f(x,y)),\ (x,y)\in D\right) \text{ è } \int_D \sqrt{1+\|\nabla f(x,y)\|^2}\, dx\, dy}$$

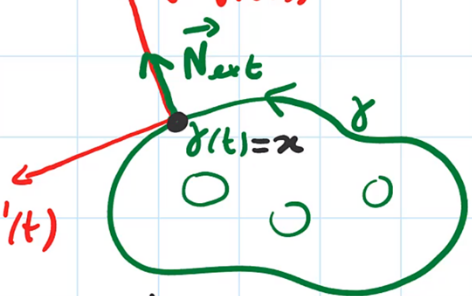
Teorema della divergenza

Flusso uscente da D $\qquad \int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot\vec{N}_{ext}\, ds$

$$x = \gamma(t),\ t\in[a,b]$$

$$\vec{N}_{ext}(x) = \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|}$$

$$\begin{pmatrix}\gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix}$$



$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{N}_{ext}\, ds \qquad \begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\end{pmatrix} = \gamma'(t)$$

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\cdot\vec{N}(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\cdot\begin{pmatrix}\gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix} dt$$

$$= \boxed{\int_\gamma F_1\, dy - F_2\, dx}$$

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2$$

Teorema (della divergenza)

• $D \subseteq \mathbb{R}^2$ con bordo costituito da una unione finita di sostegni di curve semplici, regolari.

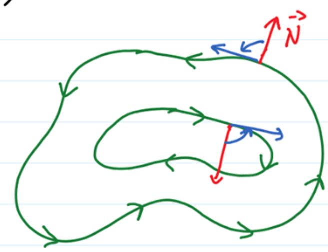
• $\vec{F}: D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ di classe $\mathcal{C}^1$, $\vec{F} = (F_1, F_2)$

Allora

Flusso di $\vec{F}$ uscente da D

$$\boxed{\int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot \vec{N}\, ds} = \int_D \overbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right)}^{\operatorname{div} \vec{F}(x,y)} dx\, dy$$

$(\vec{N}: (\vec{N}, \vec{T})$ base positiva$)$



Dim. Se $x \in \operatorname{supp} \gamma$ e $x = \gamma(t)$,

$$\vec{T}(x) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$$ si ha

$$\vec{N}_{ext}(x) = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}.$$ Sia $\partial^+ D = \operatorname{supp} \gamma_1 \cup \dots \cup \operatorname{supp} \gamma_n$, $\gamma_i : [a_i, b_i] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot N_{ext}\, ds = \sum_i \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot \vec{N}_{ext}\, ds$$

204

Gauss-Green

Proprietà da rispettare, le curve devono:

- essere lineari ossia non ci devono essere intersezione u(t)!=u(s)

- essere di tipo C^1

- u’(t) !=0 per ogni t

- vettori unitari orientati positivamente

$$\underbrace{\int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds}_{\text{Lavoro di } \vec{F}} = \int_D \left(\partial_x F_2 - \partial_y F_1 \right) dx\, dy \quad \leftarrow \text{integrale}$$

$$\vec{T}(x) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Utilizzo hessiana per calcolare i punti critici

- se l'Hessiana è definita positiva, allora (x_i, y_i) è un punto di minimo;
- se l'Hessiana è definita negativa, allora (x_i, y_i) è un punto di massimo;
- se l'Hessiana è indefinita, allora (x_i, y_i) è un punto di sella;
- nel caso in cui l'Hessiana sia semidefinita (positiva o negativa), non possiamo dire nulla riguardo alla natura di (x_i, y_i).

CRITERIO DELL'HESSIANO

Sia f derivabile due volte, $f \in C^2$, $p \in \mathring{D}$.

Sia $\boxed{\nabla f(p) = 0}$

$$\text{Hess} f(p) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x,x} f(p) & \partial^2_{x,y} f(p) \\ \partial^2_{x,y} f(p) & \partial^2_{y,y} f(p) \end{pmatrix}$$

ES. $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad \nabla f(x,y) = (2x, -2y)$

$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

- Se $\underline{\det \text{Hess} f(p) < 0}$ p è di sella.

- Se $\underline{\det \text{Hess} f(p) < 0}$ p è di sella.

ESEMPIO: $f(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$

$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \det \text{Hess} f(0,0) = -4 < 0$.

- Se $\underline{\det \text{Hess} f(p) > 0}$:

  a) Se $\partial^2_{x,x} f(p) > 0 \Rightarrow p$ è minimo locale stretto

  b) Se $\partial^2_{x,x} f(p) < 0 \Rightarrow p$ è di massimo locale stretto

  (NON PUÒ ESSERE $\partial^2_{x,x} f(p) = 0$)

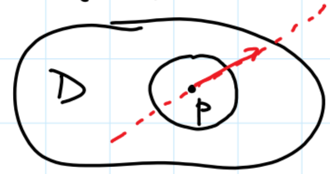
Criterio del gradienete

CRITERIO DEL GRADIENTE.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, p sia interno a D.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, p sia interno a D.

f ammetta derivate direzionale in p rispetto ad un vettore $\vec{u}$.



$\boxed{p \text{ min/max locale} \Rightarrow D_{\vec{u}} f(p) = 0}$.

In particolare se esistono $\partial_x f(p), \partial_y f(p)$:

$\boxed{p \text{ min/max locale} \Longrightarrow \nabla f(p) = 0}$

$\rightsquigarrow$ i punti CRITICI INTERNI sono candidati ad essere min/max locali

Dim. Sia $g(t) = f(p + t\vec{u})$. Sappiamo che

$D_{\vec{u}} f(p) = g'(0)$. Sia p minimo locale interno.

