Nome teorema	Ipotesi	Tesi	Dimostrazione
Estremo superiore (S)	Sia A C R non vuoto e superiormente limitato	S = sup A { S ≥ a V a∈A e V ε > 0 ∃ a∈A: a>S-ε }	S è un maggiorante di a quindi S ≥ a V a ∈A
Estremo inferiore (I)	Sia A C R non vuoto e inferiormente limitato	I =inf A { I ≤ a V a∈A e V ε> 0 ∃ a∈A: a < S-ε }	S è un minorante di a quindi S ≤ a V a ∈A
Formula di De Moivre	Sia r ≥ 0 e δ ∈ [0; 2π)	Z = δ [cos ϑ + i*sen ϑ]	
Proprietà di separazione degli intorni	Siano r1,r2 ∈R esteso punti della retta reale estesa, con r1 ≠ r2	Allora ∃ un intorno U1 e U2 intorno di r2 tale che U1 ∩ U2 = 0	
Punto di accumulazione	Sia A C R non vuoto e r ∈ R esteso, e V intorno U di r l'insieme A∩U \ { r } è NON VUOTO	r è punto di accumulazione per A	
Punto isolato	Sia r ∈ A non è di accumulazione per A	r si dice punto isolato	
Limite (definizione)	Sia X_0 ∈ R punto di accumulazione per Dom(f), A C R e f una funzione reale a variabili reali, se V ε > 0 ∃ δ > 0 t.c 0 < |X-Xo| < δ → |f(x) - L| < ε	L si dice limite di f(x) per x che tende a Xo	
Unicità del limite	Sia f una funzione reale a variabili reali e f ha limite per x→Xo	Il valore del limite è UNIVOCAMENTE determinato L1 = L2	Siano L1, L2 ∈ R esteso e supponiamo per assurdo che valga L1≠L2 allora grazie alla <u>proprietà di separazione degli intorni</u> esistono V1 e V2 intorni di L1 e L2 t.c. V1∩V2 non sia vuoto. Per la definizione di limite ∃ due intorni U1 e U2 di Xo t.c. x∈U1∩Dom(f),X≠Xo→f(x)∈V1 e x∈U2∩Dom(f),X≠Xo→f(x)∈V2 grazie alla proprietà degli intorni ∃ un intorno U C U1∩U2. Allora se si ha contemporaneamente f(x)∈V1 e f(x)∈V2 e ciò è assurdo essendo V1∩V2=0
Esistenza del limite destro e sinistro e del limite stesso	Sia f una funzione reale a var reali con Xo∈R punto di accomulazione sia destreo che sinistro per A nel Dom(f)	$\lim_{x\to xo-} f(x) = \lim_{x\to xo+} f(x) = L$ Se e solo se $\lim_{x\to x0} f(x) = L$	Fissato un intorno V di L bisogna trovare δ>0 t.c. x∈]Xo-δ,Xo+δ[∩Dom(f) con X≠Xo alora f(x)∈V. poiché f ha limite destro = L in Xo, per la definizione di limite destro ∃δ1 >0 t.c. x ∈]Xo,X0+δ1[allora f(x)∈V. poiche f ha limite sinistro = L in Xo, per la definizione di limite sinistro ∃ δ2>0 t.c. se x∈]Xo-δ2,Xo[allora f(x)∈V. preso δ=min{δ1,δ2} se x∈]Xo-δ,Xo+δ[∩Dom(f), X≠Xo si ha Xo<x<Xo+δ≤x+δ1 x∈Dom(f) allora f(x)∈V Xo-δ2≤Xo-δ<X<Xo, x∈Domf allora f(x)∈V c.v.d.

