IA04 – Systèmes Multi-Agents

Modélisation logique et dynamique des croyances des agents

Sylvain Lagrue

sylvain.lagrue@hds.utc.fr

I. Introduction

Croyances des agents

- Des agents évolués ont des *buts* (et *des préférences*) qui dépendent de leurs *croyances* sur le monde
- Ils sont capables de mettre à jour leurs buts en fonction de l'*évolution* de leurs croyances (de leur *dynamique*)
- Ils peuvent même avoir des croyances sur les autres agents (voire des croyances sur les croyances des autres agents)
- On ne peut pas mélanger facilement buts et croyances ! **Ex :** but = {Clef récupérée, Porte Ouverte} ; croyances = {Si Clef récupérée alors Porte Ouverte}

Quelques dichotomies

- Buts (l'état du monde que l'agent cherche à atteindre) ≠ Croyances (ce que l'agent sait sur le monde)
- Connaissances (qui ne peuvent pas être remises en question) ≠ Croyances (qui peuvent être remises en question)

I. Introduction

Objectif du cours

- *Représentation logique* des croyances d'un agent
- *Dynamique de ces croyances* : comment évoluent les croyances d'un agent à l'arrivée d'une nouvelle information plus sûre (plus récente, venant d'une source plus fiable, issue d'un calcul plus long, etc.) ?

Quelques opérations

- *Révision* de croyances
- *Fusion* de croyances

Mais aussi : *Mise à jour*, expansion, contraction, confluence, amélioration, révision itérée, extrapolation, etc.

I. Introduction

Plan du cours

1. Introduction
2. Raisonnement logique
    - Conséquences logiques
    - Logique propositionnelle
3. Dynamique des croyances

II. Raisonnement logique (conséquences)

Le raisonnement

$$A \Rightarrow B$$

- A : prémisse(s)
- B: conséquence(s)
- **Déduction** : à partir de la cause et de la règle, trouver les conséquences
- **Abduction** : à partir de la règle et des conséquences, trouver les causes
- **Induction** : à partir des causes et des conséquences, trouver la règle

Quelques remarques

- Seule la déduction est valide (si l'on accepte la règle et ses prémisses, les conclusions sont toujours vraies)
- Il existe aussi le raisonnement par cas, raisonnement plausible, raisonnement par analogie, raisonnement contrefactuel, etc.
- La logique modélise la déduction via les opérations de conséquences logiques

II. Raisonnement logique (conséquences)

Opération de conséquence [Tarski 1930]

Soit L un langage construit sur un ensemble d'atomes $\mathcal{A} = \{a, b, c, \ldots\}$ et les connecteurs usuels $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$. $\bot$ dénote la contradiction et $\top$ la tautologie.

Une opération de conséquence sur un langage L est une fonction $Cn : 2^L \rightarrow 2^L$ vérifiant les conditions suivantes :

- *(inclusion)* $K \subseteq Cn(K)$
- *(monotonie)* Si $K \subseteq K'$ alors $Cn(K) \subseteq Cn(K')$
- *(idempotence)* $Cn(K)$ = $Cn(Cn(K))$ On supposera également :
- *(supraclassicalité)* $Cn(K)$ contient les conséquences logiques classiques
- *(compacité)* Si $A \in Cn(K)$ alors il existe K' un sous-ensemble fini de K tel que $A \in Cn(K')$
- *(déduction)* $B \in Cn(K \cup \{A\})$ si et seulement si $A \rightarrow B \in Cn(K)$

II. Raisonnement logique (conséquences)

Attitudes épistémiques

Soient une *base de croyances* K représentant les croyances d'un agent, et une information A. Il y a trois attitudes possibles de K envers A :

