Tutorium
Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen

Übungsblatt Woche 10

Aufgabe 10.1
Universelles Hashing

Aufgabe 10.1

Die Pinguingattungen {Brillenpinguin, Zwergpinguin, Eselspinguin, Kaiserpinguin, Goldschopfpinguin} sollen in einer Hash-Tabelle der Größe m = 4 untergebracht werden. Es seien folgende Hashfunktionen gegeben:

$f_1:$	Brillenping. $\mapsto 4$	Zwergping. $\mapsto 2$	Eselsping. $\mapsto 2$	Kaiserping. $\mapsto 1$	Goldschopfping. $\mapsto 4$
$f_2:$	Brillenping. $\mapsto 3$	Zwergping. $\mapsto 4$	Eselsping. $\mapsto 2$	Kaiserping. $\mapsto 3$	Goldschopfping. $\mapsto 4$
$f_3:$	Brillenping. $\mapsto 2$	Zwergping. $\mapsto 2$	Eselsping. $\mapsto 4$	Kaiserping. $\mapsto 1$	Goldschopfping. $\mapsto 1$
$f_4:$	Brillenping. $\mapsto 1$	Zwergping. $\mapsto 3$	Eselsping. $\mapsto 3$	Kaiserping. $\mapsto 4$	Goldschopfping. $\mapsto 4$
$g_1:$	Brillenping. $\mapsto 1$	Zwergping. $\mapsto 1$	Eselsping. $\mapsto 3$	Kaiserping. $\mapsto 2$	Goldschopfping. $\mapsto 3$
$g_2:$	Brillenping. $\mapsto 2$	Zwergping. $\mapsto 4$	Eselsping. $\mapsto 2$	Kaiserping. $\mapsto 3$	Goldschopfping. $\mapsto 4$
$g_3:$	Brillenping. $\mapsto 4$	Zwergping. $\mapsto 4$	Eselsping. $\mapsto 1$	Kaiserping. $\mapsto 4$	Goldschopfping. $\mapsto 2$
$g_4:$	Brillenping. $\mapsto 3$	Zwergping. $\mapsto 1$	Eselsping. $\mapsto 2$	Kaiserping. $\mapsto 3$	Goldschopfping. $\mapsto 3$
$g_5:$	Brillenping. $\mapsto 4$	Zwergping. $\mapsto 2$	Eselsping. $\mapsto 2$	Kaiserping. $\mapsto 2$	Goldschopfping. $\mapsto 3$

In der Vorlesung haben wir den Begriff der c-universellen Hashfunktionen kennengelernt.

a) Geben Sie für die Familie $\mathcal{H}_1$ = {f1, f2, f3, f4} das kleinste c an, so dass H_1 c-universell ist.
b) Finden Sie eine möglichst kleine Familie $\mathcal{H}_2 \subseteq$ {g1, g2, g3, g4, g5}, die 1-universell ist. Untermauern Sie Ihre Aussagen mit glaubwürdigen Argumenten.

Aufgabe 10.1 (a)

Geben Sie für die Familie $\mathcal{H}_1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ das kleinste c an, so dass $\mathcal{H}_1$ c-universell ist.

$$\frac{|\{f \in \mathcal{H} : f(x) = f(y)\}|}{|\mathcal{H}|} \leq \frac{c}{m} \qquad \forall x \neq y$$

Paar	f_1	f_2	f_3	f_4	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
Brillenpinguin/Zwergpinguin			x		x		x		
Brillenpinguin/Eselspinguin						x			
Brillenpinguin/Kaiserpinguin		x					x	x	
Brillenpinguin/Goldschopfpinguin	x							x	
Zwergpinguin/Eselspinguin	x			x					x
Zwergpinguin/Kaiserpinguin							x		x
Zwergpinguin/Goldschopfpinguin		x				x			
Eselspinguin/Kaiserpinguin									x
Eselspinguin/Goldschopfpinguin					x				
Kaiserpinguin/Goldschopfpinguin			x	x				x	

Aufgabe 10.1 (a)

Finden Sie eine möglichst kleine Familie $\mathcal{H}_2 \subseteq \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$, die 1-universell ist. Untermauern Sie Ihre Aussagen mit glaubwürdigen Argumenten.

$$\frac{|\{f \in \mathcal{H} : f(x) = f(y)\}|}{|\mathcal{H}|} \leq \frac{c}{m} \qquad \forall x \neq y$$

Paar	f_1	f_2	f_3	f_4	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
Brillenpinguin/Zwergpinguin			x		x		x		
Brillenpinguin/Eselspinguin						x			
Brillenpinguin/Kaiserpinguin		x					x	x	
Brillenpinguin/Goldschopfpinguin	x							x	
Zwergpinguin/Eselspinguin	x			x					x
Zwergpinguin/Kaiserpinguin							x		x
Zwergpinguin/Goldschopfpinguin		x				x			
Eselspinguin/Kaiserpinguin									x
Eselspinguin/Goldschopfpinguin					x				
Kaiserpinguin/Goldschopfpinguin			x	x				x	

