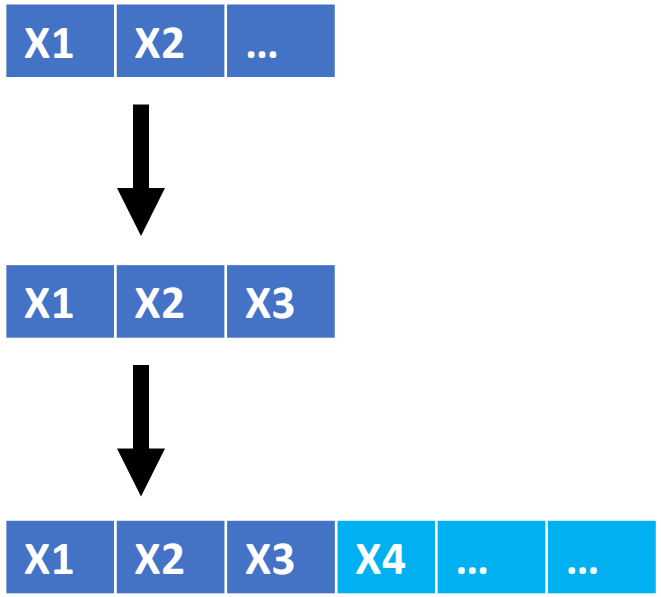
Tutorium
Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen

Übungsblatt Woche 5

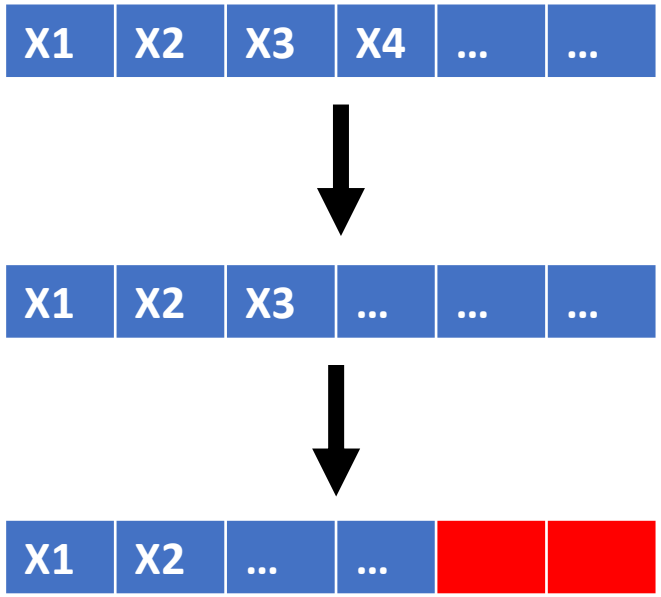
Aufgabe 5.1 – Dynamisches Array

Aus der Übung bekanntes dynamisches Array mit **α > β > 1** und **α**, **β** natürliche Zahlen. n ist aktuelle Anzahl.
Reallocate bei pushBack auf **vollem Array**: Vergrößern zu **β*w = β*n**
Reallocate bei popBack mit **α*n kleiner gleich w**: Verkleinern zu **β*n**

Push-Back (α=3)



Pop-Back (β=2)



Aufgabe 5.1 – Dynamisches Array

Es ist nicht schwierig zu sehen, dass die tatsächliche Laufzeit von `pushBack` und `popBack` konstant ist (d.h. durch eine Konstante nach oben beschränkt), und die Laufzeit von `reallocate` durch $\mathcal{O}(1) + c \cdot n$ beschränkt ist, wobei c eine Konstante ist und n die Zahl der kopierten Elemente. Wie in der Vorlesung ist es legitim, $c = 1$ zu setzen, indem wir annehmen, dass wir die Laufzeit in einer Einheit messen, die gerade der Laufzeit einer einzelnen Kopieroperation entspricht. Wir erhalten damit:

$$
\begin{aligned}
T(\texttt{pushBack}) &\in \mathcal{O}(1) \\
T(\texttt{popBack}) &\in \mathcal{O}(1) \\
T(\texttt{reallocate}) &= \mathcal{O}(1) + n, \text{ wobei } n = \text{Anzahl der kopierten Elemente}
\end{aligned}
$$

Ziel dieser Aufgabe ist der Nachweis mit einer amortisierten Analyse, dass die Laufzeit von Operationen der Länge m auf einem zu Beginn leeren dynamischen Array in $\mathcal{O}(m)$ liegt (zu Beginn hat das Array Größe 1).