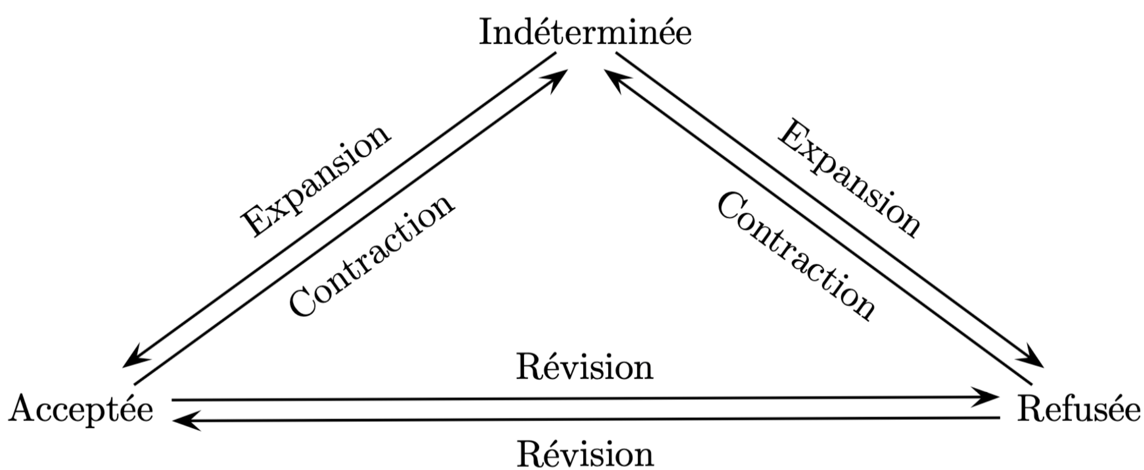
- $A \in Cn(K)$: A est acceptée
- $\neg A \in Cn(K)$: A est refusée
- $A \notin Cn(K)$ et $\neg A \notin K$: A est indéterminée

Loading [MathJax]/jax/output/HTML-CSS/fonts/TeX/Main/Regular/GeometricShapes.js

II. Raisonnement logique (conséquences)

Soit une nouvelle information A, 3 opérations peuvent être considérées par l'agent :

- $K + A$ est l'expansion de K par A
- $K \dot{-} A$ est la contraction de K par A
- $K * A$ est la révision de K par A



- $K * A = (K \dot{-} \neg A) + A$ (Identité de Levi)
- $K \dot{-} A = K \cap (K * \neg A)$ (Identité de Harper)

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Présentation

- Fragment le plus simple de la logique mathématique
- Issue des travaux de Georges Boole (1815-1864) et d'Auguste de Morgan (1806-1871)
- Possède de bonnes propriétés
- Possède des moteurs (solveurs) efficaces

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Le langage

- $V_S = \{a, b, \ldots, p, q, \ldots\}$ est un ensemble fini de variables propositionnelles
- $V_C = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \top, \bot\}$ est un ensemble de connecteurs (resp. d'arité 1, 2, 2, 2, 2, 0, 0)

Remarque : les connecteurs $\neg$ et $\rightarrow$ forment un *système complet* (tous les autres peuvent être définis à partir de ceux-ci).

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Formules propositionnelles (bien formées)

1. Tout élément de V_S est une formule
2. Si F est une formule, alors $\neg F$ est une formule
3. Si F et G sont des formules alors $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ et $(F \leftrightarrow G)$ sont des formules
4. $\top$ et $\bot$ sont des formules
5. Toute formule s'obtient en appliquant un nombre fini de ces règles
6. Il n'existe pas d'autre moyen de créer une formule

Priorité des opérateurs

Pour limiter les parenthèses, on peut utiliser les règles de priorité suivantes :

$$\neg > \wedge > \vee > \rightarrow, \leftrightarrow$$

Exemples :

- $\neg a \vee b \rightarrow c$ est équivalent à $(((\neg a) \vee b) \rightarrow c)$
- $\neg a \leftrightarrow b \rightarrow c$ n'est pas une formule bien formée (pas de priorité droite/gauche)

Loading [MathJax]/jax/output/HTML-CSS/fonts/TeX/Main/Regular/GeometricShapes.js

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Théorie de la preuve

Schéma d'axiomes (système hilbertien)

