# INTRODUÇÃO À COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

*Vº Trabalho: PVI*

Tobias J. D. E. Rosa 2022 1º Período

**Resumo**

O presente trabalho introduz o método numérico de Runge Kutta de 4ª ordem e apresenta uma formulação para o desenvolvimento de um programa em Fortran para solução de problemas de valor inicial, (PVI). Na sequência, são apresentados diversos PVI's e as respectivas soluções a partir do programa desenvolvido. Por fim, dois problemas são escolhidos para serem comparados com outra ferramenta de solução de EDO, a biblioteca "odeint" do Python, sendo estes o problema da dinâmica de um par engrenado em regime transitório considerando duas situações: (a) Apenas as engrenagens e (b) Engrenagens e os eixos.

**Solução do Problema**

Ao modelar problemas de engenharia, frequentemente nos deparamos com as equações diferenciais ordinárias, EDO's. Estas equações possuem uma família de soluções, e o que irá diferenciar a solução procurada das demais soluções será a condição inicial, ou seja, os valores físicos conhecidos quando a variável do domínio é zero (tempo, posição, temperatura etc.). Esse tipo de problema é conhecido como problema de valor inicial PVI. As soluções para as EDO's podem ser obtidas analiticamente, no entanto, para grande parte das aplicações o modelo matemático se torna mais complicado, nestas circunstâncias, a solução do PVI por método numérico é mais aconselhável (RUGGIERO, 2008). Os problemas de valor iniciais geralmente são apresentados da seguinte forma:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

É importante ressaltar que nos casos em que as equações forem de ordem maior, deverá ser aplicada a redução de ordem.

**Método de Runge Kutta de 4ª ordem**

Dado um ponto inicial $(x_0, y_0)$, o método de Runge Kutta consiste em determinar o próximo ponto $(x_1, y_1)$ a partir de um incremento constante chamado passo, representado por $h$, em que $x_1 = x_0 + h$ e $y_1 = y_0 + k \cdot h$ onde $k$ é a inclinação da reta tangente à curva solução, definido pelas equações a seguir.

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}\,,\, y_0 + k_1 \cdot \frac{h}{2})$$

$$k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}\,,\, y_0 + k_2 \cdot \frac{h}{2})$$

$$k_4 = f(x_0 + h\,,\, y_0 + k_3 \cdot h)$$

$$k = \frac{k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4}{6}$$

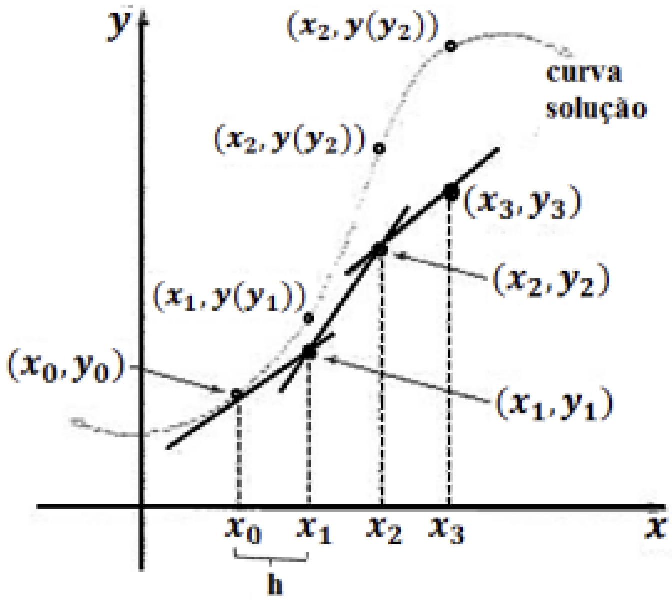
O próximo ponto é, portanto:

$$x_1 = x_0 + h$$

$$y_1 = y_0 + k \cdot h$$

O procedimento é repetido sucessivamente até $(x_n, y_n)$, cuja o número de pontos $n$ é definido em função do passo $h$ que é consequentemente a precisão do resultado, ou seja, quanto menor o incremento, maior a precisão. Uma representação geométrica do método de Runge Kutta de 4ª Ordem é ilustrada na Fig. 1.

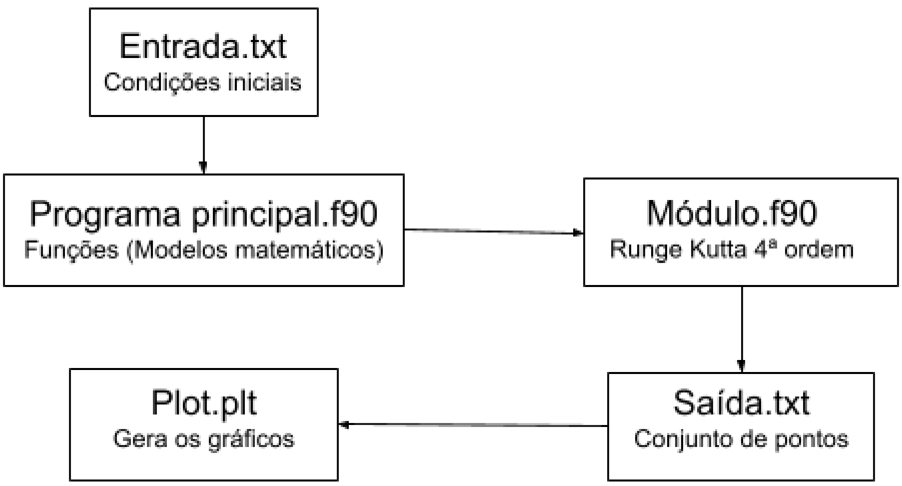
**Figura 1** - Interpretação geométrica do método de Runge Kutta




**Implementação computacional**

A grande vantagem do método numérico de Runge Kutta é a possibilidade de resolver facilmente EDO's que teriam solução analítica mais complexa. Entretanto, ao explorar fatores como maior número de graus de liberdade, maior precisão (Diminuição do passo) ou intervalos de tempos maiores, esse processo se torna totalmente inviável de se calcular manualmente, em função do número de cálculos realizados. Nestas circunstâncias, uma alternativa é a implementação computacional do método de Runge Kutta a partir do desenvolvimento de um programa em Fortran cuja estrutura é apresentada na Fig. 2.

**Figura 2** - Estrutura do programa.




Como ilustrado na Fig. 2, de modo geral o programa requer o modelo matemático e um arquivo de entrada com as respectivas condições iniciais, para que seja fornecida a solução em um arquivo de saída com a quantidade de pontos discretos desejada.

Para cumprir os objetivos deste trabalho, o programa desenvolvido deve ser capaz de resolver EDO's para uma quantidade genérica de graus de liberdade $n$. Como a solução exige que as $n$ equações sejam resolvidas acopladas, o programa deve ser da forma vetorial em que a dimensão do vetor equivale ao número de graus de liberdade $n$.

