

Aufgabe 1

- a) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht stetige Funktion f über cpo's an.

Definition der Stetigkeit aus VL: Seien A und B cpo's

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **stetig**, wenn $f(K)$ eine Kette in B ist und $f(\bigsqcup K) = \bigsqcup f(K)$ für alle $K \subseteq A$ mit K ist Kette in A .

Noch ein Blick auf die Kette aus der Vorlesung:

K ist Kette, wenn zu je zwei $k_1, k_2 \in K$ gilt: $k_1 \sqsubseteq_A k_2$ oder $k_2 \sqsubseteq_A k_1$.

cpo: $(\mathbb{N}_\infty, \leq)$

$f(x) = x \bmod 2$ mit $x \in \mathbb{N}$

Ist eine nicht stetige Funktion.

- b) Beweisen Sie, dass die Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ergibt.

Skizze: Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ stetige Funktionen und A, B und C cpo's und der \circ -Operator steht - wie üblich - für die Komposition.

Für alle Ketten $k \subseteq A$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\bigsqcup k) &= \bigsqcup (g \circ f)(k) \\ &= \bigsqcup g(f(k)) \end{aligned}$$

Wegen Monotonie von f ist $f(k) \subseteq B$ eine Kette und wegen der Monotonie von g ist $g(f(k)) \subseteq B$ Kette in C .

$$\begin{aligned} \bigsqcup g(f(k)) &= g(\bigsqcup f(k)) \\ &= g(f(\bigsqcup k)) \\ &= (g \circ f)(\bigsqcup K) \end{aligned}$$

q.e.d.

Aufgabe 2

- a) Zeigen Sie, wie Sie zu gegebenen cpos D_1, \dots, D_n mit $n \geq 2$ den Bereich der disjunkten Vereinigung $(D_1 + \dots + D_n)$ erklären können, ohne die minimalen Elemente zu verschmelzen.

$$D := D_1 + \dots + D_n = (\{(d, i) \mid 1 \leq i \leq n, d \in D_i\} \cup \perp_o, \sqsubseteq_o)$$

$$\perp_o \sqsubseteq_o d \in D$$

$(d, i) \sqsubseteq_o (d', j)$ genau dann wenn $i = j$, und $d \sqsubseteq_{D_i} d'$. Da jedes D_i vorher cpo war und nun jeweils ein weiteres, gemeinsames Element, dass jeweils die Kriterien für \perp erfüllt, ist das Resultat auch ein cpo.

- b) Definieren Sie folgende Injektions-, Projektions- und Testfunktionen in kanonischer Weise:

$$\begin{aligned}
 in_i : & & D_i &\rightarrow (D_1 + \dots + D_n) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \\
 & & d &\mapsto (d, i) \text{ für } 1 \leq i \leq n \\
 out_i : & & (D_1 + \dots + D_n) &\rightarrow D_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \\
 & & d &\mapsto \begin{cases} d & \text{falls } x = (d, i) \\ \perp_{D_i} & \text{sonst} \end{cases} \\
 is_i : & & (D_1 + \dots + D_n) &\rightarrow \text{BOOL}_{\perp} \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \\
 & & d &\mapsto \begin{cases} \text{true}, & \text{falls } x = (d, i) \\ \text{false}, & \text{falls } x = (d, j), i \neq j \\ \perp, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Definieren Sie stetige Erweiterungen der Addition und des Tests auf Gleichheit, so dass diese Operationen total werden auf den cpo's \mathbb{N}_{\perp} und BOOL_{\perp} . Diskutieren Sie, ob es mehrere solche Erweiterungen gibt.

Aufgabe 4

Seien D_1 und D_2 cpo's und auf $f : D_1 \rightarrow D_2$ und $g : D_2 \rightarrow D_1$ stetige Funktionen. Beweisen Sie:

$$\begin{aligned}
 fix_{f \circ g} &= f(fix_{g \circ f}) & \text{und} \\
 fix_{g \circ f} &= g(fix_{f \circ g})
 \end{aligned}$$