- $A \to (B \to A)$
- $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
- $A \to (B \to A \land B)$
- $(A \land B) \to A$
- $(A \land B) \to B$
- $A \to A \lor B$
- $B \to A \lor B$
- $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$
- $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
- $\neg\neg A \to A$
- $\neg \perp$

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Règle de substitution

Les A, B et C peuvent être remplacés par n'importe quelle formule

Règle d'inférence, le *Modus Ponens*

$$\frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$$

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Définition : la *déduction* (ou preuve) d'une formule A à partir d'hypothèses $H_1, \ldots, H_m$ (notée $H_1, \ldots, H_m \vdash A$) est une liste finie de formules $(A_1, \ldots, A_n)$ tel que :

- $A_n = A$
- pour $i = 1, \ldots, n$, la formule A_i est
  - soit un axiome
  - soit égale à une des hypothèses H_j
  - soit obtenue par application d'une règle d'inférence à des prémisses précédant A_i dans la liste

Un *théorème* est une formule toujours vraie (notée $\vdash A$), c.-à.-d. déductible sans hypothèse

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Autre schéma d'axiomes

- $Axiome\, 1:\ A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- $Axiome\, 2:\ (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- $Axiome\, 3:\ (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Exemple

Montrons : $\vdash A \to A$

A1 : $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (Axiome 2)

A2 : en substituant $A \to A$ à B et A à C on obtient

$$\vdash (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$$

A3 : $\vdash A \to (B \to A)$ (Axiome 1)

A4 : en substituant $A \to A$ à B dans 3 on obtient

$$\vdash A \to ((A \to A) \to A)$$

A5 : modus ponens entre 4 et 2 permet d'obtenir

$$\vdash (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$$

A6 : en substituant A à B dans l'axiome 1 on obtient :

$$\vdash A \to (A \to A)$$

A7 : modus ponens entre 5 et 6

$$\vdash A \to A$$

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Sémantique

Objectif : donner des valeurs de vérité aux formules

- **{V, F}** ou **{0, 1}**

Interprétation

Définition : une interprétation ω est une application de V_S dans $\{V, F\}$ qui associe à chaque proposition la valeur V ou F On notera Ω l'ensemble des interprétations possibles définies sur le langage.

(si $n = |V_S|$, on a $|\Omega| = 2^n$)

Exemple :

- $V_S = \{a, b, c\}$
- $\omega_0(a) = F$
- $\omega_0(b) = F$
- $\omega_0(c) = F$

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Valuation

Définition : Soit φ une formule bien formée et $\omega \in \Omega$, la valuation de φ pour ω (notée Val(φ,ω)) est telle que :

- si φ est une proposition, alors Val(φ,ω) = ω(φ) ;
- Val(⊤,ω) = V et Val(⊥,ω) = F ;
- si φ est de la forme ¬A (resp. A ∧ B , A∨B , A→B , A↔B), alors appliquer récursivement la table de vérité suivante.

A	**B**	**¬A**	**A∧B**	**A∨B**	**A→B**	**A↔B**
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V

Remarque : on est sûr que la valuation se termine, car à chaque étape un connecteur est résolu.

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Exemple

- ω = \{a,b,¬c\}
- $\varphi = \neg(a \lor (b \to \neg c))$
- $Val(\varphi,\omega) = F$

Loading [MathJax]/jax/output/HTML-CSS/fonts/TeX/Main/Regular/GeometricShapes.js

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

D'autres définitions...

- ω **satisfait** φ, noté $\omega \models \varphi$ ssi $V(\varphi,\omega) = V$. On dit alors que ω est un **modèle** de φ.
- L'ensemble des modèles de φ est noté $\mathrm{Mod}(\varphi)$, c.-à-d. :

$$\mathrm{Mod}(\varphi) = \{ \omega \in \Omega : \omega \models \varphi \}$$

- ω **falsifie** φ, noté $\omega \not\models \varphi$ ssi $V(\varphi,\omega) = F$. On dit alors que ω est un **contre-modèle** de φ.