O programa foi dividido em 5 arquivos, da seguinte forma:

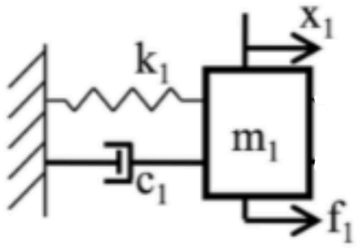
1) Entrada: No arquivo de entrada o usuário deve definir o número de graus de liberdade, a quantidade de pontos desejada, o intervalo do domínio e um vetor de condições iniciais.
2) Programa principal**:** No programa principal são definidas uma primeira função para o modelo matemático e uma segunda função que leva a função do modelo matemático no método numérico do módulo.
3) Módulo: O módulo comporta o método numérico de Runge Kutta de quarta ordem e quando solicitado pela função equivalente no programa principal, calcula os pontos da solução e grava em um arquivo de saída.
4) Saída: O objetivo de gravar os dados em um arquivo de saída não é para que sejam analisados neste arquivo, mas para que sejam acessados por outro programa que pode representar estes dados em formato de gráficos, por exemplo. Visando utilizar o programa Gnuplot para esta análise, devemos gerar os dados no arquivo de saída com uma formatação adequada a leitura do programa. O formato escolhido foi o  de tabela, havendo uma coluna para cada grau de liberdade. Vale lembrar que essa formatação é definida no próprio programa principal.
5) Plot: É responsável por ler os dados no arquivo de saída e gerar os gráficos desejados.

**Modelagem matemática dos problemas:**

Para certificar que o programa é eficaz para uma quantidade genérica de graus de liberdade, serão propostos diferentes problemas a serem resolvidos, com diferentes graus de liberdade e condições iniciais, utilizando um único módulo, alterando apenas as funções no programa principal e os dados de entrada.

Problema 1: Sistema massa-mola-amortecedor simples.

**Figura 3** - Sistema massa-mola.

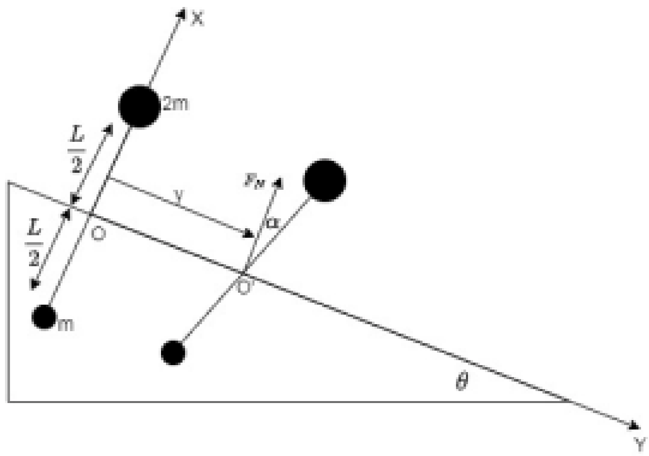



Modelo matemático:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

Problema 2: Haltere descendo escorregando sobre um plano inclinado (eixo y) enquanto uma força $F_n$ excita um movimento de rotação em torno do ponto fixado no eixo y.

**Figura 4** - Haltere transladando e rotacionando.



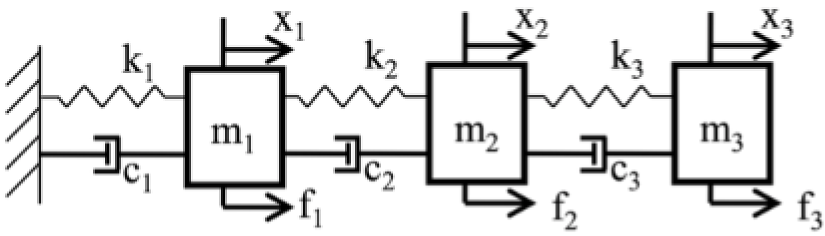

Modelo matemático:

$$\ddot{y} = -\frac{L\dot{\alpha}^2\mu\cos(\alpha)}{6} + \frac{L\dot{\alpha}^2\sin(\alpha)}{6} - \frac{g\mu\sin(\alpha)\sin(\alpha+\theta)}{3} + g\mu\cos(\theta) + g\sin(\alpha) - \frac{g\sin(\alpha+\theta)\cos(\alpha)}{9}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{2g\sin(\alpha+\theta)}{3L}$$

Problema 3: Massa mola em série com 3 massas e 6 graus de liberdade considerando posição e velocidade de cada massa, idêntico ao modelo proposto em sala de aula.

**Figura 5** - Sistema massa-mola em série com 3 graus de liberdade.




Modelo matemático:

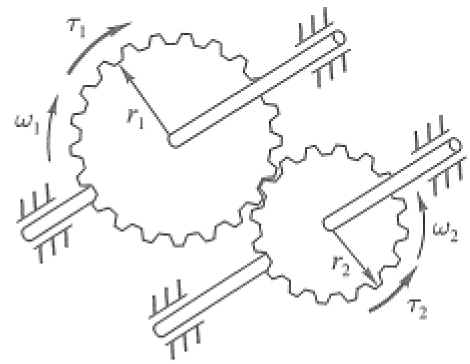
$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \\ \ddot{x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1+b_2 & -b_2 & 0 \\ -b_2 & b_2+b_3 & -b_3 \\ 0 & -b_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

A redução de ordem fica da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{v_3} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{pmatrix} \cdot (\boldsymbol{F} - [b]\cdot\boldsymbol{v} - [k]\cdot\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Problema 4: Par de engrenagens com 2 graus de liberdade adaptado de Close (2001).

**Figura 6** - Par de engrenagens.



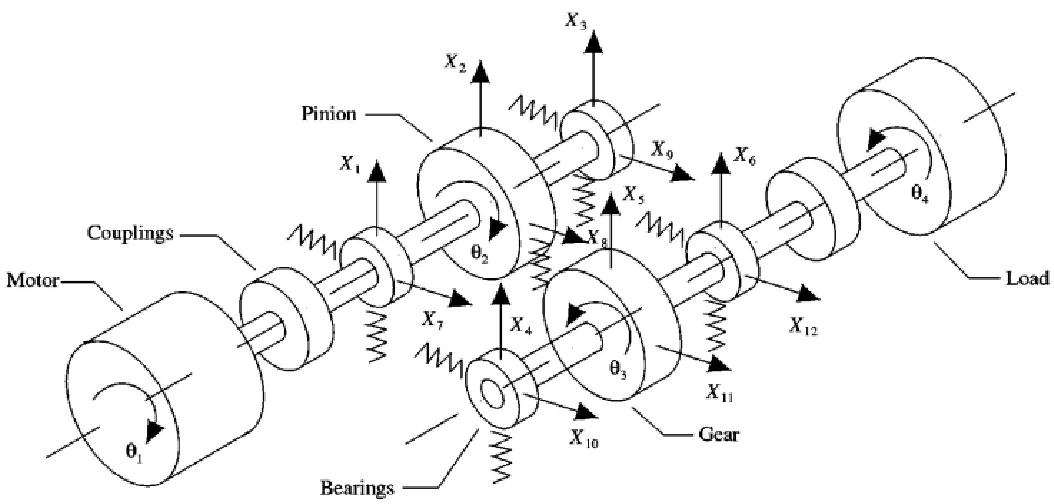

Modelo matemático:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + b_1\dot{\theta}_1 + k_1\theta_1 + r_1 f_c = \tau_{a_1}(t) \tag{2}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + b_2\dot{\theta}_2 + k_2\theta_2 - r_2 f_c = \tau_{a_2}(t) \tag{3}$$

Problema 5: Par de engrenagens com 8 graus de liberdade adaptado de Howard (2001).

