Aufgabe 1

Sei $\underline{A} = (A, \sqsubseteq)$ eine Struktur, wobei die Relation $\sqsubseteq$ eine Halbordnung ist und es in A bzgl. $\sqsubseteq$ ein minimales Element $\perp$ gibt.
Zeigen Sie, dass aus der Endlichkeit von A folgt, dass $\underline{A}$ ein cpo ist.

Es müssen drei Bedingungen erfüllt sein, damit eine Struktur A ein cpo ist:

a) $\sqsubseteq$ ist Halbordnung.

b) In A existiert ein minimales Element.

c) Zu jeder Kette $K \subseteq A$ existiert eine kleinste obere Schranke.

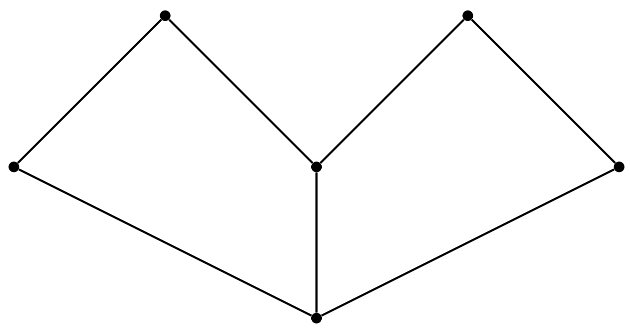
Aus der Aufgabenstellung folgt, dass Bedingung 1 ($\sqsubseteq$ ist Halbordnungsrelation) und 2 (es gibt minimales Elemement $\perp$) erfüllt sind. Um zu beweisen, dass A ein cpo ist, müssen wir also zeigen, dass zu jeder Kette $K \sqsubseteq A$ eine kleinste obere Schranke existiert. Aus der Endlichkeit von A folgt, dass es ein Element $\top$ gibt, für das gilt: $\top \geq x$ für alle $x \in A$. Aus der Definition der oberen Schranke folgt, dass es eine obere Schranke gibt, wenn ein größtes Element existiert. Daraus folgt wiederum, dass es eine kleinste obere Schranke für jede Kette $K \subseteq A$ geben muss.

Die Bedinungen 1 und 2 sind entsprechend der Aufgabenstellung erfüllt. Daher ist zu zeigen, dass aus der Endlichkeit von A folgt, dass zu jeder kette $K \subseteq A$ eine kleinste obere Schanke existiert.

Aus der Endlichkeit von A folgt, dass es ein Element $\top$ gibt, dass $\geq$ aller anderen Elemente ist. Aus der Definition der oberen Schranke folgt, dass es, wenn es ein größtes Elemement gibt, auch eine obere Schranke gibt. Daraus folgt, dass es eine kleinste obere Schranke für jede Kette $K \subseteq A$ geben muss

Aufgabe 2

Gegeben sei eine halbgeordnete Menge A, die sich grafisch wie folgt darstellen lässt:



a) Ist A ein cpo?
Ja, alle Kritierien sind erfüllt.

b) Ist A eine Kette?
Nein, die mittleren drei Elemente stehen nicht in Relation zu einander, die oberen zwei ebenso wenig.

c) Existiert eine kleinste obere Schranke von A in A?
Nein, da die beiden oberen Elemente augenscheinlich auf einer Höhe liegen.

Aufgabe 3

Finden Sie zwei Beispiele für Halbordnungen $(A, \sqsubseteq)$, die ein minimales Element besitzen aber keine cpo's sind.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{R}$ (Besitzt minimales Element 0, ist aber nach oben nicht beschränkt.

b) $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{N}$ (wie oben).

Aufgabe 4

Finden Sie ein Beispiel für eine nicht triviale, rekursive Funktionsgleichung, die mehr als eine Lösung hat.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } f(x) \mod 2 = x \\ 0, & \text{wenn } f(x) \mod 2 \neq x \end{cases}$$

Ein Klassiker: Fibonacci.

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{falls } x = 1 \\ g(x-1) + g(x-2), & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$