

Inhaltsverzeichnis

1	Statik	1
1.1	Grundgleichungen der Statik	1
1.2	Trigonometrische Sätze	1
1.3	Standsicherheit	1
1.4	Reibung	1
2	Festigkeitslehre	1
2.1	Flächenmomente und Deviationsmomente	1
2.2	Satz von Steiner	1
2.3	Normalspannungen	1
2.3.1	Zug und Druck	1
2.3.2	Biegung	1
2.3.3	Flächenträgheitsmomente	1
2.3.4	Schnittgrößen	1
2.3.5	Schiefe Biegung	1
2.3.6	Knickung	1
2.4	Querspannungen	1
2.4.1	Abscherung	1
2.4.2	Schub infolge Querkraft	1
2.4.3	Torsion	1
2.5	Wärmedehnung	1
2.6	Flächenpressung	1
2.7	Vergleichsspannungen	1
2.8	Biegelinie	2
2.9	Satz von Castigliano	2
2.9.1	Satz von Menabrea	2
3	Hydromechanik	2
3.1	Kräfte	2
3.2	Druckmittelpunkt	2
3.3	Bernoulli-Gleichung – Energieerhaltung	2
3.4	Strömungsverluste & Moody-Diagramm	2
3.5	Impulserhaltung und Stützkkräfte	2
4	Thermodynamik	2
4.1	ideales Gas	2
4.2	Hauptsätze der Thermodynamik	2
4.3	Zustandsänderungen ideales Gas	2
4.4	spezifische Wärmekapazitäten	3
4.5	Kreisprozesse	3
4.6	Nassdampf	3
4.6.1	Kreisprozesse Skizzen	3
4.7	Schmelzen	3
5	Kinematik	3
5.1	Grundgleichungen	3
5.2	Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei Drehbewegungen	3
5.3	Absolutgeschwindigkeit & Absolutbeschleunigung	3
6	Kinetik	3
6.1	Dynamik	3
6.2	Energie & Arbeit	3
6.3	Impuls & Stoß	3
6.4	Schwingungen	4

TMB Formelsammlung

1 Statik

1.1 Grundgleichungen der Statik

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M^P = 0$$

1.2 Trigonometrische Sätze

Sinussatz $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

Summensätze $\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(2 \cdot \alpha)$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)$

1.3 Standsicherheit

$$\sum M_{Stand} = s_f \cdot \sum M_{Kipp} \quad s_f \dots \text{Sicherheit gegen Kippen}$$

1.4 Reibung

Haftreibung $F_{R_{max}} = F_N \cdot \mu$ wenn $v = 0$, F_R aus Gleichgewichtsbedingungen

Gleitreibung $F_R = F_N \cdot \mu$

Seilreibung $F_z \leq F_h \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$ $\alpha \dots$ Winkel in rad

2 Festigkeitslehre

Flächenschwerpunkt $x_S = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{1}{A} \cdot \int x \cdot dA$

2.1 Flächenmomente und Deviationsmomente

Flächenmomente $I_y = \int z^2 \cdot dA$
 $I_z = \int y^2 \cdot dA$

Deviationsmomente $I_{yz} = \int y \cdot z \cdot dA$
negatives Vorzeichen in SE

polares Widerstandsmoment $I_p = I_x + I_y$

2.2 Satz von Steiner

$$I_y^P = I_y^S + A \cdot y^2 \quad I_y^S = I_y^P - A \cdot y^2$$
$$I_{yz}^P = I_{yz}^S - A \cdot y \cdot z \quad I_{yz}^S = I_{yz}^P + A \cdot y \cdot z$$

festlegen: $\Delta y = y_{S_{\text{einzel}}} - y_{S_{\text{ges}}}$

2.3 Normalspannungen

2.3.1 Zug und Druck

$$\sigma_{Z/D} = \frac{F_{Z/D}}{A} = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

