Linee guida esercizi FAMP/CAMP

1) Trovare la lunghezza di una curva

① Trovare la lunghezza della curva $r(t) = (2\sin t, 5t, 2\cos t)$ $-10 \leq t \leq 10$

$$\text{Lung} = \int_{-10}^{+10} \|r'(t)\| \, dt = \int_{-10}^{10} \sqrt{(2\cos t)^2 + (5)^2 + (-2\sin t)^2} = \int_{-10}^{10} \sqrt{4+25} = 10\sqrt{29} + 10\sqrt{29} = \boxed{20\sqrt{29}}$$

E lunghezza curva in coordinate polari

⑤ Sia $L(x)$ la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da $\rho(\theta) = e^{-3\theta}$ al variare di $\theta \in [0,x]$. Calcolare $\lim_{x \to +\infty} L(x)$

$\rho'(\theta) = -3e^{-3\theta}$

$$\Rightarrow L(x) = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'(\theta)^2} \, d\theta = \int_0^x \sqrt{e^{-6\theta} + 9e^{-6\theta}} \, d\theta = \int_0^x \sqrt{10 e^{-6\theta}} \, d\theta$$

$$= \int_0^x \sqrt{10}\, e^{-3\theta} \, d\theta = \sqrt{10} \int_0^x e^{-3\theta} \, d\theta = \sqrt{10} \cdot \left[-\frac{1}{3} e^{-3\theta} \right]_0^x = \sqrt{10} \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{3} \left(1 - e^{-3x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} L(x) = \frac{\sqrt{10}}{3} (1 - 0) \approx 1.05$$

2) Determinare valore approssimato usando la definizione di derivata

④ Sia $f: [0,5] \to \mathbb{R}^2$ derivabile. Sappiamo che $f(3) = (1,2)$ e $f'(3) = (-3,4)$. Usando la definizione di derivata. Determinarne un valore approssimato per la seconda componente di $f(3,1)$.

$$\Rightarrow \text{DEFINIZIONE} \rightarrow \boxed{\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)} \Rightarrow f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + R(t)$$

con $\lim_{t \to t_0} \frac{R(t)}{t - t_0} =$

$$\hookrightarrow f(3,1) = f(3) + f'(3) \cdot (0.1) + R(t)$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (0.1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \boxed{(0.7, \underline{2.4})}$$

3) Calcolo esistenza di un limite

① Il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2-y^2}{x^2+y^2}$

↳ $\boxed{y = mx}$ $\Rightarrow \frac{4x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} \Rightarrow \frac{(4-m^2)}{(1+m^2)}$ $\Rightarrow$ dipende da m $\Rightarrow$ NON ESISTE

4) Calcolo derivata direzionale

⑥ Calcolare se esiste la derivata direzionale di $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ $(x,y)\neq(0,0)$, 0 se $(x,y)=(0,0)$ in $(0,0)$ rispetto al vettore $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\boxed{\text{DEF} \to \partial_{\vec{u}} f(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h\vec{u}) - f(p)}{h}}$$

In $(0,0)$ devo applicare la definizione $\Rightarrow \partial_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 u_1^3}{h^2u_1^2 + h^2u_2^2}$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \Big/ \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{2\sqrt{2}}{8} \approx 0.35$$

5) Direzione di massima crescita e massima velocità di variazione (gradiente)

⑦ Si supponga che la temperatura in un punto (x,y,z) dello spazio sia data da $T(x,y,z) = \frac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$. Nel punto $(1,1,-2)$

$\partial_x T(x,y,z) = -80\frac{2x}{D^2}$

$\partial_y T(x,y,z) = -80\frac{4y}{D^2}$

$\partial_z T(x,y,z) = -80\frac{6z}{D^2}$

$\Rightarrow$ Direzione max crescita $\Rightarrow \nabla(1,1,-2) = (-1,-2,6)$

↳ Massima velocità di variazione $\Rightarrow \|\nabla(1,1,-2)\| = \sqrt{\left(\frac{160}{16^2}\right)^2 + \left(\frac{320}{256}\right)^2 + \left(\frac{960}{256}\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25+100+900}{64}} = \sqrt{\frac{1025}{8^2}} = 4.00195$$

