TMB Formelsammlung

1 Statik

1.1 Grundgleichungen der Statik

$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M^P = 0$

1.2 Trigonometrische Sätze

Sinussatz $\quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Kosinussatz $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

Summensatz $\quad \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(2 \cdot \alpha)$

1.3 Standsicherheit

$\sum M_{Stand} = s_f \cdot \sum M_{Kipp}$ $\quad s_f$ ...Sicherheit gegen Kippen

1.4 Reibung

Haftreibung $\quad F_{R_{max}} = F_N \cdot \mu$

Gleitreibung $\quad F_R = F_N \cdot \mu$

Seilreibung $\quad F_z \leq F_h \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$ $\quad \alpha$ ...Winkel in *rad*

2 Festigkeitslehre

Flächenschwerpunkt $\quad x_S = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{1}{A} \cdot \int x \cdot dA$

2.1 Flächenmomente und Deviationsmomente

Flächenmomente $\quad I_y = \int z^2 \cdot dA$
$I_z = \int y^2 \cdot dA$

Deviationsmomente $\quad I_{yz} = \int y \cdot z \cdot dA$
negatives Vorzeichen in SE

polares Widerstandsmoment $\quad I_p = I_x + I_y$

2.2 Satz von Steiner

$I_y^P = I_y^S + A \cdot y^2 \qquad I_y^S = I_y^P - A \cdot y^2$

$I_{yz}^P = I_{yz}^S - A \cdot y \cdot z \qquad I_{yz}^S = I_{yz}^P + A \cdot y \cdot z$

2.3 Normalspannungen

2.3.1 Zug und Druck

$\sigma_{\text{Z/D}} = \frac{F_{\text{Z/D}}}{A} = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$

2.3.2 Biegung

$\sigma_B = \frac{M_B}{W_B} = \frac{M_B}{I} \cdot z$ $\quad z$ ...Schwerpunktabstand

2.3.3 Flächenträgheitsmomente

Rechteck $\quad I_{x_\square} = \frac{h^3 \cdot b}{12}$

Kreis $\quad I_{x_\circ} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

Kreisring $\quad I_{\text{KR}} = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{64}$

Dreieck $\quad I_{x_\triangle} = \frac{b \cdot h^3}{36} \qquad I_{xy_\triangle} = \frac{b^2 \cdot h^2}{72}$

2.3.4 Schiefe Biegung

Drehung des Kooridnatsystems um den Schwepunkt:

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos(2 \cdot \phi) + I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \phi)$$

$$I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos(2 \cdot \phi) - I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \phi)$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin(2 \cdot \phi) + I_{yz} \cdot \cos(2\phi)$$

Richtungswinkel gegen den Uhrzeigersinn:

$$\phi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z}\right)$$

$$-2 \cdot (I_y - I_z) \cdot \cos(2 \cdot \phi) - 4 \cdot I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \phi) \begin{cases} < 0 \rightarrow \text{Hauptachse} \\ \geq 0 \rightarrow \text{Nebenachse} \end{cases}$$

Maximales Flächenmoment:

$$I_{HA} = I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Minimales Flächenmoment:

$$I_{NA} = I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Abstandasabhängige Gesamt-Normalspannung:

$$\sigma(y_{HA}, z_{HA}) = \frac{M_{HA}}{I_1} \cdot z_{HA} + \frac{M_{NA}}{I_2} \cdot y_{HA} \pm \frac{F_{Z/D}}{A}$$

$$\sigma_x(y, z) = \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot z + \frac{M_x}{I_{zz}} \cdot y \pm \frac{F_{Z/D}}{A}$$

Normalspannung Nullinie:

$$\sigma_x(y, z) = 0 \quad \longrightarrow \quad y(z) \quad \text{oder} \quad z(y)$$

Knickung nach Euler:
<Bild>

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_K^2}$$

$$\sigma_K = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_K^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

$$\lambda_G = \sqrt{\pi \cdot \frac{E}{\sigma_{DB}}} \qquad \sigma_{DB} = \sigma$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{L_K^2 \cdot A}{I}} = \begin{cases} \text{...Schlankheitsgrad} \\ > 90 \; bzw. > \lambda_g \rightarrow \text{Euler} \\ \text{ansonsten} \rightarrow \text{Tetmajr oder Quetschen (Z/D)} \end{cases}$$

Knickung nach Tetmajr:
$\sigma_K = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$ $\quad$ a, b, c aus Tabelle

2.4 Querspannungen

2.4.1 Abscherung

$\tau_A = \frac{F_Q}{A}$

2.4.2 Querkraftbiegung

$\tau_S = \frac{F_Q \cdot s_x}{I_x \cdot b_{(z)}}$

$s_x = A_{\text{Rest}} \cdot z_{\text{Rest}}$

$F_N = \tau_s \cdot b_{(z)} \cdot l_N$

2.4.3 Torsion

$\tau_T = \frac{M_T}{W_T} = \frac{M_T}{I_p} \cdot z$ $\quad z$ ...Schwerpunktabstand

