Vorlesungsmitschrift

Höhere Algorithmik

gelesen von Prof. Dr. Günter Rote

Tobias Höppner

Wintersemester 2014/2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung (Vorlesung 1 am 17.10.)

1.1 Organisatorisches

Mitschrift wird von Studenten erstellt.

Korrekturfarbe für Gummipunkte: Grün!

Voraussetzungen

- O-Notation
- Turing-Maschine
- Sortieralgorithmen
- Schubfachprinzip
- Gauß-Nummer
- Harmonische Reihe

1.2 Kuchen teilen

Problem: Ein Kuchen soll unter zwei Personen aufgeteilt werden.
Zwei Lösungsideen:

- perfektes Teilen
- einer teilt den Kuchen und der andere sucht sich eine Hälfte aus.

Was passiert, wenn jemand die Teile des Kuchens unterschiedlich bewertet? (z.B. Kirsche auf einer Seite, viel Sahne auf der anderen Seite)
Perfektes teilen bedeutet, dass jemand *für sich* perfekt teilt. (nach seinem Maßstab)
Ziel: Fairness Jeder will $\frac{1}{n}$ des Kuchens nach ihrem Maßstab. ($n = \#$Personen)

1.2.1 1. Algorithmus (für 2 Personen)

1. Erste teilt
2. Zweite sucht aus

Der Algorithmus ist toll, aber es gibt zu viele Schritte. Daher wollen wir den Algorithmus verbessern.
Ziel: möglichst wenige <u>Schritte</u>.

1.2.2 2. Algorithmus (für 3 Personen)

Anton, Berta und Clara:

1. Anton teilt $\frac{1}{3}|\frac{2}{3}$
2. Berta teilt $\frac{\frac{2}{3}}{2}|\frac{\frac{2}{3}}{2}$
3. Clara sucht aus.
4. Anton sucht aus.

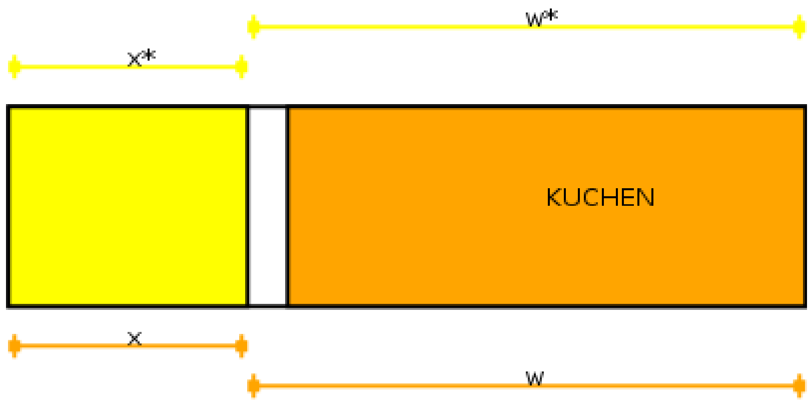
   Fall 1: Clara nimmt eines der rechten Stücke $\Rightarrow$ Anton nimmt linkes Stück.

Fall 2: Clara nimmt linkes Stück.
Schubfachprinzip: eines der rechten Stücke ist mindestens $\frac{1}{3}$

5. Berta):

1.2.3 3. Teilen und Trimmen

1. Anton teilt:



2. Berta:

   Fall 1: Berta denkt $x \leq \frac{1}{3}$

   Fall 2: Berta denkt $x > \frac{1}{3} \Rightarrow$ Trimmen

3. Clara darf sich entscheiden:

   Fall 1: will x^* dann Algorithmus 1. für den Rest

   Fall 2: will x^* nicht.
   $\Rightarrow w^* \geq \frac{2}{3}$ für Clara und Anton

1.2.4 4. Teilen mit bewegtem Messer

Man nimmt ein Messer und jede Person sagt einfach Stop, wenn die *perfekte Wahl* für die Person getroffen ist.
#Schritte $= n - 1$

1.2.5 5. Simuliertes bewegtes Messer

- Jeder macht bei $\frac{1}{n}$ eine Markierung
- der/die Linkeste bekommt das Stück
  #Schritte $= n + (n-1) + ...3 + 2 = \theta(n^2)$ (Gauß-Nummer)

1.2.6 6. Simuliertes Messer + Zufall

Wie 5., aber

1. Reihenfolge zufällig
2. nur neue Linkeste Markierung werden gemacht

3. $T(n) = \#$erwartete Markierungen
   $= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{Erwartete Anzahl der letzten Markierung}} + \underbrace{T(n-1)}_{\text{Erwartete Anzahl von Markierungen aller Anderen.}}$
4. $T(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \theta(\log n)$ (harmonische Reihe)
5. Gesamtlaufzeit $\leq n * O(\log n) = O(n * \log n)$

1.2.7 7. Divide & Conquer

n Personen
n Markierungen bei $\frac{k}{n}$
#Schritte im Worst Case $T(n) = n + 2$

1.2.8 8. Divde & Conquer + Zufall

(erwartete) Laufzeit pro Teilen $\theta(\log n)$ also insgesamt $\theta(n)$