Sappiamo che $f(p + t\vec{u}) \geq f(p)$ se $p + t\vec{u}$ è "vicino" a p: sia $r > 0$ tale che $f(x) \geq f(p)$ $\forall x \in B(p, r]$, cioè per $\|x - p\| \leq r$. Posto $x = p + t\vec{u}$:

$$\| p + t\vec{u} - p \| = |t| \leq r \quad \text{per } t \in [-r, r]$$

$$\Rightarrow \quad g(t) \geq g(0) \qquad \forall t \in [-r, r]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ è di minimo locale per } g \\ 0 \text{ è interno a } [-r, r] \end{array} \right. \Rightarrow g'(0) = 0 \quad \#$$

Equazioni differenziali

EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Risolvere l'equazione
CONTINUA

differenziale $y' = f(t,y)$ significa trovare

un intervallo $]a,b[$ e una funzione

$y :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tali che

$$\begin{cases} (t, y(t)) \in \Omega & \forall t \in]a,b[\\ y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in]a,b[\end{cases}$$

ES. Sia $y(t) = e^t$. Si ha $y'(t) = e^t$:

la funzione $y(t) = e^t$ soddisfa a $y' = y$.

Qui $f(t,y) = y \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R}^2 := \Omega$

ES. $y(t) = \frac{1}{t}$ soddisfa a $y'(t) = -\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t} y(t)$, $t > 0$.

Qui $f(t,y) = -\frac{y}{t}$, $\forall (t,y) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R} := \Omega$.

Equazioni differenziali a variabili separabili

$$\begin{cases} y' = h(y)\, g(t) \\ y(t_0) = y_0 \in I \end{cases}$$

CONTINUE
$h : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$g :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$

- Se $h(y_0) = 0 \Rightarrow y(t) \equiv y_0$ è soluzione, $t \in]\alpha, \beta[$:

$$y'(t) \equiv 0, \quad h(y(t))\, g(t) = h(y_0)\, g(t) = 0.$$

- Se $h(y_0) \neq 0$ $\quad$ y continua, se $y(t_0) = y_0 \Rightarrow h(y(t)) \neq 0$

in un intorno di t_0.

$$y'(t) = h(y(t))\, g(t) \Rightarrow \frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{h(y(\tau))}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau$$

$$(u = y(\tau)) \Rightarrow \int_{y(t_0)}^{y(t)} \underbrace{\frac{1}{h(u)}}_{\text{indip. da } y(t)} du = G(t) := \underbrace{\int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau}_{\text{indip. da } y(t)}$$

$$y(t_0) = y_0 \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{h(u)}\, du = G(t) \qquad \forall t.$$

Sia $h > 0$ (esempio). $H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\, du$ è str. crescente : $H'(y) = \frac{1}{h(y)} > 0$

$\Rightarrow H$ è invertibile $\Rightarrow y(t) = H^{-1}(G(t))$. Si verifica che (localmente) y è una soluzione.

Se c'è una unica soluzione del PB. di Cauchy,

l'intervallo massimale nel quale è

l'intervallo massimale nel quale è

definita la soluzione è il più grande intervallo contenuto in $]\alpha, \beta[$ contenente t_0 nel quale la soluzione può essere definita.

COMBINATORIA e PROBABILITA

K-sequenze

X insieme, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$
Una k-sequenza di X è una k-upla ordinata
ORDINATA $\rightarrow$ $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ $\quad x_i \in X$:
si tratta cioè di un elemento di $\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{k \text{ volte}}$.

La sequenza si dice senza ripetizione se gli x_i sono tutti distinti

ES. Estrazione di numeri (lotteria) da un'urna di 90 palline numerate da 1 a 90.
Si estraggono ordinatamente 3 palline: l'esito si può rappresentare con una sequenza (x_1, x_2, x_3) di $\{1, 2, \ldots, 90\} = I_{90}$
Se non vi è reimmissione la 3-sequenza di I_{90} è senza ripetizione.

K-sequenze senza ripetizione : $= \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$

$$\boxed{\# \, k\text{-sequenze di } I_n = \# \, n\text{-spartizioni di } I_k}$$

K-collezioni

Collezione Una k-collezione di I_n è una famiglia non ordinata $\underbrace{[x_1, x_2, .., x_k]}_{\text{l'ordine non conta.}}$ $x_i \in I_n$.

ES: $[1,1,3] = [3,1,1]$

ES. Un insieme di k elementi è una k-collezione senza ripetizione.

$\{3,5,7,2\} = [3,5,7,2]$

$\neq [3,3,5,7,2]$

$$\boxed{\#\,k\text{-collezioni di } I_n = \#\,n\text{-risoluzioni di } k}$$

Numero di k-collezioni :

$$\frac{((n-1)+k)!}{(n-1)!\;k!} = \binom{(n-1)+k}{k} = \binom{(n-1)+k}{n-1}$$

N-spartizioni

DEF. Una n-spartizione di I_k è una una n-sequenza $(C_1, .., C_n)$ di sottoinsiemi di I_k tali che
$$\begin{cases} C_i \cap C_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \\ C_1 \cup .. \cup C_n = I_k \end{cases}$$

$$\boxed{\#\,k\text{-sequenze di } I_n = \#\,n\text{-spartizioni di } I_k}$$

Principio di moltiplicazione

In generale, una scelta puó essere fatta in piú passi, poniamo N. Supponiamo che per ogni $k = 1, \ldots, N$ la scelta da compiere al k-mo passo possa essere fatta in n_k modi. Il principio di moltiplicazione dice che allora il numero totale di possibili scelte é il prodotto