2.3.2 Biegung

$$\sigma_B = \frac{M_B}{W_B} = \frac{M_B}{I} \cdot z \quad z \dots \text{Schwerpunktstabsand}$$

2.3.3 Flächenträgheitsmomente

Rechteck $I_{x_{\square}} = \frac{h^3 \cdot b}{12}$

Kreis $I_{x_o} = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$

Kreisring $I_{KR} = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{64}$

Dreieck $I_{x_{\triangle}} = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $I_{xy_{\triangle}} = \frac{b^2 \cdot h^2}{72}$

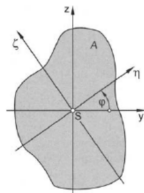
2.3.4 Schnittgrößen

$$Q(x_i) = Q_0 \pm \int_0^{x_i} q(x) \cdot dx \quad Q(x_{M_{\max}}) = 0 \rightarrow x_{M_{\max}}$$
$$M(x_i) = M_0 \mp \int_0^{x_i} Q(x) \cdot dx \quad M_{\max} = M(x_{M_{\max}})$$
$$M_{\text{Streckenl.}}(x_i) = \int_0^{x_i} q(x) \cdot x \cdot dx$$

2.3.5 Schiefe Biegung

Drehung des Koordinatensystems um den Schwerpunkt:

$$I_{\eta} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos(2 \cdot \phi) + I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \phi)$$
$$I_{\zeta} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos(2 \cdot \phi) - I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \phi)$$
$$I_{\eta\zeta} = -\frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin(2 \cdot \phi) + I_{yz} \cdot \cos(2 \cdot \phi)$$



Richtungswinkel gegen den Uhrzeigersinn:

$$\phi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z} \right)$$
$$-2 \cdot (I_y - I_z) \cdot \cos(2 \cdot \phi) - 4 \cdot I_{yz} \cdot \sin(2 \cdot \phi) \begin{cases} < 0 \rightarrow \text{Hauptachse} \\ \geq 0 \rightarrow \text{Nebenachse} \end{cases}$$

Maximales Flächenmoment:

$$I_{HA} = I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2} \right)^2 + I_{yz}^2}$$

Minimales Flächenmoment:

$$I_{NA} = I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2} \right)^2 + I_{yz}^2}$$

Abstandsabhängige Gesamt-Normalspannung:

$$\sigma(y_{HA}, z_{HA}) = \pm \frac{M_{HA}}{I_1} \cdot z_{HA} \pm \frac{M_{NA}}{I_2} \cdot y_{HA} \pm \frac{F_{Z/D}}{A}$$
$$\sigma_x(y, z) = \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot z - \frac{M_z}{I_{zz}} \cdot y \pm \frac{F_{Z/D}}{A}$$

Normalspannung Nulllinie:

$$\sigma_x(y, z) = 0 \rightarrow y(z) \text{ oder } z(y)$$

2.3.6 Knickung

Knickung nach Euler:

Knickfälle				
Knicklänge	$L_K = 2 \cdot L$	$L_K = L$	$L_K = 0,7 \cdot L$	$L_K = 0,5 \cdot L$
Knickkraft	$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot L^2}$	$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$	$F_K = 2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$F_K = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_K^2} \quad \text{Knicksicherheit } S = \frac{F_K}{F}$$

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_K^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

$$\lambda_G = \sqrt{\pi \cdot \frac{E}{\sigma_{DB}}} \quad \sigma_{DB} = \sigma$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{L_K^2 \cdot A}{I}} = \begin{cases} \dots \text{Schlankheitsgrad} \\ > 90 \text{ bzw. } > \lambda_g \rightarrow \text{Euler} \\ \text{ansonsten} \rightarrow \text{Tetmajr oder Quetschen (Zug/Druck)} \end{cases}$$

Knickung nach Tetmajr:

$$\sigma_K = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2 \quad (a, b, c \text{ aus Tabelle})$$

