Tutorium Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen

Übungsblatt Woche 2

Aufgabe 2.1
Induktion 2

Aufgabe 2.1 (a)

Beweisen Sie: $\mathbf{19} | \left(\mathbf{5} \cdot \mathbf{2}^{\mathbf{3}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} + \mathbf{3}^{\mathbf{3}\boldsymbol{n}+\mathbf{2}}\right)$ **gilt für alle** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \coloneqq \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \dots\}$

(In Worten: 19 teilt $(5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2})$ ganzzahlig)

Aufgabe 2.1 (b)

Beweisen Sie: $\left(\sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{i}\right)^{\boldsymbol{2}} = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{i}^{\boldsymbol{3}}$ **gilt für alle** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \coloneqq \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{5}, \dots\}$

(Hinweis: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ könnte nützlich sein)

Aufgabe 2.2
Laufzeit-Analyse

Aufgabe 2.2

(a) Erklären Sie in natürlicher Sprache, was die Funktionen jeweils berechnen.

(b) Welche asymptotischen Laufzeiten haben die Algorithmen? Begründen Sie ihre Antwort.

Funktion 1

```
int f(int[] A, int[] B) {
  int result = 0;
  for (int a : A) {
    for (int b : B) {
      if (a == b) {
        result += a;
        break;
      }
    }
  }
  return result;
}
```

Aufgabe 2.2

(a) Erklären Sie in natürlicher Sprache, was die Funktionen jeweils berechnen.

(b) Welche asymptotischen Laufzeiten haben die Algorithmen? Begründen Sie ihre Antwort.

Funktion 2

```
int f(int n) {
  if (n <= 0) return 0;
  if (n == 1) return 1;
  return f(n-1) + f(n-2);
}
```

Aufgabe 2.2

(a) Erklären Sie in natürlicher Sprache, was die Funktionen jeweils berechnen.

(b) Welche asymptotischen Laufzeiten haben die Algorithmen? Begründen Sie ihre Antwort.

Funktion 3

```
int f(int n) {
  if (n < 0) return -1;
  if (n == 0) return 1;
  return n * f(n-1);
}
```

Aufgabe 2.3
$\mathcal{O}$-Notation

Wiederholung: $\mathcal{O}$-Notation

Mengen des asymptotischen Verhaltens einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$:

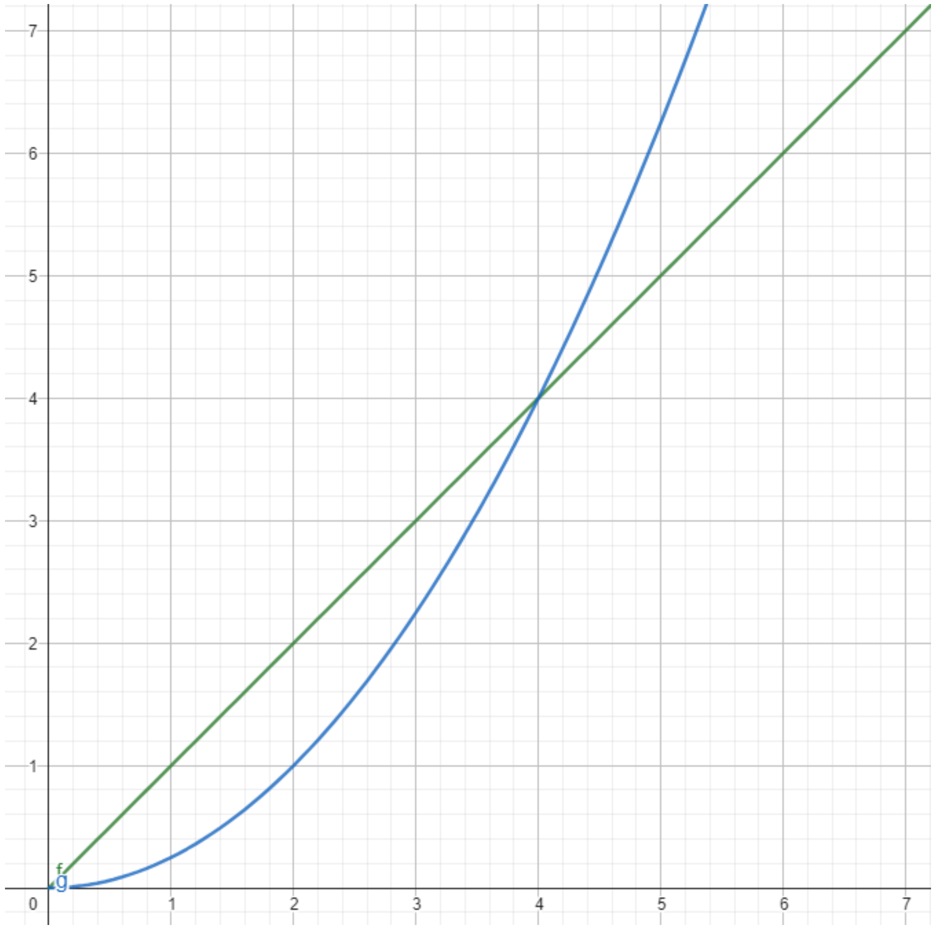
- $\mathcal{O}\big(f(n)\big) = \big\{g(n) \mid \exists c > 0\ \exists n_0 > 0\ \forall n \geq n_0 :\ g(n) \leq c \cdot f(n)\big\}$
  (Funktionen die asymptotisch nicht schneller als f wachsen)
- $\Omega\big(f(n)\big) = \big\{g(n) \mid \exists c > 0\ \exists n_0 > 0\ \forall n \geq n_0 :\ g(n) \geq c \cdot f(n)\big\}$
  (Funktionen die asymptotisch nicht langsamer als f wachsen)

