IA04 – Systèmes Multi-Agents

Chapitre 2 : Prise de décision collective et théorie du choix social (1re partie)

Sylvain Lagrue

sylvain.lagrue@hds.utc.fr

Plan du cours

1. Introduction
2. Un cas d'étude : le vote majoritaire
    1. Théorème de May
    2. Vote majoritaire à 1 tour
    3. Vote majoritaire à 2 tours
3. D'autres méthodes de vote
    1. Méthodes de votes non rangées
    2. Méthodes de vote par *scoring*
    3. Méthodes cohérentes avec la règle de condorcet/Méthodes par tournois
4. Fonctions de choix social et théorème d'impossibilité de Arrrow
    1. Caractérisation des méthodes de vote
    2. Théorème d'impossibilité de Arrrow
    3. Théorème du jury de Condorcet

I. Introduction

Objectifs du cours

- Donner les fondations théoriques pour la prise de décision de groupe lorsque les agents sont coopératifs via la théorie du choix social
- Présenter différentes méthodes (règles) de votes et les caractériser
- Répondre à la question : existe-t-il une règle de vote meilleure que toutes les autres, voire *parfaite* ?

I. Introduction

Question centrale

> *Comment définir les préférences collectives d'un groupe (société) à partir des préférences individuelles de chacun de ses individus?*

Lien avec l'économie, la politique, la décision, et l'intelligence artificielle

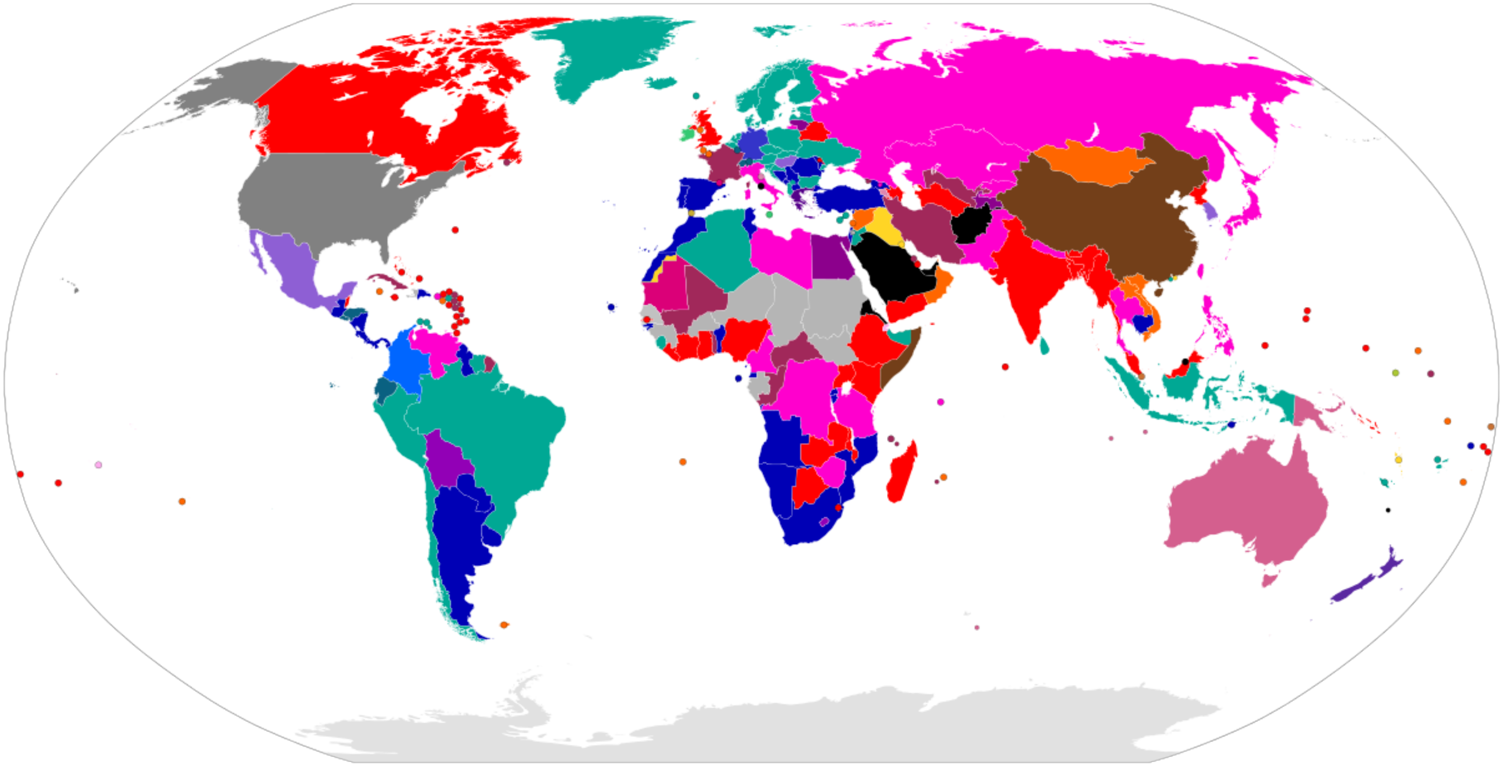
Quelques grands noms...

