18. Rekursion

Siehe handschriftliche Aufzeichnungen (Seite 3) von Marian. Danke!

20. Verschiebung des Parameter- und Wertebereichs

a) $A = -5$

$$\begin{aligned} f(n) &= 2f(\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor) - 5 \\ g(n) &= f(n) + A \\ &= f(n) - 5 \\ &= 2f(\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor) - 5 - 5 \\ &= 2(f(\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor) - 5) \\ &= 2(g(\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor)) \end{aligned}$$

b) $B = 3$

$$\begin{aligned} g(n) &= 2g(\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor) \\ g(n+3) &= 2g(\lfloor\frac{n+6}{2}\rfloor) \\ &= 2g(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 3) \\ \Rightarrow h(n) &= g(n+3) \\ &= 2h(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor) \end{aligned}$$

(Test-)Werte berechnen...

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(0) &= g(0+3) = f(1) - 5 = 1 \\ h(1) &= 2h(0) = 2 \\ h(2) &= 2h(1) = 4 \\ &\vdots \\ h(4) &= 2h(2) = 8 \\ &\vdots \\ h(8) &= 2h(4) = 16 \end{aligned}$$

Wir raten für $h(n) = 2^{\lfloor \log_2 n+1 \rfloor}$:

$$\begin{aligned} h(n) &= 2h(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor) \\ 2^{\lfloor \log_2 n+1 \rfloor} &= 2 * 2^{\lfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \rfloor} \\ 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} &= 2^{\lfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \rfloor} & \qquad | \log_b \frac{x}{b} = \log_b x - 1 \\ &= 2 * 2^{\lfloor \log_2 n - 1 \rfloor} \\ &= 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \\ \Rightarrow h(n) &= 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \end{aligned}$$

Anmerkung: Wegen der ganzzahligen Basis können wir $\lfloor \log_2 \lfloor n-1 \rfloor + 1 \rfloor$ in $\lfloor \log_2 n - 1 + 1 \rfloor$ umformen, weil die Rundung innerhalb der Rundung keinen Einfluss hat.
Formeln für

$$g(n) = h(n) - 3 = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} - 3$$
$$f(n) = g(n) + 5 = h(n) + 2 = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} + 2$$

c) gegeben:

$$q(n) = q(\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor) + 1 (\text{für } n > 4), q(1) = q(2) = q(3) = 1$$

Verschieben vom Wertebereich:

$$\begin{aligned} q(n) &= q(\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor) + 1 \\ r(n) &= q(n) + A \\ \text{wähle } A &= -1 \\ &= r(\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor) \\ s(n) &= r(n - B) \\ \text{wähle } B &= -3 \\ s(n) &= r(n-3) \\ &= s(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \end{aligned}$$

$s(n)$ lässt sich als folgende Formel umschreiben: $s(n) = \lfloor \frac{n}{2^n} \rfloor = \lfloor 2^{-n} * n \rfloor$

$$r(n) = \lfloor (2^{-n+3} * n + 3) \rfloor$$
$$q(n) = \lfloor (2^{-n+3} * n + 3) \rfloor + 1$$

.