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Une formule propositionnelle φ est dite :

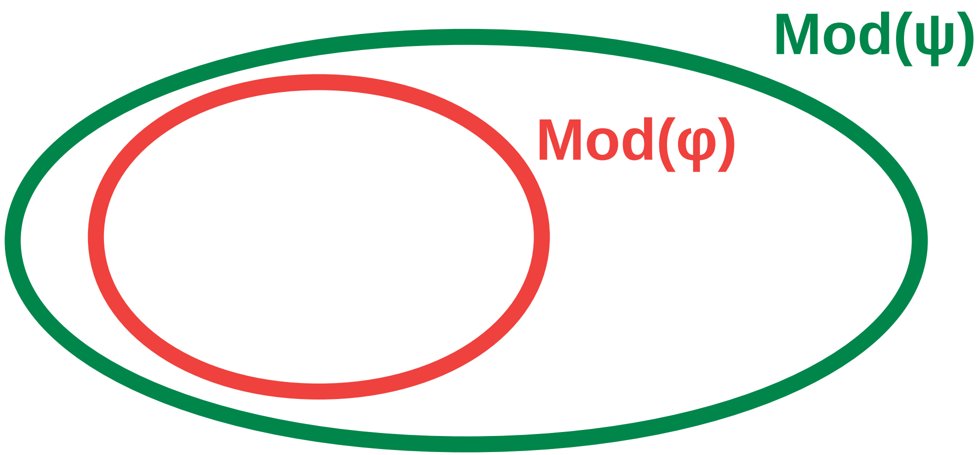
- **valide** (noté $\models \varphi$) ssi pour toute interprétation $\omega \in \Omega$ on a $\omega \models \varphi$. Dans ce cas φ est également appelé **tautologie** ;
- **contradictoire** ssi pour toute interprétation $\omega \in \Omega$ on a $\omega \not\models \varphi$;
- **satisfiable** ssi elle n'est pas contradictoire ;
- **contingente** ssi il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\omega \models \varphi$ et il existe $\omega' \in \Omega$ tel que $\omega' \not\models \varphi$.

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Conséquence logique

Définition : une formule ψ est dite **conséquence logique** de φ (noté $\varphi \vDash \psi$)
ssi quel que soit $\omega \in \Omega$, $\omega \vDash \varphi$ implique $\omega \vDash \psi$

En d'autres termes : $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi)$



Loading [MathJax]/jax/output/HTML-CSS/fonts/TeX/Main/Regular/GeometricShapes.js

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Par extension : $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ ssi pour tout $\omega \in \Omega$ tel que quel que soit φ_i, $\omega \models \varphi_i$, on a $\omega \models \psi$

Exemples :

- $a \models a \vee b$
- $a, a \to b \models b$
- $\bot \models a \to b \vee c$

Remarques

- On peut tout déduire de la contradiction…

  > *Principe d'explosion : ex falso quodlibet.*

- Équivalence logique $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ ssi $\varphi_1 \models \varphi_2$ et $\varphi_2 \models \varphi_1$
- $\models \varphi$ est une écriture raccourcie de $\top \models \varphi$

Loading [MathJax]/jax/output/HTML-CSS/fonts/TeX/Main/Regular/GeometricShapes.js

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Propriétés fondamentales, théorèmes et corollaires

Théorème de la déduction :

$\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vDash \psi\ \textrm{ ssi }\ \varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1} \vDash \varphi_n \to \psi$ **Corollaire 1 :**

$\varphi \vDash \psi \textrm{ ssi } \vDash \varphi \to \psi$ L'implication matérielle et la déduction logique coïncident !

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Corollaire 2 :

$\varphi_1,\dots,\varphi_n \models \psi\ \textrm{ ssi }\ \varphi_1\land\dots\land\varphi_n \models \psi$ En particulier si les φ_i sont des littéraux…

Corollaire 3 :

$\varphi_1,\dots,\varphi_n \models \psi\ \textrm{ ssi }\ \varphi_1,\dots,\varphi_n, \neg\psi \models \bot$ C'est le raisonnement par l'absurde : la conséquence logique peut se ramener à un simple test de satisfiabilité !

