Höhere Algorithmik, WS 2014/15 — 14. Übungsblatt

20 Gummipunkte. Schriftliche Einzelabgabe bis Dienstag, 3. Februar 2015

76. Vorübung: Iterierter Logarithmus, 0 Punkte

    Füllen Sie folgende Lücken aus, sodass die Aussagen für alle Zahlen $x > 3$ gelten. Begründen Sie Ihre Antworten.

    (a) $\lceil x/3 \rceil$ gibt an, wie oft man von x 3 *subtrahieren* muss, bis das Ergebnis ≤ 0 ist.
    (b) $\lceil \log_5 x \rceil$ gibt an, wie oft man x ____________ muss, bis das Ergebnis ≤ 1 ist.
    (c) $\log^* x$ gibt an, wie oft man *die Funktion* $\log_2$ *anwenden* muss, bis das Ergebnis ≤ 1 ist.
    (d) $\lceil \log_2 \log_2 x \rceil$ gibt an, wie oft man ____________ muss, bis das Ergebnis ____ ist.
    (e) $\lceil \log_3 \log_2 x \rceil$ gibt an, wie oft man ____________ muss, bis das Ergebnis ____ ist.
    (f) $\lceil \log_2 \log_3 x \rceil$ gibt an, wie oft man ____________ muss, bis das Ergebnis ____ ist.

    Geben Sie alternative Formulierungen an, wo x als Ergebnis auftritt:

    (a) $\lceil x/3 \rceil$ gibt an, wie oft man zu 0 3 *addieren* muss, bis das Ergebnis $\ge x$ ist.

    Geben Sie zu jeder Funktion die Umkehrfunktion in der folgenden Form durch eine Ungleichung an, die x auf einer Seite enthält und für alle $n \in \mathbb{N}_{\ge 0}$ gilt:

    (a) $\lceil x/3 \rceil \le n \iff x \le 3n$ (b) $\lceil \log_5 x \rceil \le n \iff x \le$ ____ (c) ...

77. Binomialhalden, 5 Punkte

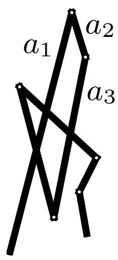
    Fügen Sie die Schlüssel 45, 78, 65, 12, 32, 98, 19, 21 nacheinander in eine anfangs leere Binomialhalde ein. Führen Sie anschließend zwei *deletemin*-Operationen durch.

78. Binomialhalden, 0 Punkte

    Überlegen Sie, wie man in Binomialhalden eine *decreasekey*-Operationen in logarithmischer Zeit durchführen kann.

79. Das Zollstockproblem, 10 Punkte

    Gegeben ist ein Zollstock, dessen Abschnitte die Längen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ haben, und ein Futteral der Länge F. Gefragt ist, ob der Zollstock so gefaltet werden kann, dass er in das Futteral passt. Jedes Gelenk des Zollstocks kann entweder gestreckt (Winkel = 180°) oder eingefaltet (Winkel = 0°) sein. Die Dicke und Breite des Zollstocks soll vernachlässigt werden.

    Zeigen Sie, dass dieses Problem NP-vollständig ist.

80. Amortisierte Laufzeit eines Binärzählers, 5 Punkte

    Das nebenstehenden Programmstück zählt einen als Binärzahl $(\ldots b_3 b_2 b_1 b_0)_2$ mit $b_i \in \{0, 1\}$ dargestellen Zähler um 1 hoch.

    ```
    i := 0;
    while b_i = 1 do
        b_i := 0;
        i := i + 1;
    b_i := 1;
    ```

    Nehmen wir an, dass der Zähler auf 0 initialisiert ist und dann n-mal inkrementiert wird. T_k bezeichnet die Laufzeit für den k-ten Aufruf, wobei jedes Lesen oder Schreiben einer Binärstelle b_i als eine Operation zählt.

    (a) Was ist die maximale Laufzeit $f(n) = \max_{1 \le k \le n} T_k$ eines einzelnen Aufrufs? Bestimmen Sie die exakte Anzahl von Zugriffen auf die Binärstellen.
    (b) Zeigen Sie, dass die *durchschnittliche* Laufzeit $g(n) = \sum_{k=1}^{n} T_k / n$ der n Aufrufe durch eine Konstante beschränkt ist. (Hinweis A: Wie oft wird ein bestimmtes Bit b_i betrachtet? Hinweis B: Wie viele Bits werden auf 1 gesetzt?)