$$n_{\text{tot}} = n_1 \cdot n_2 \cdots n_{N-1} \cdot n_N. \tag{1}$$

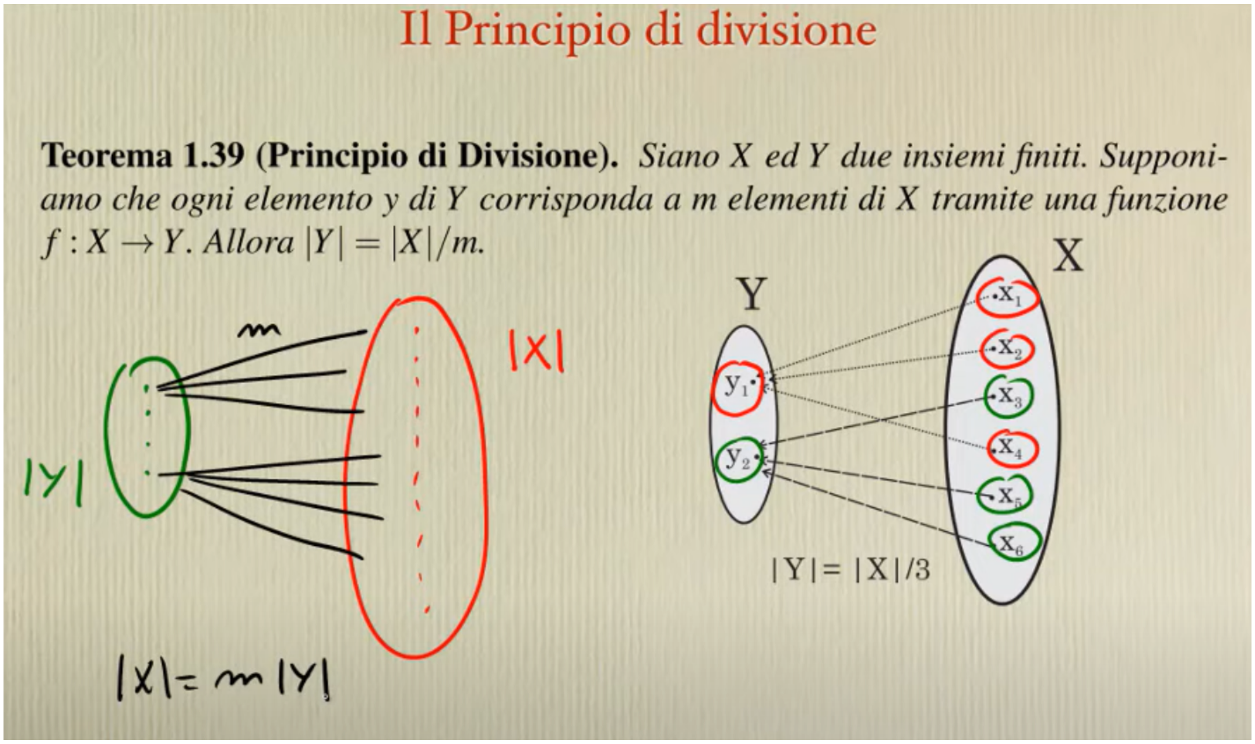
Il Principio di moltiplicazione
versione divulgativa

Supponiamo che gli esiti di un "esperimento aleatorio" siano univocamente individuati dagli esiti di una sequenza di k esperimenti, dove:

1. la prima fase abbia m_1 diversi esiti possibili;
2. qualunque siano gli esiti delle prime i fasi, $1 \leq i \leq k-1$, vi siano m_{i+1} diversi esiti possibili per la fase $(i+1)$-esima.

Allora l'esperimeno ha $m_1 \times ... \times m_k$ esiti possibili.

Principio di divisione



Continuità delle probabilità

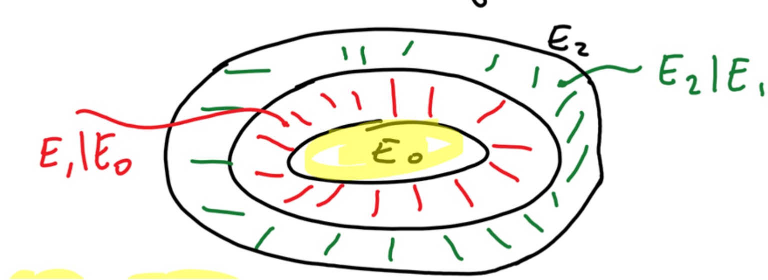
CONTINUITÀ DELLE PROBABILITÀ

1) $E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots \subseteq \Omega$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{0}^{\infty} E_m\right) = \lim_{n \to +\infty} P(E_n)$$

2) $E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \lim P(E_n)$.

Dim. Si scrive $\bigcup_n E_n$ come una unione di insiemi a due a due disgiunti



How to contare gli anagrammi

ANAGRAMMI (permutazioni con ripetizione)

ESEMPIO: Quanti sono gli anagrammi di MELE?

È facile elencarli tutti:

MELE LEME EEML EELM ELEM EMEL

ELME EMLE LMEE MLEE MEEL LEEM

Per calcolarne il numero senza elencarli si poteva procedere così:

1) Scelta delle 2 posizioni per E tra 4: $\binom{4}{2}$ modi

2) Scelta della posizione di L tra 2: 2 modi

3) Scellta della posizione di M: 1 modo.

Si può senz'altro applicare il Principio di Moltiplicazione: da ogni anagramma di MELE si può risalire univocamente alle scelte fatte nelle tappe 1) 2) e 3).

Vi sono pertanto $\binom{4}{2} \times 2 \times 1 = \frac{4!}{2!} = 12$ anagrammi di MELE.

Il numero di anagrammi di I_n di una sequenza che ha k_1 ripetizioni di 1,...,k_n ripetizioni di n è

$$\frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \ldots k_n!} = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!}.$$

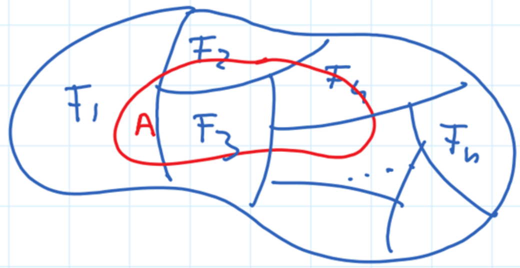
Formula di Stiefel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Formula della partizione

FORMULA della PARTIZIONE

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partizione di Ω:



$$\begin{cases} \bigcup_n F_n = \Omega \\ F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \\ P(F_i) > 0 \end{cases}$$

Se $A \subseteq \Omega$

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A \mid F_i)\, P(F_i)}$$

$\Rightarrow$ conoscendo $P(F_i)$ "F_i ipotesi"

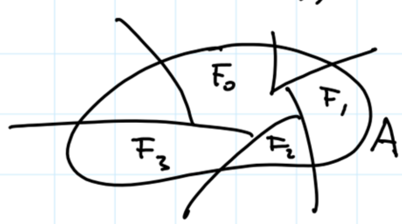
$P(A \mid F_i)$

si conosce $P(A)$.