Ein Faktor c reicht aus!!!

- $\Theta\big(f(n)\big) = \mathcal{O}(f(n)) \cap \Omega(f(n))$
  (Funktionen die asymptotisch gleiches Wachstum wie f haben)
- $o\big(f(n)\big) = \big\{g(n) \mid \forall C > 0\ \exists n_0 > 0\ \forall n \geq n_0 :\ g(n) \leq C \cdot f(n)\big\}$
  (Funktionen die asymptotisch langsamer als f wachsen)
- $\omega\big(f(n)\big) = \big\{g(n) \mid \forall C > 0\ \exists n_0 > 0\ \forall n \geq n_0 :\ g(n) \geq C \cdot f(n)\big\}$
  (Funktionen die asymptotisch schneller als f wachsen)

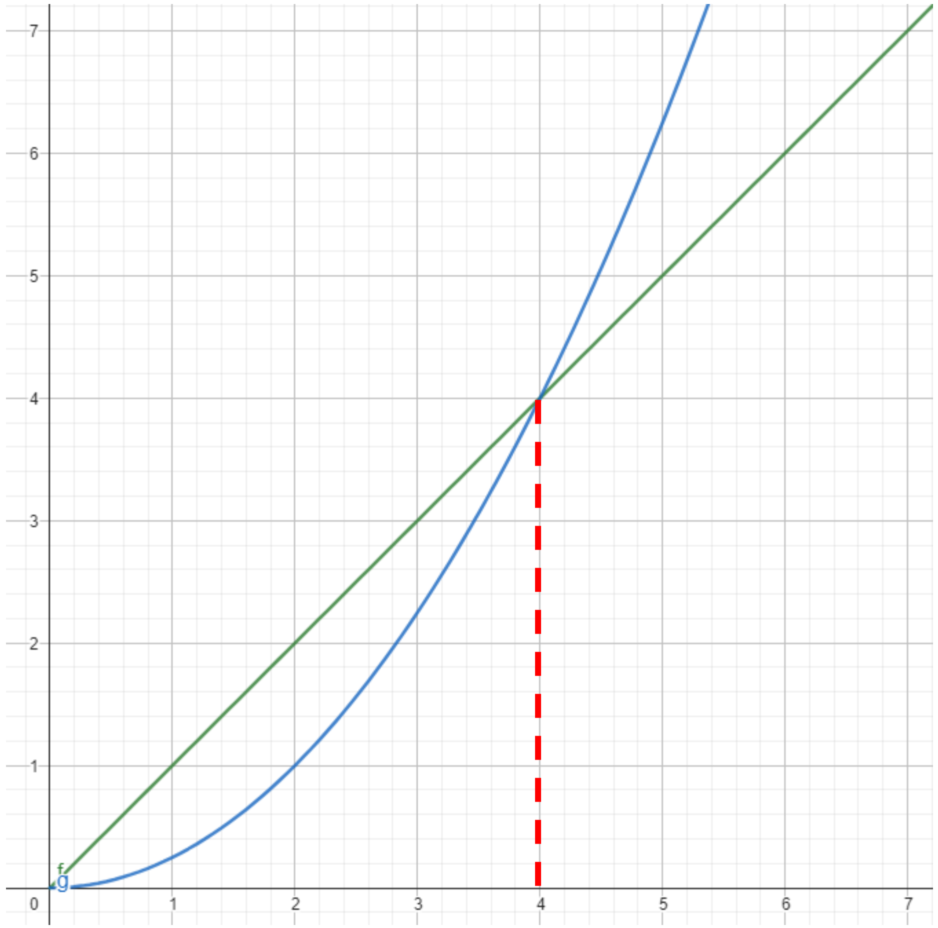
Muss hier für **jedes** mögliche C gelten!!!

