18. Rekursion

Siehe handschriftliche Aufzeichnungen (Seite 3) von Marian. Danke!

Musterlösung aus dem Tutorium 10.11.2014

$$T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 2$$

a) $n = 3 * 2^k$

$$\begin{aligned} T(n) = T(3 * 2^{k-1}) &= 2T(32^k) + 2 \\ &= 4T(3 * 2^{k-2}) + 2 + 4 \\ &\vdots \\ &= 2^n T(3) + 2 + 4 + ... + 2^k && \mid \text{geometrische Reihe...} \\ &= 3 * 2k + \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} - 1 \\ &= 5.2^k - 2 = \frac{5}{3}(n) - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(3) &= T(1) + T(2) + 2 \\ &= 0 + 1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

a) (alternativ) Wertebereich verschieben

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 2 && \mid + 2 \\ \underbrace{T(n) + 2}_{s(n)} &= \underbrace{T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2}_{s(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + \underbrace{T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 2}_{s(\lceil \frac{n}{2} \rceil)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(n) &= s(3 * 2^k) = s(3)2^k = 5 * 2^k \\ T(n) &= s(n) - 2 = 5.2^k - 2 = \frac{5}{3} * n - 2 \end{aligned}$$

$$s(3) = T(3) + 2 = 5$$

b) z.z.: $1 \leq T(n) - T(n-1) \leq 2$

Beweis per Ind.:

$$\begin{aligned}
\text{Basis:} \quad & T(2) - T(1) = 1 \\
(< n) \to n \quad & T(n) - T(n-1) \\
\text{Fall 1:} \quad & n = 2l \qquad \text{(Gerade)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T(n) - T(n-1) &= T(2l) - T(2l-1) \\
&= T(l) + T(l) + 2 = [T(l) + T(l-1) + 2] \\
&= [T(l) - T(l-1)] \underbrace{\in}_{\text{nach I.V.}} \{1, 2\}
\end{aligned}$$

Fall 2: $n = 2l + 1$ (analog)

c) Idee: siehe Diagramm im Skript. Auf der x-Achse sind 2^k Schritte zwischen $2 * 2^k$ und $3 * 2^k$ und auf der y-Achse $2 * 2^k$ Schritte zwischen $3 * 2^k$ und $3 * 2^k$

d) z.z. $T(n) = \frac{5}{3}$
Möglichkeit 1 mit Ind.: z.z.: $T(n) \leq \frac{5}{3} - 2 \quad n \geq 3$
Wichtig: Eine stärkere Aussage kann manchmal eher gelingen per Induktion zu gelingen, als eine schwächere. Weil auch eine stärkere Induktionsvoraussetzung benutzt werden kann beim Induktionsschritt.
Versuch $T(n) \leq \frac{5}{3} * n$ direkt zu zeigen.

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 2 \\
&\leq \frac{5}{3}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \frac{5}{3}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 2 \\
&= \frac{5}{3}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil) + 2 \\
&= \frac{5}{3} n + 2 \qquad \text{GEHT NICHT! :(}
\end{aligned}$$

Mit $T(n) \leq \frac{5}{3} * n - 2$ geht es!

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 2 \\
&\leq \frac{5}{3}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) - 2 + \frac{5}{3}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) - 2 + 2 \\
&= \frac{5}{3}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil) - 2 \\
&= \frac{5}{3} n - 2 \qquad \text{:)}
\end{aligned}$$

Möglichkeit 2: Argumentativ am Graphen erklären.
Möglichkeit 3: direkt $2 * 2^k \leq n \leq 3 * 2^k$

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(2 * 2^k) + 2(n - 2 * 2^k) \\
&= 3 * 2^k - 2 + 2n - 4 * 2^k = 2n - 2^k - 2 \\
&\leq 2 * n - \frac{1}{3} n - 2 = \frac{5}{3} * n - 2
\end{aligned}$$

19. Teilmaxima

$\underline{5}, 2, \underline{19}, 7, \underline{26}, \underline{77}, 56, 32$

a) mindestens eins (erste Zahl) und maximal n, wenn die Liste aufsteigend sortiert ist.