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Propriété 1. (de complétude) Le calcul propositionnel est fortement complet, c'est-à-dire :

si $E \models A$ alors $E \vdash A$

Corollaire. Le calcul propositionnel est faiblement complet :

si $\models A$ alors $\vdash A$

Proposition 2. (d'adéquation) Le calcul propositionnel est adéquat :

si $\vdash A$ alors $\models A$

II. Raisonnement logique (logique propositionnelle)

Proposition 3. (de consistance) Le calcul propositionnel est cohérent :

il n'existe pas de formule A telle que $\vdash A$ et $\vdash \neg A$

Remarque : $Cn(K) = \{F : K\vdash F \}$

III. Dynamique des croyances

Opérateurs de révision

Principes

> *Comment intégrer une nouvelle information plus sûre, mais potentiellement incompatible avec les croyances actuelles de l'agent ?*

- Primauté de la nouvelle information
- Principe de cohérence
- Principe de *changement minimal*

Exemple introductif

Il y a des pommes ou des bananes dans un panier, mais pas les 2. J'apprends qu'il n'y a pas de pomme. Que puis-je en déduire ?

- $\varphi = (\neg p \land b) \lor (p \land \neg b)$
- $\mu = \neg p$
- φ ∘ μ \equiv ¬p ∧ b

III. Dynamique des croyances

Révision en logique propositionnelle

- φ est une base de croyance propositionnelle (c.-à-d. un ensemble de formules ou, de manière équivalente, la conjonction de ces formules)
- μ est formule propositionnelle une nouvelle information considérée plus sûre
- $\varphi \circ \mu$ est une formule propositionnelle, résultat de la révision de φ par μ

III. Dynamique des croyances

Postulats de Katsuno Mendelzon [KM 1991]

Réécriture en logique propositionnelle des postulats AGM (Alchourrón, Gärdenfors, and Makinson)

- (R1) $\varphi \circ \mu \vdash \mu$
- (R2) Si $\varphi \wedge \mu$ est cohérent alors $\varphi \circ \mu \equiv \varphi \wedge \mu$
- (R3) Si μ est cohérent alors $\varphi \circ \mu$ est cohérent
- (R4) Si φ_1 ≡ φ_2 et μ_1 ≡ μ_2 alors φ_1 ◦μ1 ≡ φ_2 ◦ μ_2
- (R5) $(\varphi \circ \mu) \wedge \mu' \vdash \varphi \circ (\mu \wedge \mu')$
- (R6) Si $(\varphi \circ \mu) \wedge \mu'$ est cohérent alors $\varphi \circ (\mu \wedge \mu') \vdash (\varphi \circ \mu) \wedge \mu'$

III. Dynamique des croyances

Exemple : l'opérateur de Dalal $\circ_D$

- Basé sur la distance de Hamming entre interprétations $d_H(\omega, \omega') = |\{x \in V_S \mid \omega(x) \neq \omega'(x)\}|$
- On peut généraliser à la distance d'une interprétation à une formule : $d(\omega, \varphi) = \min_{\omega' \models \varphi} d(\omega, \omega')$
- Soit une nouvelle information μ, le résultat de la révision $\circ_D$ est une formule dont les modèles minimisent la distance de Hamming à la base φ

Propriété : l'opérateur $\circ_D$ de Dalal est un opérateur de révision KM (c.-à-d. il vérifie les postulats R1-R6)

III. Dynamique des croyances

Définition : Un assignement fidèle (*faithful assignment*) est une fonction qui associe à chaque base de croyances φ un préordre $\leq_\varphi$ sur les interprétations tel que :

- Si $\omega \models \varphi$ et $\omega' \models \varphi$, alors $\omega \simeq_\varphi \omega'$
- Si $\omega \models \varphi$ et $\omega' \not\models \varphi$, alors $\omega <_\varphi \omega'$
- Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, alors $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$

Théorème (de représentation) : [Katsuno Mendelzon 1991] Un opérateur de révision $\circ$ satisfait les postulats (R1)-(R6) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base de croyances φ un préordre total $\leq_\varphi$ tel que : $Mod(\varphi \circ \mu) = \min(Mod(\mu), \leq_\varphi)$

III. Dynamique des croyances

Fusion de croyances sous contraintes

Principe

- n agents ont leur vision du monde
- On suppose qu'ils partagent le même vocabulaire
- Comment mettre en commun ces informations ?
- Comment mettre en commun ces informations en respectant une contrainte d'intégrité μ ?