Aufgabe 10.2
Die perfekte Hashtabelle

Aufgabe 10.2

Konstruieren Sie eine statische perfekte Hashtabelle für die Elemente:

$$(16,10,11)\quad(8,2,15)\quad(7,12,8)\quad(1,10,3)\quad(13,11,14)\quad(6,11,14)$$
$$(7,3,16)\quad(2,2,8)\quad(10,5,15)\quad(7,3,14)\quad(2,10,1)\quad(14,11,6)$$

Jedes Element x besteht aus den Stellen (x_0, x_1, x_2). Verwenden Sie jeweils passend eine der Hashfunktionen:

$$\left(\textstyle\sum_{i=0}^{2} 2^i x_i\right) \bmod 17$$
$$\left(\textstyle\sum_{i=0}^{2} a_i x_i\right) \bmod 7 \text{ mit } \mathbf{a} = (0,0,1) \text{ oder } \mathbf{a} = (6,6,2)$$
$$\left(\textstyle\sum_{i=0}^{2} a_i x_i\right) \bmod 3 \text{ mit } \mathbf{a} = (1,0,0) \text{ oder } \mathbf{a} = (0,2,2).$$

Erinnerung: perfektes statisches Hashing

- Ziehe Hashfunktion aus einer c-universellen Familie $H_{\lceil\sqrt{2}cn\rceil}$ bis Kollisionszahl kleiner gleich $\sqrt{2}n$
- Jedes Bucket hat dann Größe $m_l = cb_l(b_l - 1) + 1$, wobei b_l die Elementzahl im jeweiligen Bucket ist
- Ziehe für jedes Bucket aus einer c-universellen Familie H_{m_l} bis im Bucket alle Schlüssel injektiv abgebildet werden

In dieser Aufgabe sind die möglichen Hashfunktionen schon gegeben

Aufgabe 10.2

$$\left(\sum_{i=0}^{2} 2^i x_i\right) \bmod 17$$
$$\left(\sum_{i=0}^{2} a_i x_i\right) \bmod 7 \text{ mit } \mathbf{a} = (0,0,1) \text{ oder } \mathbf{a} = (6,6,2)$$
$$\left(\sum_{i=0}^{2} a_i x_i\right) \bmod 3 \text{ mit } \mathbf{a} = (1,0,0) \text{ oder } \mathbf{a} = (0,2,2).$$

Aufgabe 10.2

Element	Bucket
$(7, 3, 14)$	1
$(2, 2, 8)$	4
$(8, 2, 15)$	4
$(13, 11, 14)$	6
$(2, 10, 1)$	9
$(14, 11, 6)$	9
$(7, 3, 16)$	9
$(16, 10, 11)$	12
$(7, 12, 8)$	12
$(10, 5, 15)$	12
$(1, 10, 3)$	16
$(6, 11, 14)$	16

$$(\textstyle\sum_{i=0}^{2} 2^i x_i) \bmod 17$$
$$(\textstyle\sum_{i=0}^{2} a_i x_i) \bmod 7 \text{ mit } \mathbf{a} = (0, 0, 1) \text{ oder } \mathbf{a} = (6, 6, 2)$$
$$(\textstyle\sum_{i=0}^{2} a_i x_i) \bmod 3 \text{ mit } \mathbf{a} = (1, 0, 0) \text{ oder } \mathbf{a} = (0, 2, 2).$$

Aufgabe 10.2

Element	Bucket	Position in Bucket
(7, 3, 14)	1	0
(2, 2, 8)	4	2
(8, 2, 15)	4	1
(13, 11, 14)	6	0
(2, 10, 1)	9	1
(14, 11, 6)	9	6
(7, 3, 16)	9	2
(16, 10, 11)	12	3
(7, 12, 8)	12	4
(10, 5, 15)	12	1
(1, 10, 3)	16	1
(6, 11, 14)	16	0

Aufgabe 10.3
Linear Probing

Aufgabe 10.3

Veranschaulichen Sie Hashing mit Linear Probing. Die Größe der Hashtabelle ist dabei jeweils m = 13. Führen Sie die folgenden Operationen aus:

```
insert  16, 3, 12, 17, 29, 10, 24
delete  16
insert  5, 1, 15
delete  10
insert  14
delete  1
```

Verwenden Sie die Hashfunktion:

$$h(x) = 3x \mod 13$$

Beim Löschen soll die dritte Methode aus der Vorlesung verwendet werden, d.h. die Wiederherstellung der folgenden Invariante:
Für jedes Element e in der Hashtabelle mit Schlüssel $k(e)$, aktueller Position j und optimaler Position $i = h(k(e))$ sind alle Positionen $i, (i+1) \bmod m, (i+2) \bmod m, \ldots, j$ der Hashtabelle belegt. Bei dieser Aufgabe soll keine dynamische Größenanpassung der Hashtabelle stattfinden.