6) Individuare una primitiva che vale un certo valore nell'origine

④ Determinare se ∃ una primitiva di $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{3z})$. Individuare quella primitiva U che vale 2 nell'origine. Calcolare $U(1,1,0)$

$$U \Rightarrow \begin{cases} \int y^2\,dx = xy^2 \\ \int 2xy + e^{3z}\,dy = xy^2 + ye^{3z} \\ \int 3ye^{3z}\,dz = ye^{3z} \end{cases} \Rightarrow U(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + c$$

$U(0,0,0) = 2 \Rightarrow c = 2$

$U(1,1,0) = 1 + 1 + 2 = 4$

7) Approssimare valori di funzione differenziabile

(5) Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in $(2,0)$, con $f(2,0) = 1$, $\partial_x f(2,0) = 2$, $\partial_y f(2,0) = -5$

Approssimare $f(1.9, 0.1)$

$$\Rightarrow f(1.9, 0.1) \doteq f(2,0) + \partial_x f(2,0)(1.9-2) + \partial_y f(2,0)(0.1-0)$$
$$= 1 - 0.2 - 0.5 = 0.3$$

8) Determinare un valore incognito di un piano tangente al grafico

(7) $f(x,y) = x^2 + 6xy - 5y^2$. Determinare a affinché $(1,2,a) \in$ al piano tangente al grafico in $(0,1,f(0,1))$

$$\Rightarrow z = -5 + 6(x-0) + (-10)(y-1) = -5 + 6x - 10y + 10$$

$$\Rightarrow a = 5 + 6 \cdot 1 - 10 \cdot 2 = -9$$

9) Calcolo integrale doppio

(2) Calcolare $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} x^2 \sin y \, dx\, dy$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy \, dx = \int_0^1 x^2 \Big[-\cos y\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^1 x^2 (0+1)\, dx = \int_0^1 +x^2 = \frac{1^3}{3} \simeq 0.33$$

10) Utilizzo formula della catena

(1) Siano $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Si supponga che

$g(3) = 2$ $\quad g'(3) = 5$ $\quad h(3) = 7$ $\quad h'(3) = -4$ $\quad \partial_x f(2,7) = 6$ $\quad \partial_y f(2,7) = -8$

Posto $z(t) = f(g(t), h(t))$ calcolare $z'(3)$

↳ $\boxed{\text{Formula della catena} \to (f \circ r)'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)}$

$$\Rightarrow z'(3) = \begin{pmatrix} f_x'(2,7) \\ f_y'(2,7) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g'(3) \\ h'(3) \end{pmatrix} = 6 \cdot 5 + (-8) \cdot (-4) = 30 + 32 = 62$$

11) Integrale di un campo

QUIZ RIPASSO SETTIMANA

① Siano $\vec{F}(x,y,z)=(xy, yz, zx)$ e $\ell(t)=(t,t^2,t^3)$, $t\in[0,1]$ calcolare $\int_\ell \vec{F}\, d\ell$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\ell \vec{F}\, d\ell = \int_a^b \vec{F}(\ell(t))\cdot \ell'(t)\,dt = \int_a^b F_1(x)\,dx + F_2(x)\,dy + F_3(x)\,dz}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t\cdot t^2\cdot 1 + t^2\cdot t^3\cdot 2t + t^3\cdot t\cdot 3t^2\,dt = \int_0^1 t^3+2t^6+3t^6\,dt = \int_0^1 t^3 + \int_0^1 5t^6\,dt = \frac{1}{4}+\frac{5}{7} = \frac{27}{28}$$

12) Dimostrare se un campo è conservativo

③ Il campo $\vec{F}(x,y)=(x-y,\ x-2)$ è conservativo?

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y)=x-y \Rightarrow \int x-y\,dx = \frac{x^2}{2}-xy+c$$

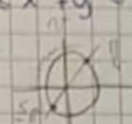
$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y)=x-2 \Rightarrow \int x-2\,dy = xy-2y$$

$\Rightarrow$ Impossibile

13) Calcolo integrale su dominio “complesso” con cambio in coordinate polari

① Calcolare $\int_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $D=\{(x,y)\ y\ge x,\ 1\le x^2+y^2\le 16\}$