b) Es gibt insgesamt 8 Elemente. Davon sind zwei Elemente echt kleiner als 7. Die zwei Elemente können wir streichen. o.b.d.A reicht es 6 Elemente zu betrachten und anzunehmen, dass 7 das kleinste Element ist. Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ ist. Die 7 muss immer an erster Stelle stehen!

c) Unter den ersten 4 Elementen ist eines das größte.
An Pos 4 steht TM $\Leftrightarrow$ Es ist das Größte unter $a_1, ..., a_n$
Jede Position hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, das größte Element unter den ersten 4 zu haben.
$\Rightarrow \frac{1}{4}$

d) Wahrscheinlichkeit, dass i ein Teilmaxima ist ist $\frac{1}{i}$ und dass das k größte ist $= \frac{1}{k}$

e)

20. Verschiebung des Parameter- und Wertebereichs

a) $A = -5$

$$\begin{aligned}
f(n) &= 2f(\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor) - 5 \\
g(n) &= f(n) + A \\
&= f(n) - 5 \\
&= 2f(\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor) - 5 - 5 \\
&= 2(f(\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor) - 5) \\
&= 2(g(\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor))
\end{aligned}$$

b) $B = 3$

$$\begin{aligned}
g(n) &= 2g(\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor) \\
g(n+3) &= 2g(\lfloor\frac{n+6}{2}\rfloor) \\
&= 2g(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 3) \\
\Rightarrow h(n) &= g(n+3) \\
&= 2h(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)
\end{aligned}$$

(Test-)Werte berechnen...

$$\begin{aligned}
\Rightarrow h(0) &= g(0+3) = f(1) - 5 = 1 \\
h(1) &= 2h(0) = 2 \\
h(2) &= 2h(1) = 4 \\
&\vdots \\
h(4) &= 2h(2) = 8 \\
&\vdots \\
h(8) &= 2h(4) = 16
\end{aligned}$$

Wir raten für $h(n) = 2^{\lfloor \log_2 n+1 \rfloor}$:

$$\begin{aligned}
h(n) &= 2h(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \\
2^{\lfloor \log_2 n+1 \rfloor} &= 2 * 2^{\lfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \rfloor} \\
2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} &= 2^{\lfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \rfloor} && | \log_b \frac{x}{b} = \log_b x - 1 \\
&= 2 * 2^{\lfloor \log_2 n-1 \rfloor} \\
&= 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \\
\Rightarrow h(n) &= 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}
\end{aligned}$$

Anmerkung: Wegen der ganzzahligen Basis können wir $\lfloor \log_2 \lfloor n-1 \rfloor + 1 \rfloor$ in $\lfloor \log_2 n - 1 + 1 \rfloor$ umformen, weil die Rundung innerhalb der Rundung keinen Einfluss hat.
Formeln für

$$\begin{aligned}
g(n) &= h(n) - 3 = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} - 3 \\
f(n) &= g(n) + 5 = h(n) + 2 = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} + 2
\end{aligned}$$

c) gegeben:

$$q(n) = q(\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor) + 1 (\text{für } n > 4), q(1) = q(2) = q(3) = 1$$

Verschieben vom Wertebereich:

$$\begin{aligned}
q(n) &= q(\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor) + 1 \\
r(n) &= q(n) + A \\
\text{wähle } A &= -1 \\
&= r(\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor) \\
s(n) &= r(n - B) \\
\text{wähle } B &= -3 \\
s(n) &= r(n-3) \\
&= s(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)
\end{aligned}$$

$s(n)$ lässt sich als folgende Formel umschreiben: $s(n) = \lfloor \frac{n}{2^n} \rfloor = \lfloor 2^{-n} * n \rfloor$

$$\begin{aligned}
r(n) &= \lfloor (2^{-n+3} * n + 3) \rfloor \\
q(n) &= \lfloor (2^{-n+3} * n + 3) \rfloor + 1
\end{aligned}$$

.