TMB Formelsammlung

1 Statik

1.1 Grundgleichungen der Statik

$\sum F_x = 0;\ \sum F_y = 0;\ \sum M^P = 0$

1.2 Trigonometrische Sätze

Sinussatz $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

Summensätze $\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(2 \cdot \alpha)$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)$

1.3 Standsicherheit

$\sum M_{Stand} = s_f \cdot \sum M_{Kipp}$ $\quad s_f$ ...Sicherheit gegen Kippen

1.4 Reibung

Haftreibung $F_{R_{max}} = F_N \cdot \mu$ $\quad$ wenn $v = 0$, F_R aus Gleichgewichtsbedingungen

Gleitreibung $F_R = F_N \cdot \mu$

Seilreibung $F_z \leq F_h \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$ $\quad \alpha$ ...Winkel in *rad*

2 Festigkeitslehre

Flächenschwerpunkt $x_S = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{1}{A} \cdot \int x \cdot dA$

2.1 Flächenmomente und Deviationsmomente

Flächenmomente $I_y = \int z^2 \cdot dA$

$I_z = \int y^2 \cdot dA$

Deviationsmomente $I_{yz} = \int y \cdot z \cdot dA$

negatives Vorzeichen in SE

polares Widerstandsmoment $I_p = I_x + I_y$

2.2 Satz von Steiner

$I_y^P = I_y^S + A \cdot y^2 \qquad I_y^S = I_y^P - A \cdot y^2$

$I_{yz}^P = I_{yz}^S - A \cdot y \cdot z \qquad I_{yz}^S = I_{yz}^P + A \cdot y \cdot z$

festlegen: $\Delta y = y_{S_{\text{einzel}}} - y_{S_{\text{ges}}}$

2.3 Normalspannungen

2.3.1 Zug und Druck

$\sigma_{\text{Z/D}} = \frac{F_{\text{Z/D}}}{A} = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$

2.3.2 Biegung

$\sigma_B = \frac{M_B}{W_B} = \frac{M_B}{I} \cdot z$ $\quad z$ ...Schwerpunktabstand

2.3.3 Flächenträgheitsmomente

Rechteck $I_{x_\square} = \frac{h^3 \cdot b}{12}$

Kreis $I_{x_\circ} = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$

Kreisring $I_{\text{KR}} = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{64}$

Dreieck $I_{x_\triangle} = \frac{b \cdot h^3}{36} \qquad I_{xy_\triangle} = \frac{b^2 \cdot h^2}{72}$

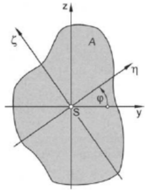
2.3.4 Schiefe Biegung

Drehung des Kooridnatsystems um den Schwepunkt:

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos(2 \cdot \phi) + I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \phi)$$

$$I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos(2 \cdot \phi) - I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \phi)$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin(2 \cdot \phi) + I_{yz} \cdot \cos(2\phi)$$



Richtungswinkel gegen den Uhrzeigersinn:

$$\phi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z}\right)$$

$$-2 \cdot (I_y - I_z) \cdot \cos(2 \cdot \phi) - 4 \cdot I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \phi) \begin{cases} < 0 \rightarrow \text{Hauptachse} \\ \geq 0 \rightarrow \text{Nebenachse} \end{cases}$$

Maximales Flächenmoment:

$$I_{HA} = I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Minimales Flächenmoment:

$$I_{NA} = I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Abstandsabhängige Gesamt-Normalspannung:

$$\sigma(y_{HA}, z_{HA}) = \pm \frac{M_{HA}}{I_1} \cdot z_{HA} \pm \frac{M_{NA}}{I_2} \cdot y_{HA} \pm \frac{F_{Z/D}}{A}$$

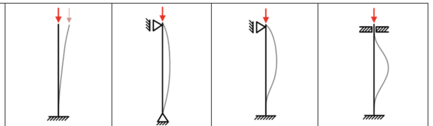
$$\sigma_x(y, z) = \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot z - \frac{M_z}{I_{zz}} \cdot y \pm \frac{F_{Z/D}}{A}$$

Normalspannung Nullinie:

$\sigma_x(y, z) = 0 \quad \longrightarrow \quad y(z) \quad$ oder $\quad z(y)$

2.3.5 Knickung

Knickung nach Euler:

Knickfälle				
Knicklänge	$L_K = 2 \cdot L$	$L_K = L$	$L_K = 0{,}7 \cdot L$	$L_K = 0{,}5 \cdot L$
Knickkraft	$F_K = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$F_K = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$F_K = 2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$F_K = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$

$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_K^2}$ $\qquad$ Knicksicherheit $S = \frac{F_K}{F}$

$$\sigma_K = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_K^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

$\lambda_G = \sqrt{\pi \cdot \frac{E}{\sigma_{DB}}} \qquad \sigma_{DB} = \sigma$

$$\lambda = \sqrt{\frac{L_K^2 \cdot A}{I}} = \begin{cases} \text{...Schlankheitsgrad} \\ > 90 \textit{ bzw. } > \lambda_g \rightarrow \text{Euler} \\ \text{ansonsten} \rightarrow \text{Tetmajr oder Quetschen (Zug/Druck)} \end{cases}$$

Knickung nach Tetmajr:

$\sigma_K = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$ $\qquad$ (a, b, c aus Tabelle)

2.4 Querspannungen

2.4.1 Abscherung

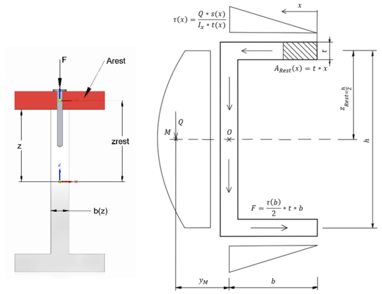
$\tau_A = \frac{F_Q}{A}$

2.4.2 Schub infolge Querkraft

$\tau_S = \frac{F_Q \cdot s_x}{I_x^{S_{\text{ges}}} \cdot b(z)} \qquad \tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \tau_{\text{mittel}}$

$s_x = A_{\text{Rest}} \cdot z_{\text{Rest}}$

$F_N = \tau_s \cdot b(z) \cdot l_N$



2.4.3 Torsion

$\tau_T = \frac{M_T}{W_T} = \frac{M_T}{I_p} \cdot z$ $\qquad z$ ...Schwerpunktabstand

$\phi = \frac{M_T \cdot l}{G \cdot I_p} \qquad [\phi] = rad$

polare Flächenträgheitsmomente und Widerstandsmomente:

Kreis $I_{p_\circ} = \frac{d^4 \cdot \pi}{32} \qquad W_{T_\circ} = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}$

Kreisring $I_{p_{\text{KR}}} = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{32} \qquad W_{T_\circ} = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{16 \cdot D}$

2.5 Wärmedehnung

$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$

2.6 Flächenpressung

$p = \frac{F}{A_{\text{proj.}}}$

2.7 Vergleichsspannungen

$\tau = \tau \cdot \alpha_0 \qquad \alpha_0 = \frac{\sigma_{\text{zul.}}}{\eta \cdot \tau_{\text{zul.}}} \qquad \sigma = \sigma_b \pm \sigma_{\text{Z/D}}$

Normalspannungshypothese ($\eta = 1$):

$$\sigma_v = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Schubspannungshypothese (($\eta = 2$):

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

Gestaltänderungsenergiehypothese GEH $\left(\eta = \sqrt{3}\right)$:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

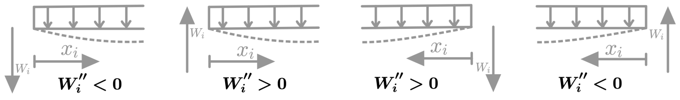
2.8 Biegelinie

$W''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$

$W'(x) = \int W''(x) + c_1$

$W(x) = \int W'(x) + c_2 = \int W''(x) + c_1 \cdot x + c_2$

Variablen/-anzahl und Gleichungen/-anzahl Dokumentieren



2.9 Satz von Castigliano

$y = \frac{\partial W}{\partial F}$ $\quad F = \frac{\partial W}{\partial y}$ $\quad \phi = \frac{\partial W}{\partial M}$ $\quad M = \frac{\partial W}{\partial \phi}$

$$y = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_i(x_i)}{E_i \cdot A_i} \cdot \frac{\partial N_i(x_i)}{\partial F} \cdot dx_i + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{B_i}(x_i)}{E_i \cdot I_i} \cdot \frac{\partial M_{B_i}(x_i)}{\partial F} \cdot dx_i + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{T_i}(x_i)}{G_i \cdot I_{p_i}} \cdot \frac{\partial M_{T_i}(x_i)}{\partial F} \cdot dx_i$$

$$\phi = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{B_i}(x_i)}{E_i \cdot I_i} \cdot \frac{\partial M_{B_i}(x_i)}{\partial M} \cdot dx_i + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{T_i}(x_i)}{G \cdot I_{p_i}} \cdot \frac{\partial M_{T_i}(x_i)}{\partial M} \cdot dx_i$$