Beispiele: $\mathcal{O}$-Notation



Funktion g (blau) wächst offensichtlich schneller

Beispiele: $\mathcal{O}$-Notation



Funktionen:

$$f(x) = x$$
$$g(x) = 0.25x^2$$

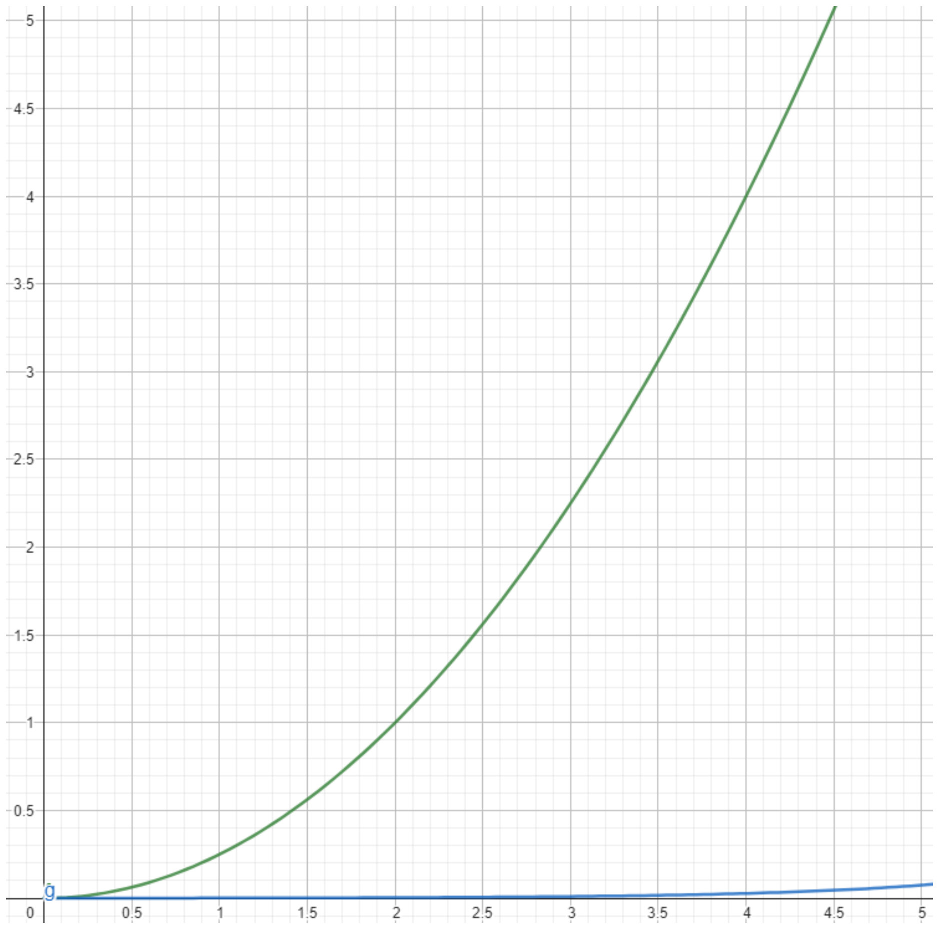
Schnittpunkt:

$$x = 0.25x^2$$
$$1 = 0.25x$$
$$4 = x$$

Limes:

