# Aufgabe 1

a) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht stetige Funktion $f$ über cpo's an.
Definition der Stetigkeit aus VL: Seinen $A$ und $B$ cpo's
Eine Funktion $f : A \to B$ heißt **stetig**, wenn $f(K)$ eine Kette in $B$ ist und $f(\bigsqcup K) = \bigsqcup f(K)$ für alle $K \subseteq A$ mit $K$ ist Kette in $A$.

Noch ein Blick auf die Kette aus der Vorlesung:
$K$ ist Kette, wenn zu je zwei $k_1, k_2 \in K$ gilt: $k_1 \sqsubseteq_A k_2$ oder $k_2 \sqsubseteq_A k_1$.

cpo: $(\mathbb{N}_\infty, \leq)$
$f(x) = x \mod 2$ mit $x \in \mathbb{N}$
Ist eine nicht stetige Funktion.

b) Beweisen Sie, dass die Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ergibt.
Skizze: Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ stetige Funktionen und $A, B$ und $C$ cpo's und der $\circ$-Operator steht - wie üblich - für die Komposition.
Für alle Ketten $k \subseteq A$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\bigsqcup k) &= \bigsqcup (g \circ f)(k)\\ &= \bigsqcup g(f(k))\end{aligned}$$

Wegen Monotonie von $f$ ist $f(k) \subseteq B$ eine Kette und wegen der Monotonie von $g$ ist $g(f(k)) \subseteq B$ Kette in $C$.

$$\begin{aligned}\bigsqcup g(f()k) &= g(\bigsqcup f(k))\\ &= g(f(\bigsqcup k))\\ &= (g \circ f)(\bigsqcup K)\end{aligned}$$

$q.e.d.$

# Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, wie Sie zu gegebenen cpos $D_1, \ldots, D_n$ mit $n \geq 2$ den Bereich der disjunkten Vereinigung $(D_1 + \ldots + D_n)$ erklären können, ohne die minimalen Elemente zu verschmelzen.

$D := D_1 + \ldots + S_2 = (\{(d, i) | 1 \leq i \leq nmd \in D_i\} \cup \bot_0, \sqsubseteq_0)$
$\bot_0 \sqsubseteq d \in D$
$(d, i) \sqsubseteq_D (d', j)$ genau dann wenn $i = j$, und $d \sqsubseteq_{0_i} d'$ Da jedes $D_i$ vorher cpo war und nun jeweils ein weiteres, gemeinsames Element, dass jeweils die Kritierien für $\bot$ erfüllt, ist das Resultat auch ein cpo.

b) Definieren Sie folgende Injektions-, Projektions- und Testfunktionen in kanonischer Weise:

$$\begin{aligned}
&in_i: && D_i \to (D_1 + \ldots + D_n) \text{ für alle } 1 \le i \le n\\
&d \mapsto (d, i) \text{ für } 1 \le i \le n &&\\
&out_i: && (D_1 + \ldots + D_n) \to D_i \text{ für alle } 1 \le i \le n\\
&d \mapsto \begin{cases} d & \text{falls } x = (d, i) \\ \perp_{D_i} & \text{sonst} \end{cases} &&\\
&is_i: && (D_1 + \ldots + D_n) \to BOOL_\perp \text{ für alle } 1 \le i \le n\\
&d \mapsto \begin{cases} \underline{true}, & \text{falls } x = (d, i) \\ \underline{false}, & \text{falls } x = (d, j), i \neq j \\ \perp, & \text{sonst} \end{cases} &&
\end{aligned}$$

# Aufgabe 3

Definieren Sie stetige Erweiterungen der Addition und des Tests auf Gleichheit, so dass diese Operationen total werden auf den cpo's $\mathbb{N}_\perp$ und $BOOL_\perp$. Diskutieren Sie, ob es mehrere solche Erweiterungen gibt.

$$\underline{plus} : \mathbb{N}_\perp \times \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$$

$$(n, m) \to \begin{cases} n + m, & \text{falls } n, m \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\underline{gleich} : \mathbb{N}_\perp \times \mathbb{N}_\perp \to BOOL_\perp$$

$$(n, m) \to \begin{cases} n = m, & \text{falls } n, m \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gibt keine weitere Erweiterungen für $\underline{plus}$, weil:

$$\begin{aligned}
(\perp, n) &\to n\\
(\perp, \perp) &\to \perp\\
\{(\perp, 1), (1, 1)\} &\to \{1, 2\} \text{ Widerspruch zu den beiden oberen Zeilen}
\end{aligned}$$

Für $\underline{gleich}$ gibt es ebenfalls keine weitere Erweiterung.

# Aufgabe 4

Seien $D_1$ und $D_2$ cpo's und auf $f : D_1 \to D_2$ und $g : D_2 \to D_1$ stetige Funktionen.
Beweisen Sie:

$$\begin{aligned}
fix_{f \circ g} &= f(fix_{g \circ f}) \quad \text{und}\\
fix_{g \circ f} &= g(fix_{f \circ g})
\end{aligned}$$

$$fix_j = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$$

(i)

$$
\begin{aligned}
fix_{f\circ g} &= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (f\circ g)^n(\perp_{D_2}) \\
\left[\text{weil } \perp_{D_2} \sqsubseteq_{D_2} f(\perp_{D_1}\right] &= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (f\circ g)^n(f(\perp_{D_1})) \\
&= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (f\circ (g\circ f)^n)(\perp_{D_1}) \\
&= f(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (g\circ f)^n(\perp_{D_1})) \\
&= f(fix_{g\circ f})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(i) fix_{f\circ g} &\sqsubseteq_{D_2} f(fix_{g\circ f} \\
(ii) fix_{g\circ f} &\sqsubseteq_{D_1} g(fix_{f\circ g} \\
(iii) f(fix_{g\circ f}) &\sqsubseteq_{D_1} f(g(fix_{f\circ g})),\ \text{wegen (ii) und Monotonie von } f \\
(iv) g(fix_{f\circ g} &\sqsubseteq_{D_2} fix_{g\circ f} = (f\circ g)(fix_{f\circ g}) \\
&= fix_{f\circ g}
\end{aligned}
$$

Behauptung folgt aus (iii) und (iv) sowie Antisymetrie.