Aufgabe 5.1 – Dynamisches Array

$$
\begin{aligned}
\Delta(\texttt{pushBack}) &= \beta/(\beta-1) \\
\Delta(\texttt{popBack}) &= \beta/(\alpha-\beta) \\
\Delta(\texttt{reallocate}) &= -n, \text{ wobei } n = \text{Anzahl der kopierten Elemente}
\end{aligned}
$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses Amortisationsschema zulässig ist, indem Sie zeigen, dass das Tokenkonto zu jedem Zeitpunkt nichtnegativ ist.

Hinweis: Bezeichne n_1 die Zahl der Elemente *unmittelbar* nach einem `reallocate` (im Falle von `pushBack` also noch vor der Einfügung des neuen Elements). Machen Sie sich klar, dass das Array *zu diesem Zeitpunkt* Größe $w_1 := \beta \cdot n_1$ hat, und $w_1 - n_1$ Positionen frei sind. Das nächste `reallocate` wird erst dann aufgerufen, wenn für die Zahl n der Elemente entweder $n = w_1$ oder $\alpha n \leq w_1$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass unter diesem Amortisationsschema die amortisierte Laufzeit jeder Operation in $\mathcal{O}(1)$ liegt, und folgern Sie, dass die Worst-Case-Laufzeit für Operationsfolgen der Länge m in $\mathcal{O}(m)$ liegt.

Aufgabe 5.1 – Dynamisches Array

(a) Zeigen Sie, dass dieses Amortisationsschema zulässig ist, indem Sie zeigen, dass das Tokenkonto zu jedem Zeitpunkt nichtnegativ ist.

Hinweis: Bezeichne n_1 die Zahl der Elemente *unmittelbar* nach einem `reallocate` (im Falle von `pushBack` also noch vor der Einfügung des neuen Elements). Machen Sie sich klar, dass das Array *zu diesem Zeitpunkt* Größe $w_1 := \beta \cdot n_1$ hat, und $w_1 - n_1$ Positionen frei sind. Das nächste `reallocate` wird erst dann aufgerufen, wenn für die Zahl n der Elemente entweder $n = w_1$ oder $\alpha n \leq w_1$ gilt.

Aufgabe 5.1 – Dynamisches Array

(a) Zeigen Sie, dass dieses Amortisationsschema zulässig ist, indem Sie zeigen, dass das Tokenkonto zu jedem Zeitpunkt nichtnegativ ist.

Hinweis: Bezeichne n_1 die Zahl der Elemente *unmittelbar* nach einem `reallocate` (im Falle von `pushBack` also noch vor der Einfügung des neuen Elements). Machen Sie sich klar, dass das Array *zu diesem Zeitpunkt* Größe $w_1 := \beta \cdot n_1$ hat, und $w_1 - n_1$ Positionen frei sind. Das nächste `reallocate` wird erst dann aufgerufen, wenn für die Zahl n der Elemente entweder $n = w_1$ oder $\alpha n \leq w_1$ gilt.

Aufgabe 5.1 – Dynamisches Array

(b) Zeigen Sie, dass unter diesem Amortisationsschema die amortisierte Laufzeit jeder Operation in $\mathcal{O}(1)$ liegt, und folgern Sie, dass die Worst-Case-Laufzeit für Operationsfolgen der Länge m in $\mathcal{O}(m)$ liegt.

Aufgabe 5.2 – Betrunkener Übungsleiter

Wir betrachten einen torkelnden Übungsleiter an einer Kletterwand, der die folgenden beiden Operationen durchführen kann:

- `hoch`,
- `runter(int` k`)`.

Die Starthöhe des Übungsleiters beträgt 0 Meter. Durch die Operation `hoch` steigt der Übungsleiter von seiner aktuellen Position aus genau einen Meter höher. Diese Operation hat die Laufzeit 1. Durch die Operation `runter(int` k`)` fällt der Übungsleiter von seiner aktuellen Position aus exakt $\min\{h, k\}$ Meter nach unten, wobei h die aktuelle Höhe des Übungsleiters ist. (Das bedeutet, dass der Übungsleiter nie tiefer als seine Starthöhe sinken kann). Wir nehmen hierbei an, dass k stets eine natürliche Zahl (nicht-negativ) ist. Die Operation `runter(int` k`)` hat die Laufzeit $\min\{h, k\}$.

Zeigen Sie mithilfe der Bankkonto-Methode, dass die amortisierten Laufzeiten der Operationen `hoch` und `runter(int` k`)` in $\mathcal{O}(1)$ liegen.

Aufgabe 5.2 – Betrunkener Übungsleiter

Zeigen Sie mithilfe der Bankkonto-Methode, dass die amortisierten Laufzeiten der Operationen `hoch` und `runter(int k)` in $\mathcal{O}(1)$ liegen.

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

Veranschaulichen Sie Hashing mit Chaining. Die Größe m der Hash-Tabelle ist in den folgenden Beispielen jeweils die Primzahl 11. Die folgenden Operationen sollen nacheinander ausgeführt werden.