- Jean-Charles de Borda (1781)
- Marquis de Condorcet (1785)
- Ramon Llull (XIIIe siècle)
- Kenneth J. Arrow (1963)
- Amartya K. Sen (1976)

I. Introduction

Les systèmes de vote dans le monde

https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_%C3%A9lectoral#/media/Fichier:Electoral_systems_map.svg



I. Introduction

Hypothèses de travail

- Les agents sont collaboratifs et « honnêtes »
- Aucun agent n'est prioritaire
- On ne traite qu'un choix à la fois
- Les agents expriment leurs préférences de manière stricte et totalement ordonnée

I. Introduction

Modélisation

Rappels

- Produit cartésien : $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
- Relation R entre des ensembles A et B : $R \subseteq A \times B$
- aRb signifie que a est en relation avec b

Quelques propriétés sur les relations

- *Réflexivité* : $\forall a \in A : \ aRa$
- *Irréflexivité* : $\forall a \in A$ on n'a pas aRa
- *Symétrie* : $\forall a, b \in A : \ aRb \Rightarrow bRa$
- *Antisymétrie* : $\forall a \in A \ \forall b \in A : \ aRb$ et $bRa \Rightarrow a = b$
- *Transitivité* : $\forall a, b, c \in A : aRb$ et $bRc \Rightarrow aRc$
- *Totalité* : $\forall a, b \in A : aRb$ ou bRa

I. Introduction

- Une *relation d'ordre* est une relation réflexive, antisymétrique et transitive
- Une *relation d'équivalence* est une relation qui est réflexive, symétrique et transitive
- Une relation d'*ordre strict* est une relation irréflexive et transitive
- Un *préordre* est une relation réflexive et transitive
- Une relation qui n'est pas totale est dite partielle

I. Introduction

Modélisation des préférences des agents

- Ensemble de m *alternatives* (candidats) : $X = \{a, b, c, \dots\}$
- *Agenda* : $A \subseteq X$
- Ensemble d'*individus* (agents) $N = \{1, \dots, n\}$
- Chaque individu i possède une *relation de préférence* $\geq_i$ sur X ($a \geq_i b$ signifie que a est au moins aussi préféré que b)
- $>_i$ représente la partie stricte de la relation (c.-à-d. $a >_i b$ ssi $a \geq_i b$ et on n'a pas $b \geq_i a$)
- $\simeq_i$ dénote la relation d'équivalence (d'indifférence) associée ($a \simeq_i$ b ssi $a \geq_i b$ et $b \geq_i a$)
- *Profil* $P = (\geq_1, \geq_2, \dots, \geq_n)$

I. Introduction

2 problèmes associés

1. Déterminer la relation de préférence $\geq^P$ global à partir d'un profil P donné (fonction de bien-être social, *social welfare function*, *SWF*)
2. Déterminer quel est le(s) candidat(s) choisi(s) (préférés) par un profil P donné (fonction de choix social, *social choice function*, *SCF*) : noté $CN(X)$

Si une SCF retourne plusieurs éléments, il peut être nécessaire d'utiliser des *tie-breaks* (fonction de départage).

Hypothèse simplificatrice

> *On ne considère que des préférences sous forme d'ordres totaux (relations réflexives, transitives, antisymétriques et totales)*

⇒ On peut toujours discriminer 2 éléments

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Règle de vote avec 2 alternatives

Règle Majoritaire : on choisit le candidat qui est majoritairement préféré

$$a \geq_{maj}^{P} b \text{ ssi } |\{i \in N | a >_i b\}| \geq |\{i \in N | b >_i a\}|$$

a est préféré à b pour un profil N si le nombre de votants pour a est au moins aussi grand que le nombre de votants pour b

Propriété : $\geq_{maj}^{P}$ est un *préodre* total

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Quatre propriétés

Soit une méthode de vote (une SWF) f telle que $\geq^P = f(P)$

- *Domaine universel* : la méthode de vote donne un résultat quel que soit le profil
- *Anonymat* : la méthode de vote traite tous les votants de la même manière
- *Neutralité* : la méthode de vote traite tous les candidats de la même manière
- *Monotonie* : si un candidat est élu pour un profil donné, il sera forcément élu pour un profil modifié où ce candidat reçoit plus de votes

Théorème [May 1952]

> *Si $m = 2$ et n est impair, l'unique méthode vérifiant les propriétés de Domaine universel, Anonymat, Neutralité et Monotonie est la majorité*

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Gagnant de Condorcet

Définition : Un candidat a est un gagnant de Condorcet pour un profil N ssi pour tout autre candidat $b \in N$ le candidat a est majoritairement préféré à b si on restreint le profil à $\{a, b\}$

Exemple

$\geq_1$	$\geq_2$	$\geq_3$
a	a	c
b	c	b
c	b	a

- Pour $X = \{a, b\}$ on a $a = 2, b = 1$
- Pour $X = \{a, c\}$ on a $a = 2, c = 1$
- a est un gagnant de Condorcet

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Exemple 2

$\geq_1$	$\geq_2$	$\geq_3$
a	b	c
b	c	a
c	a	b

- Pour $X = \{a, b\}$ on a $a = 2, b = 1$
- Pour $X = \{a, c\}$ on a $a = 1, c = 2$
- Pour $X = \{b, c\}$ on a $b = 2, c = 1$

⇒ il peut n'y avoir aucun gagnant de Condorcet !

