Aufgabe 1

a) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht stetige Funktion f über cpo's an.
Definition der Stetigkeit aus VL: Seinen A und B cpo's
Eine Funktion $f : A \to B$ heißt **stetig**, wenn $f(K)$ eine Kette in B ist und $f(\bigsqcup K) = \bigsqcup f(K)$ für alle $K \subseteq A$ mit K ist Kette in A.

Noch ein Blick auf die Kette:
K ist Kette, wenn zu je zwei $k_1, k_2 \in K$ gilt: $k_1 \sqsubseteq_A k_2$ oder $k_2 \sqsubseteq_A k_1$.
Also der Vorgänger steht mit dem Nachfolger oder der Nachfolger steht mit dem Vorgänger irgendwie in Relation.

cpo: $(\mathbb{N}, \leq)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = 42 \\ x, & sonst \end{cases}$$

b) Beweisen Sie, dass die Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ergibt.
Idee von Tobi: na dit is relativ simple im Kopf, aber unklar wie ich es aufschreibe..
Skizze: Seien f und g stetige Funktionen und A, B und C cpo's und der $\circ$-Operator steht - wie üblich - für die Komposition:

$$f : A \to B$$
$$g : B \to C$$

also ist

$$f \circ g : (A \to B) \to C = A \to C$$

ebenfalls stetig!

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, wie Sie zu gegebenen cpos $D_1, \ldots, D_n$ mit $n \geq 2$ den Bereich der disjunkten Vereinigung $(D_1 + \ldots + D_n)$ erklären können, ohne die minimalen Elemente zu verschmelzen.

$D := D_1 + \ldots + S_2 = (\{(d, i) | 1 \leq i \leq nmd \in D_i\} \cup \bot_0, \sqsubseteq_0)$
$\bot_0 \sqsubseteq d \in D$
$(d, i) \sqsubseteq_D (d', j)$ genau dann wenn $i = j$, und $d \sqsubseteq_{0_i} d'$ Da jedes D_i vorher cpo war und nun jeweils ein weiteres, gemeinsames Element, dass jeweils die Kritierien für $\bot$ erfüllt, ist das Resultat auch ein cpo.

b) Definieren Sie folgende Injektions-, Projektions- und Testfunktionen in kanonischer Weise:

$$in_i : D_i \to (D_1 + \ldots + D_n) \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n$$
$$out_i : (D_1 + \ldots + D_n) \to D_i \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n$$
$$is_i : (D_1 + \ldots + D_n) \to BOOL_\bot \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n$$

$$
\begin{aligned}
in_i : \quad & D_i \to (D_1 + \ldots + D_n) \text{ für alle } 1 \le i \le n \\
& d \mapsto (d, i) \text{ für } 1 \le i \le n \\
out_i : \quad & (D_1 + \ldots + D_n) \to D_i \text{ für alle } 1 \le i \le n \\
& d \mapsto \begin{cases} d & \text{falls } x = (d, i) \\ \bot_{D_i} & \text{sonst} \end{cases} \\
is_i : \quad & (D_1 + \ldots + D_n) \to BOOL_\bot \text{ für alle } 1 \le i \le n \\
& d \mapsto \begin{cases} \underline{true}, & \text{falls } x = (d, i) \\ \underline{false}, & \text{falls } x = (d, j), i \neq j \\ \bot, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Definieren Sie stetige Erweiterungen der Addition und des Tests auf Gleichheit, so dass diese Operationen total werden auf den cpo's $\mathbb{N}_\bot$ und $BOOL_\bot$. Diskutieren Sie, ob es mehrere solche Erweiterungen gibt.

Aufgabe 4

Seien D_1 und D_2 cpo's und auf $f : D_1 \to D_2$ und $g : D_2 \to D_1$ stetige Funktionen.
Beweisen Sie:

$$
\begin{aligned}
fix_{f \circ g} &= f(fix_{g \circ f}) \qquad \text{und} \\
fix_{g \circ f} &= g(fix_{f \circ g})
\end{aligned}
$$