2.9.1 Satz von Menabrea

Fest-/Loslager F_{Lager}: $\quad y = 0 \longrightarrow F_{\text{Lager}}$

Einspannstelle $M_{\text{Einsp.}}$: $\quad \phi = 0 \longrightarrow M_{\text{Einsp.}}$

3 Hydromechanik

3.1 Kräfte

$F_{\text{Druck}} = p_{ges} \cdot A_{proj.}$

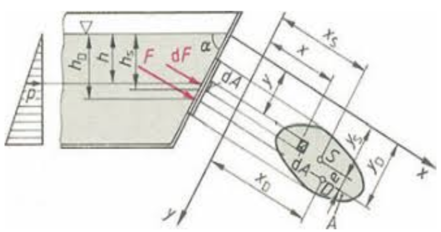
$p_{stat} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$ $\qquad [p_{stat}] = \text{Pa}$

$F_{\text{Auftr.}} = \rho_{\text{Fl.}} \cdot g \cdot V_{\text{verdr.}}$ $\qquad$ ...Vertikalkompnente (durch Schwp.)

$F_{\text{H}} = \rho \cdot g \cdot h_S \cdot A_{\text{proj.}}$ $\qquad$ ...Horizontalkomponente

3.2 Druckmittelpunkt

$y_{SD} = y_D - y_S = \frac{I_x^S}{A \cdot y_S}$ $\qquad x_D = x_S$



3.3 Bernoulli-Gleichung – Energieerhaltung

$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot A \cdot v$

Druckform:

$\rho \cdot g \cdot h_1 + \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \frac{P_P \cdot \rho}{\dot{m}} = \rho \cdot g \cdot h_2 + \rho \cdot \frac{v_2^2}{2} + p_2 + p_{\text{VE}}$

Höhenform:

$h_1 + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{P_P}{\dot{m} \cdot g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + h_{\text{VE}}$

3.4 Strömungsverluste & Moody-Diagramm

örtliche Verluste:

$h_{\text{VE}} = \zeta \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$

Streckenverluste:

$h_{\text{VS}} = \lambda \cdot \frac{l}{d_{\text{hydr.}}} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$

$d_{\text{hydr.}} = \frac{4 \cdot A}{U_{\text{benetzt}}}$

$Re = \frac{v \cdot d_{\text{hydr.}}}{v_K}$ $\qquad v_K$ ...kinetische Zähigkeit ($v_{H_2O} = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$)

3.5 Impulserhaltung und Stützkräfte

$|S| = p_{ü} \cdot A + \dot{m} \cdot v$ $\qquad S$ ...Stützkraft

4 Thermodynamik

4.1 ideales Gas

$p \cdot V = m \cdot R \cdot T$ $\qquad p \cdot v = R \cdot T$

$R = \frac{8314}{M}$ $\qquad [R] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ $\qquad R = c_p - c_v$

$\Rightarrow \quad c_v = \frac{R}{\kappa - 1}$ $\qquad c_p = \frac{R \cdot \kappa}{\kappa - 1}$

4.2 Hauptsätze der Thermodynamik

1. Hauptsatz der Thermodynamik:
$dQ + dA = (dEa) + dU$

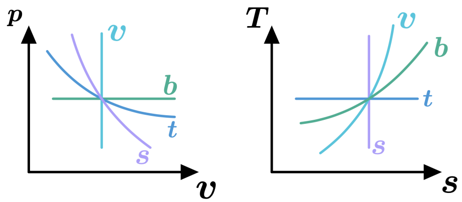
2. Hauptsatz der Thermodynamik:
$ds = \frac{dq}{T}$

