Aufgabe 1

Wenn man für die α-Reduktion $\lambda x.t \underset{\alpha}{\rightarrow} \lambda y.\$_y^x\, t$ auf die Bedingung $y \notin \mathtt{Var}(t)$ verzichtet, kann eine solche Reduktion die Semantik verändern. Geben Sie dafür ein Beispiel an.

Die α-Konversion funktioniert nur, wenn die Variable noch nicht verwendet wird ($y \notin \mathtt{Var}(t)$). Wenn man auf diese Eigenschaft verzichtet kann man genauso gut auch gleich das Gegenteil fordern: $y \in \mathtt{Var}(t)$. Beispiel:

$$\lambda x.xy \underset{\alpha}{\rightarrow} \lambda y.yy$$

Aufgabe 2

Wenn man für die β-Reduktion

$$(\lambda x.t)s \underset{\beta}{\rightarrow} \$_s^x\, t$$

auf die Forderung $\mathtt{Fr}(s) \cap \mathrm{Geb}(t) = \varnothing$ verzichtet, kann eine solche Reduktion die Semantik verändern. Geben Sie dafür ein Beispiel an.

Verzichtet man auf die oben genannte Eigenschaft bedeutet das, dass die Schnittmenge der freien Variablen von s und der gebundenen Variablen von t nicht leer ist. Es gibt also eine Variable die in beiden Termen vorkommt und damit nach Anwendung der β-Reduktion in einem Term stehen:

$$(\lambda x.xyz)z \underset{\beta}{\rightarrow} \lambda zyz$$

Aufgabe 3

Konstruieren Sie einen λ-Ausdruck t, der keine Normalform besitzt und dessen Reduktion zu immer größeren Ausdrücken führt.
Für das ungetypte Lambdakalkül müsste folgendes funktionieren:

$$\begin{aligned}&(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)\\ \Rightarrow&(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Schreiben Sie je einen getypten λ-Ausdruck für folgende Aufgaben:

a) Eine symmetrische Funktion soll dreifach auf ein Argument angewendet werden.

$$\lambda fx.f(f(f(x))) \qquad [D \rightarrow D] \rightarrow D \rightarrow D$$

b) Gegeben sei eine Liste der Länge 4 von Elementen des Typs D und eine Funktion vom Typ $[\mathtt{D} \rightarrow \mathtt{D}]$, berechne die Anwendung dieser Funktion auf alle Listenelemente.

$$\lambda L\, g. < g(\pi_1 L); g(\pi_2 L); g(\pi_3 L); g(\pi_4 L) > \qquad [D] \rightarrow [D \rightarrow D] \rightarrow [D]$$

c) Beschreibe den unschönfinkel-Operator im getypten λ-Kalkül, der angewendet auf eine Funktion vom Typ $[\mathtt{D}_1 \rightarrow [\mathtt{D}_2 \rightarrow \mathtt{D}_3]]$ eine Funktion des Typs $[(\mathtt{D}_1 \times \mathtt{D}_2) \rightarrow \mathtt{D}_3]$ liefert, wobei für alle `f`, `a` und `b`

```
(unschönfinkel f) <a,b> = f a b
```

gelten soll.

$$\lambda f.\lambda T.(f(\pi_1\, T)(\pi_2\, T)) \qquad [D_1 \rightarrow [D_2 \rightarrow D_3]] \rightarrow [(D_1 \times D_2) \rightarrow D_3]$$