Aufgabe 1

Wenn man für die α-Reduktion $\lambda x.t \underset{\alpha}{\rightarrow} \lambda y.\$_y^x\, t$ auf die Bedingung $y \notin \mathtt{Var}(t)$ verzichtet, kann eine solche Reduktion die Semantik verändern. Geben Sie dafür ein Beispiel an.

Die α-Konversion funktioniert nur, wenn die Variable noch nicht verwendet wird ($y \notin \mathtt{Var}(t)$). Wenn man auf diese Eigenschaft verzichtet kann man genauso gut auch gleich das Gegenteil fordern: $y \in \mathtt{Var}(t)$. Beispiel:

$$\lambda x.xy \underset{\alpha}{\rightarrow} \lambda y.yy$$

Lösung aus'm Tut:

$$\begin{aligned}
&x : \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp,\ \text{also } x \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp} \\
&T = \lambda x.\lambda y.(x\,1) : (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp) \to \mathbb{N}_\perp \\
&T' = \lambda y.\lambda y.(y\,1) \\
[\![T]\!]\rho =& d \to [\![\lambda y.(x1)]\!]\rho[d/x] \\
& d \to (d' \to [\![x1]\!]\rho[d/x][d'/y]) \\
=& d \to (d' \to ([\![x]\!]\rho[d/x][d'/y])([\![x1]\!]\rho[d/x][d'/y])) \\
=& d \to (d' \to ([\![x]\!]\rho[d/x][d'/y])(1\rho[d/x][d'/y])) \\
[\![T']\!]\rho =& d \to [\![\lambda y.(y1)]\!]\rho[d/y] \\
=& d \to (d' \to [\![y\,1]\!]\rho[d/y][d'/y]) \\
=& d \to (d' \to ([\![y]\!]\rho[d/y][d'/y])1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f(a) = 0, g(a) = 1 \\
&\quad ([\![T]\!]\rho)(f)\ (g) = f\ 1 = 0 \\
&\quad ([\![T]\!]\rho)(f)\ (g) = g\ 1 = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wenn man für die β-Reduktion

$$(\lambda x.t)s \underset{\beta}{\rightarrow} \$_s^x t$$

auf die Forderung $\mathtt{Fr}(s) \cap \mathrm{Geb}(t) = \emptyset$ verzichtet, kann eine solche Reduktion die Semantik verändern. Geben Sie dafür ein Beispiel an.

Verzichtet man auf die oben genannte Eigenschaft bedeutet das, dass die Schnittmenge der freien Variablen von s und der gebundenen Variablen von t nicht leer ist. Es gibt also eine Variable die in beiden Termen vorkommt und damit nach Anwendung der β-Reduktion in einem Term stehen:

$$(\lambda x.xyz)z \underset{\beta}{\rightarrow} \lambda zyz$$

Lösung aus dem Tut:

$$\begin{aligned}
(\lambda x.\lambda y.(x1))y : (mathbbN_\perp \to mathbbN_\perp) \to mathbbN_\perp \\
\underset{\beta}{\rightarrow} \lambda y.(y1)
\end{aligned}$$

nach den Regeln einsetzten sodass man g und f wählen kann.

Aufgabe 3

Konstruieren Sie einen λ-Ausdruck t, der keine Normalform besitzt und dessen Reduktion zu immer größeren Ausdrücken führt.
Für das ungetypte Lambdakalkül müsste folgendes funktionieren:

$$\begin{aligned}&(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)\\ \Rightarrow&(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Schreiben Sie je einen getypten λ-Ausdruck für folgende Aufgaben:

a) Eine symmetrische Funktion soll dreifach auf ein Argument angewendet werden.

$$\lambda fx.f(f(f(x))) \qquad [D \rightarrow D] \rightarrow D \rightarrow D$$

Alternativ:

$$\lambda x.f(f(f(x))) \qquad D \rightarrow D$$

b) Gegeben sei eine Liste der Länge 4 von Elementen des Typs D und eine Funktion vom Typ [D $\rightarrow$ D], berechne die Anwendung dieser Funktion auf alle Listenelemente.

$$\lambda L\, g. < g(\pi_1 L); g(\pi_2 L); g(\pi_3 L); g(\pi_4 L) > \qquad [D] \rightarrow [D \rightarrow D] \rightarrow [D]$$

Lösung von Frau Fehr:

$$\begin{aligned}L =&< d_1, d_2, d_3, d_4 > \text{ mit } d_i : D\\ &f : [D \rightarrow D]\\ T =&< fd_1, fd_2, fd_3, fd_4 >: D \times D \times D \times D\end{aligned}$$

Lösung von Paul:

$$\begin{aligned}&T : D^* \rightarrow [D \rightarrow D] \rightarrow D^*\\ &\lambda L.\lambda f.(f(\pi_1 L)) : (f(\pi_2 L) : (f(\pi_3 L) : (f(\pi_4 L) : \underline{tl}(\underline{tl}(\underline{tl}(\underline{tl} L))))))\end{aligned}$$

c) Beschreibe den unschönfinkel-Operator im getypten λ-Kalkül, der angewendet auf eine Funktion vom Typ [D$_1$ $\rightarrow$ [D$_2$ $\rightarrow$ D$_3$]] eine Funktion des Typs [(D$_1$ $\times$ D$_2$) $\rightarrow$ D$_3$] liefert, wobei für alle `f`, a und b

```
(unschönfinkel f) <a,b> = f a b
```

gelten soll.

$$\lambda f.\lambda T.(f(\pi_1\, T)(\pi_2\, T)) \qquad [D_1 \rightarrow [D_2 \rightarrow D_3] \rightarrow [(D_1 \times D_2) \rightarrow D_3]$$