Permanenza del segno (proprietà di separazione) (esistenza del limite destro e sinistro)	Sia f una funzione reale a variabili reali, Xo ∈R esteso punto di accumulazione e $\lim_{x \to Xo} f(x) = L > 0$	La funzione ha lo stesso segno di L	Supponiamo che L > 0 per la proprietà di separazione ∃ un intorno U di L che non contiene 0: se LϵR basta prendere U=]L/2,3/2L[Se L=+∞ allora scegli U=]1,+∞[, grazie all'esistenza del limite destro e sinistro f(x)ϵU definitivamente per X→Xo con le nostre scelte: se L∈R si ha f(x)>L/2 definitivamente per X→Xo se L=+∞ allora f(x)>1 definitivamente per X→Xo c.v.d
Dei due carabinieri (proprietà degli intorni)	Siano f,g,h funzioni reali definite in uno stesso insieme XCR che abbia Xo∈R esteso come punto di accumulazione. Supponiamo che: f(x)≤g(x)≤h(x) definitivamente X→Xo e che f e h abbiano limite l per X→Xo e che ∃ il Lim per X→Xo	Allora anche la funzione g ha limite L per X→Xo	V intorno di V di L devo trovare un intorno U di Xo t.c. g(x)ϵV VxϵU⋂X x≠Xo. Fissato V intorno di L ∃ due intorni Uf eUh di Xo t.c. f(x) ϵV VxϵUf⋂X X≠Xo e h(x)ϵV VxϵUh⋂X, X≠Xo. Grazie ad una proprietà degli intorni ∃ U intorno di Xo t.c. UCUf⋂Uh allora VxϵU⋂X, X≠Xo si ha f(x) e h(x)ϵV, <u>poiché V è un intervallo f(x)≤g(x)≤h(x) anche g(x) ϵV</u>. L-ε<g(x)<L+ε.
Limite fondamentale (sen x)/x		Dal teorema dei due carabinieri discende che $\lim_{x \to 0} f(x)$=1	Si può provare che per 0<x<π/2 si ha: sen x < x < tg x = senx/cosx, moltiplicare per cosx e dividere per sen x, cos x < senx/x <1 poiché le funzioni coinvolte sono pari, tale relazione rimane valida anche per –π/2 < x < 0. Se dimostro che il limite di cos x per X→0 è =1 posso concludere che è vera.
Limiti di funzioni monotone	Sia f funzione reale di variabile reale, Xo p. di accumulazione SINISTRO per Dom(f), se f è monotona in]-∞,Xo[	∃ il limite sinistro di f in Xo e valgono: $\lim_{x \to Xo-} f(x) = sup f(x)$ se f è monotona crescente mentre $\lim_{x \to Xo-} f(x) = inf f(x)$ se f è monotona decrescente	Dimostriamo il caso f monotona crescente, con Xo p.acc. SINISTRO, S=sup f(x) x ϵdom f . <u>se S ϵ R</u> V ε>0 ∃ X < Xo , Xoϵdom f t.c. S-ε < f(X) ≤ S, Posto Δ=Xo-X, S maggiorante ϵ]Xo-Δ;Xo[→ S-ε < f(X) ≤ f(X) ≤ S e quindi |f(x)-S|<ε. <u>Se S=+∞</u> V M>0 ∃ X<Xo t.c. M < f(X) ≤ f(X) grazie a Δ=Xo-X V M>0 ∃ Δ>0 t.c. Xo-Δ< X < Xo
Limiti e operazioni (somma,prodotto)	Siano f e g funzioni reali a variabile reale Xo∈R esteso p. di accumulazione supponiamo che f e g ammettano limite finito rispettivamente Lf e Lg per x→Xo	$\lim_{x \to Xo} f(x) \pm g(x)$=Lf±Lg (A) $\lim_{x \to Xo} f(x) * g(x)$=Lf*Lg (B)	(A) V ε > 0 ∃ 2 intorni di Xo Uf e Ug t.c. XϵUf ⋂ dom f, x≠Xo → |f(x)-Lf|< ε/2 , XϵUg ⋂ dom f, x≠Xo → |f(x)-Lg|< ε/2 , U C Uf e Ug |f(x)+g(x) - (Lf+Lg)| ≤ |f(x)-Lf| + |g(x)-Lg| < ε/2 + ε/2 = ε (B) V x∈dom vale: |f(x)*g(x) – Lf*Lg| = | [f(x)*g(x) - f(x)*Lg] + [f(x)*Lg - Lg*Lf] | ≤ |f(x)||g(x) – Lg| + |Lg||f(x)-Lf|
Il numero di Nepero	La successione $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ = e ed è crescente e limitata	Quindi per il th. Di limite di successione ha limite finito	

Il simbolo "o" piccolo	Date due funzioni reali a variabile reale Xo∊R esteso p. di accumulazione nel Dom(f,g) con g(x)≠0 definitivamente per x→Xo	Si dice che f è o piccolo di g per x→Xo e si scrive f(x)=o(g(x)) se vale $\lim_{x\to Xo} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$	
Principio di sostituzione degli infinitesimi e degli infiniti	Siano f,f1,g,g1 funzioni reali definite nell'insieme xCR con Xo p. accumulazione, t.c. g(x)≠0 definititvamente per x→Xo e f = f1+o(f1) e g=g1+o(g1) per x→Xo	Allora: $\lim_{x\to Xo} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to Xo} \frac{f1(x)}{g1(x)}$ Difficile ------ semplice	$= \lim_{x\to Xo} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f1+o(f1(x))}{g1+o(g1(x))} = \frac{f1(x)\,[\,1+\frac{o(f1(x))}{f1(x)}\,]}{g1(x)\,[\,1+\frac{o(g1(x))}{g1(x)}\,]}$ $= \lim_{x\to Xo} (\frac{f1(x)}{g1(x)} * \frac{1}{1})$ c.v.d.