**Figura 7** - Modelo de par de engrenagens considerando os eixos.




Modelo matemático:

$$I_m\ddot{\theta}_1 + q_c(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k_c(\theta_1 - \theta_2) = T_{\text{in}}$$

$$\begin{aligned} I_p\ddot{\theta}_2 &+ k_c(\theta_2 - \theta_1) + r_p k_{mb}(r_p\theta_2 - r_g\theta_3 - x_2 + x_5) \\ &+ q_c(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + r_p q_{mb}(r_p\dot{\theta}_2 - r_g\dot{\theta}_3 - \dot{x}_2 + \dot{x}_5) + F_f\,\overline{of} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_g\ddot{\theta}_3 &+ k_c(\theta_3 - \theta_4) + r_g k_{mb}(r_g\theta_3 - r_p\theta_2 - x_5 + x_2) \\ &+ q_c(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) + r_g q_{mb}(r_g\dot{\theta}_3 - r_p\dot{\theta}_2 - \dot{x}_5 + \dot{x}_2) - F_f\,\overline{qh} = 0 \end{aligned}$$

$$I_L\ddot{\theta}_4 + q_c(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3) + k_c(\theta_4 - \theta_3) = -T_{\text{out}}$$

onde "$of$" $= r_p$ , "$qh$" $= r_g$ e $k_{mb} = \frac{1}{\frac{1}{k_p} + \frac{1}{k_g}}$ conforme apresentado por Rao (2003)

Na implementação do modelo foram desconsiderados os deslocamentos de translação, sendo assim os valores de x e de y são considerados zero. Tal hipótese é equivalente a dizer que as deflexões nos eixos são iguais a zero, e como os eixos são de aço e tem comprimento de apenas 100 mm estando submetido a um torque de apenas 4 Nm, essa hipótese pode ser adotada com segurança, já que o interesse é obter as posições angulares, e para isso, estão sendo consideradas as distorções dos eixos.

## Apresentação e Discussão de Resultados

**Problema 1:**

Graus de liberdade: 2

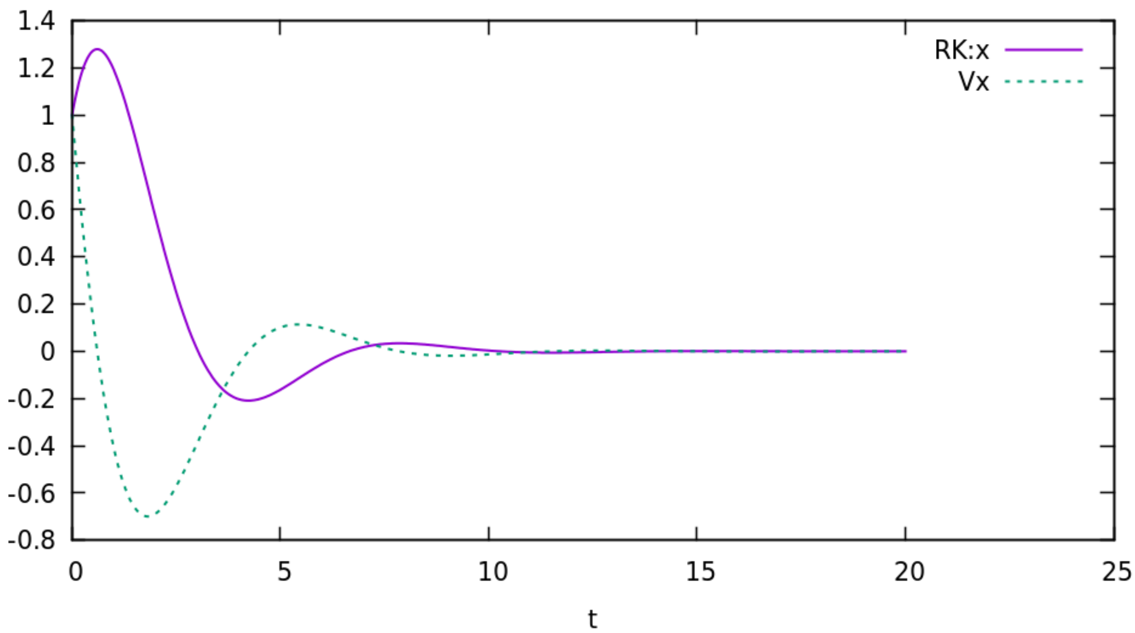
Intervalo de tempo: [0 - 20] s

Número de pontos: 1000

Condições iniciais: $x(0) = 1 \; e \; v_x(0) = 1$

Parâmetros utilizados: $b = 1$, $m = 1$, $k = 1$ e $f = 0$

**Figura 8** - Velocidade e posição do um sistema massa-mola-amortecedor.




**Problema 2:**

Graus de liberdade: 4

Intervalo de tempo: [0 - 5] s

Número de pontos: 300

Condições iniciais: $\alpha(0) = 0$ , $y(0) = 0$, $\omega(0) = 0$, $v_y(0) = 0$

Parâmetros utilizados: $m = 0,05$, $\mu = 0,1$, $g = 9,81$, $\theta = 10^o$ e $L = 0,01$