$\phi = \frac{M_T \cdot l}{I_p \cdot G}$

polare Flächenträgheitsmomente und Widerstandsmomente:

Kreis $\quad I_{p_\circ} = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} \qquad W_{T_\circ} = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}$

Kreisring $\quad I_{p_{\text{KR}}} = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{32} \qquad W_{T_\circ} = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{16 \cdot D}$

2.5 Wärmedehnung

$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$

2.6 Flächenpressung

$p = \frac{F}{A_{\text{proj.}}}$

2.7 Vergleichsspannungen

$\tau = \tau \cdot \alpha_0 \qquad \alpha_0 = \frac{\sigma_{\text{zul.}}}{\eta \cdot \tau_{\text{zul.}}} \qquad \sigma = \sigma_b \pm \sigma_{\text{Z/D}}$

Normalspannungshypothese ($\eta = 1$):

$\sigma_v = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$

Schubspannungshypothese (($\eta = 2$):

$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$

Gestaltänderungsenergiehypothese GEH $\left(\eta = \sqrt{3}\right)$:

$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$

2.8 Biegelinie

$W''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$ $\quad$ Variablen/-anzahl und Gleichungen/-anzahl Dokumentieren

2.9 Satz von Castigliano

$y = \frac{\partial W}{\partial F} \qquad F = \frac{\partial W}{\partial y} \qquad \phi = \frac{\partial W}{\partial M} \qquad M = \frac{\partial W}{\partial \phi}$

$$y = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_i(x_i)}{E_i \cdot A_i} \cdot \frac{\partial N_i(x_i)}{\partial F} \cdot dx_i + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{B_i}(x_i)}{E_i \cdot I_i} \cdot \frac{\partial M_{B_i}(x_i)}{\partial F} \cdot dx_i + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{T_i}(x_i)}{G_i \cdot I_{p_i}} \cdot \frac{\partial M_{T_i}(x_i)}{\partial F} \cdot dx_i$$

$$\phi = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{B_i}(x_i)}{E_i \cdot I_i} \cdot \frac{\partial M_{B_i}(x_i)}{\partial M} \cdot dx_i + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{T_i}(x_i)}{G \cdot I_{p_i}} \cdot \frac{\partial M_{T_i}(x_i)}{\partial M} \cdot dx_i$$

2.9.1 Satz von Menabrea

Fest-/Loslager F_{Lager}: $\quad y = 0 \quad \longrightarrow \quad F_{\text{Lager}}$

Einspannstelle $M_{\text{Einsp.}}$: $\quad \phi = 0 \quad \longrightarrow \quad M_{\text{Einsp.}}$

3 Hydromechanik

3.1 Kräfte

$F_{\text{Druck}} = p_{ges} \cdot A_{proj.}$

$p_{stat} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$ $\quad [p_{stat}] = \text{Pa}$

$F_{\text{Auftr.}} = \rho_{\text{Fl.}} \cdot g \cdot V_{\text{verdr.}}$ ...Vertikalkompnente (durch Schwp.)

$F_{\text{H}} = \rho \cdot g \cdot h_S \cdot A_{\text{proj.}}$ ...Horizontalkomponente

3.2 Druckmittelpunkt

$y_{SD} = y_D - y_S = \frac{I_x^S}{A \cdot y_S}$

$x_D = x_S$

3.3 Bernoulli-Gleichung – Energieerhaltung

$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot A \cdot v$

Druckform:

$\rho \cdot g \cdot h_1 + \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \frac{P_{\text{P}} \cdot \rho}{\dot{m}} = \rho \cdot g \cdot h_2 + \rho \cdot \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \Delta p_v$

Höhenform:

$h_1 + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{P_{\text{P}}}{\dot{m} \cdot g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \Delta h_v$

3.4 Strömungsverluste & Moody-Diagramm

örtliche Verluste:

$h_{\text{VE}} = \zeta \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$

Streckenverluste:

$h_{\text{VS}} = \lambda \cdot \frac{l}{d_{\text{hydr.}}} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$

$d_{\text{hydr.}} = \frac{4 \cdot A}{U_{\text{benetzt}}}$

$Re = \frac{v \cdot d_{\text{hydr.}}}{v_K}$ $\quad v_K$ ...kinetische Zähigkeit ($v_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-6} \, \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$)