Limite di successione	Se V intorno V di L ∃ MϵR t.c. V n>M $\lim_{x\to+\infty} an = L$,	Allora {an} ϵ V e si dice che una successione {an} nϵN ha limite L	
Caratterizzazione del limite di successioni monotone	Sia (an)n una successione reale monotona	Allora ∃ $\lim_{n\to+\infty}(an)$, in particolare: se è crescente: $\lim_{n\to+\infty} an = sup\ (an)$ Se è decrescente $\lim_{n\to+\infty} an = inf\ (an)$	
Teorema "ponte"	Sia f funzione a variabile reale e Xo∊R esteso p. di accumuazione nel Dom(f)	Allora f ha limite L∊R esteso per x→Xo ⇔ V succ {an}n∊N a valori nel Dom(f)\{Xo} e con limite Xo si ha: $\lim_{n\to+\infty} f(an)$=L	Dim per assurdo: $\lim_{x\to Xo} f(x)$≠L ∃ un intorno V di L t.c. V δ>0 ∃x∊]Xo-δ,Xo+δ[\{Xo} t.c. f(x) ∊V. scelgo δ=1/n ∃ Xn∊]Xo-1/n,Xo+1/n[t.c. f(x) ∊V ma $\lim_{n\to+\infty} xn$= Xo →|Xn-Xo|< 1\n, f(x)∊V V n∊N il che nega il $\lim_{n\to+\infty} f(xn)$ = L e quindi nega l'ipotesi
Bolzano-Weierstrass (th dei due carabinieri)		Ogni successione a valori in un intervallo [a,b] chiuso e limitato ammette l' esistenza di una sottosuccessione avente limite in [a,b]	∃ intervallo Io = [ao,bo] C R, ao,bo∊R t.c. divido a metà Io, co = $\frac{ao,bo}{2}$ →[ao,co] e [co,bo] sia K(1) il primo indice t.c. Xk(1)∊[ao,bo] a0 ≤ a1 ≤ K(1) ≤ b1 ≤ bo. Ne creo un altro I1 = [a1,b1], trovo c1 = $\frac{a2+b2}{2}$ e scelgo K(2) > K(1) t.c. a2 ≤ Xk(2) ≤ b2 quindi 2 successioni [a0,b0], [a2,b2] an crescente →limite La ≤ b, bn decrescente →limite Lb ≥ a, affermo che La = Lb, |Lb - La| = |Lb -bn+bn -an+an -La|≤ |Lb-bn|+|bn-an|+|an-La| ≤$\frac{3}{3}\varepsilon$ → |Lb-La| < ε V ε>0 (Lb=La) lim bn = La=Lb quindi per il th dei due carabinieri an ≤ xn ≤ bn → lim Xn = Lb = La
Somma parziale	Data una successione {an}n∊N di numeri reali	L'elemento Sn somme parziale corrisponde = $\sum_{k=0}^{n} ak$	

Serie convergente	Se la successione delle relative somme parziali Sn è convergente ad un numero reale L ∈R	La serie di termine generale an si dice convergente	
Serie divergente	Se la successione delle relative somme parziali Sn diverge a ±∞	La serie di termine generale an si dice divergente a ±∞	
Serie indeterminata	Se la successione delle relative somme parziali non ammette limite	La serie di termine generale an si dice indeterminata	
Convergenza assoluta e semplice di una serie (criterio di cauchy)	Sia {an}k∈N t.c. $\sum_{k=0}^{\infty} ak$ converga assolutamente	Allora la serie converge anche seplicemente e vale $\vert\sum_{k=0}^{\infty} ak\vert \le \sum_{k=0}^{\infty} \vert ak\vert$	|ak| converge, quindi per il criterio di cauchy con ε > 0 ∃ N > 0 t.c. V n>N e V p ≥ 1 vale $\vert\sum_{k=n+1}^{n+p} ak\vert \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \vert ak\vert < ε$ → la serie soddisfa il criterio di cauchy dunque converge. c. di cauchy: condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie converga è che sie V ε > 0 ∃ NϵR t.c. n,m > N →|an-am| < ε
