## Höhere Algorithmik, WS 2014/15 — 7. Übungsblatt

20 Betonpunkte. **Schriftliche** Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 1. 12. 2014, **18 Uhr**

41. Matrizenmultiplikation (10 Punkte):
Das Matrizenprodukt ist assoziativ. Ein Produkt von $k$ Matrizen

$$P = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_k$$

kann daher auf verschiedenen Arten durch paarweise Matrizenmultiplikation berechnet werden, zum Beispiel von links nach rechts. Wir nehmen an, dass das Produkt einer $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix mit der gewöhnlichen Methode ausgerechnet wird, die $mnp$ Multiplikationen von Zahlen (und geringfügig weniger Additionen) erfordert.

$A_i$ ist eine $(m_{i-1} \times m_i)$-Matrix, für gegebene Dimensionen $m_0, m_1, \ldots, m_k$.

Formulieren Sie einen dynamischen Programmierungsalgorithmus zur Bestimming der Reihenfolge, die die wenigsten Multiplikationen erfordert.

Definieren Sie die Teilprobleme, und geben Sie die Rekursionsgleichungen an. Formulieren Sie anschließend den Algorithmus zur Bestimmung der kleinstmöglichen Anzahl an Multiplikationen. Die Ausgabe der optimalen Lösung müssen Sie nicht formulieren. Welche Laufzeit hat Ihr Algorithmus?

42. Catalanzahlen, 0 Punkte

Auf wieviele verschiedene Arten kann ein Produkt von $k$ Matrizen geklammert werden. Berechnen Sie die Antwort für $k = 2, 3, 4, \ldots, 10$, und finden Sie eine Rekursionsgleichung für die Lösung. (Das Finden einer geschlossenen Formel für allgemeinenes $k$ ist ohne Vor- und Zusatzkenntnisse schwierig.)

43. Optimaler binärer Suchbaum, 10 Punkte

Gegeben seien drei Schlüssel $(S_1, S_2, S_3) = (10, 12, 17)$ mit folgenden Anfragehäufigkeiten:

$$\begin{aligned}(p_1, p_2, p_3) &= \quad (8, \quad 1, \quad 4) \text{ und}\\ (q_0, q_1, q_2, q_3) &= (1, \quad 2, \quad 10, \quad 4)\end{aligned}$$

Dabei ist $p_i$ die Häufigkeit, mit der der Schlüssel $S_i$ angefragt wird, und $q_i$ die Häufigkeit, mit der ein Schlüssel $x$ mit $S_i < x < S_{i+1}$ gesucht wird ($i = 0, 1, 2, 3$, $S_0 = -\infty$, $S_4 = \infty$).

Bestimmen Sie den optimalen binären Suchbaum und seine mittlere Suchzeit mit dem Algorithmus aus der Vorlesung.

44. Gewichtete Mediansuche, 0 Punkte

Gegeben ist eine Liste von $n$ Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit Gewichten $w_i > 0$. Ein gewichteter Median ist eine Zahl $m$, für die gilt:

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ a_i < m}} w_i \le W/2 \quad \text{und} \quad \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ a_i > m}} w_i \le W/2,$$

wobei $W = \sum_{i=1}^{n} v_i$ das Gesamtgewicht ist.

(a) Bestimmen Sie den gewichteten Median der Folge $a_i = (-2)^i$, $1 \le i \le 10$, mit den Gewichten $w_i = i^3$.

(b) Wie kann man einen gewichteten Median in $O(n)$ Zeit finden?

(c) Beweisen Sie, dass ein gewichteter Median die Funktion $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot |x - a_i|$ minimiert.