$\rho\sin t \ge \rho\cos t$



$$\int \frac{\rho\cos t\cdot\rho^2\sin^2 t}{\rho^2}\,\rho\,d\rho\,dt = \int \rho^2\cos t\sin^2 t$$

$$\int_1^4 \rho^2\,d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos t\sin^2 t = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^4 \cdot \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \left(\frac{64}{3}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{8}}{3}-\frac{\frac{2\sqrt{2}}{8}}{3}\right)$$

$$= 21\cdot\left(-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}\right) = -7\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{7\cdot 2}{2\sqrt{2}}$$

14) Calcolare un'area

③ Sia R: $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{4}$, $xy=2$, $xy=5$. Calcolare l'area di R lug 4

$\Rightarrow \frac{x^2}{4} \le y \le x^2 \quad 2 \le xy \le 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \le \underbrace{\frac{y}{x^2}}_{u} \le 1 \quad 2 \le \underbrace{xy}_{v} \le 5 \quad \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{y}{x^2} \Rightarrow y = ux^2 \Rightarrow y = u\frac{v^2}{y^2} \Rightarrow y = \sqrt[3]{uv^2} \\ v = xy \Rightarrow x = \frac{v}{y} = \frac{v}{\sqrt[3]{uv^2}} \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi(u,v) = \left(\frac{v}{\sqrt[3]{uv^2}}, \sqrt[3]{uv^2}\right)$ con $\left\{\frac{1}{4} \le u \le 1 \text{ e } 2 \le v \le 5\right\} = D$

$$\int_R 1 \, dx\, dy = \int_D |\varphi'(u,v)| \, du\, dv$$

$$= \int_D$$

15) Calcolare l'integrale di un campo lungo r

① Sia $\vec{F}(x,y) = (2x\cos(x^2+y^2), 2y\cos(x^2+y^2)+1)$. Sia r la curva $r(t) = \left(t\sqrt{\frac{\pi}{2}}, t^2(1-t)\right)$ con $t \in [0,1]$. Calcolare l'integrale di $\vec{F}$ lungo r.

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dx}\vec{F}(x,y) = \int 2x\cos(x^2+y^2)\,dx = \sin(x^2+y^2) \\ \frac{d}{dy}\vec{F}(x,y) = \int 2y\cos(x^2+y^2)+1\,dy = \sin(x^2+y^2)+y \end{cases}$

$\Rightarrow U(x,y) = \sin(x^2+y^2)+y \quad \Rightarrow U(r(0)) = 0 \quad U(r(1)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+0\right)+0 = 1$

$$\boxed{\Rightarrow \int_{r(t)} \vec{F}(x,y)\,dr = U(r(b)) - U(r(a)) = 1 - 0 = 1}$$

16) Determinare il dominio di F e calcolare l'integrale di F sul cammino

② Sia $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x+y}}, -\frac{x+2y}{\sqrt{x+y}} \right)$. Determinare il dominio di F e calcolare l'integrale di $\vec{F}$ sul cammino $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$U_x(x,y) = \int \frac{x}{\sqrt{x+y}}\,dx = \frac{2(x+y)^{3/2}}{3} - 2y\sqrt{x+y} + C$$

$U(\gamma(a)) = \frac{2}{3} - 0$

$U(\gamma(b)) = -\frac{2}{3} - 2$

$$U_y(x,y) = \int -\frac{x+2y}{\sqrt{x+y}}\,dy = -\frac{2(x+y)^{3/2}}{3} - 2y\sqrt{x+y} + C$$

?

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\gamma = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = \left(\frac{2}{3} - 2\right) - \left(\frac{2}{3} - 0\right) = -2$$

17) Integrale iterato su una regione del piano

④ Interpretare il seguente integrale iterato come l'integrale di una funzione su un opportuna regione D del piano $\int_3^6 \int_{\frac{x-3}{3}}^1 e^{y^2}\,dy\,dx \Rightarrow D = \{(x,y) : 3 \le x \le 6,\ \frac{x-3}{3} \le y \le 1\}$

$y \le 1 \mid \frac{x-3}{3} \le y \Rightarrow x \le 3y + 3 \Rightarrow 0 \le y \le 1 \wedge 3 \le x \le 3y+3$

$$\int_0^1 \int_3^{3y+3} e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 3y e^{y^2}\,dy = \left[\frac{3y\,e^{y^2}}{2y}\right]_0^1 = \frac{3}{2}e - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(e-1)$$