Criterio del confronto	Siano {an} k∈N e {bn}k∈N successioni tali che 0 ≤ ak ≤ bk definitivamente per k → + ∞	Allora se $\sum_{k=0}^{\infty} bk$ converge anche $\sum_{k=0}^{\infty} ak$ converge $\sum_{k=0}^{\infty} ak$ diverge anche $\sum_{k=0}^{\infty} bk$ diverge	Per ipotesi ∃ ko t.c. V k ≥ ko si ha 0 ≤ ak ≤ bk. Inoltre essendo a termini definitivamente positivi le due serie di termine generale ak e bk o convergono o divergono a +∞ dalla relazione $\sum_{k=0}^{n} ak \le \sum_{k=0}^{n} bk$ V n≥ko. Si deduce che $\sum_{k=0}^{\infty} bk$ converge le somme parziali $\sum_{k=0}^{n} ak$ sono superiormente limitate → anche $\sum_{k=0}^{\infty} ak$ converge. Se $\sum_{k=0}^{\infty} ak$ diverge, le somme parziali $\sum_{k=0}^{n} bk$ non sono superiormente limitate quindi → $\sum_{k=0}^{\infty} bk$ diverge.
Criterio asintotico del confronto (criterio del confronto)	Siano{ak}k∈N e {bk}k∈N successioni definitivamente positive e t.c.: $\lim_{k\to+\infty} \frac{ak}{bk}$ = L∈R esteso	Allora: se L∈R e L≠0 ak converge ⇔bk converge (1) se L=0 bk converge→ak converge (2) se L=+∞ e bk diverge →ak diverge (3)	(1) sia ε > 0 t.c. L-ε>0 → per ipotesi L-ε ≤ $\frac{ak}{bk}$ ≤ L +ε e quindi (L-ε)bk ≤ ak ≤ (L+ε)bk se bk converge anche la serie a termini generali (L+ε)bk converge e per il criterio del confronto anche ak converge. (2) se L=0 la 2° diseguaglianza è ancora verificata e quindi la tesi segue ancora il criterio del confronto (3) se L=+∞ definitivamente si ha $\frac{ak}{bk}$ ≥ 1 cioè ak ≥ bk e se bn diverge → ak diverge.
Criterio del rapporto	Sia {ak}kϵN successione a termini positivi.	Se ∃ r < 1 t.c. $\frac{ak+1}{ak}$≤ r definit. per k→ +∞ allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} ak$ converge. (1) Se $\frac{ak+1}{ak}$ ≥ r definitiv. per k → +∞ allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} ak$ diverge. (2)	(1) Per ipotesi ∃ ko t.c. $\frac{ak+1}{ak}$≤ r V k ≥ ko. Quindi: $ak = \frac{ak}{ak-1} * \frac{ak-1}{ako} .. \frac{ako+1}{ak0} * ako$ ≤ ako*$r^{(k+ko)}$ sostituisci h = k-ko si ha: $\sum_{k=ko}^{\infty} ako * r^{(k-ko)} = ako \sum_{h=0}^{\infty} r^h$ converge essendo multipla di una serie geometrica di ragione <1. In definitiva la serie converge perché maggiorata dal termine generale di una serie convergente. (2) in questo caso, per k ≥ ko si ha ak+1 ≥ ak, perciò {ak}k∈N è una successione crescente e positiva, dunque non infinitesima e deve divergere.