`insert`	$3, 11, 9, 7, 14, 56, 4, 12, 15, 8, 1$
`delete`	56
`insert`	25

Der Einfachheit halber sollen die Schlüssel der Elemente die Elemente selbst sein.

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a) Verwenden Sie zunächst die Hashfunktion

$$g(x) = 5x \mod m.$$

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$												

b) Berechnen Sie die Hashwerte unter Verwendung der Hashfunktion

$$h(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \mod m$$

nach dem aus der Vorlesung bekannten Verfahren für einfache universelle Hashfunktionen, wobei $\mathbf{a} = (7, 5)$ und $\mathbf{x} = (\lfloor \frac{x}{2^w} \rfloor \mod 2^w, x \mod 2^w)$ für $w = \lfloor \log_2 m \rfloor = \lfloor 3.45 \ldots \rfloor = 3$ gilt und der Ausdruck $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ ein Skalarprodukt bezeichnet.

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

1. Operation: `insert`(3):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				3						

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

2. Operation: `insert`(11):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11				3						

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

3. Operation: `insert`(9):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9			3						

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

4. Operation: `insert`(7):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9	7		3						

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

5. Operation: `insert`(14):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9	7		3 14						

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

6. Operation: `insert`(56):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9	7		3 14	56					

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

7. Operation: `insert`(4):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9	7		3 14	56				4	

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

8. Operation: `insert`(12):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9	7		3 14	56 12				4	

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

9. Operation: `insert`(15):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9	7		3 14	56 12				4 15	

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

10. Operation: `insert`(8):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9	7		3 14	56 12		8		4 15	

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

11. Operation: `insert`(1):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9	7		3	56		8		4	
				14	12				15	
					1					

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

12. Operation: `delete`(56):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9	7		3 14	12 1		8		4 15	

Aufgabe 5.3 – Hashing mit Chaining

a)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$g(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

b)

$k(e)$	1	3	4	7	8	9	11	12	14	15	25	56
$h(k(e))$	5	4	9	2	7	1	0	5	4	9	4	5

13. Operation: `insert`(25):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9	7		3	12		8		4	
				14	1				15	
				25						

Aufgabe 5.4 – Stapelschlange

In dieser Aufgabe geht es darum, einen Algorithmus, der eine Queue für `Integer`-Zahlen mittels zweier Stacks implementiert, hinsichtlich seiner Laufzeit zu untersuchen.

```
1  class Stapelschlange {
2    private Stack s1 = new Stack();
3    private Stack s2 = new Stack();
4
5    public void enqueue(int v) {
6      s1.push(v);
7    }
8
9    public int dequeue() {
10     if(s2.isEmpty())
11       while(!s1.isEmpty())
12         s2.push(s1.pop());
13     return s2.pop();
14   }
15 }
```

Aufgabe 5.4 – Stapelschlange

Die Klasse `Stack` hat dabei folgende Methoden:

Methode	Beschreibung	Laufzeitklasse
`void push(int v)`	legt eine Zahl auf den Stack	$\mathcal{O}(1)$
`int pop()`	nimmt die oberste Zahl vom Stack	$\mathcal{O}(1)$
`boolean isEmpty()`	prüft, ob der Stack leer ist	$\mathcal{O}(1)$

a) Geben Sie die Laufzeitklasse der Worst Case-Laufzeit eines Aufrufs der `dequeue()`-Methode in Abhängigkeit der aktuellen Größe der Queue n in Landau-Notation an.

b) Überlegen Sie sich ein Amortisierungsschema, welches die amortisierte Laufzeit der einzelnen Operationen minimiert. Nennen Sie die amortisierten Laufzeitklassen der `enqueue(int v)`- und `dequeue()`-Methode, die sich aus Ihrem Amortisierungsschema ergeben. Zeigen Sie die Richtigkeit Ihres Amortisierungsschemas (das Tokenkonto darf niemals negativ werden) und der resultierenden Laufzeitklassen.

Aufgabe 5.4 – Stapelschlange

a) Geben Sie die Laufzeitklasse der Worst Case-Laufzeit eines Aufrufs der `dequeue()`-Methode in Abhängigkeit der aktuellen Größe der Queue n in Landau-Notation an.

Aufgabe 5.4 – Stapelschlange

b) Überlegen Sie sich ein Amortisierungsschema, welches die amortisierte Laufzeit der einzelnen Operationen minimiert. Nennen Sie die amortisierten Laufzeitklassen der `enqueue(int v)`- und `dequeue()`-Methode, die sich aus Ihrem Amortisierungsschema ergeben. Zeigen Sie die Richtigkeit Ihres Amortisierungsschemas (das Tokenkonto darf niemals negativ werden) und der resultierenden Laufzeitklassen.