$\Rightarrow$ Se $\{F_1, \dots, F_n\}$ partizione:

$$P(A) = P(A \mid F_1) P(F_1) + \dots + P(A \mid F_n) P(F_n).$$

Dim. A



$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_i F_i\right) = \bigcup_i \underbrace{(A \cap F_i)}_{\text{a due a due disgiunti}}$$

$$P(A) = \sum_i P(A \cap F_i) = \sum_i P(A \mid F_i) P(F_i) \quad \#$$

Bayes

FORMULA di BAYES

$\{F_i\}_i$ PARTIZIONE di Ω. $A \subseteq \Omega$. $P(F_i) > 0$

$$\boxed{P(F_j|A) = \frac{P(A|F_j)P(F_j)}{P(A)} = \frac{P(A|F_j)P(F_j)}{\sum_i P(A|F_i)P(F_i)}}$$

Notare bene che P(A) che si trova al denominatore è esattamente la formula della partizione!

Probabilità intersezione eventi

Probabilità di intersezione di eventi

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \qquad P(F) \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P(E|F)P(F) = P(E \cap F) = P(F|E)P(E)}$$

Eventi indipendenti

INDIPENDENZA DI EVENTI

A, B eventi di Ω con $\underline{\underline{P(A)>0}}$, $P(B)$

A, B indip. se $P(B) = P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$$\boxed{P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)}$$

Ricordiamo che se $P(A)>0$ è

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A).$$

DEF. Sia (Ω, P) spazio con probabilità.
Si dice $A, B \subseteq \Omega$ sono <u>indipendenti</u> se

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A)\,P(B)}$$

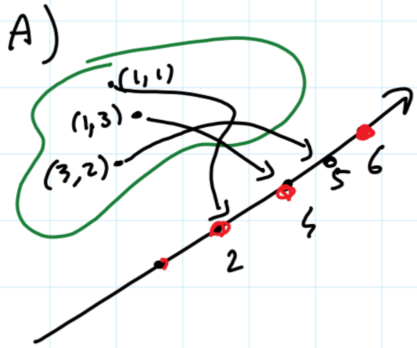
Significato. Se $P(A)>0$ A, B indip
$\iff P(B) = P(B|A)$.

Variabile aleatoria

Una variabile aleatoria su (Ω, P) è una funzione $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$A \subseteq \mathbb{R} \longmapsto P(X\in A)$$

Es. $\Omega = \{(x,y),\ x,y\in\{1,..,6\}\}$
$X(x,y) = x+y$
Prob. che la somma sia pari
$P(X\in\{2,4,6,\dots\})$

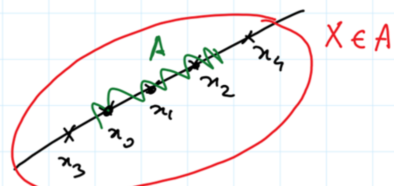


La legge di X si indica con P_X

Variabile aleatoria discreta

- Variabile aleatorie discrete.

Assumono al più una infinità numerabile di valori $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$



La legge di X è individuata dalla probabilità $p_i = P(X = x_i)$.

$$A \subseteq \mathbb{R} \qquad P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} P(X = x_i) = \sum_{x_i \in A} p_i$$

ES. X assume i valori $1, 2, 3$ con probabilità $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{1}{8}$

$$P_X(A) = P(X \in A)$$

$$P_X\left(\left[\tfrac{3}{2}, 10\right]\right) = P\left(X \in \left[\tfrac{3}{2}, 10\right]\right) = P(X = 2 \text{ o } X = 3)$$
$$= P(X = 2) + P(X = 3)$$
$$= \tfrac{4}{8} + \tfrac{1}{8}$$

Densità discreta

La densità discreta di X è la funzione
$$a \in \mathbb{R} \longmapsto P(X = a) \in [0, 1]$$

Riassunto. X v.a. su Ω $\quad X : \Omega \to \mathbb{R}$

Legge di X è la probabilità $P_X : A \subseteq \mathbb{R} \longmapsto P(X \in A)$

Se X è discreta la legge di X è determinata dalla funzione

$$\underbrace{a \in \mathbb{R} \xmapsto{p_X} P(X = a)}_{\text{densità discreta di } X.}$$

ES. Dado con 6 facce, equilibrato

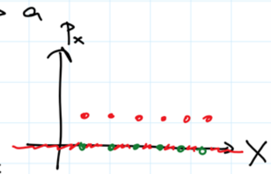
X = esito del lancio.

$\Omega = \{1, 2, \dots 6\}$ $\qquad X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad a \longmapsto a$

Densità discreta di X

Se $a \neq 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $\qquad p_X(a) = 0$

Se $a \in \{1, 2, \dots 6\}$ $\qquad p_X(a) = \frac{1}{6}$



Una variabile aleatoria ha valore atteso finito se la serie indicata sotto converge a un valore

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \, P(X = x_i)}$$

Calcolo del valore atteso di una funzione composta : $\boxed{E[g(X)] = \sum g(x_i) \, P(X = x_i)}$

Importante conseguenza : $\boxed{E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)}$

<u>Funzione di distribuzione di una variabile aleatoria</u>

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI UNA VARIABILE ALEATORIA.

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

La funzione di distribuzione di X è la funzione

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto F_X(x) = P(X \leq x)$$

OSS: Se X è discreta con valori $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\{X \leq x\} = \bigcup_{x_i \leq x} \{X = x_i\}$$

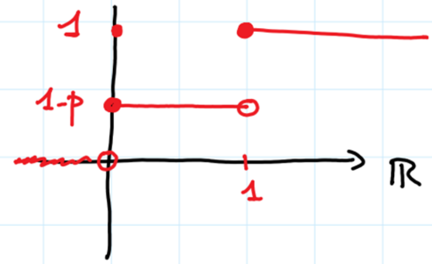
$$P(X \leq x) = \sum_{i : x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Funzione di distribuzi...

Registrazione audio avviata: 13:18 martedì 13 dicem

$\Rightarrow$ se X è v.a. discreta, la densità discreta di X determina la funzione di distribuzione di X

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1-p & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

X v.a. F_X funzione di distribuzione di X.