Criterio asintotico del rapporto (criterio del rapporto)	Sia {ak}k∈N successione a termini positivi e t.c. $\lim_{k\to+\infty}\frac{ak+1}{ak}$ = L	se L< 1 la serie ak CONVERGE (1) se L>1 la serie ak DIVERGE (2) se L=1 non si può dire nulla sulla convergenza della serie (3)	(1) posto ε> 0 t.c. r=L+ε< 1 definitivamente si ha che $\frac{ak+1}{ak}$ ≤ L+ε= r, quindi per il criterio del rapporto converge. (2) posto ε> 0 t.c. L-ε>1 definitivamente si ha $\frac{ak+1}{ak}$ ≥ L-ε > 1 quindi per il c del rapporto diverge (3) esempio $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(1+n)^2}$ = 1 ma 1/n diverge, mentre 1/n^2 converge.
Criterio della radice	Sia {ak}k∈N successione a termini non negativi.	Allora se ∃ r<1 t.c. $\sqrt[k]{ak}$ < r definit. per k→+∞ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} ak$ converge. (1) Se $\sqrt[k]{ak}\ \geq 1$ definit. per k→ +∞ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} ak$ diverge. (2)	(1) per ipotesi ∃ ko t.c. $\sqrt[k]{ak}$ ≤ r, cioè ak ≤ r^k, V k ≥ ko. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} ak$ ha quindi termine generale definitivamente maggiorato dal termine di una serie geometrica di ragione r < 1, che è dunque convergente. (2) in questo caso per k ≥ ko si ha $\sqrt[k]{ak}\ \geq 1$ da cui ak ≥ 1, perciò {ak}k∈N non può essere infinitesima, siccome la serie non converge ed essendo a termini positivi diverge.
Criterio asintotico della radice (criterio della radice)	Sia {ak}k∈N successione a termini non negativi e t.c. $\lim_{k\to+\infty}\sqrt{(ak)}$= L	Se L<1 la serie ak converge (1) Se L>1 la serie ak diverge (2) Se L=1 non si può dire nulla sulla convergenza della serie (3)	(1) posto ε> 0 t.c. L+ε<1 definitivamente si ha $\sqrt[k]{ak}$ ≤ L+ε = r < 1 per il criterio della radice la serie converge. (2) posto ε> 0 t.c. L-ε>1 definitivamente si ha $\sqrt[k]{ak}$ ≥ L-ε>1 per il criterio della radice diverge (3) esempio $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{an}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$ diverge, mentre $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{bn}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}=1$ converge
Criterio di Leibniz	Sia {ak}k∈N successione a termini non negativi, decrescente e INFINITESIMA e a segni alterni	Allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k * ak$ CONVERGE	
Teorema di weierstrass (th di bolzano – weierstrass)	Sia f una funzione reale definita in un intervallo [a,b] chiusa e limitata e quindi continua	Allora f è limitata e ha massimo e minimo in [a,b] t.c. f(xm)=min f(x) (1), f(xM)=maxf(x) (2)	(2) posto V = {f(x); x ϵ[a,b]}, S=sup V → ∃ (xn)nϵN ϵV V n t.c. $\lim_{n\to+\infty}(xn)=S$. se SϵR V ε>0 ∃ xϵV t.c. S-ε< x ≤ S es: ε=1/n, nϵN V nϵN ∃x t.c. S-1/n < xn ≤ S. se S=+∞ V n ∃ xn t.c. xn>n ⇔ $\lim_{n\to+\infty} xn$ = +∞ = S verifichiamo che ∃ (xn)CV . limy n = S xn∈V = {f(x); x∈[a,b]} cioè xn = f(yn) →un'altra sottosuccessione! C [a,b], per B-W: ∃ sottossuccessione (xk) di (xn) t.c. ∃ $\lim_{k\to+\infty} xk$= x = $\lim_{k\to+\infty} yk$ = S = x →x è MAX