3.5 Impulserhaltung und Stützkräfte

$|S| = p_0 \cdot A + m \cdot v$ $\quad S$ ...Stützkraft

4 Thermodynamik

4.1 ideales Gas

$p \cdot V = m \cdot R \cdot T$

$p \cdot v = R \cdot T$

$R = \frac{8314}{M}$ $\quad [R] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$

$R = c_p - c_v$

4.2 Hauptsätze der Thermodynamik

1. Hauptsatz der Thermodynamik:
$dQ + dA = (dEa) + dU$

2. Hauptsatz der Thermodynamik:
$ds = \frac{dq}{T}$

Arbeit - geschlossenes System:
$A_v = -\int_1^2 p \cdot dV$

Arbeit - offenes System:
$A_t = \int_1^2 V \cdot dp = H_2 - H1 - Q_a$

Wärme:
$dQ = dU + p \cdot dV = dH - V \cdot dp$

4.3 Zustandsänderungen

Isochor: $p_1 = p_2$

$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$

$q_{12} = c_v \cdot (T_2 - T_1)$

$a_t = R \cdot (T_2 - T_1) = v \cdot (p_2 - p_1)$

$a_v = 0$

$s_{12} = c_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

Isobar: $V_1 = V_2$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$

$q_{12} = c_p \cdot (T_2 - T_1)$

$a_t = 0$

$a_v = -R \cdot (T_2 - T_1) = -p \cdot (v_2 - v_1)$

$s_{12} = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

Isotherm: $T_1 = T_2$

$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$

$q_{12} = R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$

$a_t = -q_{12} = R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$

$a_v = a_t = -q_{12} = R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$

$s_{12} = R \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$

Isentrop: $S_1 = S_2$

$p_1 \cdot v_1^\kappa = p_2 \cdot v_2^\kappa$

$q_{12} = 0$

$a_t = c_p \cdot (T_2 - T_1)$

$a_v = c_v \cdot (T_2 - T_1)$

$s_{12} = 0$

$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa-1}$

$\kappa = \frac{a_t}{a_v} = \frac{c_p}{c_v}$

Polytrop:

$p_1 \cdot v_1^n = p_2 \cdot v_2^n \quad \longrightarrow \quad n = \frac{ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)}$

$q_{12} = c_v \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) = \frac{n-\kappa}{(n-1)\cdot(\kappa-1)} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$

$a_t = \frac{n}{n-1} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = a_v \cdot n$

$a_v = \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1)$

$s_{12} = c_v \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{R}{\kappa-1} \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

4.4 spezifische Wärmekapazitäten

$du = c_v \cdot dT$

$dh = c_p \cdot dT$

4.5 Kresiprozesse

Rechtsläufige Kresiprozesse:

$\eta_{th} = \frac{|A|}{Q_{zu}} = \frac{q_{zu} - |q_{ab}|}{q_{zu}}$ $\quad A_{KP} = -(Q_{zu} - |Q_{ab}|)$ $\quad P = A \cdot \dot{m}$

Isentrope Wirkungsgrade:

$\eta_{is\text{V}} = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1}$ $\quad \eta_{is\text{T}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2s} - h_1}$

Linksläufige Kresiprozesse:

$\epsilon_{KM} = \frac{q_{zu}}{q_{ab} - q_{zu}}$ $\quad \epsilon_{WP} = \frac{q_{ab}}{q_{ab} - q_{zu}}$

Anmerkung: Dampfprozesse: kein $c_p \cdot \Delta T$ $\Rightarrow$ Tabelle

4.6 Nassdampf

$h(x) = h' + x \cdot (h'' - h') = h' + x \cdot r$

$v(x) = v' + x \cdot (v'' - v')$

$s(x) = s' + x \cdot (s'' - s')$

4.7 Schmelzen

$m_i \cdot c_i \cdot \Delta T + m_i \cdot q_s + m_i \cdot c_s \cdot T_M = m_s \cdot c_s \cdot (T_s - T_K)$

5 Kinematik

5.1 Grundgleichungen

$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ $\quad \phi(t) = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\alpha}{2} \cdot t^2$

$v(t) = v_0 + a \cdot t$ $\quad \omega(t) = \omega_0 + \alpha \cdot t$

$v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (s - s_0)}$

$s = r \cdot \phi$ $\quad v = r \cdot \omega$ $\quad a = r \cdot \alpha$

5.2 Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei Drehbewegungen

$v_r = \dot{r}$ $\quad a_r = \ddot{r} - r \cdot \dot{\phi}^2$

$v_t = r \cdot \dot{\phi}$ $\quad a_t = r \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\phi}$