Aufgabe 10.3

1. Operation: `insert`(16) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

2. Operation: `insert`(3) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

3. Operation: `insert`(12) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

4. Operation: `insert`(17) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

5. Operation: `insert`(29) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

6. Operation: `insert`(10) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

7. Operation: `insert`(24) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

8. Operation: `delete`(16) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

9. Operation: `insert`(5) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

10. Operation: `insert`(1) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

11. Operation: `insert`(15) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

12. Operation: `delete`(10) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

13. Operation: `insert`(14) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

14. Operation: `delete`(1) mit opt. Position: ______

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Aufgabe 10.3

1. Operation: **insert**(16) mit opt. Position: 9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
									16			

2. Operation: **insert**(3) mit opt. Position: 9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
									16	3		

3. Operation: **insert**(12) mit opt. Position: 10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
									16	3	12	

4. Operation: **insert**(17) mit opt. Position: 12

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
									16	3	12	17

5. Operation: **insert**(29) mit opt. Position: 9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
29									16	3	12	17

6. Operation: **insert**(10) mit opt. Position: 4

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
29				10					16	3	12	17

7. Operation: **insert**(24) mit opt. Position: 7

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
29				10			24		16	3	12	17

8. Operation: **delete**(16) mit opt. Position: 9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
				10			24		3	12	29	17

9. Operation: **insert**(5) mit opt. Position: 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		5		10			24		3	12	29	17

10. Operation: **insert**(1) mit opt. Position: 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		5	1	10			24		3	12	29	17

11. Operation: **insert**(15) mit opt. Position: 6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		5	1	10		15	24		3	12	29	17

12. Operation: **delete**(10) mit opt. Position: 4

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		5	1			15	24		3	12	29	17

13. Operation: **insert**(14) mit opt. Position: 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		5	1	14		15	24		3	12	29	17

14. Operation: **delete**(1) mit opt. Position: 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		5	14			15	24		3	12	29	17

Aufgabe 10.4
Double Hashing

Aufgabe 10 .4

Doppel-Hashing ist eine Methode zur Kollisionsbehandlung. Bei Kollisionen kommt eine Sondierungsfunktion zum Einsatz, die eine sekundäre Hashfunktion beinhaltet:

$$s(x, i) = i \cdot h_2(x), i \in \mathbb{N}_0$$

Diese Sondierungsfunktion wird angewendet, falls der durch die primäre Hashfunktion $h_1(x)$ berechnete Index bereits besetzt ist. Dabei wird i beginnend bei 0 bei jedem Versuch um 1 erhöht.
Die vollständige Hashfunktion lautet dann:

$$h(x, i) = (h_1(x) + s(x, i)) \bmod m$$

Verwenden Sie im Folgenden die Hashfunktionen

$$h_1(x) = (3x + 1) \bmod m$$
$$h_2(x) = 1 + (x \bmod (m - 1))$$

a) Geben Sie die vollständige Hashfunktion $h(x, i)$ für eine Tabelle der Länge $m = 13$ an.

b) Veranschaulichen Sie schrittweise das Einfügen der Schlüssel 12, 23, 13, 56, 26, 45, 24, 94, 42 in eine Hashtabelle der Länge $m = 13$. (Siehe Vordruck)

Aufgabe 10.4

	$\mathtt{ins}(12)$	$\mathtt{ins}(23)$	$\mathtt{ins}(13)$	$\mathtt{ins}(56)$	$\mathtt{ins}(26)$	$\mathtt{ins}(45)$	$\mathtt{ins}(24)$	$\mathtt{ins}(94)$	$\mathtt{ins}(42)$
0:									
1:									
2:									
3:									
4:									
5:									
6:									
7:									
8:									
9:									
10:									
11:									
12:									

Aufgabe 10.4

	$\texttt{ins}(12)$	$\texttt{ins}(23)$	$\texttt{ins}(13)$	$\texttt{ins}(56)$	$\texttt{ins}(26)$	$\texttt{ins}(45)$	$\texttt{ins}(24)$	$\texttt{ins}(94)$	$\texttt{ins}(42)$
0:				56	56	56	56	56	56
1:			13	13	13	13	13	13	13
2:									
3:									
4:					26	26	26	26	26
5:		23	23	23	23	23	23	23	23
6:						45	45	45	45
7:									
8:							24	24	24
9:									
10:								94	94
11:	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12:									42