1. F_X è continua a destra in ogni punto

$$\lim_{y \to x^+} F_X(y) = F_X(x)$$

$P(X \leq x)$ $\quad$ $P(X \leq y)$

2. F_X è crescente $\left(x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)\right)$

3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

4. $$P(X=x) = \lim_{y \to x^+} F_X(y) - \lim_{y \to x^-} F_X(y)$$

$$= F_X(x) - \lim_{y \to x^-} F_X(y)$$

Variabile di bernulli

- Variabile di Bernoulli:

X che assume solo i valori $\{0,1\}$.
Se $p = P(X=1)$ si dice che X è variabile di Bernoulli di parametro p: $\boxed{X \sim Be(p)}$

Es. Moneta Testa con probabilità p

$T \longrightarrow X=0$ $\qquad \Omega=\{T,C\} \xrightarrow{X} \mathbb{R}$

$C \longrightarrow X=1$ $\qquad T \longmapsto 1$

$\qquad C \longmapsto 0$

$P(X=1) = P(\text{Testa}) = p$
$P(X=0) = P(\text{Croce}) = 1-p$

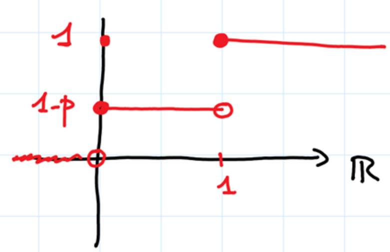
Densità discreta

$$p_X(0) = 1-p$$
$$p_X(1) = p$$
$$p_X(a) = 0 \quad \text{se } a \notin \{0,1\}$$

Funzione di distribuzione della variabile aleatoria di Bernulli

Es X: Variabile di Bernoulli di parametro $p \in]0,1[$.
$F_X(x) = P(X \le x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1-p & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$



Variabile binomiale

Questa variabile aleatoria assume i valori tra 0 e n con p tra 0 e 1.

ESEMPIO (Variabile binomiale).

325

27 Pagina 5

Si effettuano $n \geq 1$ prove di Bernoulli INDIPENDENTI

X = numero di successi nelle n prove

$$P(X=k) = \boxed{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \longleftarrow \text{DENS.}$$

DEF. $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $p \in]0,1[$
X è variabile binomiale di parametri (n, p)
se

- X assume solo i valori $\{0, 1, \dots, n\}$
- $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$$X \sim B(n,p)$$

Valore atteso binomiale

$$E(X) = np$$

Varianza binomiale

$$\boxed{\text{Se } X \sim B(n,p) \Longrightarrow Var(X) = np(1-p)}$$

Variabile geometrica (conta il numero di tentativi prima di avere successo)

Questa variabile aleatoria è una variabile aleatoria geometrica di parametro p tra 0 e 1.

Se $X \sim Ge(p)$ $\boxed{P(X > k) = (1-p)^k}$

Assenza di memoria della variabile geometrica :

Questa variabile aleatoria ha la particolare capacità di perdere memoria probabilistica, per poter spiegare questo effetto utilizzeremo un esempio : Stiamo cercando di capire dopo quanti lanci di un dado a 6 facce non truccato compaia un 6, dopo aver fatto diversi lanci (senza che il 6 sia comparso) ammettiamo 5 lanci, il 6 lancio avrà esattamente la stessa probabilità di produrre un 6 esattamente come il 5 o il 7 etc..

Variabile aleatoria di Poisson (Essa è indicata per le probabilità "piccole")

$$\boxed{P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

In alcuni casi (quando n è molto grande e k è piccolo rispetto a n) si può approssimare la va binomiale con una va di Poisson.

$X \sim B(n, p)$ n molto grande

$$P(X = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{piccolo risp. ad } n}}{k}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{\underbrace{n-k}_{\text{grande}}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leftarrow \text{valori alti}$$

$\lambda = np$ $Y \sim Po(\lambda)$

$$P(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k \leftarrow \text{piccolo}}{k! \leftarrow \text{piccolo}}$$

Valore atteso di Poisson

$$\boxed{X \sim Po(\lambda) \qquad E(X) = \lambda}$$

Varianza di Poisson

$$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow Var(X) = \lambda .$$

Varianza

VARIANZA DI UNA VARIABILE ALEATORIA.

X variabile aleatoria (discreta) con valore atteso $E(X)$.

La varianza di X è $\underbrace{E[(X - E(X))^2]}_{Var(X)}$:

$(X - E(X))^2$ "misura" il quadrato del discostamento della variabile X dalla sua media.

FORMULA "OPERATIVA" PER LA VARIANZA.

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

Deviazione standard : $\sigma_X := \sqrt{Var(X)}$

PROPRIETÀ DELLA VARIANZA.

$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

VARIABILE NORMALIZZATA.

X v.a. con $Var(X) \neq 0$.

La variabile normalizzata di X è $\boxed{\dfrac{X-E(X)}{\sigma_X}}$

$$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$

DEF. $Cov(X,Y) := E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))$

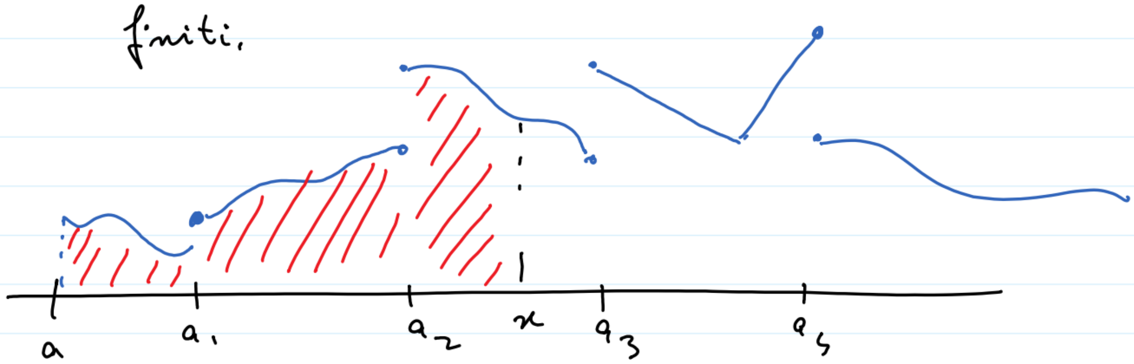
$\rightsquigarrow Var(X+Y) = Var X + Var Y + 2 Cov(X,Y)$

OSS: $\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$

Funzioni continue a tratti

DEFINIZIONE. $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua a tratti se esistono $a \le a_1 < a_2 < \dots < a_n \le b$ tali che

- f continua su $[a, a_1[,\ ]a_1, a_2[,\ \dots,\ ]a_n, b]$
- Esistono $f(a_i^-) := \lim_{x \to a_i^-} f(x)$, $f(a_i^+) = \lim_{x \to a_i^+} f(x)$ finiti.