- Une méthode qui choisit le gagnant de Condorcet quand il existe est appelée *méthode Condorcet*
- Que fait-on quand il n'y a pas de gagnant de Condorcet ?

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Scrutin majoritaire simple

- Système utilisé en Grande-Bretagne
- Bulletin uninominal
- Le candidat avec le plus de votes est le candidat choisi

Exemple

10	**6**	**5**
a	b	c
b	c	b
c	a	a

Résultat : a est élu

Une majorité d'individus (11/21) préfère tous les autres candidats au candidat élu !

⇒ Le scrutin majoritaire simple permet d'élire un perdant de Condorcet !

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Scrutin majoritaire à 2 tours

- Système utilisé en France
- Bulletin uninominal
- *Premier tour :* le candidat qui reçoit plus de la moitié des voix est élu, sinon les deux candidats ayant reçu le plus de voix vont au second tour
- *Second tour :* le candidat avec le plus de voix est élu

Exemple

10	**6**	**5**
a	b	c
b	c	b
c	a	a

- Premier tour : a et b sont qualifiés pour le second tour
- Second tour : b est élu

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Remarques

- Par construction, le scrutin majoritaire ne peut pas élire un perdant de Condorcet…
- Mais il est tout de même possible que tous les autres candidats sauf un soient préférés au candidat élu par une majorité des votants !

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Manipulabilité

10	6	5
b	c	a
a	a	d
c	d	b
d	b	c

- Premier tour : a : 5, b : 10, c : 6
- Les candidats b et c vont au second tour
- Second tour : b : 15, c : 6
- Le candidat b est élu.

10	6	5
b	a	a
a	c	d
c	d	b
d	b	c

- Les 6 individus avec les préférences $c > a > d > b$ décident de voter comme si leurs préférences étaient $a > c > d > b$

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Manipulabilité

10	**6**	**5**
b	c	a
a	a	d
c	d	b
d	b	c

- Premier tour : a : 5, b : 10, c : 6
- Les candidats b et c vont au second tour
- Second tour : b : 15, c : 6
- Le candidat b est élu.

10	**6**	**5**
b	a	a
a	c	d
c	d	b
d	b	c

- Les 6 individus avec les préférences $c > a > d > b$ décident de voter comme si leurs préférences étaient $a > c > d > b$
- Premier tour : a : 11, b : 10
- Le candidat a est élu

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

⇒ Le scrutin majoritaire à deux tours est manipulable : il peut être profitable à un individu de mentir sur ses préférences

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Non-monotonie

6	5	4	2
a	c	b	b
b	a	c	a
c	b	a	c

- Premier tour : a : 6, b : 6, c : 5
- Les candidats a et b vont au second tour
- Second tour : a : 11, b : 6
- Le candidat a est élu

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Non-monotonie (2)

Le candidat a fait une campagne de presse contre le candidat b. La campagne fonctionne, les 2 individus qui avaient les préférences b > a > c ont à présent les préférences a > b > c

6	5	4	2
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	a	c

- Premier tour : a : 8, b : 4, c : 5
- Les candidats a et c vont au second tour
- Second tour : a : 8, c : 9
- Le candidat c est élu !
- La campagne de presse réussie de a lui fait perdre l'élection !
- Le scrutin majoritaire à deux tours est non-monotone

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Abstentionnisme

4	**4**	**3**
a	c	b
b	b	c
c	a	a

- Premier tour : a : 4, b : 3, c : 4
- Les candidats a et c vont au second tour
- Second tour : a : 4, c : 7
- Le candidat c est élu.

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Abstentionnisme (2)

2 individus dont les préférences sont a > b > c n’ont pas le courage d’aller voter.

2	4	3
a	c	b
b	b	c
c	a	a

- Premier tour : a : 2, b : 3, c : 4
- Les candidats b et c vont au second tour
- Second tour : b : 5, c : 4
- Le candidat b est élu
- Il est préférable pour les 2 individus de s’abstenir de voter
- Le scrutin majoritaire à deux tours n’incite pas à la participation

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Séparabilité

Les votants sont répartis dans deux circonscriptions.

Circonscription 1

4	**3**	**3**	**3**
a	b	c	c
b	a	a	b
c	c	b	a

- Premier tour : a : 4, b : 3, c : 6
- Les candidats a et c vont au second tour
- Second tour : a : 7, c : 6
- Le candidat a est élu

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Circonscription 2

4	**3**	**3**	**3**
a	b	c	b
b	a	a	c
c	c	b	a

- Premier tour : a : 4, b : 6, c : 3
- Les candidats a et b vont au second tour
- Second tour : a : 7, b : 6
- Le candidat a est élu

⇒ Le candidat a est élu dans les 2 circonscriptions, il devrait donc être élu

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Séparabilité (2)

Circonscription 1 + Circonscription 2

8	**6**	**6**	**3**	**3**
a	b	c	c	b
b	a	a	b	c
c	c	b	a	a

- Premier tour : a : 8, b : 9, c : 9
- Les candidats b et c vont au second tour.
- Second tour : b : 17, c : 9
- Le candidat b est élu.