**Figura 9** - Posição do haltere.

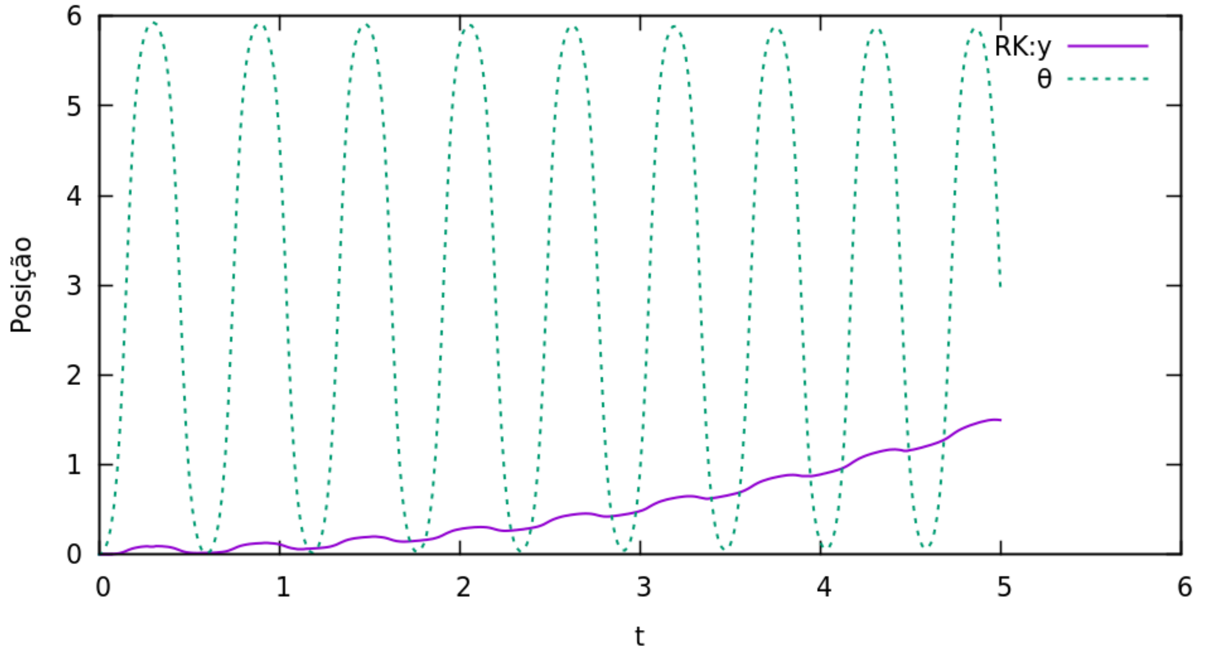
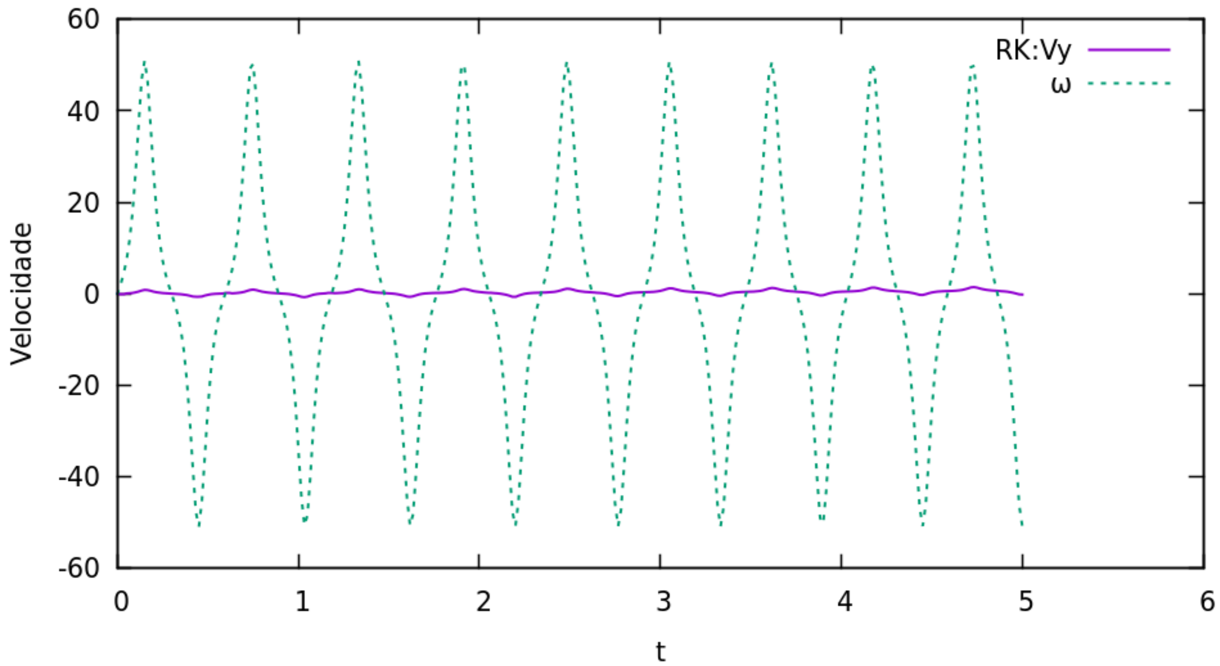



**Figura 10** - Velocidade do haltere.




**Problema 3:**

Graus de liberdade: 6

Intervalo de tempo: [0 - 5] s

Número de pontos: 1000

Condições iniciais: $x_1(0) = 0$ , $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 0$, $v_1(0) = 0$, $v_2(0) = 0$ e $v_3(0) = 0$

Parâmetros utilizados:

$b = (0.2,\ 0.2,\ 0.2)$, $f = (0,\ 1,\ 0)$, $m = (1,\ 1,\ 1)$ e $k = (100,\ 100,\ 100.0)$

**Figura 11** - Posição das massas do sistema massa-mola.

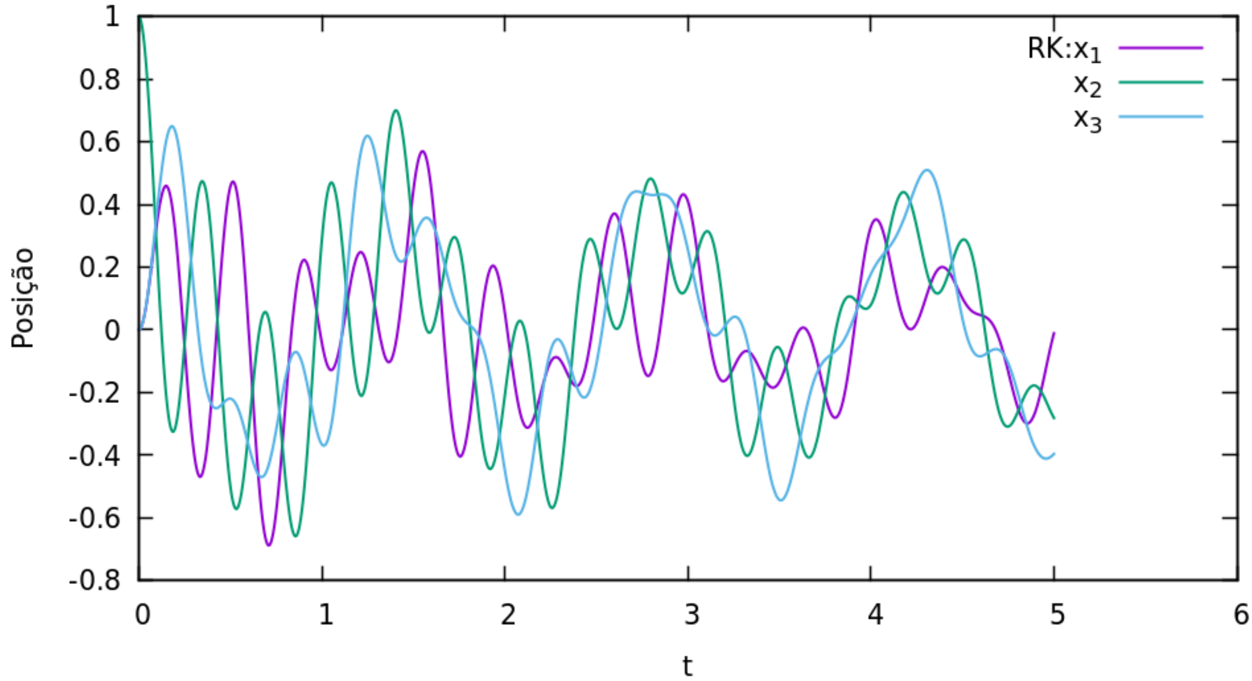
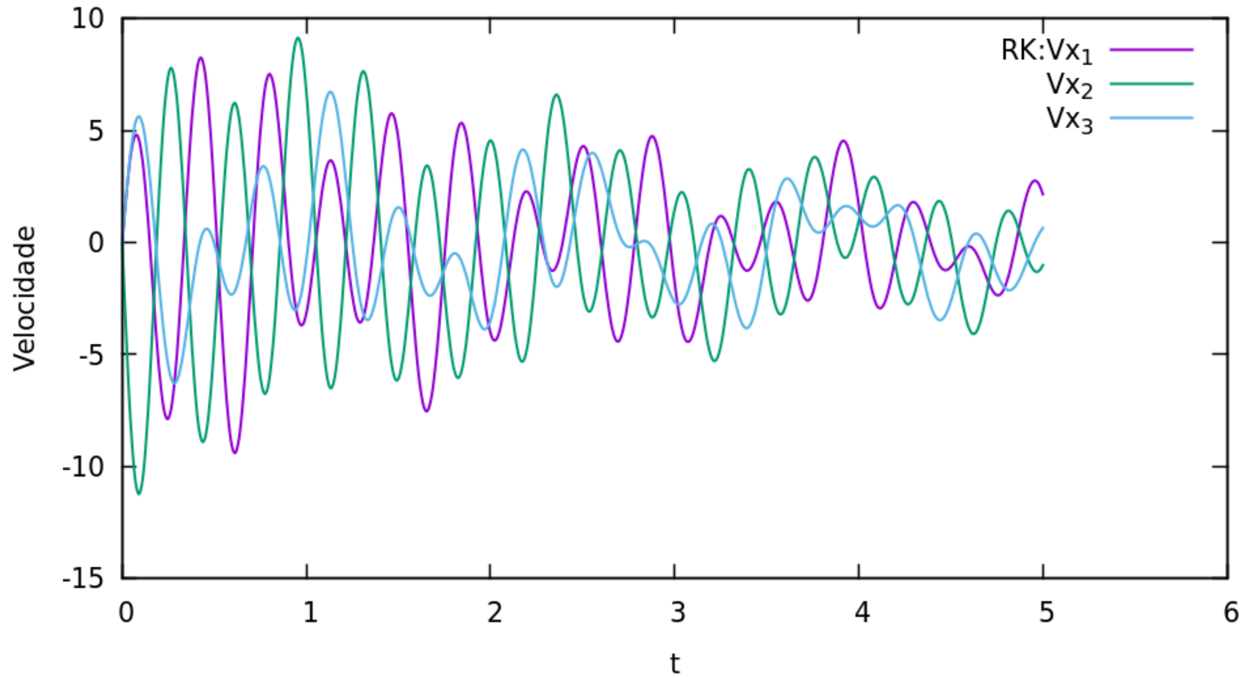