2.4 Querspannungen

2.4.1 Abscherung

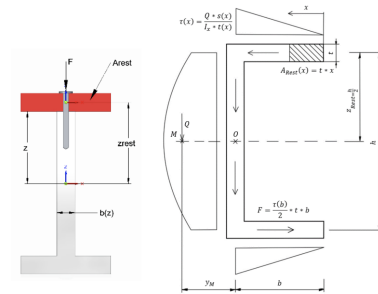
$$\tau_A = \frac{F_Q}{A}$$

2.4.2 Schub infolge Querkraft

$$\tau_S = \frac{F_Q \cdot s_x}{I_x \cdot S_{ges} \cdot b(z)} \quad \tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \tau_{\text{mittel}}$$

$$s_x = A_{\text{Rest}} \cdot z_{\text{Rest}}$$

$$F_N = \tau_s \cdot b(z) \cdot l_N$$



2.4.3 Torsion

$$\tau_T = \frac{M_T}{W_T} = \frac{M_T}{I_p} \cdot z \quad z \dots \text{Schwerpunktstabsand}$$

$$\phi = \frac{M_T \cdot l}{G \cdot I_p} \quad [\phi] = rad$$

polare Flächenträgheitsmomente und Widerstandsmomente:

Kreis $I_{p_o} = \frac{d^4 \cdot \pi}{32}$ $W_{T_o} = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}$

Kreisring $I_{p_{KR}} = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{32}$ $W_{T_o} = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{16 \cdot D}$

2.5 Wärmedehnung

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$$

2.6 Flächenpressung

$$p = \frac{F}{A_{\text{proj.}}}$$

2.7 Vergleichsspannungen

$$\tau = \tau \cdot \alpha_0 \quad \alpha_0 = \frac{\sigma_{zul.}}{\eta \cdot \tau_{zul.}} \quad \sigma = \sigma_b \pm \sigma_{Z/D}$$

Normalspannungshypothese ($\eta = 1$):

$$\sigma_v = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2}$$

Schubspannungshypothese ($\eta = 2$):

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

Gestaltänderungsenergiehypothese GEH ($\eta = \sqrt{3}$):

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

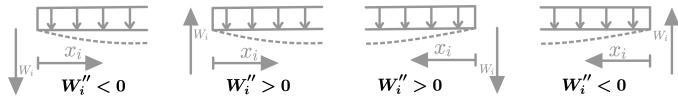
2.8 Biegelinie

$$W''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$$

$$W'(x) = \int W''(x) + c_1$$

$$W(x) = \int W'(x) + c_2 = \int W''(x) + c_1 \cdot x + c_2$$

Variablen/-anzahl und Gleichungen/-anzahl Dokumentieren



2.9 Satz von Castigliano

$$y = \frac{\partial W}{\partial F} \quad F = \frac{\partial W}{\partial y} \quad \phi = \frac{\partial W}{\partial M} \quad M = \frac{\partial W}{\partial \phi}$$

$$y = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_i(x_i)}{E_i \cdot A_i} \cdot \frac{\partial N_i(x_i)}{\partial F} \cdot dx_i + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{B_i}(x_i)}{E_i \cdot I_i} \cdot \frac{\partial M_{B_i}(x_i)}{\partial F} \cdot dx_i + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{T_i}(x_i)}{G_i \cdot I_{p_i}} \cdot \frac{\partial M_{T_i}(x_i)}{\partial F} \cdot dx_i$$

$$\phi = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{B_i}(x_i)}{E_i \cdot I_i} \cdot \frac{\partial M_{B_i}(x_i)}{\partial M} \cdot dx_i + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_{T_i}(x_i)}{G \cdot I_{p_i}} \cdot \frac{\partial M_{T_i}(x_i)}{\partial M} \cdot dx_i$$

2.9.1 Satz von Menabrea

Fest-/Loslager F_{Lager} : $y = 0 \rightarrow F_{\text{Lager}}$
 Einspannstelle $M_{\text{Einsp.}}$: $\phi = 0 \rightarrow M_{\text{Einsp.}}$

