

Aufgabe 1

Wenn man für die α -Reduktion $\lambda x.t \xrightarrow{\alpha} \lambda y.\$y^x t$ auf die Bedingung $y \notin \text{Var}(t)$ verzichtet, kann eine solche Reduktion die Semantik verändern. Geben Sie dafür ein Beispiel an.

Die α -Konversion funktioniert nur, wenn die Variable noch nicht verwendet wird ($y \notin \text{Var}(t)$). Wenn man auf diese Eigenschaft verzichtet kann man genauso gut auch gleich das Gegenteil fordern: $y \in \text{Var}(t)$. Beispiel:

$$\lambda x.xy \xrightarrow{\alpha} \lambda y.yy$$

Aufgabe 2

Wenn man für die β -Reduktion

$$(\lambda x.t)s \xrightarrow{\beta} \$s^x t$$

auf die Forderung $\text{Fr}(s) \cap \text{Geb}(t) = \emptyset$ verzichtet, kann eine solche Reduktion die Semantik verändern. Geben Sie dafür ein Beispiel an.

Verzichtet man auf die oben genannte Eigenschaft bedeutet das, dass die Schnittmenge der freien Variablen von s und der gebundenen Variablen von t nicht leer ist. Es gibt also eine Variable die in beiden Termen vorkommt und damit nach Anwendung der β -Reduktion in einem Term stehen:

$$(\lambda x.xyz)z \xrightarrow{\beta} \lambda zyz$$

Aufgabe 3

Konstruieren Sie einen λ -Ausdruck t , der keine Normalform besitzt und dessen Reduktion zu immer größeren Ausdrücken führt.

Für das ungetypte Lambdakalkül müsste folgendes funktionieren:

$$\begin{aligned} & (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \\ \Rightarrow & (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Schreiben Sie je einen getypten λ -Ausdruck für folgende Aufgaben:

- a) Eine symmetrische Funktion soll dreifach auf ein Argument angewendet werden.

$$\lambda f x.f(f(f(x))) \quad [D \rightarrow D] \rightarrow D \rightarrow D$$

- b) Gegeben sei eine Liste der Länge 4 von Elementen des Typs D und eine Funktion vom Typ $[D \rightarrow D]$, berechne die Anwendung dieser Funktion auf alle Listenelemente.

$$\lambda L g. <g(\pi_1 L); g(\pi_2 L); g(\pi_3 L); g(\pi_4 L)> \quad [D] \rightarrow [D \rightarrow D] \rightarrow [D]$$

- c) Beschreibe den uncurry-Operator im getypten λ -Kalkül, der angewendet auf eine Funktion vom Typ $[D_1 \rightarrow [D_2 \rightarrow D_3]]$ eine Funktion des Typs $[(D_1 \times D_2) \rightarrow D_3]$ liefert, wobei für alle f , a und b

$$(\text{uncurry } f) \langle a, b \rangle = f \ a \ b$$

gelten soll.

$$\lambda f. \lambda T. (f(\pi_1 T)(\pi_2 T)) \quad [D_1 \rightarrow [D_2 \rightarrow D_3] \rightarrow [(D_1 \times D_2) \rightarrow D_3]$$