Teorema di Bolzano o degli zeri	Data una funzione f reale a varibili realie continua in [a,b], definita in un intervallo [a,b] chiuso e limitato e che essa assumi agli estremi dell'intervallo valori di segno opposto	Allora f ammette almeno uno 0 in [a,b], cioè ∃ almeno un punto in cui f(Xo) = 0	

Teorema dei valori intermedi (th di bolzano)	F una funzione reale a variabili reali e continua sull'intervallo [a,b], detti il massimo e il minimo valore di f nell'intervallo [a,b]	Allora f assume tutti i valori compresi tra il suo massimo e il suo minimo	Dati y1,y2 ∈f(I) dimostriamo ∀ y∈]y1,y2[∃ p∈I t.c. f(p)=y. Siano x1,x2∈I t.c. f(x1)=y1 e f(x2)=y2 e supponiamo che x1 < x2. Considerando la funzione g(x)=f(x)-y essa è continua perché differenza tra f e y continue e t.c. g(x1)=g(x1)-y<0 e g(x2)=f(x2)-y>0. Per il th. Di bolzano ∃ p∈]x1,x2[C I t.c. g(p)=0. Ma allora f(p)=y e la dimostrazione è conclusa.
Derivata	Sia f una funzione reale a variabili reali definita in un intervallo I e Xo∈I	Se esiste il limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(Xo+h)-f(Xo)}{h}$ e si dice deriva o derivata prima di f.	
Legame tra derivabilità e derivabilità da destra e da sinistra	Sia f una funzione reale a varibili reali definita nell'intervallo]a,b[	Se è derivabile in Xo∈]a,b[⇔in Xo è derivabile da destra e da sinistra e f'-(Xo)=f'+(Xo). I tal caso f'(Xo) coincide con il valore assunto dalla derivata destra e sinistra	Considerata la funzione f(x){1 se x≤0, $\frac{sen\,x}{x}$ se x>0} e studiamo la D in Xo=0. Si osservi che la f è continua in 0. f'_(0)=0. L'esistenza delle derivata destra: $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$= $\lim_{x\to 0+}\frac{sen\,x-x}{x^2}$= $\lim_{x\to 0+}\frac{-x^3/_6+o(x^3)}{x^2}=0$ e quindi anche f'+(0)=0 da cui la derivabilità di f in 0, con f'(0) = 0.
Derivata di funzioni composte	Siano f e g funzioni reali a variabili reali, con f o g definita in un intervallo I di R. sia Xo∈I e che f sia derivabile in Xo e g defivabile in Xo.	Allora g o f è erivabile in Xo e vale: D(g o f)(Xo)=g'(f(Xo))*f'(Xo)	Sia y:dom g→R definita da y(y) { $\frac{g(y)-g(f(xo))}{y-f(xo)}$ se y≠f(xo), g'(f(xn)) se y=f(xo) } essendo g derivabile in f(xo), y risulta continua in f(xo) inoltre f(x)→f(xo) per x→xo aalora con yo=f(xo) tengo $\lim_{x\to Xo} y(f(x))$= $\lim_{x\to Xo} y(y)$=g'(f(xo)) deduco che: $\lim_{x\to Xo}\frac{g(f(x))-g(f(Xo))}{x-Xo}$= $\lim_{x\to Xo} y(f(x) * \frac{f(x)-f(Xo)}{x-Xo}$=g'(f(Xo))*f'(Xo) c.v.d.
Teorema di Fermat (th. Della perman. del segno) (th. derivabilità destra e sinistra)	Sia f:]a,b[→R, derivabile in Xo∈]a,b[e t.c. abbia in Xo punto di massimo o di minimo relativo	Allora f'(Xo)=0 (es con il punto di massimo)	Dalle ipotesi segue che ∃ δ>0 t.c f(x)≤f(Xo) per |x-Xo|<δ, allora $\frac{f(x)-f(Xo)}{x-Xo}$≥0 ∀ Xo-δ < x < Xo e dunque per il th. della permanenza del segno f'_(Xo)= $\lim_{x\to Xo-}\frac{f(x)-f(Xo)}{x-Xo}$≥0, mentre $\frac{f(x)-f(Xo)}{x-Xo}$≤0 ∀ Xo < x < Xo+δ e dunque per il th. d.p.s. f'+(Xo)= $\lim_{x\to Xo+}\frac{f(x)-f(Xo)}{x-Xo}$≤0 poiché f è derivabile in Xo volte→ f'_(Xo)=f'+(Xo) che per il th. della derivabilità da destra e da sinistra non può che essere f'(Xo) = 0.