**Figura 12** - Velocidades das massas do sistema massa-mola.




**Problema 4:**

Graus de liberdade: 4

Intervalo de tempo: [0 - 0,005] s

Número de pontos: 1000

Condições iniciais: $\theta_1(0) = 0.1\, rad$ e $\theta_2(0) = -0.1$ $\omega_1(0) = 0$ e $\omega_2(0) = 0$

Parâmetros utilizados:

$r_1 = 0,015\, m,\ b_1 = 0,006,\ k_1 = 343796,\ m_1 = 0,011\, kg,\ J_1 = 0,0040$ e $f_c = 88$ N

$r_2 = 0,03\, m,\ b_2 = 0,006,\ k_2 = 5500739,\ m_2 = 0,0458\, kg,$ e $J_2 = 0,06475$

**Figura 13** - Posição angular das engrenagens.

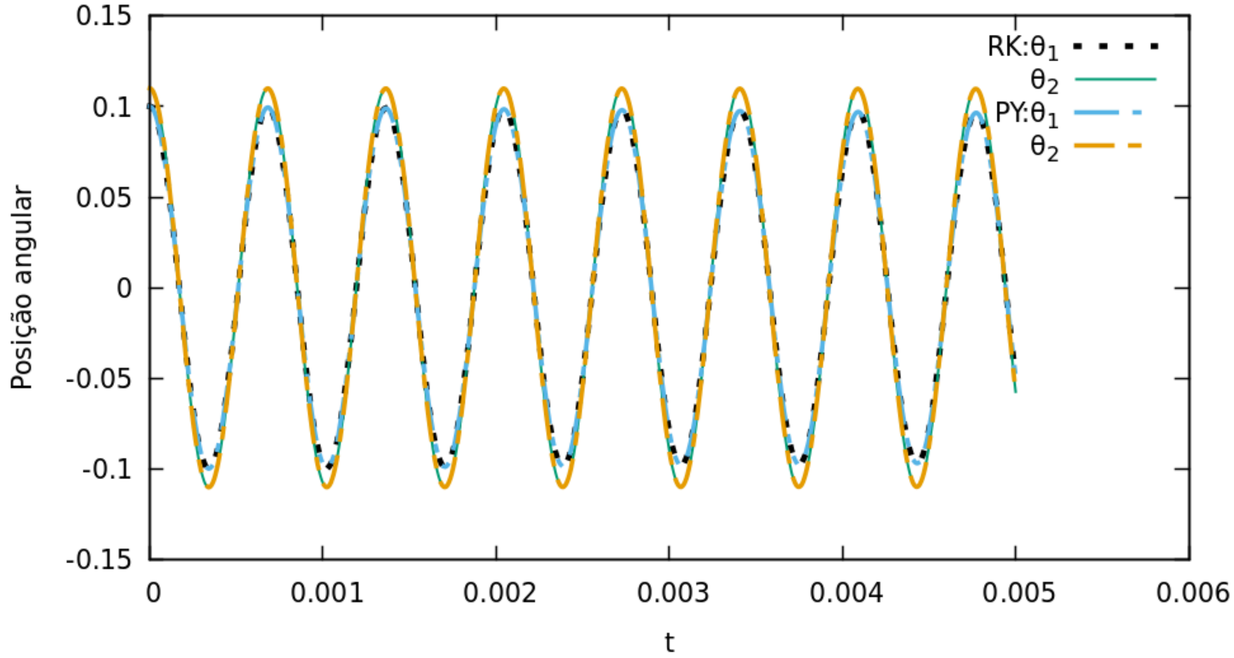
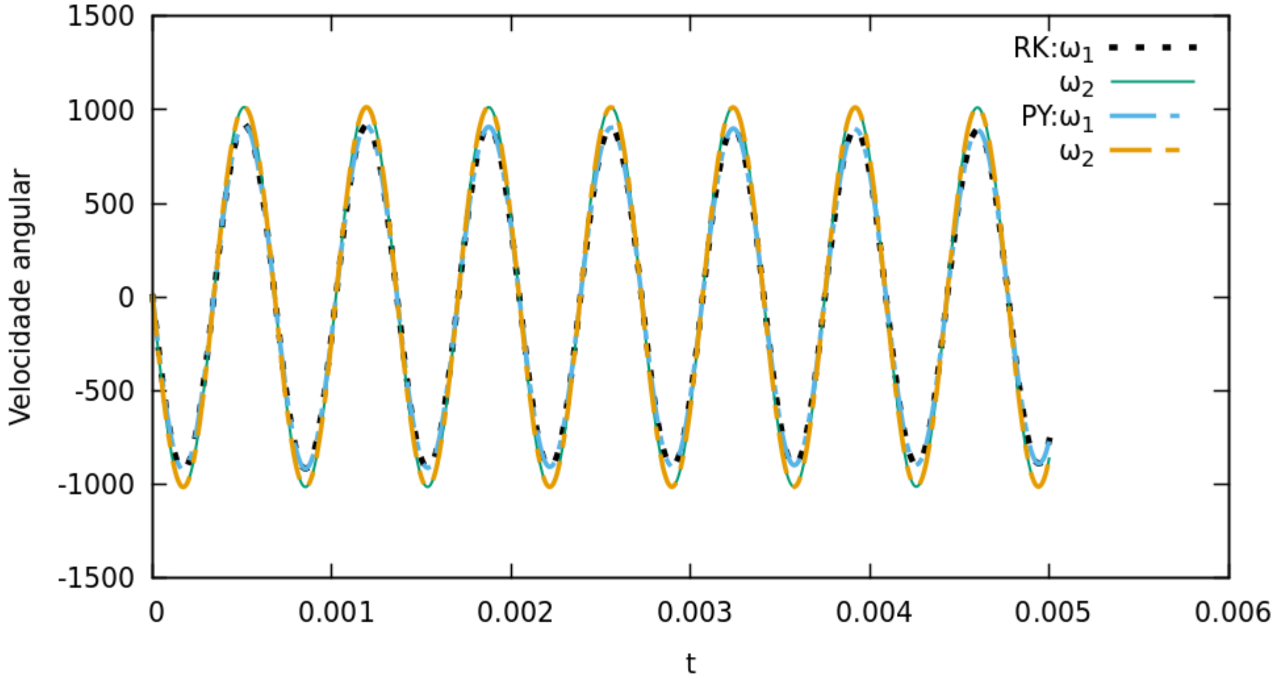