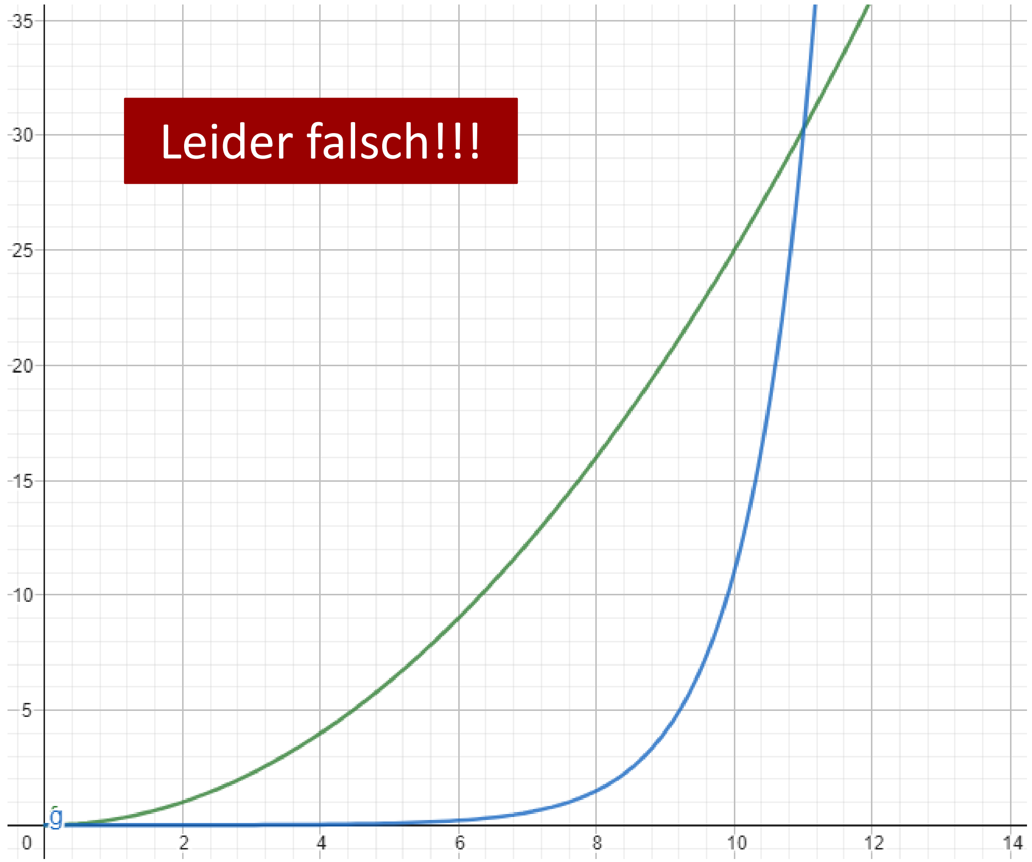
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{0.25x^2}\right) = \frac{1}{0.25}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x\verb|^|2}\right)$$
$$= 4\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 4\cdot 0 = 0 \Rightarrow f(x) \in o\big(\mathrm{g(x)}\big)$$

Beispiele: $\mathcal{O}$-Notation



Funktion g (blau) wächst offensichtlich langsamer

Beispiele: $\mathcal{O}$-Notation



Funktionen:

$$f(x) = 0.25x^2$$
$$g(x) = 0.0005e^x$$

Schnittpunkt und Ableitung: Eher aufwändig

Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{0.25x^2}{0.0005e^x}\right)$$
$$= \frac{0.25}{0.0005}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) = 500\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\right)$$
$$= 500\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{e^x}\right) = 500\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{e^x}\right) = 500 \cdot 0 = 0$$
$$\Rightarrow f(x) \in o(\mathrm{g(x)})$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Landau-Symbole#Definition

Aufgabe 2.3

Kreuzen Sie das am besten passende und stärkste Symbol an welches an Stelle von Δ eingesetzt werden soll.
(Sind mehrere möglich nur das stärkere, z.B. bei o und $\mathcal{O}$ nur o; bei $\mathcal{O}$, Ω und Θ nur Θ)
Begründen Sie ihre Antwort mit einem kurzen Beweis.