III. Dynamique des croyances

Notations

Profil E de croyance des agents (multi-ensemble de formules propositionnelles) :

$E = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

Union des mutli-ensembles :

$E_1 \sqcup E_2$

Résultats de la fusion sous contrainte (une formule propositionnelle) :

$\triangle_\mu(E)$

avec μ une formule propositionnelle

III. Dynamique des croyances

Postulats KP [Konieczny, Pino Pérez 2002]

- (IC0) $\triangle_\mu(E) \vdash \mu$
- (IC1) Si μ est cohérent, alors $\triangle_\mu(E)$ est cohérent
- (IC2) Si $\bigwedge E$ est cohérent avec μ, alors $\triangle_\mu(E) = \bigwedge E \wedge \mu$
- (IC3) Si $E1 \equiv E2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\triangle_{\mu_1}(E1) \equiv \triangle_{\mu2}(E2)$
- (IC4) Si $\varphi \vdash \mu$ et $\varphi' \vdash \mu$, alors $\triangle_\mu(\{\varphi,\varphi'\}) \wedge \varphi \not\vdash \bot$ si et seulement si $\triangle_\mu(\{\varphi,\varphi'\}) \wedge \varphi' \not\vdash \bot$
- (IC5) $\triangle_\mu(E1) \wedge \triangle_\mu(E2) \vdash \triangle_\mu(E1 \sqcup E2)$
- (IC6) Si $\triangle_\mu(E1) \wedge \triangle_\mu(E2)$ est cohérent, alors $\triangle\mu(E1 \sqcup E2) \vdash \triangle\mu(E1) \wedge \triangle\mu(E2)$
- (IC7) $\triangle_{\mu_1} (E) \wedge \mu_2 \vdash \triangle\mu_{_1\wedge\mu_2} (E)$
- (IC8) Si $\triangle_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ est cohérent, alors $\triangle_{\mu_1\wedge\mu_2} (E) \vdash \triangle\mu_1 (E)$

Remarque : Si on se restreint à 1 seul agent, on retrouve la révision !

III. Dynamique des croyances

Opérateurs basés sur des distances

Idée :

- On utilise une distance (ex. de Hamming) entre les croyances individuelles et la contrainte
- On agrège ces distances en utilisant différents agrégateurs ($+$, $\max$, leximax, …)

$\omega \leq^{d_x}_E \omega' \textrm{ ssi } d_x(\omega, E) \leq d_x(\omega', E)$

III. Dynamique des croyances

Exemple

- $\mu = ((S \land T) \lor (S \land P) \lor (T \land P)) \rightarrow I$
- $\varphi_1 = \varphi_2 = S \land T \land P$
- $\varphi_3 = \neg S \land \neg T \land \neg P \land \neg I$
- $\varphi_4 = T \land P \land \neg I$
- $\mathrm{mod}(\varphi_1) = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\}$
- $\mathrm{mod}(\varphi_3) = \{(0, 0, 0, 0)\}$
- $\mathrm{mod}(\varphi_4) = \{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\}$