Arbeit - geschlossenes System:
$A_v = -\int_1^2 p \cdot dV$

Arbeit - offenes System:
$A_t = \int_1^2 V \cdot dp = H_2 - H_1 - Q_a$

Wärme:
$dQ = dU + p \cdot dV = dH - V \cdot dp$ $\qquad h = u + p \cdot v$

4.3 Zustandsänderungen ideales Gas



Isochor: $\boxed{V_1 = V_2}$ $\qquad n = \infty$

$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$

$q_{12} = u_{12} = c_v \cdot (T_2 - T_1)$

$a_t = R \cdot (T_2 - T_1) = v \cdot (p_2 - p_1)$

$a_v = 0$

$s_{12} = c_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

Isobar: $\boxed{p_1 = p_2}$ $\qquad n = 0$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}$

$q_{12} = h_{12} = c_p \cdot (T_2 - T_1)$ $\qquad \rightarrow$ für Dampf: $q_{12} = h_{12}$

$a_t = 0$

$a_v = -R \cdot (T_2 - T_1) = -p \cdot (v_2 - v_1)$

$s_{12} = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

Isotherm/Isenthalp: $\boxed{T_1 = T_2}$ & $\boxed{h_{12} = 0}$ $\qquad n = 1$

$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{V_2}{V_1}$

$q_{12} = R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$

$a_t = a_v = -q_{12} = -R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$

$a_v = a_t = -q_{12} = -R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$

$s_{12} = R \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$

Isentrop: $\boxed{S_1 = S_2}$ $\qquad n = \kappa$ $\quad$ (adiabat & reibungsfrei)

$p_1 \cdot v_1^\kappa = p_2 \cdot v_2^\kappa$

$q_{12} = 0$

$a_t = c_p \cdot (T_2 - T_1)$

$a_v = c_v \cdot (T_2 - T_1)$

$s_{12} = 0$

$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa-1}$

$\kappa = \frac{a_t}{a_v} = \frac{c_p}{c_v}$

Polytrop:

$$p_1 \cdot v_1^n = p_2 \cdot v_2^n \quad \longrightarrow \quad n = \frac{ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)} = \frac{a_t}{a_v}$$

$$q_{12} = c_v \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) = \frac{n-\kappa}{(n-1)\cdot(\kappa-1)} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

$$a_t = \frac{n}{n-1} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = a_v \cdot n$$

$$a_v = \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) = \frac{a_t}{n}$$

$$s_{12} = c_v \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{R}{\kappa-1} \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Expansion: $n < \kappa \longrightarrow$ Wärme**zu**fuhr
$n > \kappa \longrightarrow$ Wärme**ab**fuhr

Kompression: $n > \kappa \longrightarrow$ Wärme**zu**fuhr
$n < \kappa \longrightarrow$ Wärme**ab**fuhr

4.4 spezifische Wärmekapazitäten

$$du = c_v \cdot dT$$

$$dh = c_p \cdot dT$$

4.5 Kreisprozesse

Rechtsläufige Kreisprozesse:

$\eta_{th} = \frac{|A|}{Q_{zu}} = \frac{q_{zu} - |q_{ab}|}{q_{zu}}$ $\qquad A_{KP} = -(Q_{zu} - |Q_{ab}|)$ $\qquad P = A \cdot \dot{m}$

Isentrope Wirkungsgrade:

$\eta_{is\mathrm{V}} = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1}$ $\qquad \eta_{is\mathrm{T}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2s} - h_1}$

für ideales Gas → $\eta_{is\mathrm{V}} = \frac{T_{2s} - T_1}{T_2 - T_1}$ $\quad \eta_{is\mathrm{T}} = \frac{T_2 - T_1}{T_{2s} - T_1}$

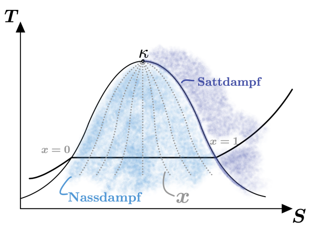
Linksläufige Kreisprozesse:

$\epsilon_{KM} = \frac{q_{zu}}{q_{ab} - q_{zu}}$ $\qquad \epsilon_{WP} = \frac{q_{ab}}{q_{ab} - q_{zu}}$

