Höhere Algorithmik, WS 2014/15 — 3. Übungsblatt

20 Betonpunkte. Schriftliche Abgabe in Zweiergruppen bis Donnerstag, 6. November 2014

18. Rekursion (10 Punkte)

    In der Vorlesung wurde die Rekursion

    $$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 2, \text{ für } n > 2$$

    mit den Anfangswerten $T(1) = 0$, $T(2) = 1$ betrachtet und die Formel $T(n) = 3n/2 - 2$ für Zweierpotenzen der Form $n = 2^k$ ausgerechnet.

    (a) Bestimmen Sie eine Formel für die Werte der Form $n = 3 \cdot 2^k$.

    (b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Ungleichung für alle $n \geq 2$.

    $$1 \leq T(n) - T(n-1) \leq 2$$

    (c) Zeigen Sie, dass durch diese Ungleichungen und die für $n = 2^k$ und $n = 3 \cdot 2^k$ bekannten Werte von $T(n)$ alle Werte von $T(n)$ bestimmt sind.

    (d) Beweisen Sie eine Schranke $T(n) \leq cn$ für ein möglichst kleines c.

19. Indikatorvariablen, Teilmaxima, 0 Punkte

    In der folgenden Zahlenfolge sind die Zahlen unterstrichen, die größer als alle vorhergehenden sind

    $$\underline{5}, 2, \underline{19}, 7, \underline{26}, \underline{77}, 56, 32$$

    Wir bezeichnen die Anzahl dieser *Teilmaxima* mit T.

    (a) In welchem Wertebereich bewegt sich T? Was kann man über die Folge sagen, wenn T den größtmöglichen Wert hat? Wenn T den kleinstmöglichen Wert hat?

    (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 7 ein Teilmaximum ist, wenn die Folge zufällig permutiert wird?

    (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an der vierten Stelle ein Teilmaximum steht?

    (d) Beantworten Sie die beiden letzten Frage allgemein für eine Folge von n verschiedenen Zahlen und das i-größte Element bzw. die Position k.

    (e) Wir setzen die Zufallsvariable I_k auf 1, wenn an Stelle k ein Teilmaximum steht, und auf 0 sonst. Welchen Erwartungswert hat I_k? Berechnen Sie den Erwartungswert von $T = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$.

20. Verschiebung des Parameter- und Wertebereichs (10 Punkte)

    Betrachten Sie folgende Rekursionsgleichung:

    $$f(n) = 2f(\lfloor \tfrac{n+3}{2} \rfloor) - 5 \text{ (für } n \geq 4), \quad f(1) = f(2) = f(3) = 6$$

    (a) Definieren Sie eine neue Funktion $g(n) = f(n) + A$ mit einer geeigneten Konstanten A, sodass der Term -5 in der entstehenden Rekursion für $g(n)$ verschwindet.

    (b) Definieren Sie eine neue Funktion $h(n) = g(n + B)$, sodass auch der additive Term $+3$ im Argument von g verschwindet, sodass auf der rechten Seite nur $h(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ steht, lösen Sie diese Rekursion, und geben Sie Formeln für $h(n)$, $g(n)$ und $f(n)$ an.

    (c) Lösen Sie die Rekursionsgleichung

    $$q(n) = q(\lfloor \tfrac{n+3}{2} \rfloor) + 1 \text{ (für } n \geq 4), \quad q(1) = q(2) = q(3) = 1.$$