**Figura 14** - Velocidade angular das engrenagens




**Problema 5:**

Graus de liberdade: 8

Intervalo de tempo: [0 - 0,1] s

Número de pontos: 10000

Condições iniciais: $\theta_1(0) = 0.1\,rad$ , $\theta_p(0) = 0.12\,rad$ ,$\theta_g(0) = 0.14\,rad$ e $\theta_4(0) = 0.24\,rad$

$\omega_1(0) = 0\,rad/s$ , $\omega_p(0) = 0\,rad/$s ,$\omega_g(0) = 0\,rad/s$ e $\omega_4(0) = 0\,rad/s$

Parâmetros utilizados: $r_1 = r_4 = 0,006\,m$, $q_c = 0,06$, $k_c = 1169$, $I_m = 0,0050$, $r_p = 0,015\,m$, $qmb = 0,06$, $kmb = 323572$, $I_p = 0,00404$ e $F_f = 88$ N, $r_g = 0,03\,m$, , e $I_g = 0,0647$ , $T_{in} = 4\,Nm$ e $T_{out} = 3,92\,Nm$ .

**Figura 15** - Posição angular das engrenagens e dos eixos.

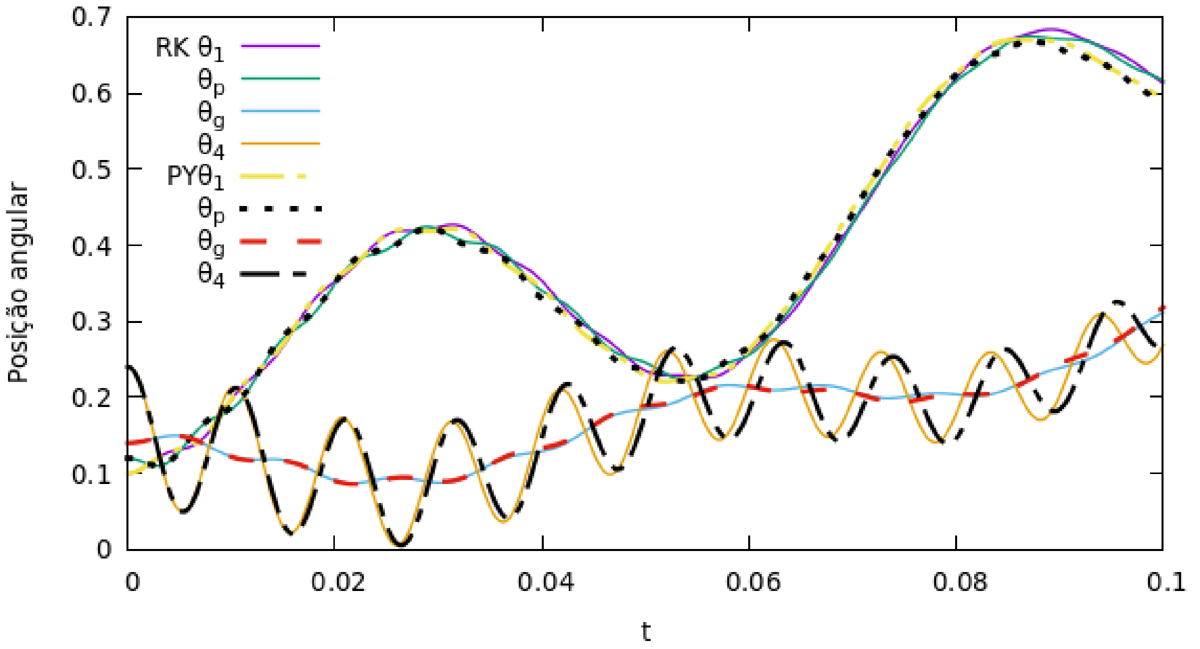
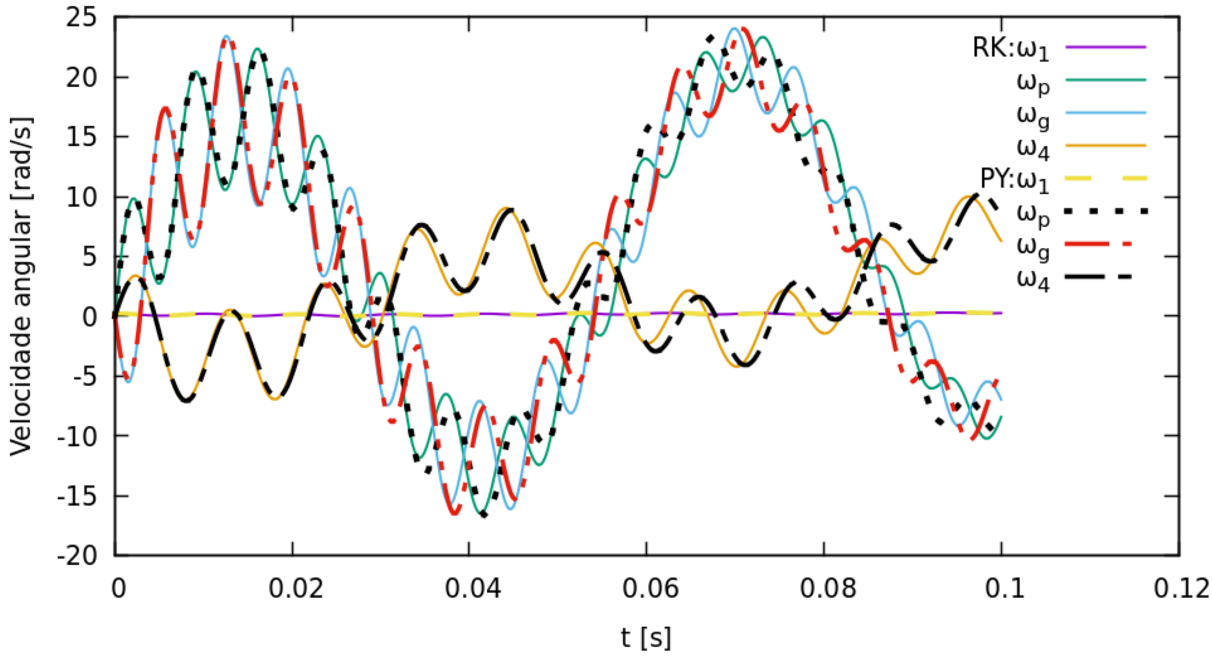



**Figura 16** - Velocidade angular das engrenagens e dos eixos.




Para os problemas 4 e 5 as soluções obtidas no programa de Runge Kutta de 4ª ordem desenvolvido, chamado de "RK" foram confrontadas com a solução obtida a partir da biblioteca de solução de EDO's do Python, chamada "odeint", ilustrado no gráfico como "PY". Os dados obtidos através do python são salvos em um arquivo de texto automaticamente na mesma pasta em que se encontra o programa em Fortran, facilitando o uso da ferramenta Gnuplot que permite plotar em um único gráfico dados obtidos em programas diferentes.