Se f è continua a tratti, f è integrabile e l'integrale si calcola usando il TFC su ogni intervallo dove f è continua.

Variabili aleatorie continue

VARIABILI CONTINUE

DEF. X v.a. è continua se F_X è continua e C^1 a tratti.
In tal caso F_X è derivabile ovunque eccetto al più un numero finito di punti:

$$f_X(x) := F_X'(x) \quad \text{(dove esiste)}$$

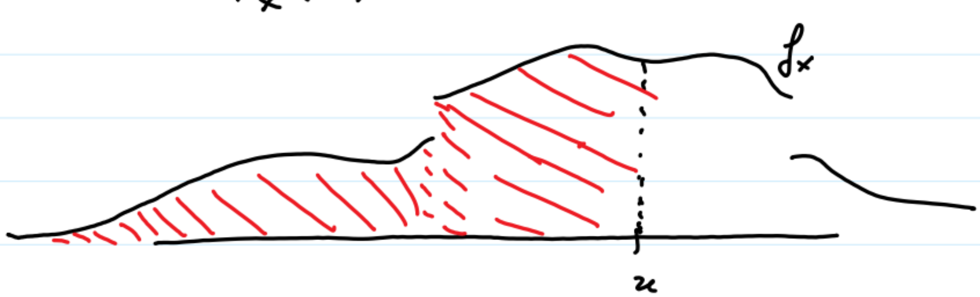
si chiama la densità (continua) di X.

PROPRIETÀ.

1) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$.

Infatti: $F_X(x) - \underbrace{F_X(a)}_{\swarrow a\to-\infty \; 0} = \int_a^x f_X(t)\,dt$

$$\underbrace{\lim_{a\to-\infty} (F_X(x) - F_X(a))}_{= F_X(x)} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^x f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$



2) $f_X(x) \geq 0$: infatti $F_X'(x) = f_X(x)$ e F_X è crescente $\Rightarrow F_X'(x) \geq 0 \Rightarrow f_X(x) \geq 0$.

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$:

Da 1): $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to +\infty} F_X(x)}_{=1} = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt.$$

OSS. $\displaystyle P(X \in (a,b)) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.

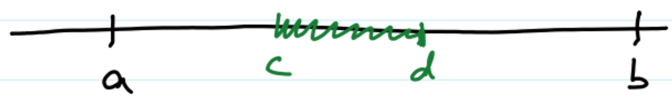
Infatti $\displaystyle P(X \in (a,b)) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.

$\displaystyle P(X = a) = \int_a^a f_X(t)\,dt = 0.$

Variabile aleatoria continua uniforme

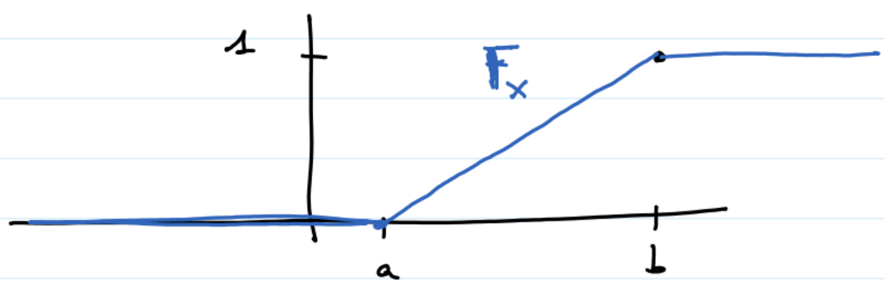
$X=$ v.a. uguale al punto colpito.

$$P(X\in[c,d]\subseteq[a,b])=\frac{d-c}{b-a}$$



Calcoliamo $F_X(x)$, $x\in\mathbb{R}$:

- $x<a$ $\quad F_X(x)=P(X\leq x)=0$
- $x\in[a,b]$ $\quad F_X(x)=P(X\leq x)=P(X\in[a,x])=\frac{x-a}{b-a}$
- $x\geq b$ $\quad F_X(x)=P(X\leq x)=1$



F_X è $\mathcal{C}^1$ a tratti e continua $\Rightarrow X$ è v.a. CONTINUA.

La sua densità è $f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x<a\\ \frac{1}{b-a} & \text{se } x\in]a,b[\\ 0 & \text{se } x>b\end{cases}$

Si dice che X è uniforme su $[a,b]$, e si scrive $X\sim U(a,b)$

Valore atteso va continua

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx.$$

APPLICAZIONE

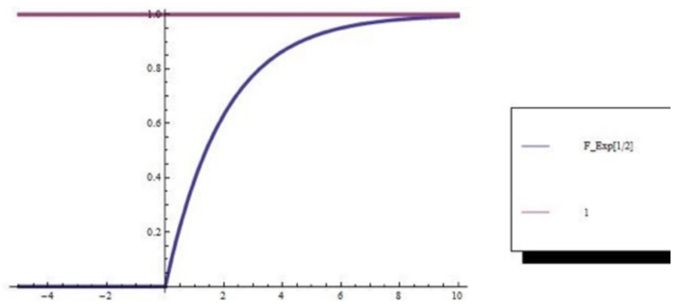
$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) f_X(x)\, dx. \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx \\ &= aE(X) + b. \end{aligned}$$

VARIANZA $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$,
esiste finita se $E(|X|), E(X^2)$ esistono.