5.3 Absolutgeschwindigkeit & Absolutbeschleunigung

$\vec{v_B} = \vec{v_A} + \vec{v_{AB}}$

$\vec{a_B} = \vec{a_A} + \vec{a_{AB}}$

6 Kinetik

6.1 Dynamik

Impulssatz: $m \cdot \ddot{x} = \sum F$

Drallsatz: $J \cdot \ddot{\phi} = \sum M$

wichtige Kräfte: $F_{\text{Feder}} = c \cdot x_{\text{F}}$ $\quad F_{\text{Dämpfer}} = k \cdot \dot{x_{\text{D}}}$

wichtige Massenträgheitsmomente:

$J^S_{\text{Zylinder}} = \frac{m \cdot r^2}{2}$ $\quad J^S_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$ $\quad J^S_{\text{Stab}} = \frac{m \cdot l^2}{12}$

Satz von Steiner: $J^P = J^S + m \cdot r^2$

6.2 Energie & Arbeit

$E_1 + W_{zu} - W_{ab} = E_2$

$W = \int F \cdot ds = \int M \cdot d\phi$

potentielle Energie:

$E_{\text{pot}} = W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$

kinetische Energie:

$E_{\text{transl}} = W_{\text{transl}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$ $\quad E_{\text{rot}} = W_{\text{rot}} = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$

Federenergie:

$E_{\text{el}} = W_{\text{el}} = \frac{c \cdot (s_1^2 - s_2^2)}{2} = \frac{c \cdot (\phi_1^2 - \phi_2^2)}{2}$

Reibungsenergie:

$E_{\text{reib}} = W_{\text{reib}} = F_N \cdot \mu \cdot s$

Massenreduktion:

$m_{red} \cdot \frac{v_{red}^2}{2} = J_{red} \cdot \frac{\omega_{red}^2}{2} = \sum E_{\text{kin}}$

Leistung:

$P = F \cdot v = M \cdot \omega = \frac{F \cdot s}{t}$

6.3 Impuls & Stoß

Impulserhaltung: $m_1 \cdot \vec{v}_1 = m_2 \cdot \vec{v}_2 = \text{konst.}$

Stoß:

$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$

$s_{K1} = m_1 \cdot (u - v_1)$ $\quad s_{R1} = m_1 \cdot (v_1' - u)$

$s_{K2} = m_2 \cdot (u - v_2)$ $\quad s_{R2} = m_2 \cdot (v_2' - u)$

$k = \frac{s_{R1}}{s_{K1}} = \frac{s_{R2}}{s_{K2}} = \frac{u - v_1'}{v_1 - u} = \frac{v_2' - u}{u - v_2}$

$E_{\text{kin0}} E_{\text{pot0}} - E_v = E_{\text{kin1}} E_{\text{pot1}}$ $\quad E_v$ ...Verformungsenergie

6.4 Schwingungen

freie ungedämpfte Schwingung

$\ddot{\bar{x}} + \omega^2 \cdot \bar{x} = 0$ $\quad m \cdot \ddot{\bar{x}} + c \cdot \bar{x} = 0$

$\bar{x}(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t)$ bzw. $\bar{x}(t) = C \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$

$\longrightarrow$ A & B $\Leftarrow$ aus Randbedingungen ermitteln

$\longrightarrow$ $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\longrightarrow$ $\psi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$

freie gedämpfte Schwingung

$\ddot{\bar{x}} + 2\delta \cdot \dot{\bar{x}} + \omega^2 \cdot \bar{x} = 0$

schwache Dämpfung: $\delta^2 < \omega^2$

$\bar{x}(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot A \cdot \sin(\omega_d \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$

bzw.

$\bar{x}(t) = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \psi)$

$\longrightarrow$ $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$

$\longrightarrow$ A & B $\Leftarrow$ aus Randbedingungen ermitteln

$\longrightarrow$ $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\longrightarrow$ $\psi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$

starke Dämpfung: $\delta^2 > \omega^2$

$\bar{x}(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(A \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega^2} \cdot t} + B \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega^2} \cdot t}\right)$

aperiodischer Grenzfall: $\delta^2 = \omega^2$

$\bar{x}(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A + B \cdot t)$

erzwungene Schwingung

$\ddot{\bar{x}} + 2\delta \cdot \dot{\bar{x}} + \omega^2 \cdot \bar{x} = A_e \cdot \sin(\Omega \cdot t)$ oder $\cdots = A_e \cdot \cos(\Omega \cdot t)$

wenn $\omega = \Omega$ $\rightarrow$ Resonanz

$x_p(t) = C \cdot \sin(\Omega \cdot t + \psi)$ oder $\cdots = C \cdot \cos(\Omega \cdot t + \psi)$

$\longrightarrow$ $A = \frac{A_e}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \Omega}}$

$\longrightarrow$ $\psi = \arctan(\frac{2 \cdot \delta \cdot \Omega}{\omega^2 - \Omega^2})$ für $\psi < 0$: $\psi_{neu} = \psi + \pi$

---

http://wch.github.io/latexsheet/