Aufgabe 1

a) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht stetige Funktion f über cpo's an.
Definition der Stetigkeit aus VL: Seinen A und B cpo's
Eine Funktion $f : A \to B$ heißt **stetig**, wenn $f(K)$ eine Kette in B ist und $f(\bigsqcup K) = \bigsqcup f(K)$ für alle $K \subseteq A$ mit K ist Kette in A.

Noch ein Blick auf die Kette aus der Vorlesung:
K ist Kette, wenn zu je zwei $k_1, k_2 \in K$ gilt: $k_1 \sqsubseteq_A k_2$ oder $k_2 \sqsubseteq_A k_1$.

cpo: $(\mathbb{N}_\infty, \leq)$
$f(x) = x \mod 2$ mit $x \in \mathbb{N}$
Ist eine nicht stetige Funktion.

b) Beweisen Sie, dass die Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ergibt.
Skizze: Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ stetige Funktionen und A, B und C cpo's und der $\circ$-Operator steht - wie üblich - für die Komposition.
Für alle Ketten $k \subseteq A$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\bigsqcup k) &= \bigsqcup (g \circ f)(k)\\ &= \bigsqcup g(f(k))\end{aligned}$$

Wegen Monotonie von f ist $f(k) \subseteq B$ eine Kette und wegen der Monotonie von g ist $g(f(k)) \subseteq B$ Kette in C.

$$\begin{aligned}\bigsqcup g(f()k) &= g(\bigsqcup f(k))\\ &= g(f(\bigsqcup k))\\ &= (g \circ f)(\bigsqcup K)\end{aligned}$$

$q.e.d.$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, wie Sie zu gegebenen cpos $D_1, \ldots, D_n$ mit $n \geq 2$ den Bereich der disjunkten Vereinigung $(D_1 + \ldots + D_n)$ erklären können, ohne die minimalen Elemente zu verschmelzen.

$D := D_1 + \ldots + S_2 = (\{(d, i) | 1 \leq i \leq nmd \in D_i\} \cup \bot_0, \sqsubseteq_0)$
$\bot_0 \sqsubseteq d \in D$
$(d, i) \sqsubseteq_D (d', j)$ genau dann wenn $i = j$, und $d \sqsubseteq_{0_i} d'$ Da jedes D_i vorher cpo war und nun jeweils ein weiteres, gemeinsames Element, dass jeweils die Kritierien für $\bot$ erfüllt, ist das Resultat auch ein cpo.

b) Definieren Sie folgende Injektions-, Projektions- und Testfunktionen in kanonischer Weise:

$$in_i : \qquad D_i \to (D_1 + ... + D_n) \text{ für alle } 1 \le i \le n$$

$d \mapsto (d, i)$ für $1 \le i \le n$

$$out_i : \qquad (D_1 + ... + D_n) \to D_i \text{ für alle } 1 \le i \le n$$

$$d \mapsto \begin{cases} d & \text{falls } x = (d, i) \\ \perp_{D_i} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$is_i : \qquad (D_1 + ... + D_n) \to BOOL_\perp \text{ für alle } 1 \le i \le n$$

$$d \mapsto \begin{cases} \underline{true}, & \text{falls } x = (d, i) \\ \underline{false}, & \text{falls } x = (d, j), i \neq j \\ \perp, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3

Definieren Sie stetige Erweiterungen der Addition und des Tests auf Gleichheit, so dass diese Operationen total werden auf den cpo's $\mathbb{N}_\perp$ und $BOOL_\perp$. Diskutieren Sie, ob es mehrere solche Erweiterungen gibt.

Aufgabe 4

Seien D_1 und D_2 cpo's und auf $f : D_1 \to D_2$ und $g : D_2 \to D_1$ stetige Funktionen.
Beweisen Sie:

$$\begin{aligned} fix_{f \circ g} &= f(fix_{g \circ f}) \qquad \text{und} \\ fix_{g \circ f} &= g(fix_{f \circ g}) \end{aligned}$$

$$fix_j = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$$

(i)

$$\begin{aligned} fix_{f \circ g} &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (f \circ g)^n(\perp_{D_2}) \\ [\text{weil } \perp_{D_2} \sqsubseteq_{D_2} f(\perp_{D_1}] &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (f \circ g)^n(f(\perp_{D_1})) \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (f \circ (g \circ f)^n)(\perp_{D_1}) \\ &= f(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (g \circ f)^n(\perp_{D_1})) \\ &= f(fix_{g \circ f}) \end{aligned}$$

(i) $fix_{f \circ g} \sqsubseteq_{D_2} f(fix_{g \circ f}$
(ii) $fix_{g \circ f} \sqsubseteq_{D_1} g(fix_{f \circ g}$
(iii) $f(fix_{g \circ f}) \sqsubseteq_{D_1} f(g(fix_{f \circ g}))$, wegen (ii) und Monotonie von f
(iv) $g(fix_{f \circ g} \sqsubseteq_{D_2} fix_{g \circ f} = (f \circ g)(fix_{f \circ g}$
$fix_{f \circ g}$
Behauptung folgt aus (iii) und (iv) sowie Antisymetrie.