Dampfprozesse:

kein $h_{12} = c_p \cdot T_{12}$ $\quad \Rightarrow$ Tabelle
$q_{12} = h_{12}$

4.6 Nassdampf



$$h(x) = h' + x \cdot (h'' - h') = h' + x \cdot r$$

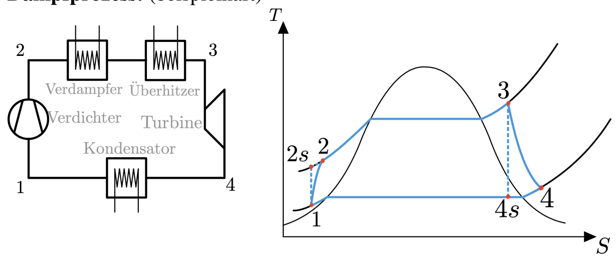
$$v(x) = v' + x \cdot (v'' - v')$$

$$s(x) = s' + x \cdot (s'' - s')$$

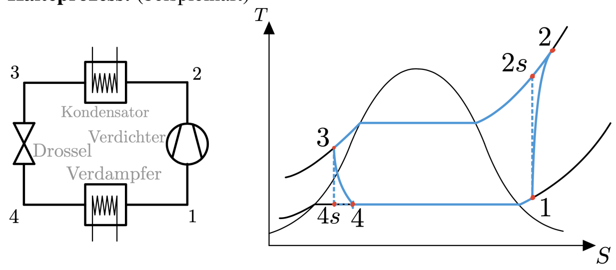
unter der Nassdampfkurve gilt **nicht** $h_{12} = c_p \cdot (T_2 - T_1)$)

4.6.1 Kreisprozesse Skizzen

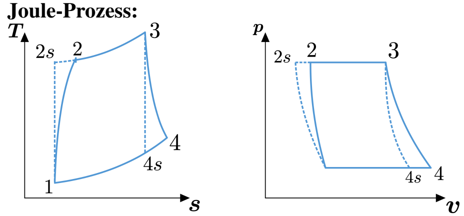
Dampfprozess: (beispielhaft)



Kälteprozess: (beispielhaft)



Joule-Prozess:



4.7 Schmelzen

$$m_i \cdot c_i \cdot \Delta T + m_i \cdot q_s + m_i \cdot c_s \cdot T_M = m_s \cdot c_s \cdot (T_s - T_K)$$

5 Kinematik

5.1 Grundgleichungen

$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ $\qquad \phi(t) = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\alpha}{2} \cdot t^2$

$v(t) = v_0 + a \cdot t$ $\qquad \omega(t) = \omega_0 + \alpha \cdot t$

$$v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (s - s_0)}$$

$s = r \cdot \phi$ $\qquad v = r \cdot \omega$ $\qquad a = r \cdot \alpha$

5.2 Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei Drehbewegungen

$v_r = \dot{r}$ $\qquad a_r = \ddot{r} - r \cdot \dot{\phi}^2$

$v_t = r \cdot \dot{\phi}$ $\qquad a_t = r \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\phi}$

5.3 Absolutgeschwindigkeit & Absolutbeschleunigung

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + \vec{v_{AB}}$$

$$\vec{a_B} = \vec{a_A} + \vec{a_{AB}}$$

6 Kinetik

6.1 Dynamik

Impulssatz: $\quad m \cdot \ddot{x} = \sum F$

Drallsatz: $\quad J \cdot \ddot{\phi} = \sum M$

wichtige Kräfte: $\quad F_{\text{Feder}} = c \cdot x_{\text{F}}$ $\qquad F_{\text{Dämpfer}} = k \cdot \dot{x_{\text{D}}}$

wichtige Massenträgheitsmomente:

$J^S_{\text{Zylinder}} = \frac{m \cdot r^2}{2}$ $\qquad J^S_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$ $\qquad J^S_{\text{Stab}} = \frac{m \cdot l^2}{12}$

Satz von Steiner: $\quad J^P = J^S + m \cdot r^2$

6.2 Energie & Arbeit

$$E_1 + W_{zu} - W_{ab} = E_2$$

$$W = \int F \cdot ds = \int M \cdot d\phi$$

potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

kinetische Energie:

$E_{\text{transl}} = W_{\text{transl}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$ $\qquad E_{\text{rot}} = W_{\text{rot}} = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$

Federenergie:

$$E_{\text{el}} = W_{\text{el}} = \frac{c \cdot (s_1^2 - s_2^2)}{2} = \frac{c \cdot (\phi_1^2 - \phi_2^2)}{2}$$

Reibungsenergie:

$$E_{\text{reib}} = W_{\text{reib}} = F_N \cdot \mu \cdot s$$

Massenreduktion:

$$m_{red} \cdot \frac{v_{red}^2}{2} = J_{red} \cdot \frac{\omega_{red}^2}{2} = \sum E_{\text{kin}}$$

Leistung:

$$P = F \cdot v = M \cdot \omega = \frac{F \cdot s}{t}$$

6.3 Impuls & Stoß

Impulserhaltung: $\quad m_1 \cdot \vec{v_1} = m_2 \cdot \vec{v_2} =$ konst.

