Höhere Algorithmik, WS 2014/15 — 8. Übungsblatt

20 Gummipunkte. Schriftliche Einzelabgabe bis Dienstag, 9. Dezember 2014

45. Wege mit Transportkapazität, 10 Punkte

    Wir wollen eine Trekkingtour von A nach B durch die Wüste machen. Einer Karte entnehmen wir die n Stellen, wo wir unsere Wasservorräte wieder auffüllen können. Außerdem kennen wir für alle Paare x, y von Wasserstellen wieviel Wasservorrat w_{xy} wir benötigen, um sicher von x nach y zu kommen. Wir wollen die Reise so planen, dass wir mit möglichst wenig Transportkapazität für das Wasser auskommen.

    Geben Sie einen effizienten Algorithmus zur Bestimmung des geringsten Transportkapazität an Wasser an, mit der eine Reise von A nach B möglich ist. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus und analysieren Sie die Laufzeit. (Dies ist eine ehemalige Klausuraufgabe; allerdings war bei der Klausur mehr Vorwissen vorhanden.)

46. (0 Punkte) Untersuchen Sie die Variante der vorigen Aufgabe, wo zusätzlich die zurückgelegte Gesamtdistanz beschränkt ist, z. B. auf 1000 km.
    Hinweis: Wie stellt man fest, ob es eine Lösung mit Kapazität W (z. B. 55 Liter) gibt?

47. Sendemasten, 0 Punkte

    (a) Die Häuser einer geradlinigen Straße sollen mit mit Hilfe von Sendemasten mit Funk versorgt werden. Jeder Sendemast hat eine Reichweite von $r = 100$ m in alle Richtungen. Gegeben sind die Abstände $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ zwischen den n aufeinanderfolgenden Häusern. Der Standort der Sendemasten soll so bestimmt werden, dass jedes Haus erreicht wird und möglichst wenige Masten gebraucht werden.

    (b) Wie ändert sich das Problem, wenn die Straße einen Kreisbogen mit Radius 2000 m macht und die Sendemasten (i) an der Straße stehen müssen, (ii) an beliebiger Stelle aufgestellt werden können?

    (c) Betrachten Sie die Variante, wo es eine vorgegebene Liste von m Möglichkeiten gibt, wo die Masten stehen können.

    (d) Betrachten Sie auch die Variante, wo zusätzlich zu jedem möglichen Standort die Errichtungskosten gegeben sind und wir die Gesamtkosten für das Aufstellen der Sendemasten minimieren möchten.

48. Wechselgeld, 10 Punkte

    (a) (0 Punkte) Formulieren Sie einen Greedy-Algorithmus für das Münzwechselproblem (Aufgabe 35 vom 6. Übungsblatt). Konstruieren Sie Beispiele, wo dieser Algorithmus nicht die Optimallösung liefert.

    (b) Beweisen Sie, dass der Greedy-Algorithmus für die Münzwerte $1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200$ der Euro-Münzen immer die Optimallösung findet.

    (c) Beweisen Sie, dass der Greedy-Algorithmus immer die Optimallösung findet, wenn für die Münzwerte $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gilt: $a_1 = 1$ und jedes a_i ist Teiler von a_{i+1}.

49. Wechselgeld, 0 Punkte. Finden Sie einen Algorithmus für das Wechselgeldproblem, bei dem man auch herausgeben kann.

    Beispiele: `88 1 2 5 10 20 50 100 200` → Ausgabe: `3 Münzen: 88=100-10-2`
    `22 12 1 18 3 5` → Ausgabe: `3 Münzen: 22=18+1+3`
    `11 7 3 10 99` → Ausgabe: `3 Münzen: 11=7+7-3`

    Nehmen Sie an, dass sowohl KäufeX als auch VerkäufeX von jeder Münzart genügend viele Münzen haben. Hat dieses Problem immer eine Lösung?