18) Calcolare integrale palla con cambiamento di coordinate in sferiche

① Usando il cambiamento in coordinate polari sferiche calcolare $\int_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$ dove B è la palla di raggio 1 e centro in O.

$$\int_{\substack{\rho \in [0,1] \\ \theta \in [0,2\pi] \\ \phi \in [0,\pi]}} e^{(\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\phi)^{3/2}} \rho^2 \sin\phi \,d\rho\,d\phi\,d\theta = \int_B e^{\rho^3} \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3}\,d\rho \cdot \left[-\cos\phi\right]_0^\pi = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 3\rho^2 e^{\rho^3} \cdot (-\cos\pi + \cos 0)\,d\rho = \frac{4}{3}\pi(e^1 - 1) \approx 7{,}19$$

19) Calcolare il volume del solido che sta sotto il cono e sfera in coordinate polari

③ Usando il cambiamento in coordinate polari sferiche calcolare il volume del solido che sta so[pra] il cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e sotto la sfera di centro $(0,0,1/2)$ e raggio $\frac{1}{2}$ di eq. $x^2+y^2+z^2=z$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \le z \le x^2+y^2+z^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho \sin\phi \sin\theta \\ y = \rho \sin\phi \cos\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

$\to \sqrt{\rho^2 \sin^2\phi} \le \rho \cos\phi \Rightarrow \cos\phi \ge \sin\phi \qquad \phi \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$\to \rho\cos\phi \le \rho^2 \Rightarrow \cos\phi \le \rho \Rightarrow \rho \in [0, \cos\phi]$

$$\int_D \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \, d\rho \, d\phi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3\phi}{3} \sin\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{\cos^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi}{3}\left(-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{16} = \frac{\pi}{8}$$

20) Volume dell’insieme facendo ruotare

① Determinare il volume dell'insieme ottenuto facendo ruotare $\{(x,y) : x \in [0,2], x^2 \le z \le 4\}$ attorno a[ll'asse] z

$\Rightarrow 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ Volume

21) Calcolo integrale su superficie cartesiana

③ Sia Σ la sup. cartesiana $z = x^2+y^2$ con $x^2+y^2-4y \le 0$, $x \le 0$. Calcolare $\int_\Sigma \frac{x}{4\sqrt{4z+1}} \, d\sigma$

$$\int \frac{x}{4\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} \cdot \sqrt{1+|\nabla(x^2+y^2)|} \, dx \, dy$$

$$= \int \frac{x}{4\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \cdot \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2} \, dx \, dy =$$

$(y^2-4y) \to (y-2)^2 = y^2-4y+4$

$x^2+y^2-4y+4-4 \le 0 \Rightarrow x^2+(y-2)^2 \le 4$

$\cos t \le 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2\rho \cos t \\ y = 2+2\sin t \end{cases} \qquad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] \qquad \rho \in [0,2]$$

$$\int\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} 2\rho \cos t \; \rho^2 \ldots = 2\int_0^2 \rho^3 \, d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos t \, dt = \frac{2}{4} \cdot \left[-\sin\frac{3}{2}\pi + \sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{8}{4} \cdot 2$$

22) Determinare la natura di un punto critico

② $f(x,y)=x^3+x-4xy-2y^2$. Determinare il punto critico (a,b) con $b<1$ e determinare la natura

$\nabla f(x,y)=(3x^2+1-4y,\ -4x-4y) \Rightarrow \nabla f(x,y)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+1-4y=0 \Rightarrow 3x^2+4x+1=0 \\ -4x-4y=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow y=1,\ \frac{1}{3} \end{cases}$ $\Delta=16-12=4$ $x_{1,2}=\frac{-4\pm 2}{6}=-1,\ -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 6x & -4 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 6x-4 \Rightarrow$ in $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \det Hess\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)<0 \Rightarrow$ sella

③ $f(x,y)=x^2+xy+y^2-x^2y^2$. Determinare la natura di $(0,0)$

$\nabla f(x,y)=(2x+y-2xy^2,\ x+2y-2x^2y) \Rightarrow \nabla f(0,0)=(0,0)$

$\det Hess f(0,0)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} >0 \Rightarrow \partial^2_x f(0,0)>0 \Rightarrow$ min locale