⇒ Le candidat a ne passe même pas le premier tour !

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Dictature de la majorité

Supposons que nous ayons 26 candidats $X = \{a, b, \ldots, z\}$ et 100 votants avec les préférences suivantes :

51	**49**
a	z
b	b
c	c
...	...
y	y
z	a

- Premier tour : a : 51, z : 49
- Le candidat a est élu au premier tour
- Pourtant c'est le plus mauvais candidat pour une partie importante de la société

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Dictature de la majorité

Supposons que nous ayons 26 candidats $X = \{a, b, \ldots, z\}$ et 100 votants avec les préférences suivantes :

51	**49**
a	z
b	b
c	c
...	...
y	y
z	a

- Le candidat b est unanimement considéré comme un très bon candidat
- Le scrutin majoritaire à 2 tours permet la dictature de la majorité

II. Un cas d'étude : le vote majoritaire

Conclusion intermédiaire

Le scrutin majoritaire à 2 tours :

- est (légèrement) meilleur que le scrutin majoritaire simple puisqu'il ne peut pas choisir de perdant de Condorcet (mais on n'a pas beaucoup mieux)
- n'est pas monotone
- n'incite pas à la participation
- est manipulable
- est non séparable
- permet la dictature de la majorité

La question est donc de savoir :

- Quelles sont les alternatives ?
- Quels sont les systèmes de votes ayant de bonnes propriétés ?

III. D'autres méthodes de vote

Méthodes de vote sans classement

Soient m candidats. Une méthode de vote sans classement (*non-ranking voting rule*) est un sous-ensemble non vide de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$

- Représente le nombre de candidats pour lesquels un individu peut voter
- Le candidat ayant le plus de voix est élu

III. D'autres méthodes de vote

Exemples

- $\{1\}$: scrutin majoritaire simple (*uninominal*)
- $\{2\}$: chaque individu doit voter pour deux candidats
- $\{1, 2\}$: chaque individu doit voter pour un ou deux candidats
- $\{m-1\}$: chaque individu doit voter contre un candidat (i.e. pour tous les candidats sauf un) : vote par *veto*
- $\{1, m-1\}$: chaque individu doit voter pour un candidat ou contre un candidat
- $\{1, 2, \ldots, m\}$: Chaque individu doit voter pour autant de candidats qu'il veut : vote par assentiment ou vote par assentiment (par approbation, *Approval voting*)

Remarque : Le vote par assentiment est la méthode de vote non rangée la moins manipulable [Fishburn, 81]

III. D'autres méthodes de vote

Méthodes de vote par score (*scoring*)

Soient m candidats. Une méthode de vote par score (scoring voting rule) est définie par :

- une séquence décroissante d'entiers $s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{m-1}$ t.q. $s_0 < s_{m-1}$
- Chaque individu fournit son ordre strict
- Pour chaque individu on attribue s_0 points au candidat qu'il classe dernier, s_1 points à l'avant-dernier, etc.

Le candidat ayant reçu le plus de points est élu !

Cas particuliers

- $s_0 = s_1 = \ldots = s_{m-2} < s_{m-1}$ est le scrutin majoritaire simple
- $s_0 = 0, s_1 = 1, \ldots, s_{m-1} = m - 1$ est la règle de Borda

III. D'autres méthodes de vote

Propriétés des méthodes par score

Toute méthode de vote par score satisfait :

- *Monotonie*. Étant donné un profil P le candidat a est élu. Si on change le profil P de façon à ce que seules les préférences sur a peuvent s'améliorer, alors a doit être élu avec ce profil modifié
- *Séparabilité*. Si deux profils P_1 et P_2 choisissent un même candidat a dans un agenda X, alors a doit être choisi parmi X par $P_1 \cup P_2$
- *Continuité*. Si pour un profil P_1 un candidat a est élu pour un agenda X, et que pour un profil (disjoint) N_2 un autre candidat b est élu pour le même agenda, alors il est possible de dupliquer P_1 (et le profil correspondant) un certain nombre m de fois pour que a soit élu pour le profil $m.\ P_1 \cup P_2$
- *Participation*. Si un candidat a est élu pour l'agenda X et le profil N. Alors pour le profil $N \cup \{i\}$ et pour le même agenda, soit le candidat a est élu, soit c'est un candidat b tel que $b >_i a$

Propriété : aucune méthode de vote par score n'est Condorcet cohérente !

III. D'autres méthodes de vote

Exercice

Calculer le résultat pour les règles de scrutin majoritaire simple, à deux tours, de Borda et de Condorcet

5	**4**	**2**	**6**	**8**	**2**
a	a	d	d	c	d
b	c	b	b	b	c
c	b	a	c	a	b
d	d	c	a	d	a

- Scrutin majoritaire simple : d
- Scrutin majoritaire à deux tours : a
- Règle de Borda : b
- Gagnant de Condorcet : c

/**!**\ Avec un ensemble de préférences individuelles donné, la personne qui choisit la méthode de vote peut décider du résultat !