3 Hydromechanik

3.1 Kräfte

$$F_{\text{Druck}} = p_{\text{ges}} \cdot A_{\text{proj.}}$$

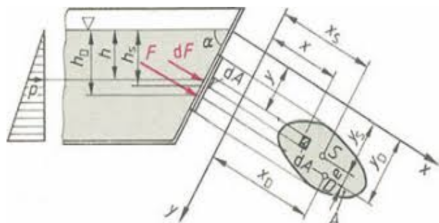
$$p_{\text{stat}} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad [p_{\text{stat}}] = \text{Pa}$$

$$F_{\text{Auftr.}} = \rho_{\text{Fl.}} \cdot g \cdot V_{\text{verdr.}} \quad \dots \text{Vertikalkomponente (durch Schw.)}$$

$$F_{\text{H}} = \rho \cdot g \cdot h_S \cdot A_{\text{proj.}} \quad \dots \text{Horizontalkomponente}$$

3.2 Druckmittelpunkt

$$y_{SD} = y_D - y_S = \frac{I_x^S}{A \cdot y_S} \quad x_D = x_S$$



3.3 Bernoulli-Gleichung – Energieerhaltung

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot A \cdot v$$

Druckform:

$$\rho \cdot g \cdot h_1 + \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \frac{p_p \cdot \rho}{\dot{m}} = \rho \cdot g \cdot h_2 + \rho \cdot \frac{v_2^2}{2} + p_2 + p_{VE}$$

Höhenform:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{p_p}{\dot{m} \cdot g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + h_{VE}$$

3.4 Strömungsverluste & Moody-Diagramm

örtliche Verluste:

$$h_{VE} = \zeta \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Streckenverluste:

$$h_{VS} = \lambda \cdot \frac{l}{d_{\text{hydr.}}} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$$d_{\text{hydr.}} = \frac{4 \cdot A}{U_{\text{benetzt}}}$$

$$Re = \frac{v \cdot d_{\text{hydr.}}}{\nu_K} \quad \nu_K \dots \text{kinetische Zähigkeit } (\nu_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}})$$

3.5 Impulserhaltung und Stützkkräfte

$$|S| = p_{\ddot{u}} \cdot A + \dot{m} \cdot v \quad S \dots \text{Stützkraft}$$

4 Thermodynamik

4.1 ideales Gas

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T \quad p \cdot v = R \cdot T$$

$$R = \frac{8314}{M} \quad [R] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad R = c_p - c_v$$

$$\Rightarrow c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad c_p = \frac{R \cdot \kappa}{\kappa - 1}$$

4.2 Hauptsätze der Thermodynamik

1. Hauptsatz der Thermodynamik:

$$dQ + dA = (dE_a) + dU$$

2. Hauptsatz der Thermodynamik:

$$ds = \frac{dq}{T}$$

Arbeit - geschlossenes System:

$$A_v = - \int_1^2 p \cdot dV$$

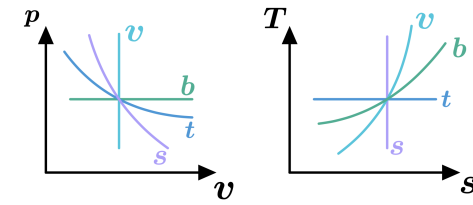
Arbeit - offenes System:

$$A_t = \int_1^2 V \cdot dp = H_2 - H_1 - Q_a$$

Wärme:

$$dQ = dU + p \cdot dV = dH - V \cdot dp \quad h = u + p \cdot v$$

4.3 Zustandsänderungen ideales Gas



Isochor: $V_1 = V_2 \quad n = \infty$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$q_{12} = u_{12} = c_v \cdot (T_2 - T_1)$$

$$a_t = R \cdot (T_2 - T_1) = v \cdot (p_2 - p_1)$$

$$a_v = 0$$

$$s_{12} = c_v \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

Isobar: $p_1 = p_2 \quad n = 0$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$q_{12} = h_{12} = c_p \cdot (T_2 - T_1) \quad \rightarrow \text{für Dampf: } q_{12} = h_{12}$$