Stoß:

$$u = \frac{m_{1\text{red}} \cdot v_1 + m_{2\text{red}} \cdot v_2}{m_{1\text{red}} + m_{2\text{red}}}$$

$s_{K1} = m_1 \cdot (u - v_1)$ $\qquad s_{R1} = m_1 \cdot (v_1' - u)$

$s_{K2} = m_2 \cdot (u - v_2)$ $\qquad s_{R2} = m_2 \cdot (v_2' - u)$

$$k = \frac{s_{R1}}{s_{K1}} = \frac{s_{R2}}{s_{K2}} = \frac{u - v_1'}{v_1 - u} = \frac{v_2' - u}{u - v_2} \quad \longrightarrow \quad v_i' = (1 + k) \cdot u - v_i \cdot k$$

v_i ...Geschwindigkeit von Masse i vor dem Stoß

v_i' ...Geschwindigkeit von Masse i nach dem Stoß

u ...gemeinsame Geschwindigkeit während der Kompressionsphase

$E_{\text{kin0}} E_{\text{pot0}} - E_v = E_{\text{kin1}} E_{\text{pot1}}$ $\qquad E_v$ ...Verformungsenergie

6.4 Schwingungen

freie ungedämpfte Schwingung

$\ddot{\bar{x}} + \omega^2 \cdot \bar{x} = 0 \qquad m \cdot \ddot{\bar{x}} + c \cdot \bar{x} = 0$

$\bar{x}(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t)$ bzw. $\bar{x}(t) = C \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$

$\longrightarrow \quad A \;\&\; B \quad \Leftarrow$ aus Randbedingungen ermitteln

$\longrightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\longrightarrow \quad \psi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$

freie gedämpfte Schwingung

$\ddot{\bar{x}} + 2\delta \cdot \dot{\bar{x}} + \omega^2 \cdot \bar{x} = 0$

schwache Dämpfung: $\boxed{\delta^2 < \omega^2}$

$\bar{x}(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot A \cdot \sin(\omega_d \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$

bzw.

$\bar{x}(t) = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \psi)$

$\longrightarrow \quad \omega_d = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$

$\longrightarrow \quad A \;\&\; B \quad \Leftarrow$ aus Randbedingungen ermitteln

$\longrightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\longrightarrow \quad \psi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$

starke Dämpfung: $\boxed{\delta^2 > \omega^2}$

subitem $\bar{x}(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(A \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega^2} \cdot t} + B \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega^2} \cdot t}\right)$

aperiodischer Grenzfall: $\boxed{\delta^2 = \omega^2}$

$\bar{x}(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A + B \cdot t)$

erzwungene Schwingung

$\ddot{\bar{x}} + 2\delta \cdot \dot{\bar{x}} + \omega^2 \cdot \bar{x} = A_e \cdot \sin(\Omega \cdot t)$ oder $\cdots = A_e \cdot \cos(\Omega \cdot t)$

$x_p(t) = C \cdot \sin(\Omega \cdot t + \psi)$ oder $\cdots = C \cdot \cos(\Omega \cdot t + \psi)$

$\longrightarrow \quad A = \frac{A_e}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \Omega}}$

$\longrightarrow \quad \psi = \arctan(\frac{2 \cdot \delta \cdot \Omega}{\omega^2 - \Omega^2})$ für $\psi < 0$: $\psi_{neu} = \psi + \pi$

$\omega_{\text{max}} = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}$

wenn $\omega_{\text{max}} = \Omega \quad \rightarrow$ Resonanz

Federschaltungen

$c_{\text{ers,parallel}} = \sum_i^n c_i = c_1 + c_2 + \cdots$

$c_{\text{ers,seriell}} = \frac{1}{\sum_i^n \frac{1}{c_i}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots}$