Aufgabe 1

Sei $\underline{A} = (A, \sqsubseteq)$ eine Struktur, wobei die Relation $\sqsubseteq$ eine Halbordnung ist und es in A bzgl. $\sqsubseteq$ ein minimales Element $\perp$ gibt.
Zeigen Sie, dass aus der Endlichkeit von A folgt, dass $\underline{A}$ ein cpo ist.

Lösungsvorschlag Hinnerk:
Es müssen drei Bedingungen erfüllt sein, damit eine Struktur A ein cpo ist:

a) $\sqsubseteq$ ist Halbordnung.

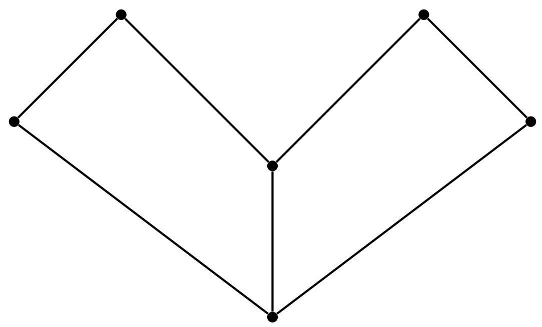
b) In A existiert ein minimales Element.

c) Zu jeder Kette $K \subseteq A$ existiert eine kleinste obere Schranke.

Aus der Aufgabenstellung folgt, dass Bedingung 1 ($\sqsubseteq$ ist Halbordnungsrelation) und 2 (es gibt minimales Elemement $\perp$) erfüllt sind. Um die Endlichkeit von A zu beweisen, müssen wir also zeigen, dass zu jeder Kette $K \sqsubseteq A$ eine kleinste obere Schranke existiert. Aus der Endlichkeit von A folgt, dass es ein Element $\top$ gibt, für das gilt: $\top \geq x$ für alle $x \in A$. Aus der Definition der oberen Schranke folgt, dass es eine obere Schranke gibt, wenn ein größtes Element existiert. Daraus folgt wiederum, dass es eine kleinste obere Schranke für jede Kette $K \subseteq A$ geben muss.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine halbgeordnete Menge A, die sich grafisch wie folgt darstellen lässt:



a) Ist A ein cpo?
Lösungsvorschlag Hinnerk:
Ja, alle Kritierien sind erfüllt.

b) Ist A eine Kette?
Lösungsvorschlag Hinnerk:
Nein, die mittleren drei Elemente stehen nicht in Relation zu einander, die oberen zwei ebenso wenig.

c) Existiert eine kleinste obere Schranke von A in A?
Lösungsvorschlag Hinnerk:
Nein, da die beiden oberen Elemente augenscheinlich auf einer Höhe liegen.

Aufgabe 3

Finden Sie zwei Beispiele für Halbordnungen $(A, \sqsubseteq)$, die ein minimales Element besitzen aber keine cpo's sind.

Lösungsvorschlag Hinnerk:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{R}$ (Besitzt minimales Element 0, ist aber nach oben nicht beschränkt.

b) $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{N}$ (wie oben).

Aufgabe 4

Finden Sie ein Beispiel für eine nicht triviale, rekursive Funktionsgleichung, die mehr als eine Lösung hat.

Lösungsvorschlag Hinnerk:

$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } f(x) \mod 2 = x \\ 0, & \text{wenn } f(x) \mod 2 \neq x \end{cases}$ Macht das Sinn? Ist das zu Trivial? (Für 1 ist es 1, für alle anderen Werte ist es 0)