Teorema di Rolle (th. di weierstrass) (th. di fermat)	Siano a,b ∈R e f:]a,b[→R funzione continua in [a,b] e derivabile in]a,b[con f(a)=f(b)	Allora ∃ un punto p∈]a,b[t.c. f'(p)=0 contiene almeno un punto stazionario	Poniamo f non costante e continua in [a,b] per weierstrass ha un MAX e MIN in [a,b] Xm≠XM. Inoltre almeno 1 tra MAX e MIN è interno all'intervallo [a,b]. allora essendo f derivabile in]a,b[per il th. di fermat ci assicura che almeno 1 tra Xm e XM è punto stazionario per f.
Teorema di Lagrange o del valore intermedio (th. di rolle)	Siano a, b ∈R e f:[a,b]→R funzione continua in [a,b] e derivabile in]a,b[	Allora ∃ un punto p ∈]a,b[t.c. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(p)$ = α	Presa h:[a,b]→R definita da h(x)=[f(b)-f(a)](x-a)-[f(x)-f(a)](b-a) è continua su [a,b] e derivabile in]a,b[soddisfa h(a)=h(b)=0 per il th. do rolle ∃ p∈]a,b[t.c. h'(p)=0.

Teorema di Cauchy (th. di Rolle)	Siano a,b∈R e f,g:[a,b] →R finzioni continue in [a,b] e derivabili]a,b[	Allora ∃ un punto p∈]a,b[t.c. g(p)[f(b)-f(a)]=f'(p)[g(b)-g(a)]	Presa h:[a,b]→R h(x) = [f(b)-f(a)] * [g(x)-g(a)] - [f(x)-f(a)] * [g(b)-g(a)] continua su [a,b], derivabile in]a,b[e soddisfa h(a)=h(b)=0 per Rolle ∃ p∈]a,b[t.c. h'(p)=0. Da questo segue g(p)*[f(b)-f(a)] = f'(p)*[g(b)-g(a)]
Legame tra monotonia e derivata prima (th. di lagrange)	Siano A intervallo di R e f:A→R funzione derivabile	Allora f è monotona crescente ⇔f'(x) ≥0 Vx∈A F è monotona decrescente ⇔f'(x)≤0 Vx∈A	f'(x)≥0 V x∈A f monotona crescente. Siano x1,x2∈A , x1<x2 e dimostro che f(x2)≥f(x1). Applico il th. di lagrange a f in [x1,x2] e ottengo che ∃ p∈]x1,x2[t.c $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$= f'(p) da cui f(x2) ≥ f(x1) come si voleva f'(p)≥0.
Legame tra punti di flesso e derivata 2°	Sia f:]a,b[→R funzione continua e derivabile una volta in]a,b[e due volte in Xo∈]a,b[	Se Xo è putno di flesso per f allora f''(Xo) = 0.	∃ δ>0 t.c. f è convessa in]Xo-δ,Xo] e concava in [Xo,Xo+δ[allora f è crescente in]Xo-δ,Xo] e decrescente in [Xo,Xo+δ[. Allora $\frac{f'(x)-f'(Xo)}{x-Xo}$ ≥ 0 V Xo-δ < x < Xo, $\frac{f'(x)-f'(Xo)}{x-Xo}$ ≤ 0 V Xo < x < Xo+δ siccome f'(x) è derivabile in Xo → valgono contemporaneamente: f''(Xo)= $\lim_{x\to Xo-}\frac{f'(x)-f'(Xo)}{x-Xo}$ ≥ 0, f''(Xo)= $\lim_{x\to Xo+}\frac{f'(x)-f'(Xo)}{x-Xo}$ ≤ 0 e quindi f''(Xo) = 0 c.v.d.