Os gráficos comparativos das Figuras 15 e 16 permitem observar que a medida em que se aumenta o tempo é acrescentado um erro no deslocamento e principalmente na velocidade angular, sendo mais expressivo na engrenagem movida e no eixo de saída.

## Conclusões

As soluções dos problemas 1 e 3, apesar dos parâmetros utilizados não serem parâmetros de uma aplicação real, permitiram observar o gráfico em uma escala maior de tempo, pois o regime transitório é muito maior que nos casos dos pares de engrenagem. Entretanto, modelos de sistemas dinâmicos em pares engrenados geralmente são observados em um intervalo muito curto de tempo, entrando rapidamente em regime permanente. Esta é uma característica particular do sistema de engrenagens que requer uma análise restrita a um intervalo muito curto de tempo, o que leva a uma conclusão que o engrenamento quando fabricado de materiais rígidos como aço e suas ligas, têm uma influência muito pequena na resposta de um sistema mecânico como um todo. Levando esse aspecto em consideração, podemos dizer que o programa desenvolvido se mostrou eficaz ao resolver diversos problemas de 2 a 8 graus de liberdade, permitindo inclusive, entender os fenômenos da dinâmica em pares engrenados.

**Referências**

CLOSE, Charles M.; FREDERICK, Dean K.; NEWELL, Jonathan C. *Modeling and analysis of dynamic systems*. John Wiley & Sons, 2001.

HOWARD, Ian; JIA, Shengxiang; WANG, Jiande. *The dynamic modelling of a spur gear in mesh including friction and a crack*. Mechanical systems and signal processing, v. 15, n. 5, p. 831-853, 2001.

RAO, S. S., *Mechanical Vibrations*. 4th Edition, Pearson, 2003.

RUGGIERO, Marcia A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Pearson Makron Books, 2008.