III. D'autres méthodes de vote

Méthodes Condorcet et généralisations de la méthode de Condorcet

Définition : Méthodes qui élisent le gagnant de Condorcet s'il existe

Règle de Copeland

- Le meilleur candidat est celui qui bat le plus d'autres candidats
- On associe à chaque candidat a le score suivant :
  - $+1$ pour chaque autre candidat $b \neq a$ si une majorité préfère a à b
  - -1 si une majorité préfère b à a et 0 sinon
- Le candidat élu est celui qui a le plus haut score de Copeland

III. D'autres méthodes de vote

Exemple

5	**4**	**3**
a	b	d
b	c	c
c	d	a
d	a	b

$$
\begin{array}{lccccccl}
cop(a) = & +1 & -1 & -1 & & & & = -1 \\
cop(b) = & -1 & & & +1 & +1 & & = +1 \\
cop(c) = & & +1 & & -1 & & +1 & = +1 \\
cop(d) = & & & +1 & & -1 & -1 & = -1
\end{array}
$$

III. D'autres méthodes de vote

Règle de Kramer-Simpson

- Le meilleur candidat est celui qui engendre le "moins de regrets" chez les votants (nombre d’individus non satisfaits par rapport à un autre candidat)
- On associe à chaque candidat a le score suivant :
  - Pour chaque autre candidat, calculer $N(a, b)$ le nombre d’individus préférant a à b
  - Le score de Simpson est le minimum des $N(a, b)$
- Le candidat élu est celui qui a le plus haut score de Simpson

III. D'autres méthodes de vote

Exemple

5	**4**	**3**
a	b	d
b	c	c
c	d	a
d	a	b

$$
\begin{array}{lcccccccc}
sim(a) = & 8 & 5 & 5 & & & & = & 5 \\
sim(b) = & 4 & & & 9 & 9 & & = & 4 \\
sim(c) = & & 7 & & 3 & & 9 & = & 3 \\
sim(d) = & & & 7 & & 3 & 3 & = & 3
\end{array}
$$

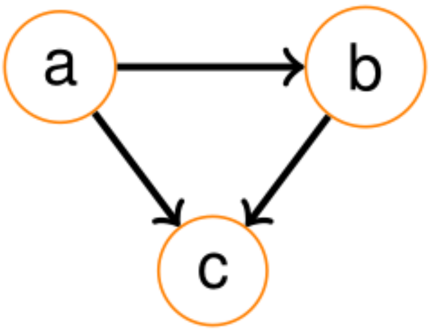
III. D'autres méthodes de vote

Graphes de majorité

- Graphe de majorité : on dessine un arc entre un candidat a et un candidat b, si une majorité (stricte) de votants préfèrent a à b
- Un gagnant de Condorcet est un candidat qui a un arc vers tous les autres candidats

Exemple

2	**1**
a	b
b	a
c	c



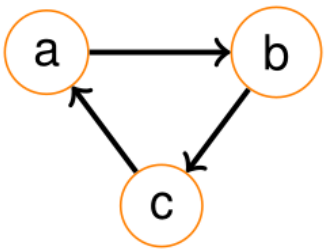
III. D'autres méthodes de vote

- Le graphe n'est pas transitif (*paradoxe de Condorcet*)

Exemple

$\geq_1$	$\geq_2$	$\geq_3$
a	b	c
b	c	a
c	a	b

- Pour $X = \{b, c\}, b = 2, c = 1$
- Pour $X = \{a, b\}, a = 2, b = 1$
- Pour $X = \{a, c\}, a = 1, c = 2$



III. D'autres méthodes de vote

- Le graphe de majorité indique les candidats meilleurs que d’autres
- Si un candidat est meilleur que tous les autres, c’est le gagnant de Condorcet, il doit être choisi (Condorcet cohérence)
- Souvent il n’y a pas de gagnant de Condorcet

Idée pour définir une méthode de vote : le meilleur candidat est celui qui est le plus « proche » d’un gagnant de Condorcet

III. D'autres méthodes de vote

Quelques règles reprenant ce principe

- *Copeland* : Le meilleur candidat est celui qui requiert le moins de suppression d'autres candidats pour devenir un gagnant de Condorcet
- *Young (Condorcet)* : Le meilleur candidat est celui qui requiert le moins de suppression d'individus pour devenir un gagnant de Condorcet
- *Dodgson :* Le meilleur candidat est celui qui requiert le moins de changement dans les préférences des individus pour devenir un gagnant de condorcet. (nombre de "flips" : inversion de la préférence entre 2 candidats dans les préférences d'un individu)
- *Kramer-Simpson :* Le meilleur candidat est celui qui assure le moins de regrets
- *Kemeny :* Calculer la relation de préférence $>$ la plus proche du profil (pour la somme pour chaque votant du nombre de paires de candidats qui ne sont pas dans le même ordre). Le meilleur candidat est celui qui est rangé premier pour cette relation.