III. Dynamique des croyances

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	$d_{d_H,Max}$	$d_{d_H,\Sigma}$	d_{d_H,Σ^2}	$d_{d_H,GMax}$
$(0,0,0,0)$	3	3	0	2	3	8	22	(3,3,2,0)
$(0,0,0,1)$	3	3	1	3	3	10	28	(3,3,3,1)
$(0,0,1,0)$	2	2	1	1	2	6	10	(2,2,1,1)
$(0,0,1,1)$	2	2	2	2	2	8	16	(2,2,2,2)
$(0,1,0,0)$	2	2	1	1	2	6	10	(2,2,1,1)
$(0,1,0,1)$	2	2	2	2	2	8	16	(2,2,2,2)
$(0,1,1,1)$	1	1	3	1	3	6	12	(3,1,1,1)
$(1,0,0,0)$	2	2	1	2	2	7	13	(2,2,2,1)
$(1,0,0,1)$	2	2	2	3	3	9	21	(3,2,2,2)
$(1,0,1,1)$	1	1	3	2	2	7	15	(3,2,1,1)
$(1,1,0,1)$	1	1	3	2	3	7	15	(3,2,1,1)
$(1,1,1,1)$	0	0	4	1	4	5	17	(4,1,0,0)

Conclusion

- 2 opérations présentés (*révision*, *fusion*), mais il en existe d'autres…
- Des *postulats de rationalités* permettent de classer les différents opérateurs pouvant être proposés
- Il existe des *théorèmes de représentation* permettant de faire le lien entre la syntaxe et la sémantique des opérations
- De nombreuses extensions à des *états épistémiques* plus complexes (ordre sur des formules, distributions de possibilités, fonctions ordinales, etc.)

Pour aller plus loin...

Opérateurs de mise à jour

Exemple introductif

Il y a des pommes ou des bananes dans un panier, mais pas les 2. J'apprends qu'il n'y a pas de pomme. Que puis-je en déduire ?

- $\varphi = (\neg p \wedge b) \vee (p \wedge \neg b)$
- $\mu = \neg p$
- $\varphi \circ \mu \equiv \neg p \wedge b$

Il y a des pommes ou des bananes dans un panier, mais pas les 2. J'apprends qu'on a retiré les pommes s'il y en avait. Que puis-je en déduire ?

- $\varphi = (\neg p \wedge b) \vee (p \wedge \neg b)$
- $\mu = \neg p$
- $\varphi \diamond \mu \equiv \neg p$

On part de la même modélisation logique, mais dans le premier cas, le monde est statique tandis que dans le second, il est dynamique

Postulats de mise à jour

- (U1) $\varphi \diamond \mu \vdash \mu$
- (U2) Si $\varphi \vdash \mu$, alors $\varphi \diamond \mu \equiv \varphi$
- (U3) Si φ et μ sont cohérents alors $\varphi \diamond \mu$ est cohérent
- (U4) Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$ alors $\varphi_1 \diamond \mu_1 \equiv \varphi_2 \diamond \mu_2$
- (U5) $(\varphi \diamond \mu_1) \wedge \mu_2 \vdash \varphi \diamond (\mu_1 \wedge \mu_2)$
- (U6) Si $\varphi \diamond \mu_1 \vdash \mu_2$ et $\varphi \diamond \mu_2 \vdash \mu_1$, alors $\varphi \diamond \mu_1 \equiv \varphi \diamond \mu_2$
- (U7) Si φ est une formule complète, alors $(\varphi \diamond \mu_1) \wedge (\varphi \diamond \mu_2) \vdash \varphi \diamond (\mu_1 \vee \mu_2)$
- (U8) $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \diamond \mu \equiv (\varphi_1 \diamond \mu) \vee (\varphi_2 \diamond \mu)$

Une formule B est complète ssi pour tout A, ou bien $B \rightarrow A$ ou alors $B \rightarrow \neg A$

Théorème de représentation

Théorème [Katsuno Mendelzon 1991] **:** Un opérateur de mise à jour $\diamond$ satisfait les postulats (U1)-(U8) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque interprétation ω un préordre partiel $\leq_\omega$ tel que :

$$mod(\varphi \diamond \mu) = \bigcup_{\omega\models \varphi} min(Mod(\mu), \leq_\omega)$$

Exemple : opérateur PMA

- PMA = Possible Models Approach
- Initialement basée sur une distance ensembliste, mais peut être utilisée avec une distance de Hamming
- On calcule pour chaque modèle de la base