- per le funzioni di due variabili:

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

VARIABILI ALEATORIE

Variabile di Bernulli

Si consideri un esperimento caratterizzato da una sola estrazione ed il cui risultato possa essere di due tipi soltanto: successo-insuccesso

$$x=0 \quad \equiv insuccesso$$

$$x=1 \quad \equiv successo$$

Distribuzione di probabilità di massa (PMF) della variabile x

$$p_X(x)=\begin{cases} p & \text{se } x=1 \\ 1-p & \text{se } x=0 \end{cases}$$

Media e varianza

$$m_X=E[X]=\sum x p_X(x)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

$$\sigma_X^2=E\left[(X-m_X)^2\right]=\sum(x-m_X)^2 p_X(x)=(1-p)^2 p+(0-p)^2(1-p)=(1-p)p$$

Variabile binomiale

Essa è la variabile aleatoria che conta il numero di successi in n prove di Bernulli indipendenti

X = numero di Successi nelle n prove

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Qual è la probabilità che vi siano almeno 2 lampadine difettose?

Lampadina difettosa Sì/NO: prova di Bernoulli di parametro 0.1 (Successo: è difettosa)

100 Lampadine: sequenza di 100 prove di Bernoulli di par. 0.1.
Prove indipend. $\Rightarrow$
X = # di lampadine difettose nella scatola con 100 lampadine

326

27 Pagina 6

è v.a. binomiale
$X \sim B(100, 0.1)$.

$$P(X\geq 2)=\sum_{k=2}^{100}P(X=k)=\sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}(0.1)^k(1-0.1)^{100-k}$$

$$=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)$$

$$=1-\binom{100}{0}(0.1)^0(1-0.1)^{100}-\binom{100}{1}(0.1)^1(1-0.1)^{99}$$

Variabile geometrica

Conto il numero di tentativi prima di avere un insuccesso

Si effettua una successione di prove di Bernoulli INDIPENDENTI, ciascuna delle quali è un successo con probabilità $p \in]0,1[$.

X = numero di tentativi per avere il primo successo

$k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. $\quad P(X=k) = P(I \text{ al } 1° \cap I \text{ al } 2° \ldots \cap I \text{ al } (k-1) \cap S \text{ al } k)$

$$= P(I \text{ al } 1°) \times P(I \text{ al } 2°) \times \ldots \times P(I \text{ al } k-1) \times P(S \text{ al } k)$$

$$= \boxed{(1-p)^{k-1} p} \qquad (k \geq 1)$$

ES. Dado lanciato più volte, equilibrato, lanci INDIPENDENTI

(a) Qual è la probabilità che servano 10 lanci affinché esca il 6?

(b) Qual è la probabilità che servano > 10 lanci affinché esca il 6?

a) X = # tentativi necessari affinché esca il 6

$$X \sim Ge\left(\frac{1}{6}\right) \qquad P(X=10) = (1-p)^{10-1} p = \left(1-\frac{1}{6}\right)^9 \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^9 \frac{1}{6}.$$

b) $P(X>10) = (1-p)^{10} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.

ESEMPIO BAYES

⑤ Si considerano 2 mazzi di carte da Poker. A è normale mentre B ha 26 carte rosse e 2
Il mazzo A viene scelto con probabilità $\frac{4}{3}$. Si estraggono 2 carte con reinm. 0.514
Qual è la probabilità che la 2^a carta sia rossa sapendo che la prima è rossa?

$$P(2^a R \mid 1^a R) = ? \Rightarrow P(1^a R) = P(1^a R \mid A)P(A) + P(1^a R \mid B)P(B)$$

$$= \frac{23}{52} \cdot \frac{4}{3} + \frac{26}{52} \cdot \frac{1}{3} = \frac{118}{260}$$

$$\Rightarrow P(2^a R \mid 1^a R) = \frac{P(2^a R \mid 1^a R \text{ e } A)\, P(1^a R \text{ e } A)}{P(1^a R)} + \frac{P \sim B \; \sim B}{P \sim}$$

?

$$= \frac{23 \cdot}{52 \cdot} \cdot \frac{23 \cdot 4}{52 \cdot 3} \cdot \frac{260}{118} = \frac{23 \cdot 26}{51}$$