III. D'autres méthodes de vote

Quelques propriétés

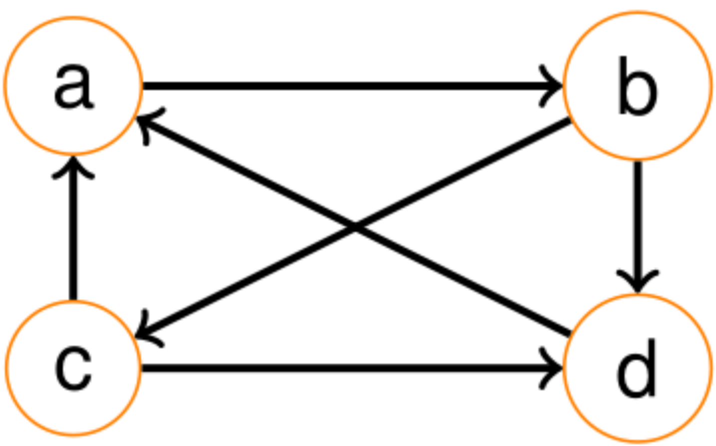
- Les règles de Copeland et de Kramer-Simpson sont monotones
- Aucune règle Condorcet cohérente ne peut satisfaire la propriété de séparabilité
- Aucune règle Condorcet cohérente ne peut satisfaire propriété de participation

III. D'autres méthodes de vote

Exercice

5	**4**	**3**
a	b	d
b	c	c
c	d	a
d	a	b

1. Calculer le graphe de majorité
2. Appliquer les différentes méthodes précédentes



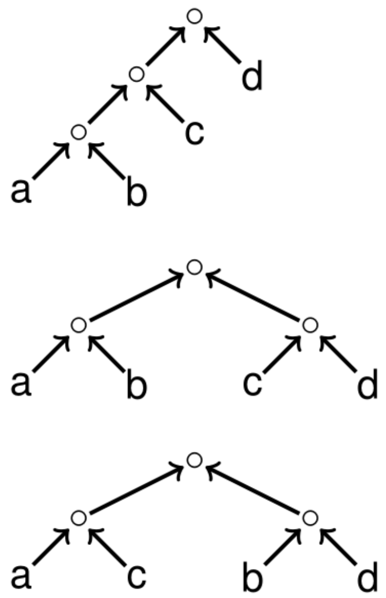
III. D'autres méthodes de vote

Méthodes de vote par comparaisons successives (par tournoi)

- Autre généralisation possible de Condorcet
- On sait que la comparaison de deux alternatives par la majorité est une méthode avec de bonnes propriétés
- On fait rencontrer les candidats deux à deux (suivant un ordre prédéfini = arbre)
- Chaque gagnant rencontre un autre candidat
- Le candidat élu est celui qui gagne la rencontre au sommet de l’arbre
- S'il y a un vainqueur de Condorcet, il sera élu avec cette méthode

III. D'autres méthodes de vote

Exemple



- Problème : le résultat dépend de l'ordre des
- Pouvoir de l'autorité qui détermine l'arbre comparaisons
- Manipulations possibles

- Méthode de vote des lois à l'Assemblée nationale (lois + amendements successifs)…

III. D'autres méthodes de vote

Méthodes de vote à plusieurs tours et méthodes de vote transférables

Présentation

- Généralisation du scrutin majoritaire à deux tours
- On peut augmenter le nombre de tours
- *Exemple :* proposition de scrutin majoritaire à trois tours pour la présidentielle (4 candidats pour le second tour, puis 2 candidats pour le troisième tour)

III. D'autres méthodes de vote

Vote Simple Transférable (Single Transferable Vote (STV) - Instant Runoff - vote alternatif)

- Chaque individu indique donne son ordre de préférence $>_i$
- Pour n candidats, on fait $n-1$ tours (à moins d'avoir avant une majorité stricte pour un candidat)
- On suppose qu'à chaque tour chaque individu "vote" pour son candidat préféré (parmi ceux encore en course)
- À chaque tour, on élimine le plus mauvais candidat (celui qui a le moins de voix)

III. D'autres méthodes de vote

Exemple

5	4	3
a	b	d
b	c	c
c	d	a
d	a	b

III. D'autres méthodes de vote

Vote Simple Transférable : méthode de Coombs

- Chaque individu indique donne son ordre de préférence $>_i$
- Pour n candidats, on fait $n-1$ tours (à moins d'avoir avant une majorité stricte pour un candidat)
- À chaque tour, on élimine le plus mauvais candidat
    - Interprétation usuelle du "plus mauvais" : celui qui a le moins de voix
    - Autre interprétation possible : celui qui est le plus mal classé (qui a le plus grand nombre de rejets) = *méthode de Coombs*

III. D'autres méthodes de vote

Exemple

5	**4**	**3**
a	b	d
b	c	c
c	d	a
d	a	b

III. D'autres méthodes de vote

Présidentielle 2007 et gagnant de Condorcet

François Bayrou battrait Ségolène Royal et Nicolas Sarkozy s'il arrivait au second tour - LEMONDE.FR : Article publié le 19.02.07

https://www.lemonde.fr/societe/article/2007/01/16/nicolas-sarkozy-battrait-segolene-royal-au-second-tour-selon-un-sondage_856143_3224.html