Bsp.:	n	$\in \Delta(n^2)$	$\boxtimes$ o	$\square$ $\mathcal{O}$	$\square$ ω	$\square$ Ω	$\square$ Θ	$\square$ u.
(a)	$7n^3$	$\in \Delta(3n^7)$	$\square$ o	$\square$ $\mathcal{O}$	$\square$ ω	$\square$ Ω	$\square$ Θ	$\square$ u.
(b)	$\sqrt[3]{\sqrt{3n}}$	$\in \Delta\left(\sqrt{\sqrt[3]{2n}}\right)$	$\square$ o	$\square$ $\mathcal{O}$	$\square$ ω	$\square$ Ω	$\square$ Θ	$\square$ u.
(c)	$n!$	$\in \Delta(4^n)$	$\square$ o	$\square$ $\mathcal{O}$	$\square$ ω	$\square$ Ω	$\square$ Θ	$\square$ u.
(d)	n	$\in \Delta((2+(-1)^n)n)$	$\square$ o	$\square$ $\mathcal{O}$	$\square$ ω	$\square$ Ω	$\square$ Θ	$\square$ u.
(e)	n	$\in \Delta(1+(1+(-1)^n)n)$	$\square$ o	$\square$ $\mathcal{O}$	$\square$ ω	$\square$ Ω	$\square$ Θ	$\square$ u.
(f)	$\sqrt{n}$	$\in \Delta(\ln n)$	$\square$ o	$\square$ $\mathcal{O}$	$\square$ ω	$\square$ Ω	$\square$ Θ	$\square$ u.
(g)	n^2	$\in \Delta(1+\lvert tan(n)\rvert)$	$\square$ o	$\square$ $\mathcal{O}$	$\square$ ω	$\square$ Ω	$\square$ Θ	$\square$ u.

Aufgabe 2.3

(a) $7n^3 \in \Delta(3n^7)$ $\square\ o$ $\square\ \mathcal{O}$ $\square\ \omega$ $\square\ \Omega$ $\square\ \Theta$ $\square$ u.

(b) $\sqrt[3]{\sqrt{3n}} \in \Delta\left(\sqrt{\sqrt[3]{2n}}\right)$ $\square\ o$ $\square\ \mathcal{O}$ $\square\ \omega$ $\square\ \Omega$ $\square\ \Theta$ $\square$ u.

Aufgabe 2.3

(c) $n!$ $\in \Delta(4^n)$ $\square\ o$ $\square\ \mathcal{O}$ $\square\ \omega$ $\square\ \Omega$ $\square\ \Theta$ $\square$ u.

(d) n $\in \Delta((2 + (-1)^n)n)$ $\square\ o$ $\square\ \mathcal{O}$ $\square\ \omega$ $\square\ \Omega$ $\square\ \Theta$ $\square$ u.

Aufgabe 2.3

(e) $n \in \Delta(1 + (1 + (-1)^n)n)$ $\square\ o$ $\square\ \mathcal{O}$ $\square\ \omega$ $\square\ \Omega$ $\square\ \Theta$ $\square$ u.

(f) $\sqrt{n} \in \Delta(\ln n)$ $\square\ o$ $\square\ \mathcal{O}$ $\square\ \omega$ $\square\ \Omega$ $\square\ \Theta$ $\square$ u.

Aufgabe 2.3

(g) $n^2 \in \Delta(1 + |tan(n)|)$ ☐ o ☐ $\mathcal{O}$ ☐ ω ☐ Ω ☐ Θ ☐ u.

Aufgabe 2.4
$\mathcal{O}$h ja, noch mehr Wachstum

Aufgabe 2.4

Seien $f, g, h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $\exists n_0 \colon \forall n > n_0 \colon f(n), g(n), h(n) > 0$. Zeigen Sie die folgenden „Transitivitätsregeln“.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{(a)} & f(n) \in o(g(n)) & & & \Rightarrow \quad f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \\
\text{(b)} & f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) & \text{und} & g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) & \Rightarrow \quad f(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \\
\text{(c)} & f(n) \in o(g(n)) & \text{und} & g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) & \Rightarrow \quad f(n) \in o(h(n))
\end{array}
$$

Hinweis: Solche Regeln sind nützlich wenn man Beweise für komplexe Funktionen durchführen muss, welche in einfachere aufgeteilt werden können.

Aufgabe 2.4

(a) $f(n) \in o(g(n)) \quad \Rightarrow \quad f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$

Aufgabe 2.4

(b) $\quad f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \quad \text{und} \quad g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \quad \Rightarrow \quad f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$

Aufgabe 2.4

$$\text{(c)} \quad f(n) \in o(g(n)) \quad \text{und} \quad g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \quad \Rightarrow \quad f(n) \in o(h(n))$$