VALORE ATTESO VARIABILE DISCRETA

$$\boxed{E(g(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x_n)\, P(X = x_n)}$$

$$\boxed{E(aX + b) = a\,E(X) + b}$$

VALORE ATTESO VARIABILE BINOMIALE : E(x) = np

VARIABILE ALEATORIA DI POISSON

DEF. Si dice che X è variabile di Poisson di parametro $\lambda > 0$ se X assume i valori in $\mathbb{N}$ con $\boxed{P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$

Si scrive $X \sim P_o(\lambda)$ $\qquad X \sim (\lambda)$

L'esempio visto all'inizio giustifica la v. di Poisson come la "legge delle probabilità piccole".

Abbiamo visto che se $X_n \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$ allora

piccolo

$$P(X_n = k) \longrightarrow P(X=k), \quad \text{dove } X \sim P_o(\lambda)$$

Nella pratica, se $X \sim B(n, p)$ grande $\qquad p$ "piccolo"

$\lambda = pn \qquad P(X=k) \approx P(Y=k) \qquad Y \sim P_o(np)$.

PROCESSO DI POISSON

ES. # telefonate ad un centralino sia descritto da un processo di Poisson di parametro 30/ora

- Qual è la probabilità che nei prossimi 3 minuti non arrivi nessuna telefonata?

$$X_{3\,minuti} \sim P_o\left(30 \times \frac{3}{60}\right) = P_o\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$P(X_{3\,minuti} = 0) = e^{-\frac{3}{2}} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^0}{0!} = e^{-\frac{3}{2}} \simeq 22.3\%$$

- Prob che in 5 minuti arrivino almeno 5 telefonate?

$$X_{5\,minuti} \sim P_o\left(\frac{5}{60} \times 30\right) = P_o\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$P(X_{5\,minuti} \geq 5) = 1 - P(X_{5\,min} < 5)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{4} e^{-\frac{5}{2}} \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^k}{k!} \simeq 4.2\%$$

VALORE ATTESO POISSON:

VALORE ATTESO DELLA POISSON:

$$\boxed{X \sim Po(\lambda) \qquad E(X) = \lambda}$$

VARIANZA

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

VARIABILE NORMALIZZATA

VARIABILE NORMALIZZATA.

X v.a. con $Var(X) \neq 0$.

La variabile normalizzata di X è $\boxed{\dfrac{X - E(X)}{\sigma_X}}$

OSS: $\boxed{\sigma_{aX} = \sqrt{Var(aX)} = \sqrt{a^2 Var X} = |a| \sqrt{Var X} = |a| \sigma_X}$

VARIANZA SOMMA DI VARIABILI ALEATORIE

$$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$

VARIANZA BINOMIALE

$$\boxed{\text{Se } X \sim B(n,p) \Longrightarrow Var(X) = np(1-p)}$$

VARIABILE CONTINUA, CALCOLO DENSITA, FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

Esempi

sabato 26 dicembre 2015 17:26

Esercizio. Sia $f(x) = \begin{cases} c\,x\,e^{-x/2} & x>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

1) Per quale $c>0$ f è la densità di una variabile continua X

2) Determinare la funzione di distribuzione di X

3) Calcolare $P(X \in [3,4[)$

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt +$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} C\,t\,e^{-t/2}\,dt$$

$$\int t\,e^{-t/2}\,dt = -2t\,e^{-t/2} + \int 2\,e^{-t/2}\,dt$$

$$= -2t\,e^{-t/2} - 4\,e^{-t/2} + \text{Cost.}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} t\,e^{-t/2}\,dt = \left[-2t\,e^{-t/2} - 4\,e^{-t/2}\right]_0^{+\infty} = 4$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 4C = 1 \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{1}{4}}$$

b) $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

- $x \le 0$ $F_X(x) = 0$
- $x \ge 0$ $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f}_{0} + \int_0^x f$

$$= \int_0^x t\,e^{-t/2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2t\,e^{-t/2} - 4\,e^{-t/2}\right]_0^x = \frac{1}{4}\left(-2x\,e^{-x/2} - 4e^{-x/2} + 4\right)$$

c) $P(X \in [3,4[) = F_X(4) - F_X(3)$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(-2x\,e^{-x/2} - 4e^{-x/2} + 4\right)\right]_3^4 = \dots$$