> *D'après un sondage IFOP pour Fiducial et LCI, si François Bayrou était au second tour face à Nicolas Sarkozy ou Ségolène Royal, il l'emporterait. Le candidat de l'UDF obtiendrait 52 % des voix face au candidat de l'UMP et 54 % face à la candidate socialiste.*
>
> *Encore faut-il que M. Bayrou arrive à passer le cap du premier tour. Selon le même sondage, il reste en troisième position avec 16 % des intentions de vote (+ 3,5 % des voix par rapport au sondage effectué un mois plus tôt), derrière Ségolène Royal (25,5 %, - 2,5 %) et Nicolas Sarkozy (32 %, - 0,5 %).*

- Donc François Bayrou aurait gagné face à n'importe quel candidat à l'élection présidentielle
- François Bayrou était le gagnant de Condorcet de l'élection présidentielle 2007
- « Encore faut-il que M. Bayrou arrive à passer le cap du premier tour. »

IV. Caractérisation des méthodes de vote

Problème

Une fonction SWF f associe à un profil de préférences indicielles (préordre total) une préférence sociale (préordre total) :

$$f: \ (\leq_1, \ldots, \leq n) \mapsto \leq^P$$

- *Question :* Quelles sont les *bonnes* fonctions de choix social (la meilleure) ?
- On ne peut pas étudier individuellement *toutes* ces règles
- Mais beaucoup d'entre elles ne seront jamais satisfaisantes comme fonctions de choix social, par ex. :
  - la fonction qui met toujours le candidat a en première position
  - la fonction qui choisit toujours les préférences de l'individu i font parties des fonctions définissables
- On peut donc réduire le champ d'études pour n'étudier que les fonctions qui vérifient un minimum de *propriétés* (aka *postulats*) *de rationalité* (ex. Condorcet cohérence, monotonie, incitation à la participation, etc.)

IV. Caractérisation des méthodes de vote

Propriétés

- *Universalité*. La fonction de choix social doit toujours avoir un résultat, quelles que soient les préférences des individus
- *Unanimité*. Si tous les individus du profil P préfèrent un candidat a à un candidat b, alors la règle de choix social doit préférer le candidat a au candidat b :

$$\text{si } \forall i \in N \; a >_i b \text{ alors } a >^P b$$

- *Indépendance des Alternatives Non Pertinentes (Non Disponibles)*. Si la restriction de deux profils P et P' à un agenda X sont identiques, alors les choix faits pour cet agenda par la règle de choix social doivent être les mêmes :

$$\forall a, b \in X \; \forall i \in N, \text{ si } a \geq_i b \Leftrightarrow a \geq_i' b, \text{ alors } a \geq^P b \text{ ssi } a \geq^{P'} b$$

- *Absence de Dictateur*. La règle de choix social n'obéit pas à un individu (dictateur) :

$$\nexists i \in N \text{ t.q. } \forall a, b \in X \text{ si } a >_i b \text{ alors } \text{ a >\^{}P b}$$

IV. Caractérisation des méthodes de vote

Théorème d'impossibilité d'Arrow [Arrow, 1951]

Énoncé

> *Aucune fonction de choix social ne satisfait l'Universalité, l'Unanimité l'Indépendance des Alternatives Non-Disponibles et l'Absence de Dictateur.*

Kenneth Arrow (1921-2017)

Prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel 1994

IV. Caractérisation des méthodes de vote

Échapper au théorème d'Arrow ?

Possibilité d'affaiblir une des conditions :

- **Universalité** : la règle de choix social n'est définie que pour certains profils (exemple : *single-peaked preferences*)
- **Transitivité** : on peut ne demander la transitivité que pour la partie stricte de la relation de préférence. Voire ne demander que l'absence de cycles (Oligarchies, Droit de veto)
- **Indépendance des Alternatives Non-Disponibles** :
  - Pourquoi le résultat dépendrait-il des absents ?
  - Intensité des préférences
  - Comparaison Interpersonnelle des utilités

Toute règle de choix social viole au moins une de ces propriétés

⇒ Nécessité d'une **analyse de la méthode choisie**

IV. Caractérisation des méthodes de vote

Single-Peaked preferences (préférences à pic simple) et électeur médian

Définition

- Supposons que tous les candidats peuvent être ordonnés strictement, nommons alors les candidats suivant leur position $A_1, A_2, \ldots A_n$
- On dit que les individus on des préférences à pic simple (*single-peaked preferences*) si chaque individu *i* :
  - a un candidat préféré $top(i) = A_k$
  - pour deux candidats A_x, A_y avec $k < x < y$, alors $A_k >_i A_x >_i A_y$
  - pour deux candidats A_x, A_y avec $k > x > y$, alors $A_k >_i A_x >_i A_y$