$$a_t = 0$$

$$a_v = -R \cdot (T_2 - T_1) = -p \cdot (v_2 - v_1)$$

$$s_{12} = c_p \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

Isotherm/Isenthalp: $T_1 = T_2 \quad \& \quad h_{12} = 0 \quad n = 1$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$q_{12} = R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = -R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{v_1}{v_2} \right)$$

$$a_t = a_v = -q_{12} = -R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{v_1}{v_2} \right)$$

$$a_v = a_t = -q_{12} = -R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{v_1}{v_2} \right)$$

$$s_{12} = R \cdot \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$$

Isentrop: $S_1 = S_2 \quad n = \kappa \quad (\text{adiabat \& reibungsfrei})$

$$p_1 \cdot v_1^\kappa = p_2 \cdot v_2^\kappa$$

$$q_{12} = 0$$

$$a_t = c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

$$a_v = c_v \cdot (T_2 - T_1)$$

$$s_{12} = 0$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1}$$

$$\kappa = \frac{a_t}{a_v} = \frac{c_p}{c_v}$$

Polytrop:

$$p_1 \cdot v_1^n = p_2 \cdot v_2^n \rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)} = \frac{a_t}{a_v}$$

$$q_{12} = c_v \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) = \frac{n-\kappa}{(n-1) \cdot (\kappa-1)} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

$$a_t = \frac{n}{n-1} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = a_v \cdot n$$

$$a_v = \frac{R}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) = \frac{a_t}{n}$$

$$s_{12} = c_v \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{R}{\kappa-1} \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Expansion: $n < \kappa \rightarrow$ Wärmeezufuhr
 $n > \kappa \rightarrow$ Wärmeeabfuhr

Kompression: $n > \kappa \rightarrow$ Wärmeezufuhr
 $n < \kappa \rightarrow$ Wärmeeabfuhr

4.4 spezifische Wärmekapazitäten

$$du = c_v \cdot dT$$

$$dh = c_p \cdot dT$$

4.5 Kreisprozesse

Rechtsläufige Kreisprozesse:

$$\eta_{th} = \frac{|A|}{Q_{zu}} = \frac{q_{zu} - |q_{ab}|}{q_{zu}} \quad A_{KP} = -(Q_{zu} - |Q_{ab}|) \quad P = A \cdot \dot{m}$$

Isentrope Wirkungsgrade:

$$\eta_{isV} = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1} \quad \eta_{isT} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2s} - h_1}$$

$$\text{für ideales Gas} \rightarrow \eta_{isV} = \frac{T_{2s} - T_1}{T_2 - T_1} \quad \eta_{isT} = \frac{T_2 - T_1}{T_{2s} - T_1}$$

Linksläufige Kreisprozesse:

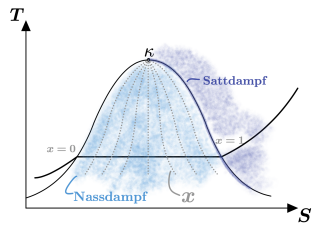
$$\epsilon_{KM} = \frac{q_{zu}}{q_{ab} - q_{zu}} \quad \epsilon_{WP} = \frac{q_{ab}}{q_{ab} - q_{zu}}$$