# CÓDIGOS-FONTE

**programa_pvi.f90**

```
!gfortran modulo_rk4.f90 programa_pvi.f90 ; ./a.out problema5 ; gnuplot plot_problema5a.plt ; gnuplot plot_problema5b.plt
!gfortran modulo_rk4.f90 programa_pvi.f90 ; ./a.out problema4 ; gnuplot plot_problema4a.plt ; gnuplot plot_problema4b.plt
!gfortran modulo_rk4.f90 programa_pvi.f90 ; ./a.out problema3 ; gnuplot plot_problema3a.plt ; gnuplot plot_problema3b.plt
!gfortran modulo_rk4.f90 programa_pvi.f90 ; ./a.out problema2 ; gnuplot plot_problema2a.plt ; gnuplot plot_problema2b.plt
!gfortran modulo_rk4.f90 programa_pvi.f90 ; ./a.out problema1 ; gnuplot plot_problema1a.plt
program pvi
 use rk_4
 implicit none
 real, dimension (:,:), allocatable::Y
 real, dimension (:), allocatable::tspan,y0
 character(20)::argument
 real::h
 integer:: n,gl
 !Aqui só alterar o nome da function para o nome do modelo desejado:
 ! Ex: problema1, problema2, problema3, problema4, problema5
 interface
   function problema5(t,y) result(dydt)
     real, dimension(size(y))::y,dydt
     real::t
   end function
 end interface
 call get_command_argument(1, argument)
 open(1,file=trim(argument)//".txt",status='old')
 open(2,file="Resultado_Runge_Kutta.txt",status='unknown')
 read(1,*)
 read(1,*)gl
 read(1,*)
 read(1,*)n
 allocate(Y(n+1,gl),tspan(2),y0(gl))
 read(1,*)
 read(1,*)tspan
 read(1,*)
```

```
  read(1,*)y0
  h=(tspan(2)-tspan(1))/n
  ! Aqui só alterar o nome da function para o nome do modelo desejado:
  ! Ex: problema1, problema2, problema3, problema4, problema5
  Y=rk4(problema5,tspan,y0,h,n)
end program pvi
! MODELO PAR DE ENGRENAGENS CONSIDERANDO EIXOS
function problema5(t,y) result(dydt)
  real::rp,rg,r1,r4,E1,E2,nu1,nu2,l1,l2,l3,l4,T_in,T_out,qc,qmb, &
      &Ff,m1,mp,mg,m4,G1,G2,G3,G4,Im,Ip,Ig,IL,jp1,jp2,jp3,jp4, &
      &k1,k2,k3,k4,kc,kmb
  real, dimension (8)::y,dydt
  !                          ---DADOS---
  rp=0.030/2  ! Raio da engrenagem motriz
  rg=0.060/2 ! Raio da engrenagem movida
  r1=0.012/2 ! Raio do eixo de entrada
  r4=r1     ! Raio do eixo de saída
  E1=209e9  ! Módulo de elasticidade do aço 1020
  E2=69e9   ! Módulo de elasticidade do alumínio
  nu1=0.33  ! Coeficiente de poisson para o alumínio
  nu2=0.29  ! Coeficiente de poisson para o aço 1020
  l1=0.1   ! Comprimento do eixo
  l2=0.006  ! Espessura da engrenagem
  l3=0.006  ! Espessura da engrenagem
  l4=l1     ! Comprimento do eixo
  qc = 0.06 ! Coeficiente de atrito nos mancais dos eixos
  qmb = 0.06! Coeficiente de atrito do engrenamento
  Ff = 88   ! Força de contato nos dentes das engrenagens (Norma AGMA)
  T_in = 4  ! Torque do motor Cruiser
  T_out = 3.92 ! Torque no eixo de saída
  pi = 3.14159 ! Valor de pi
  !                          ---MODELO---
  m1=(pi*r1**2)*l1*7860 ! Massa do eixo de entrada
  mp=(pi*rp**2)*l2*2700 ! Massa da engrenagem motriz
  mg=(pi*rg**2)*l3*2700 ! Massa da engrenagem movida
  m4=m1 !Massa do eixo de saída
  G1=E1/(2*(1+nu1)) ! Módulo de elasticidade transversal do eixo de entrada
  G4=G1 ! Módulo de elasticidade transversal da engrenagem motriz
```

```
G2=E2/(2*(1+nu2)) ! Módulo de elasticidade transversal da engrenagem movida
G3=G2 ! Módulo de elasticidade transversal do eixo de saída
Im = (1000*m1*pi*r1**2)/2  ! Momento de inércia do eixo de entrada
Ip = (1000*mp*pi*rp**2)/2 ! Momento de inércia da engrenagem motriz
Ig = (1000*mg*pi*rg**2)/2 ! Momento de inércia da engrenagem movida
IL = (1000*m4*pi*r4**2)/2 ! Momento de inércia do eixo de saída
Jp1=(pi*r1**4)/2 ! Momento de inércia polar do eixo de entrada
Jp2=(pi*rp**4)/2 ! Momento de inércia polar da engrenagem motriz
Jp3=(pi*rg**4)/2 ! Momento de inércia polar da engrenagem movida
Jp4=(pi*r4**4)/2 ! Momento de inércia polar do eixo de saída
k1 = G1*Jp1/l1 ! Rigidez do eixo de entrada
k2 = G2*Jp2/l2 ! Rigidez da engrenagem motriz
k3 = G3*Jp3/l3 ! Rigidez da engrenagem movida
k4 = G4*Jp4/l4 ! Rigidez do eixo de saída
kc=k1 ! =k4 ! Rigidez dos eixos (Nomenclatura do modelo)
kmb=1/(1/k2+1/k3) ! Rigidez do Engrenamento segundo Rao (2001) pag13
!                    ---REDUÇÃO DE ORDEM---
dydt(1)=y(5)
dydt(2)=y(6)
dydt(3)=y(7)
dydt(4)=y(8)
dydt(5)=(T_in - kc*y(1) + kc*y(2) - qc*y(5) + qc*y(6))/Im

dydt(6)=(-Ff*rp+kc*y(1)-kc*y(2)+kmb*rg*rp*y(3)-kmb*rp**2*y(2)+qc*y(5)-qc*y(6)+qmb*rg*rp*y(7)-
qmb*rp**2*y(6))/Ip

dydt(7)=(Ff*rg-kc*y(3)+kc*y(4)-kmb*rg**2*y(3)+kmb*rg*rp*y(2)-qc*y(7)+qc*y(8)-qmb*rg**2*y(7)+
qmb*rg*rp*y(6))/Ig
dydt(8)=(-T_out + kc*y(3) - kc*y(4) + qc*y(7) - qc*y(8))/IL
end function problema5
!PROBLEMA PAR DE ENGRENAGENS DESCONSIDERANDO OS EIXOS
function problema4(t,y) result(dydt)
real, dimension (2)::b,Tq,m,k,v,x,a,I
real, dimension (4)::y,dydt
!                    ---DADOS---
b=(/0.06, 0.06/) ! Amortecimento
Tq=(/4.0, 3.92 /) ! Torque na entrada e saída
m=(/0.01145, 0.0458/) !massa das engrenagens
k=(/343796.2355, 5500739.7684/) ! Rigidez das engrenagens
```

```fortran
  I=(/0.004047, 0.0647/)  !Momento de inercia das engrenagens
  !                             ---REDUÇÃO DE ORDEM---
  dydt(1)=y(3)
  dydt(2)=y(4)
  dydt(3)=(Tq(1)-b(1)*y(3)-k(1)*y(1))/I(1)
  dydt(4)=(-Tq(2)-b(2)*y(4)-k(2)*y(2))/I(2)
end function problema4
! PROBLEMA MASSA-MOLA SIMPLES
function problema1(t,y) result(dydt)
  real::t,x,b,v,k,m,f
  real, dimension(2)::y,dydt ! grau de liberdade é propriedade de cada função
  !                                ---DADOS---
  b=1 ! Amortecimento
  m=1 ! Massa
  k=1 ! Rigidez
  f=0 ! Força f(t)
  !                             ---REDUÇÃO DE ORDEM---
  x=y(1)
  v=y(2)
  dydt(1)=v
  dydt(2)=(f-b*v-k*x)/m
end function problema1
!! PROBLEMA DO HALTERE TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO
function problema2(t,y) result(dydt)
  ! MODELO MATEMÁTICO
  real::m,mu,alpha,alpha1,g,theta,L
  real, dimension(4)::y,dydt ! grau de liberdade é propriedade de cada função
  !                                 ---DADOS---
  m=0.05 ! Massa das partículas
  mu=0.1 ! !oeficiente de atrito
  g=9.81 ! Aceleração gravidade
  theta=10*3.141592/180 !inclinação da rampa fixa
  L=0.01 ! Comprimento da haste (corpo do haltere)
  !                             ---REDUÇÃO DE ORDEM---
  alpha=y(3)
  alpha1=y(4)
  dydt(1)=y(2)
  dydt(2)=-L*alpha1**2*mu*cos(alpha)/6 + L*alpha1**2*sin(alpha)/6 - &
```

```
    & g*mu*sin(alpha)*sin(alpha + theta)/3 + g*mu*cos(theta) + g*sin(alpha) - g*sin(alpha + theta)*cos(alpha)/9
     dydt(3)=y(4)
     dydt(4)=2*g*sin(alpha + theta)/(3*L)
 end function problema2
 !PROBLEMA MASSA-MOLA EM SÉRIE
 function problema3(t,y) result(dydt)
  real, dimension (3)::y0,b,f,m,k,v,x,z !  INSERIR A DIMENSÃO
  real, dimension (size(y0),size(y0))::Mat_k,Mat_b
  real, dimension (2*size(y0))::dydt,y
  real::h
  integer:: n,gdl,i,j
     !                                        ---DADOS---
  n=size(y0)!número de massas
  gdl=2 !Graus de liberdade para cada massa ex: posiçaõ e velocidade
  do i=1,n
   x(i)=y(i) ! Posição inicial
   v(i)=y(n+i) ! Velocidade inicial
  end do
  !                                   ---DEFININDO MATRIZES DE PARÂMETROS---
  b=(/0.2, 0.2, 0.2 /)
  f=(/0.0, 1.0, 0.0 /)
  m=(/1.0, 1.0, 1.0 /)
  k=(/100.0, 100.0, 100.0/)
  !Primeira linha
  i=1
  Mat_k(i,i)=k(i)+k(i+1)
  Mat_b(i,i)=b(i)+b(i+1)
  Mat_k(i,i+1)=-k(i+1)
  Mat_b(i,i+1)=-b(i+1)
  ! Linhas intermediárias
  do i=2,n-1
  Mat_k(i,i-1)=-k(i)
  Mat_b(i,i-1)=-b(i)
  Mat_k(i,i)=k(i)+k(i+1)
  Mat_b(i,i)=b(i)+b(i+1)
  Mat_k(i,i+1)=-k(i+1)
  Mat_b(i,i+1)=-b(i+1)
```

```
  end do
  ! Última linha
  i=n
  Mat_k(i,i-1)=-k(i)
  Mat_b(i,i-1)=-b(i)
  Mat_k(i,i)=k(i)
  Mat_b(i,i)=b(i)
  !                                   ---MODELO---
  z=f-matmul(Mat_b,v)-matmul(Mat_k,x)/m
        !                             ---REDUÇÃO DE ORDEM---
  do i=1,n
  dydt(i)=v(i)
  dydt(n+i)=z(i)
  end do
  do i=1,gdl*n
  end do
end function problema3
```

**modulo_rk4.f90**

```
module rk_4
implicit none
contains
function rk4(arg_f,tspan,y0,h,len) result(val)
real, dimension(:)::tspan
real,dimension(:)::y0
real, dimension(len+1)::t
real, dimension(len+1,size(y0))::y,val,k1,k2,k3,k4,k
real::h
integer::i,len
interface
  function arg_f(arg_x,arg_y) result(val)
    real, dimension(size(y0))::arg_y,val
    real::arg_x
  end function
end interface
do i=1,size(y0)
  y(1,i)=y0(i)
end do
t(1)=tspan(1)
```

```
do i=1,len
  k1(i,:)=arg_f(t(i),y(i,:))
  k2(i,:)=arg_f(t(i)+h/2,y(i,:)+k1(i,:)*h/2)
  k3(i,:)=arg_f(t(i)+h/2,y(i,:)+k2(i,:)*h/2)
  k4(i,:)=arg_f(t(i)+h,y(i,:)+k3(i,:)*h)
  k(i,:)=(k1(i,:)+2*k2(i,:)+2*k3(i,:)+k4(i,:))/6
  t(i+1)=t(i)+h
  y(i+1,:)=y(i,:)+k(i,:)*h
end do
do i=1,len+1
  write(2,*)t(i),y(i,:)
  end do
val=y
end function rk4
end module rk_4
```