Aufgabe 1

a) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht stetige Funktion f über cpo's an.
Idee von Tobi:
Definition der Stetigkeit aus VL: Seinen A und B cpo's
Eine Funktion $f : A \to B$ heißt **stetig**, wenn $f(K)$ eine Kette in B ist und $f(\bigsqcup K) = \bigsqcup f(K)$ für alle $K \subseteq A$ mit K ist Kette in A.

Noch ein Blick auf die Kette:
K ist Kette, wenn zu je zwei $k_1, k_2 \in K$ gilt: $k_1 \sqsubseteq_A k_2$ oder $k_2 \sqsubseteq_A k_1$.
Also der Vorgänger steht mit dem Nachfolger oder der Nachfolger steht mit dem Vorgänger irgendwie in Relation.

Also sowas wie $f(x) = x \mod 2$ mit $x \in \mathbb{N}$ sollte dem Widersprechen, oder?

Hinnerk: Was ist mit sowas:
cpo: $(\mathbb{N}, \leq)$
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = 42 \\ x, & sonst \end{cases}$$

b) Beweisen Sie, dass die Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ergibt.
Idee von Tobi: na dit is relativ simple im Kopf, aber unklar wie ich es aufschreibe..
Skizze: Seien f und g stetige Funktionen und A, B und C cpo's und der $\circ$-Operator steht - wie üblich - für die Komposition:

$$\begin{aligned} f &: A \to B \\ g &: B \to C \\ \text{also ist} & \\ f \circ g &: (A \to B) \to C = A \to C \\ \text{ebenfalls stetig!} & \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, wie Sie zu gegebenen cpos $D_1, \ldots, D_n$ mit $n \geq 2$ den Bereich der disjunkten Vereinigung $(D_1 + \ldots + D_n)$ erklären können, ohne die minimalen Elemente zu verschmelzen.

Idee: Bei der Vereinigung disjunkter cpos wird der entstehende Wertebereich so groß, wie der gemeinsame Wertebereich aller cpos mit zusätzlich einem weiteren Element: ein gemeinsames $\perp$ (es kann ja kein Element $\perp$ sein, dass vorher schon in der Menge enthalten war, da die cpos disjunkt waren).

b) Definieren Sie folgende Injektions-, Projektions- und Testfunktionen in kanonischer Weise:

$$\begin{aligned} in_i &: D_i \to (D_1 + \ldots + D_n) && \text{für alle } 1 \leq i \leq n \\ out_i &: (D_1 + \ldots + D_n) \to D_i && \text{für alle } 1 \leq i \leq n \\ is_i &: (D_1 + \ldots + D_n) \to BOOL_\perp && \text{für alle } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Definieren Sie stetige Erweiterungen der Addition und des Tests auf Gleichheit, so dass diese Operationen total werden auf den cpo's $\mathbb{N}_\perp$ und $BOOL_\perp$. Diskutieren Sie, ob es mehrere solche Erweiterungen gibt.
Idee von Tobi: Irgendwie macht das nicht viel Sinn mit dem Bool und der Addition

Es sollen +, = erweitert werden, sodass $(\mathbb{N}_\perp, +)$, $(BOOL_\perp, +)$ und $(\mathbb{N}_\perp, =)$, $(BOOL_\perp, =)$ neben relexiv, transitiv und antisymetrisch auch noch total sind.
Soweit ich heraus bekommen habe ist "total werdenëine Umschreibung von Kette bilden.

Aufgabe 4

Seien D_1 und D_2 cpo's und auf $f : D_1 \to D_2$ und $d : D_2 \to D_1$ stetige Funktionen.
Beweisen Sie:

$$\begin{aligned} fix_{f\circ g} &= f(fix_{g\circ f}) \qquad \text{und} \\ fix_{g\circ f} &= g(fix_{f\circ g}) \end{aligned}$$