Formula di Taylor con il resto di Peano	Sia f una funzione reale definita in un intervallo I dove Xo∈I e sia derivabie n-1 volte in I e con derivata n-esima in Xo	$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_{n,x_0}(x)$ dove $\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0 \qquad (1.1)$	
Integrale	Data una funzione limitata f[a,b] →R e se V I∈R t.c. Vε>0∃δ>0 t.c.V partizione puntata (P,ξ) con |P|<δ si ha |S(f,P,ξ)-I|<ε	Il limite I viene chiamato integrale definito di f in [a,b] e si indica con i siboli: $\int_a^b f(x)$dx	
Funzione integrabile	Data f:[a,b]→R funzione limitata	f è integrabile secondo Cauchy-Riemann in [a,b] Vε>0 ∃δ>0 t.c. V coppia di partizioni puntate di [a,b] con |P'|,|P''| < δ si ha: |S(f,P',ξ')-S(f,P'',ξ'')| < ε	
Teorema sulla disuguaglianza integrale con valore assoluto	Sia f:[a,b] →R una funzione integrabile in [a,b]	Allora : $\|\int_a^b f(x)dx\|\leq\int_a^b \|f(x)\|\,dx$	

Teorema della media (th. della monotonia) (th. dei valori intermedi)	Siano a<b e f:[a,b]→R integrabili, detti m=inf[a,b]f e M=sup[a,b]f	Allora si ha che: m ≤ $\frac{1}{b-a}*\int_a^b f(x)dx$ ≤ M , il valore tra m e M viene chiamato media integrale o valor medio di f in [a,b]	Grazie al th. dei valori intermedi e applicando il th. della monotonia si ottiene dunque: m*(b-a)=$\int_a^b m\ dx$ ≤ $\int_a^b f(x)dx$ ≤ $\int_a^b M\ dx$=M*(b-a) e dividendo per (b-a) si ottiene la disequazione di partenza.
Teorema precedente	Sia f:[a,b]→R, f continua e P e Q due primitive di f	Allora ∃ k∈R t.c. P(x)-Q(x) = k V x∈[a,b]	D(P-Q)(x) = DP(x) – DQ(x) = f(x) – f(x) = 0 ma siccome P - Q è definite in un intervallo → P-Q = k costante
Teorema fondamentale del calcolo integrale versione 7.8	Sia f: [a,b]→R una funzione integrabile e che F sia una qualsiasi primitiva di f in [a,b]	Allora vale: $\int_a^b f(x)dx$= F(b) - F(a) detta formula fondamentale del calcolo integrale	Se f è una primitiva ed è continua → g(x) = $\int_a^x f(t)dt$ t.c. G'(x) = f(x) V x. Per il th. precedente ∃ k∈R t.c. F(x) = $\int_a^x f(t)dt + k$ quindi: $\int_a^b f(t)dx$ = G(b) – G(a) = F(b) + k – F(a) – k = F(b) – F(a) c.v.d.
Criterio del confronto	Siano f,g:]a,b[→R con a∈R esteso funzioni integrabili in ogni sottointervallo [c,b]C[a,b] e t.c. 0≤f(x)≤g(x) V x ∈]a,b[	Allora: se g ha int. Improprio convergente in]a,b[, anche f ha int. Improprio convergente in]a,b[se f ha int. Improprio divergente in]a,b[, anche g ha int. Improprio divergente in]a,b[	Gli integrali impropri di f e g convergono oppure divergono per ipotesi e per la monotonia dell'integrale definito se c∈]a,b[allora: 0 ≤ $\int_c^b f(x)dx$ ≤ $\int_c^b g(x)dx$, passando al limite c→a+ 0 ≤ $\int_a^b f(x)\ dx$ ≤ $\int_a^b f(x)\ dx$ se dunque g converge anche f converge al contrario se f diverge anche g diverge.
Criterio dell'integrale per le serie	Siano ko∈N e f:[ko,+∞[→R funzione decrescente NON negativa	Allora: $\sum_{k=ko}^{\infty} f(k)$ converge ⇔ $\int_{ko}^{+\infty} f(x)dx$ converge	