

Aufgabe 1

Sei $\underline{A} = (A, \sqsubseteq)$ eine Struktur, wobei die Relation \sqsubseteq eine Halbordnung ist und es in A bzgl. \sqsubseteq ein minimales Element \perp gibt.

Zeigen Sie, dass aus der Endlichkeit von A folgt, dass \underline{A} ein cpo ist.

Lösungsvorschlag Hinnerk:

Es müssen drei Bedingungen erfüllt sein, damit eine Struktur A ein cpo ist:

- a) \sqsubseteq ist Halbordnung.
- b) In A existiert ein minimales Element.
- c) Zu jeder Kette $K \subseteq A$ existiert eine kleinste obere Schranke.

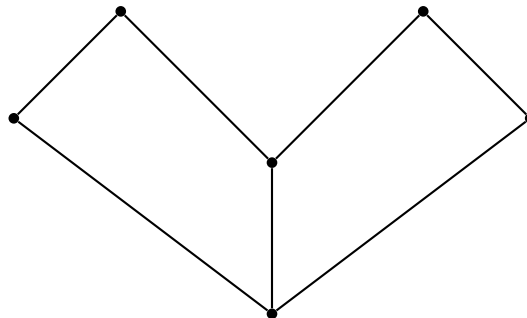
Aus der Aufgabenstellung folgt, dass Bedingung 1 (\sqsubseteq ist Halbordnungsrelation) und 2 (es gibt minimales Element \perp) erfüllt sind. Um zu beweisen, dass A ein cpo ist, müssen wir also zeigen, dass zu jeder Kette $K \subseteq A$ eine kleinste obere Schranke existiert. Aus der Endlichkeit von A folgt, dass es ein Element T gibt, für das gilt: $T \geq x$ für alle $x \in A$. Aus der Definition der oberen Schranke folgt, dass es eine obere Schranke gibt, wenn ein größtes Element existiert. Daraus folgt wiederum, dass es eine kleinste obere Schranke für jede Kette $K \subseteq A$ geben muss.

Die Bedingungen 1 und 2 sind entsprechend der Aufgabenstellung erfüllt. Daher ist zu zeigen, dass aus der Endlichkeit von A folgt, dass zu jeder Kette $K \subseteq A$ eine kleinste obere Schranke existiert.

Aus der Endlichkeit von A folgt, dass es ein Element T gibt, dass \geq aller anderen Elemente ist. Aus der Definition der oberen Schranke folgt, dass es, wenn es ein größtes Element gibt, auch eine obere Schranke gibt. Daraus folgt, dass es eine kleinste obere Schranke für jede Kette $K \subseteq A$ geben muss.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine halbgeordnete Menge A , die sich grafisch wie folgt darstellen lässt:



- a) Ist A ein cpo?

Lösungsvorschlag Hinnerk:

Ja, alle Kriterien sind erfüllt.

- b) Ist A eine Kette?

Lösungsvorschlag Hinnerk:

Nein, die mittleren drei Elemente stehen nicht in Relation zu einander, die oberen zwei ebenso wenig.

- c) Existiert eine kleinste obere Schranke von A in A ?

Lösungsvorschlag Hinnerk:

Nein, da die beiden oberen Elemente augenscheinlich auf einer Höhe liegen.

Aufgabe 3

Finden Sie zwei Beispiele für Halbordnungen (A, \sqsubseteq) , die ein minimales Element besitzen aber keine cpo's sind.

Lösungsvorschlag Hinnerk:

- a) $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{R}$ (Besitzt minimales Element 0, ist aber nach oben nicht beschränkt.
- b) $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{N}$ (wie oben).

Aufgabe 4

Finden Sie ein Beispiel für eine nicht triviale, rekursive Funktionsgleichung, die mehr als eine Lösung hat.

Lösungsvorschlag Hinnerk:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } f(x) \bmod 2 = x \\ 0, & \text{wenn } f(x) \bmod 2 \neq x \end{cases}$$

Macht das Sinn? Ist das zu Trivial? (Für 1 ist es 1, für alle anderen Werte ist es 0)