IV. Caractérisation des méthodes de vote

Méthode de l'électeur médian

- La méthode de l'*électeur médian* choisit comme résultat de l'élection le candidat préféré de l'électeur médian, c'est-à-dire de l'électeur qui a autant d'électeurs qui ont choisi un candidat supérieur (pour l'ordre strict sur les candidats) que d'électeurs qui ont choisi un candidat inférieur

Propriétés

- Sur des préférences à pic simple, la méthode de l'électeur médian donne le gagnant de Condorcet (théorème de l'électeur médian)
- Sur des préférences à pic simple, la méthode de l'électeur médian satisfait l'Unanimité, l'Indépendance des Alternatives Non-Disponibles et l'Absence de Dictateur

Problème

Les préférences sont "rarement" à pic simple…

V. Pour conclure

Théorème du jury de Condorcet

Problème

On considère 2 options ω et ω^*. ω^* est la réponse correcte.

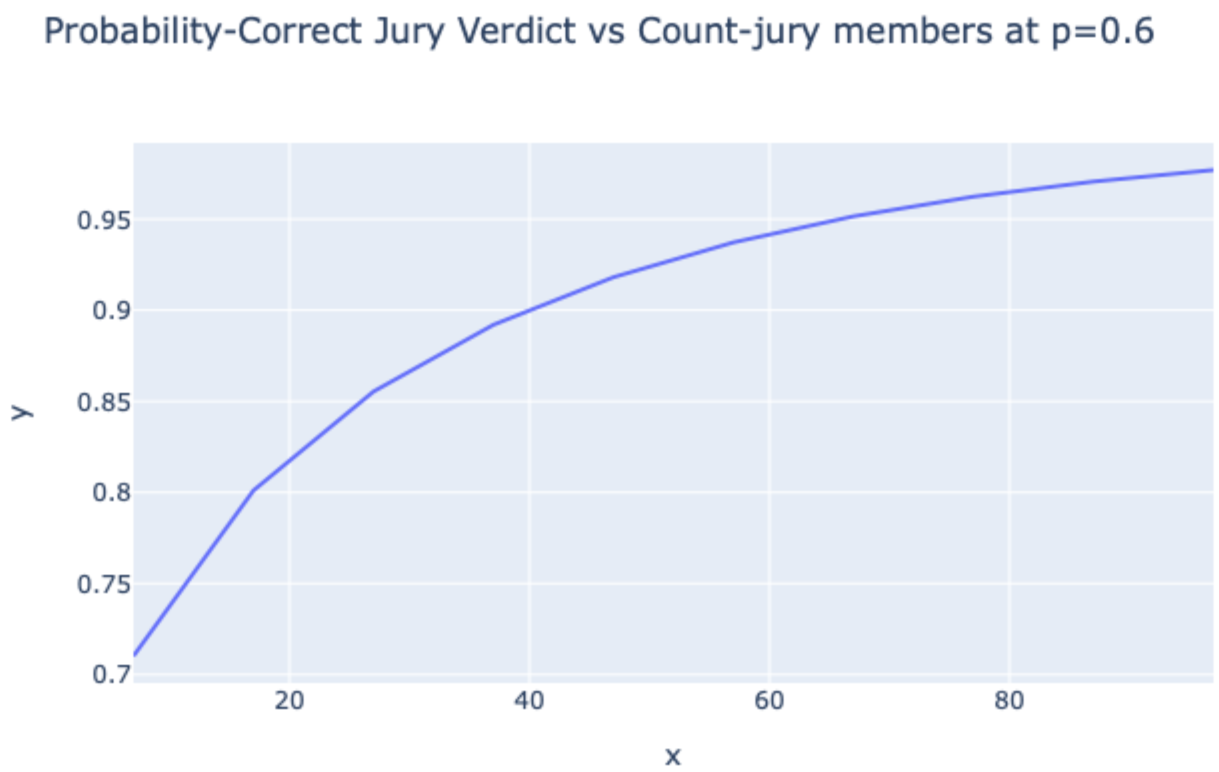
- Soit $f(i)$ la réponse du membre du jury i
- Chaque membre du jury a une probabilité d'erreur p
- Les membres du jury sont indépendants
- La probabilité d'erreur (p) est la même pour tous les membres du jury
- Soit $Maj(a_1, \ldots, a_n)$ la fonction de majorité sur les a_i

Théorème du Jury de Condorcet [1785]. Si la probabilité individuelle d'erreur p est strictement inférieure à 1/2 alors

$$lim_{n \to \infty} p(\{Maj(f(1), \ldots, f(n)) = \omega^*\}) = 1$$

V. Pour conclure

- $p(\{Maj(f(1),\ldots,f(n))=\omega^*\}) = \sum_{i\leq n/2}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$



Citation conclusive

> *“Democracy is the worst form of government, except for all the others.” — Winston S. Churchill*

À propos...

Information	Valeur
Auteur	Sylvain Lagrue (sylvain.lagrue@utc.fr)
Licence	Creative Common CC BY-SA 4.0
Version document	1.4.0

Remerciement : ce cours est issu de celui de Sébastien Konieczny (konieczny@cril.fr), avec l'aimable autorisation de celui-ci.