# Aufgabe 1

a) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht stetige Funktion $f$ über cpo's an.
**Idee von Tobi:**
Definition der Stetigkeit aus VL: Seinen $A$ und $B$ cpo's
Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **stetig**, wenn $f(K)$ eine Kette in $B$ ist und $f(\bigsqcup K) = \bigsqcup f(K)$ für alle $K \subseteq A$ mit $K$ ist Kette in $A$.

Noch ein Blick auf die Kette:
$K$ ist Kette, wenn zu je zwei $k_1, k_2 \in K$ gilt: $k_1 \sqsubseteq_A k_2$ oder $k_2 \sqsubseteq_A k_1$.
Also der Vorgänger steht mit dem Nachfolger oder der Nachfolger steht mit dem Vorgänger irgendwie in Relation.

Also sowas wie $f(x) = x \mod 2$ mit $x \in \mathbb{N}$ sollte dem Widersprechen, oder?

b) Beweisen Sie, dass die Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ergibt.
**Idee von Tobi:** na dit is relativ simple im Kopf, aber unklar wie ich es aufschreibe..
Skizze: Seien $f$ und $g$ stetige Funktionen und $A, B$ und $C$ cpo's und der $\circ$-Operator steht - wie üblich - für die Komposition:

$$f : A \rightarrow B$$
$$g : B \rightarrow C$$

also ist

$$f \circ g : (A \rightarrow B) \rightarrow C = A \rightarrow C$$

ebenfalls stetig!

# Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, wie Sie zu gegebenen cpos $D_1, ..., D_n$ mit $n \geq 2$ den Bereich der disjunkten Vereinigung $(D_1 + ... + D_n)$ erklären können, ohne die minimalen Elemente zu verschmelzen.

b) Definieren Sie folgende Injektions-, Projektions- und Testfunktionen in kanonischer Weise:

$$in_i : D_i \rightarrow (D_1 + ... + D_n) \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n$$
$$out_i : (D_1 + ... + D_n) \rightarrow D_i \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n$$
$$is_i : (D_1 + ... + D_n) \rightarrow BOOL_\perp \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n$$

# Aufgabe 3

Definieren Sie stetige Erweiterungen der Addition und des Tests auf Gleichheit, so dass diese Operationen total werden auf den cpo's $\mathbb{N}_\perp$ und $BOOL_\perp$. Diskutieren Sie, ob es mehrere solche Erweiterungen gibt.
**Idee von Tobi:** Irgendwie macht das nicht viel Sinn mit dem Bool und der Addition
Es sollen $+, =$ erweitert werden, sodass $(\mathbb{N}_\perp, +)$, $(BOOL_\perp, +)$ und $(\mathbb{N}_\perp, =)$, $(BOOL_\perp, =)$ neben relexiv, transitiv und antisymetrisch auch noch total sind.
Soweit ich heraus bekommen habe ist "total werdenëine Umschreibung von Kette bilden.

# Aufgabe 4

Seien $D_1$ und $D_2$ cpo's und auf $f : D_1 \rightarrow D_2$ und $d : D_2 \rightarrow D_1$ stetige Funktionen.
Beweisen Sie:

$$\begin{aligned} fix_{f \circ g} &= f(fix_{g \circ f}) \qquad \text{und} \\ fix_{g \circ f} &= g(fix_{f \circ g}) \end{aligned}$$