Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Typen folgender Funktionen:

(i) $\lambda fx.(fx) + 1$
Lösung aus dem Tutorium:

$$\begin{aligned} 1 :& \mathbb{Z}_\perp \\ + :& [\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp] \\ x :& D \\ f :& [D \to \mathbb{Z}_\perp] \end{aligned}$$

alternativ, allgemeiner

$$\begin{aligned} 1 :& D_1 \\ + :& [D_2 \times D_1 \to D_3] \\ f :& [D_4 \to D_2] \\ x :& D_4 \end{aligned}$$

(ii) $\lambda(x, y)f.fxy$
Lösung aus dem Tutorium:

$$\begin{aligned} x :& D_1 \\ y :& D_2 \\ f :& D_1 \to D_2 \to D_3 \\ :& (D_1 \times D_2) \to D \to D_3 \end{aligned}$$

(iii) $\lambda f.(f \lambda y.y)$ Lösung aus dem Tutorium:

$$\begin{aligned} y :& D_1 \\ id :& = \lambda y.y : D_1 \to D_1 \\ f :& [D_1 \to D_1] \to D_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Der Faltungsoperator $\underline{lit}$ sei informell bestimmt durch: $\underline{lit}f < x_1, \dots, x_n > x_{n+1} = fx_1(fx_2(\dots(fx_nx_{n+1})\dots))$
z.B. $\underline{lit}\,\underline{plusc} < x_1, \dots, x_n > x_{n+1} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}$

(i) Bestimmen Sie den Typ von $\underline{lit}$
Aus dem Tut:

$$\underline{lit} : [D_1 \to D_2 \to D_2] \to D_1^* \to D_2 \to D_2$$

(ii) Definieren Sie den Operator $\underline{lit}$ im getypten λ-Kalkül unter Verwendung der Gleichungsschreibweise (s. S. 102).
Aus dem Tut:

$$\begin{aligned} (a) \qquad & \underline{lit} := \lambda fLx.(L = <> \to x), f(\underline{hd}\ L)(\underline{lit}\ f(\underline{tl}\ x)) \\ (b) \qquad & \underline{lit}fLx := L = <> \to x, f(\underline{hd}\ L)(\underline{lit}\ f(\underline{tl}\ x)) \end{aligned}$$

(iii) Definieren Sie eine Funktion f im getypten λ-Kalkül, so dass

$$f < x_1, \ldots, x_n > x = \begin{cases} \text{wahr, falls } x = x_i \text{ für ein } i \\ \text{falsch, sonst.} \end{cases}$$

Aus dem Tut:

$$f : D_1^* \to D_1 \to \mathrm{BOOL}$$
$$\underline{eq} : D_1 \to D_1 \to \mathrm{BOOL}$$
$$\underline{eq}\, d_1\, d_2 = \begin{cases} \underline{true}, & \text{falls } d_1 = d_2 \\ \underline{false}, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$f := \lambda L\, d.\underline{lit}(\lambda x.\underline{or}(\underline{eq}\; d\; x))L\underline{false}$$

(iv) Bearbeiten Sie (i)-(iii) für $\underline{lit}'\, f x_1 < x_2, \ldots, x_{n+1} >= (f \ldots (f(f x_1 x_2)x_3) \ldots x_{n+1})$

Aufgabe 3

Erweitern Sie die Syntax von WHILE um Anweisungen der Form
$\underline{repeat}\ C\ \underline{until}\ B$
und definieren Sie dazu eine geeignete denotationelle Semantik.

(a) $\mathcal{C}[\![\underline{repeat}\ C_1\ \underline{until}\ B]\!]$

$$= \mathcal{C}[\![C_1; \underline{while}\ \underline{not}\ B\ \underline{do}\ C_1]\!]$$

(b) $\mathcal{C}[\![\underline{repeat}\ C_1\ \underline{until}\ B]\!]$

$$= \mathcal{C}[\![C_1]\!] \bowtie \mathcal{B}[\![B]\!] \bowtie cond < \lambda x.x, \mathcal{C}[\![C']\!] > b$$