Dampfprozesse:

$$\text{kein } h_{12} = c_p \cdot T_{12} \Rightarrow \text{Tabelle}$$

$$q_{12} = h_{12}$$

4.6 Nassdampf



$$h(x) = h' + x \cdot (h'' - h') = h' + x \cdot r$$

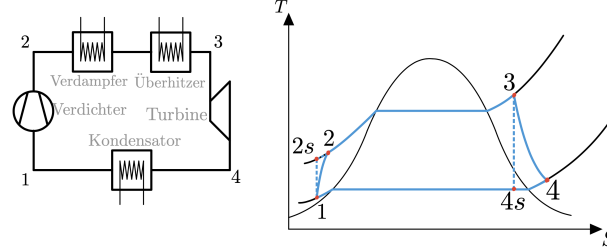
$$v(x) = v' + x \cdot (v'' - v')$$

$$s(x) = s' + x \cdot (s'' - s')$$

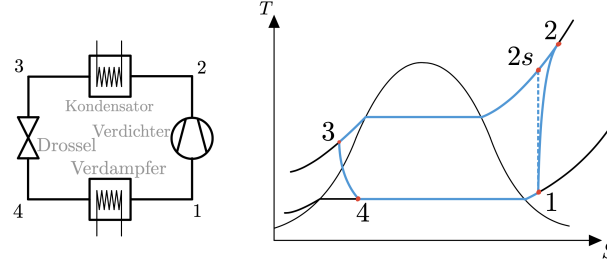
$$\text{unter der Nassdampfkurve gilt nicht } h_{12} = c_p \cdot (T_2 - T_1))$$

4.6.1 Kreisprozesse Skizzen

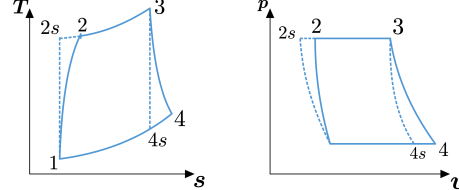
Dampfprozess: (beispielhaft)



Kälteprozess: (beispielhaft)



Joule-Prozess:



4.7 Schmelzen

$$m_i \cdot c_i \cdot \Delta T + m_i \cdot q_s + m_i \cdot c_s \cdot T_M = m_s \cdot c_s \cdot (T_s - T_K)$$

5 Kinematik

5.1 Grundgleichungen

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \phi(t) = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\alpha}{2} \cdot t^2$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \quad \omega(t) = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (s - s_0)}$$

$$s = r \cdot \phi \quad v = r \cdot \omega \quad a = r \cdot \alpha$$

5.2 Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei Drehbewegungen

$$v_r = \dot{r} \quad a_r = \ddot{r} - r \cdot \dot{\phi}^2$$

$$v_t = r \cdot \dot{\phi} \quad a_t = r \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\phi}$$

5.3 Absolutgeschwindigkeit & Absolutbeschleunigung

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}$$

6 Kinetik

6.1 Dynamik

$$\text{Impulssatz: } m \cdot \ddot{x} = \sum F$$

$$\text{Drallsatz: } J \cdot \ddot{\phi} = \sum M$$

$$\text{wichtige Kräfte: } F_{\text{Feder}} = c \cdot x_F \quad F_{\text{Dämpfer}} = k \cdot \dot{x}_D$$

wichtige Massenträgheitsmomente:

$$J_{\text{Zylinder}}^S = \frac{m \cdot r^2}{2} \quad J_{\text{Kugel}}^S = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \quad J_{\text{Stab}}^S = \frac{m \cdot l^2}{12}$$

$$\text{Satz von Steiner: } J^P = J^S + m \cdot r^2$$

6.2 Energie & Arbeit

$$E_1 + W_{zu} - W_{ab} = E_2$$

$$W = \int F \cdot ds = \int M \cdot d\phi$$

potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

kinetische Energie:

$$E_{\text{transl}} = W_{\text{transl}} = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad E_{\text{rot}} = W_{\text{rot}} = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

Federenergie:

$$E_{\text{el}} = W_{\text{el}} = \frac{c \cdot (s_1^2 - s_2^2)}{2} = \frac{c \cdot (\phi_1^2 - \phi_2^2)}{2}$$

Reibungsenergie:

$$E_{\text{reib}} = W_{\text{reib}} = F_N \cdot \mu \cdot s$$

Massenreduktion:

$$m_{\text{red}} \cdot \frac{v_{\text{red}}^2}{2} = J_{\text{red}} \cdot \frac{\omega_{\text{red}}^2}{2} = \sum E_{\text{kin}}$$