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

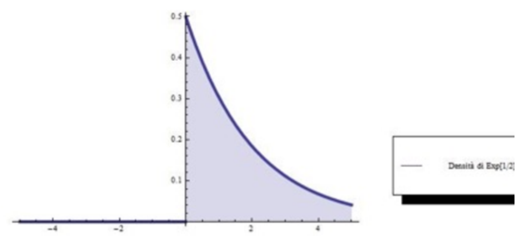
Variabile esponenziale (assenza di memoria)

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases}$$



Densità

$$f_T(t) = F'_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases}$$



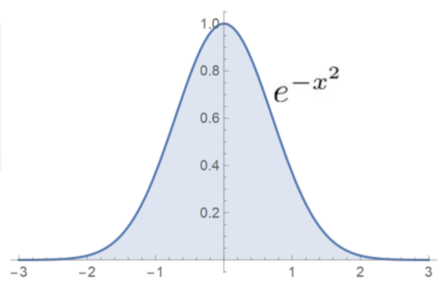
Una variabile continua con tale densità o distribuzione si chiama variabile esponenziale di parametro $\lambda : T \sim Exp(\lambda)$

423

Variabile aleatoria normale

la somma di *n* variabili casuali con media e varianza finite tende a una distribuzione normale al tendere di *n* all'infinito.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$



Importanti proprietà della funzione di distribuzione:

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Una variabile Z si dice normale standard se

- Z è continua;
- la densità di Z è $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Si scrive $Z \sim N(0,1)$

La funzione di distribuzione di una variabile normale standard si indica $\Phi(x)$:

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dx}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ E(X) = \mu; \\ \bullet\ Var(X) = \sigma^2 \end{cases}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ X \text{ è continua;} \\ \bullet\ \text{La densità è } f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \boxed{= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

<u>Teorema centrale del limite</u>

Per poter far affidamento sul teorema centrale del limite le va devono :

- Essere indipendenti
- Essere identicamente distribuite

DEF. 2 variabili aleatorie X, Y sono identicamente distribuite se $\boxed{F_X = F_Y}$

Solo in questo specifico caso esse possono essere normalizzate attraverso :

Teorema Centrale del Limite

$\{X_n\}_{n\geq 1}$ $\boxed{\text{i.i.d.}}$, $\mu := E(X_i)$; $\sigma^2 := Var(X_i)$

$$P\left(\frac{X_1+\dots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq x\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(x)$$

$F_{\frac{X_1+\dots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}}(x)$

distribuzione della normale standard.

INTERPRETAZIONE: convergenza in distribuzione.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R} \quad \lim_{n\to+\infty} F_{\frac{X_1+\dots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(x) = \Phi(x)}$$

Utilizzo in pratica.

$$P(X_1+\dots+X_n \leq y) = P(X_1+\dots+X_n-n\mu \leq y-n\mu)$$

$$= P\left(\frac{X_1+\dots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{y-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

T.C.L.: se n è "grande" $\approx \boxed{\Phi\left(\frac{y-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}$

Applicazione per va Binomiale

1) Variabile binomiale $X \sim B(n,p)$

$F_X = F_{X_1+\dots+X_n}$ $X_i \sim Be(p)$ X_i indipendenti

$E(X) = np$; $Var(X) = np(1-p)$

460

T.C.L $\Rightarrow$ $P(X \leq x) \simeq P(np + \sqrt{np(1-p)}\,Z \leq x)$ $Z \sim N(0,1)$

"n grande"

$$= P\left(Z \leq \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Applicazione per va Poisson

2) VARIABILE DI POISSON.

Se $X \sim P_o(\lambda)$ $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$ $(\lambda > 0)$

$$\boxed{\forall x: \ P(X \leq x) \approx P(\lambda + \sqrt{\lambda}\,Z \leq x)}$$

Variabili congiunte

VARIABILI CONGIUNTE

Una variabile aleatoria congiunta su (Ω, P) (a valori in $\mathbb{R}^2$) è una funzione

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sp. campionario}}}{\omega \in \Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega)),$$

dove $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sono variabili aleatorie.

I] VARIABILI CONGIUNTE DISCRETE

DEF. Una variabile congiunta discreta su (Ω, P) è una coppia (X, Y) di variabili discrete.
La densità congiunta discreta $p_{X,Y}$ di (X,Y) è la funzione

$$p_{X,Y} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto P(X = a, Y = b)$$

PROP X, Y discrete. X e Y sono indipendenti se e solo se

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

<u>Variabile congiunta continua</u>

DEF. Una variabile congiunta (X,Y) si dice continua se esiste $f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty[$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\,ds\,dt = 1 \text{ , e che}$$

densità congiunta

$$\forall x,y : \quad P(X \le x, Y \le y) = \int_{]-\infty,x]\times]-\infty,y]} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$$

In tal caso si ha

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad P((X,Y)\in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Densità marginali congiunte continue

In sunto : le densità marginali vengono calcolate integrando (sul giusto dominio) la funzione ponderata sulla va aleatoria opposta, ossia se calcolo la densità marginale fx(x) dentro l'integrale avrò solo dy e viceversa.

PROP. (X,Y) congiunta continua con densità $f_{X,Y}$

$\Rightarrow X, Y$ sono continue, con densità

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \quad ; \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

densità marginale di X

densità marginale di Y

Valore atteso di una composta di va continue

Valore atteso di una composta di variabili continue.

X, Y continue con densità congiunta $f_{X,Y}(x,y)$

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Allora $E[g(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$

$\Rightarrow E[XY] = \int xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$

488

37 Pagina 2

$\Rightarrow E[XY] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$

Disuguaglianza di Markov

Disuguaglianza di Markov.

X v.a.. $X \geq 0$, $a > 0$, $E(X)$ finito

$$\boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

Disuguaglianza di Chebyscev

X v.a, $\underset{\mu}{E(X)}$, $\underset{\sigma^2}{Var(X)}$ finite [non più $X \geq 0$]

$\varepsilon > 0$ fissato $\quad P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

OSS. Se $Var\, X$ è piccola, $P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$ è piccola;
se ε è grande, $P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$ è piccola.

