

## Aufgabe 1

- a) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht stetige Funktion  $f$  über cpo's an.

Definition der Stetigkeit aus VL: Seien  $A$  und  $B$  cpo's

Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt **stetig**, wenn  $f(K)$  eine Kette in  $B$  ist und  $f(\bigsqcup K) = \bigsqcup f(K)$  für alle  $K \subseteq A$  mit  $K$  ist Kette in  $A$ .

Noch ein Blick auf die Kette:

$K$  ist Kette, wenn zu je zwei  $k_1, k_2 \in K$  gilt:  $k_1 \sqsubseteq_A k_2$  oder  $k_2 \sqsubseteq_A k_1$ .

Also der Vorgänger steht mit dem Nachfolger oder der Nachfolger steht mit dem Vorgänger irgendwie in Relation.

cpo:  $(\mathbb{N}, \leq)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = 42 \\ x, & \text{sonst} \end{cases}$$

- b) Beweisen Sie, dass die Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ergibt.

**Idee von Tob:** na dit is relativ simple im Kopf, aber unklar wie ich es aufschreibe..

Skizze: Seien  $f$  und  $g$  stetige Funktionen und  $A, B$  und  $C$  cpo's und der  $\circ$ -Operator steht - wie üblich - für die Komposition:

$$f : A \rightarrow B$$

$$g : B \rightarrow C$$

also ist

$$f \circ g : (A \rightarrow B) \rightarrow C = A \rightarrow C$$

ebenfalls stetig!

## Aufgabe 2

- a) Zeigen Sie, wie Sie zu gegebenen cpos  $D_1, \dots, D_n$  mit  $n \geq 2$  den Bereich der disjunkten Vereinigung  $(D_1 + \dots + D_n)$  erklären können, ohne die minimalen Elemente zu verschmelzen.

**Idee:** Bei der Vereinigung disjunkter cpos wird der entstehende Wertebereich so groß, wie der gemeinsame Wertebereich aller cpos mit zusätzlich einem weiteren Element: ein gemeinsames  $\perp$  (es kann ja kein Element  $\perp$  sein, dass vorher schon in der Menge enthalten war, da die cpos disjunkt waren).

- b) Definieren Sie folgende Injektions-, Projektions- und Testfunktionen in kanonischer Weise:

$$in_i : D_i \rightarrow (D_1 + \dots + D_n)$$

$$\text{für alle } 1 \leq i \leq n$$

$$out_i : (D_1 + \dots + D_n) \rightarrow D_i$$

$$\text{für alle } 1 \leq i \leq n$$

$$is_i : (D_1 + \dots + D_n) \rightarrow \text{BOOL}_{\perp}$$

$$\text{für alle } 1 \leq i \leq n$$

## Aufgabe 3

Definieren Sie stetige Erweiterungen der Addition und des Tests auf Gleichheit, so dass diese Operationen total werden auf den cpo's  $\mathbb{N}_{\perp}$  und  $\text{BOOL}_{\perp}$ . Diskutieren Sie, ob es mehrere solche Erweiterungen gibt.

## Aufgabe 4

Seien  $D_1$  und  $D_2$  cpo's und auf  $f : D_1 \rightarrow D_2$  und  $g : D_2 \rightarrow D_1$  stetige Funktionen.  
Beweisen Sie:

$$\begin{aligned} \text{fix}_{f \circ g} &= f(\text{fix}_{g \circ f}) & \text{und} \\ \text{fix}_{g \circ f} &= g(\text{fix}_{f \circ g}) \end{aligned}$$