

57. Problemkern und Suchbaum (Kernelization und Searchtree), 10 Punkte

Das Problem der **Knotenüberdeckung** ist wie folgt definiert.

**Eingabe:** Ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $n$  Knoten und eine Zahl  $k$ .

**Frage:** Gibt es eine Menge  $S$  mit  $|S| \leq k$ , so dass jede Kante mit mindestens einem Knoten von  $S$  inzident ist?

Dieses Problem ist im allgemeinen NP-vollständig. Das bedeutet, dass es *wahrscheinlich* keinen Polynomialzeitalgorithmus für das Problem gibt.

- (a) Welche Laufzeit hat der naive Algorithmus, der alle Teilmengen der Größe  $k$  ausprobiert?
- (b) Zeigen Sie, dass das Knotenüberdeckungsproblem einen Problemkern der Größe  $k^2 + k$  hat, der in polynomieller Zeit gefunden werden kann. Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass das Problem in FPT liegt.
- (c) Finden Sie einen Suchbaum mit  $2^k$  Blättern. Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass es einen Algorithmus mit Laufzeit  $O(2^k n^2)$  gibt.
- (d) Vergleichen Sie die Algorithmen aus (a), (b) und (c).
- (e) (0 Punkte) Es ist nicht schwierig, einen Suchbaum mit  $o(2^k)$  Blättern zu finden.

58. Parameterunabhängig, 0 Punkte

Nehmen Sie an, Sie haben einen Algorithmus, der eine Knotenüberdeckung der Größe  $k$  in  $O(\alpha^k n)$  Zeit findet, falls bekannt ist, wie groß  $k$  ist ( $\alpha > 1$ ). Können Sie daraus einen Algorithmus entwickeln, welcher nicht wissen muss wie groß  $k$  ist? Was ist die Laufzeit von Ihrem Algorithmus?

59. Baumweite, 10 Punkte

In der Vorlesung wurde das Konzept der Baumweite eingeführt.

- (a) Zeigen Sie, dass der  $k \times n$ -Gittergraph Baumweite kleiner gleich  $k$  hat.
- (b) Zeigen Sie, dass ein vollständiger Graph mit  $n$  Knoten (eine Clique) mindestens Baumweite  $n - 1$  hat.
- (c) Gegeben eine Baumzerlegung eines Graphen  $G$  mit Baumweite  $\omega$ . Beschreiben Sie einen Algorithmus, der die Größe einer kleinsten Knotenüberdeckung in  $O(2^\omega n)$  Zeit findet. Verwenden Sie dabei dynamische Programmierung. Definieren Sie Teilprobleme und erklären Sie ihre Rekursion. Sie müssen nicht beschreiben, wie Sie die Knotenüberdeckung finden.

60. Planare Graphen, 0 Punkte

Es ist bekannt, dass planare Graphen mit einer Knotenüberdeckung der Größe  $k$  eine Baumzerlegung der Größe  $O(\sqrt{k})$  haben, welche in  $O(2^{c\sqrt{k}} n)$  gefunden werden kann (für hinreichend großes  $c \approx 70$ ). Welche Laufzeit ergibt sich daraus für die Knotenüberdeckung auf planaren Graphen? Vergleichen Sie den Algorithmus mit den Algorithmen aus Aufgabe 57.

61. Mögliches Programmierprojekt, 15 Betonpunkte als Zusatzpunkte

Implementieren und visualisieren Sie den Suchbaum aus Aufgabe 57 (c) graphisch. Ihr Programm sollte den Benutzer die Möglichkeit zur Eingabe geben und die einzelnen Schritte des Algorithmus visualisieren. Kommen Sie in die Sprechstunden von Felix oder Till, wenn Sie an der Aufgabe Interesse haben.