Leistung:

$$P = F \cdot v = M \cdot \omega = \frac{F \cdot s}{t}$$

6.3 Impuls & Stoß

$$\text{Impulserhaltung: } m_1 \cdot \vec{v}_1 = m_2 \cdot \vec{v}_2 = \text{konst.}$$

Stoß:

$$u = \frac{m_{1\text{red}} \cdot v_1 + m_{2\text{red}} \cdot v_2}{m_{1\text{red}} + m_{2\text{red}}}$$

$$s_{K1} = m_1 \cdot (u - v_1) \quad s_{R1} = m_1 \cdot (v'_1 - u)$$

$$s_{K2} = m_2 \cdot (u - v_2) \quad s_{R2} = m_2 \cdot (v'_2 - u)$$

$$k = \frac{s_{R1}}{s_{K1}} = \frac{s_{R2}}{s_{K2}} = \frac{u - v'_1}{v_1 - u} = \frac{v'_2 - u}{u - v_2} \rightarrow v'_i = (1 + k) \cdot u - v_i \cdot k$$

$$v_i \dots \text{Geschwindigkeit von Masse } i \text{ vor dem Stoß}$$

$$v'_i \dots \text{Geschwindigkeit von Masse } i \text{ nach dem Stoß}$$

$$u \dots \text{gemeinsame Geschwindigkeit während der Kompressionsphase}$$

$$E_{\text{kin}0} + E_{\text{pot}0} - E_v = E_{\text{kin}1} + E_{\text{pot}1} \quad E_v \dots \text{Verformungsenergie}$$

6.4 Schwingungen

freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot \bar{x} = 0 \quad m \cdot \ddot{x} + c \cdot \bar{x} = 0$$

$$\bar{x}(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{bzw.} \quad \bar{x}(t) = C \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

$$\longrightarrow A \ \& \ B \quad \Leftarrow \quad \text{aus Randbedingungen ermitteln}$$

$$\longrightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\longrightarrow \psi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$$

freie gedämpfte Schwingung

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot \bar{x} = 0$$

$$\text{schwache Dämpfung: } \boxed{\delta^2 < \omega^2}$$

$$\bar{x}(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A \cdot \sin(\omega_d \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_d \cdot t))$$

bzw.

$$\bar{x}(t) = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \psi)$$

$$\longrightarrow \omega_d = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

$$\longrightarrow A \ \& \ B \quad \Leftarrow \quad \text{aus Randbedingungen ermitteln}$$

$$\longrightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\longrightarrow \psi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\text{starke Dämpfung: } \boxed{\delta^2 > \omega^2}$$

$$\bar{x}(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega^2} \cdot t} + B \cdot e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega^2} \cdot t})$$

$$\text{aperiodischer Grenzfall: } \boxed{\delta^2 = \omega^2}$$

$$\bar{x}(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A + B \cdot t)$$

erzwungene Schwingung

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot \bar{x} = A_e \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad \text{oder} \quad \dots = A_e \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

$$x_p(t) = C \cdot \sin(\Omega \cdot t + \psi) \quad \text{oder} \quad \dots = C \cdot \cos(\Omega \cdot t + \psi)$$

$$\longrightarrow C = \frac{A_e}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \Omega^2}}$$

$$\longrightarrow \psi = \arctan\left(\frac{2 \cdot \delta \cdot \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) \quad \text{für } \psi < 0: \quad \psi_{neu} = \psi + \pi$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}$$

$$\text{wenn } \Omega = \omega_{\max} \quad \rightarrow \quad \text{Resonanz}$$

Federschaltungen

$$c_{\text{ers,parallel}} = \sum_i^n c_i = c_1 + c_2 + \dots$$

$$c_{\text{ers,seriell}} = \frac{1}{\sum_i^n \frac{1}{c_i}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots}$$