Legge debole dei grandi numeri

Legge debole dei grandi numeri.

$(X_i)_i$ i.i.d, $\mu := E(X_i)$, $\sigma^2 := Var(X_i)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \longrightarrow 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Legge forte dei grandi numeri

X_i i.i.d, con $E(X_i) = \mu \in \mathbb{R}$ e $Var(X_i) < \infty$

Allora $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ con probabilità 1

cioè $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) = 1$

$$2x\, y(x) \frac{\partial}{\partial x} y(x) = 1+x$$

eq. a variabili separabili:

$$\frac{d}{dx} y(x) = \frac{x+1}{2x\, y(x)}$$

simplifica

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{\frac{1}{x}+1}{2y(x)} \Leftrightarrow 2\, \frac{dy(x)}{\partial x}\, y(x) = \frac{1}{x}+1$$

integra ambo i lati:

$$\int 2\, \frac{dy(x)}{\cancel{dx}}\, y(x)\, \cancel{dx} = \int \left(\frac{1}{x}+1\right) \partial x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\int y(x)\, dy(x) = \int \left(\frac{1}{x}+1\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x)^2 = x + \log(x) + c_1$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = -\sqrt{x+\log(x)+c_1} \quad \vee \quad +\sqrt{x+\log(x)+c_1}$$

Ora, sappiamo che $y(1) = \sqrt{2}$, dunque

$$(\sqrt{2})^2 = 1 + \log(1) + c_1 \Leftrightarrow c_1 = \underline{1}$$

$$\rightarrow \quad y = -\sqrt{x+\log x+1} \quad \vee \quad +\sqrt{x+\log x+1}$$

infine

$$y(e) = -\sqrt{e + \log e + 1} \quad \vee \quad + \sqrt{e + \log e + 1}$$

— • —

2) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \right)$$

$$= \left(3x(x+2),\ 3(y-2)y \right)$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6(x+1) & 0 \\ 0 & 6(y-1) \end{bmatrix}$$

punto critico :

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \left(3x(x+2),\ 3y(y-2) \right) = 0$$

i punti critici sono $\begin{cases} 3x(x+2) = 0 \\ 3y(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \vee x_0 = -2 \\ y_0 = 0 \vee y_0 = 2 \end{cases}$

i massimi locali devono avere $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \ \wedge$

$\text{Det } H(f(x_0, y_0)) > 0$

$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Leftrightarrow x_0 = -2$

$$\text{Det}\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6(y_0-1) \end{bmatrix} = -36(y_0-1) > 0$$

$\Leftrightarrow y_0 < 1 \rightarrow y_0 = 0 \wedge x_0 = -2$

è un punto di massimo locale

Siano

A_D = probabilità di avvistare un delfino

D = probabilità che un pesce sia un delfino

S = probabilità che un pesce sia uno squalo

sappiamo che

$$P(D) = \frac{9}{10}$$

$$P(S) = \frac{1}{10}$$

$$P(A_D \mid D) = \frac{7}{10}$$

- Un turista può avvistare un delfino in due modi
  - avvista un delfino e lo riconosce
  - avvista uno squalo e lo scambia per delfino

quindi

$$P(A_D) = \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{66}{100}$$

La probabilità cercata è

$$P(D \mid A_D) = \frac{P(A_D \mid D) \cdot P(D)}{P(A_D)} = \frac{7}{\cancel{10}} \cdot \frac{9}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{100}}{66} = \frac{63}{66}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha x & \text{se } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dopo aver determinato α in modo tale che f_α sia la densità congiunta della variabile continua si calcoli

$$P\left(\left\{Y \le \frac{1}{9}\right\} \cap \left\{X \le \frac{1}{2}\right\}\right)$$

Deve soddisfare

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f_\alpha(x,y)\, dx\, dy = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \alpha x \int_0^{x^2} dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \alpha x^3\, dx = \left[\frac{\alpha x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\alpha}{4}$$

~~deve essere uguale a~~

$$\frac{\alpha}{4} = 1 \Rightarrow \alpha = 4$$

Tu hai che

$$P\left(\left\{Y \le \frac{1}{9}\right\} \cap \left\{X \le \frac{1}{2}\right\}\right) = F_{XY}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{9}\right)$$

$$F_{XY}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{9}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{9}} f_\alpha(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{9}} 4x\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{9} x\, dx = \left[\frac{4^2}{9 \cdot 4_1} x^2\right]_0^{1/2} = \frac{1}{18}$$

$$I = \int_0^1 \left[\underbrace{\int_0^{1-y} \sqrt{x+y}\,(x-3y)^2\,dx}_{I_x(y)} \right] dy$$

$$I_x(y) = \int_0^{1-y} \sqrt{x+y}\,(x-3y)^2\,dx$$

· sub : $u = \sqrt{x+y} \to x = u^2 - y \to dx = 2u\,du$

extreme points : $x = 1-y \to u = 1$
$x = 0 \to u = \sqrt{y}$

$$= \int_{\sqrt{y}}^1 2u^2 (u^2 - 4y)^2\,du$$

$$= \int_{\sqrt{y}}^1 2u^6 - 16u^4 y + 32u^2y^2 =$$

$$= \left[\frac{2}{7}u^7 - \frac{16}{5}u^5 y + \frac{32}{3}u^3 y^2 \right]_{u=y^{\frac{1}{2}}}^{u=1}$$

$$= \frac{2}{7} - \frac{16}{5}y + \frac{32}{3}y^2 \underbrace{- \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} + \frac{16}{5}y^{\frac{7}{2}} - \frac{32}{3}y^{\frac{7}{2}}}_{-\frac{814}{105}y^{\frac{7}{2}}}$$

$$I = \int_0^1 \frac{2}{7} - \frac{16}{5}y + \frac{32}{3}y^2 - \frac{814}{105}y^{\frac{7}{2}} =$$

$$= \boxed{\frac{2}{7} - \frac{8}{5} + \frac{32}{9} - \frac{814}{105}\,\frac{2}{9}}$$