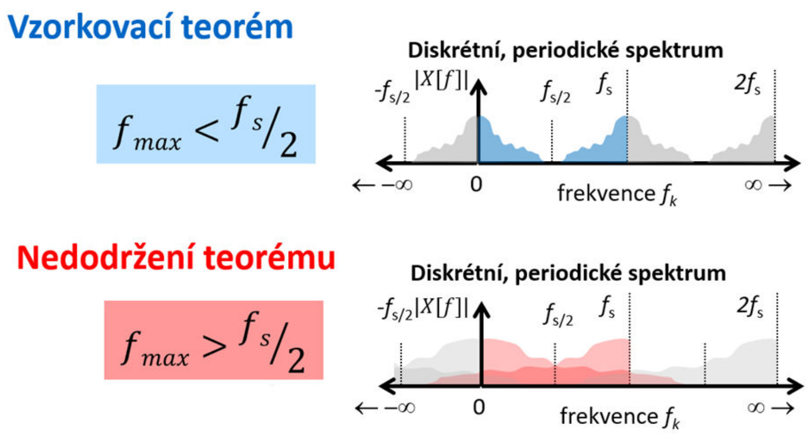
03 Aliasing, filtrace ve spektru

Úvod

Aliasing

V případě nedodržení vzorkovacího teorému při digitalizaci signálu, kdy frekvenční komponenty vzorkovaného signálu $f_{\max} \geq \frac{f_s}{2}$, dojde k nejednoznačnému vzorkování. Harmonická funkce s frekvencí f_k nabývá stejných hodnot v časech vzorkování t_n jako funkce s frekvencí $f_s - f_k$, tj. $x_{f_k}[t_n] = x_{f_s - f_k}[t_n]$. Pokud tedy vzorkovaný signál obsahuje složku o frekvenci $> \frac{f_s}{2}$, přičítá se ke složce $< \frac{f_s}{2}$ a dále se zrcadlí. Tomuto nežádoucímu jevu se říká **aliasing**. V technické praxi je nutno analogový signál před vzorkováním (digitalizací) frekvenčně omezit dolní propustí s mezním kmitočtem $f_0 < \frac{f_s}{2}$. Nedodržení vzorkovacího teorému vede ke zkreslení signálu a jeho nepoužitelnosti.



Pozn.:

- V praxi se většinou volí $f_{\max} \leq \frac{f_s}{3}$ nebo, častěji však výrazně nižšší. Záleží však na mnoha okolneostech, např. na strmosti hardwarového antialiasing filtru před A/D převodníkem.
- Aliasingu se ve speciálních případech využívá úmyslně, např. v radioelektronice, kde vysokofrekvenční signál podvzorkováním dostaneme vlivem aliasingu do nízkofrekvenčního pásma (demodulace).
- Můžete se podívat na video o aliasingu.

Filtrace ve spektru

Filtrace je základní metodou úravy signálu. Filtrací můžeme ponechat/zesílit určitou část frekvenčního spektra, která pro nás nese užitečnou informaci, nebo naopak potlačit frekvenční složky, které jsou neužitečné a rušivé.

Ačkoli fitlrům budou věnovány samostané přednášky a cvičení později, proncipiálně se bude jednat o techniky, ktyry potlačí nežádoucí frekvenční pásma (dolní, horní, pásmová propust nebo zádrž). Spektrálně se však jedná o potlačení/odstranění frekvenčních složek v signálu.

Nulování spektrálních čar

Ze signálu nejprve spočteme frekvenční spektrum a určíme frekvenční osu, tj. frekvence harmonických složek. Následně nalezneme harmonické složky, které chceme ze signálu odfiltrovat a změníme jejich hodnotu na nulu. Tím se harmonická složka neuplatní (odstraní) při rekonstrukci signálu inverzní Fourierovou transformací. U disrétních signálů anesmíme zapomínat, že se frekvenční složky reálných signálů se ve spktru zrcadlí kolem $\frac{f_s}{2}$. Při nulování harmonických složek f tedy musíme nulovat na obou stranách spektra, tj. $X[f] = 0$ pro f a $f_s - f$.

Výhodou tohoto přístupu je jednoduchost implementace, avšak nevýhod je více. Filtrace nelze provádět v reálném čase a je závislá na počtu vzorků filtrovaného signálu (počet harmonických složek odpovídá počtu vzorků signálu $K = N$), tedy i frekvenčním rozlišení spektra (malé rozlišení pro malé N). Později si ukážeme, že nulování spetrálních čar by odpovídalo idelnímu filtru s nekonečnou strmostí, to ale v časové oblasti vede k dlouhé impulzní odezvě (zvlnění za impulzy, tranzienty, skokokovými změnami). V digitálním zpracování pomocí DFT periodizujeme finitní signál, na začátku a konci signálu tedy dochází k nespojitosti a zvlnění téměř vždy.

Např. v dnešním cvičení budeme filtrovat 50 Hz, resp. úzké pásmo $49 - 51$ Hz. Při malém počtu vzorků, tj. i malém spektrálním rozlišení, nemusíte dokázat filtrovat přes prostou indexaci spektrálních čar `X(f<=49 & f<=51)=0`, protože spektrální čáry vyjdou mimo rozsah diskrétnách harmonických frekvencí.

Obsah

Řešení:

Aliasing

Podvzorkování sinusoidy

Generujte harmonický průběh s pracovním kmitočtem $f_0 = 5$ Hz a fázovým posunem $\phi = \frac{\pi}{4}$ vzorkovaný následujícími vzorkovacími kmitočty f_s (simuljte vzorkování s rozdílnou frekvencí).

- $f_{s1} = \quad 10 \cdot f_0 = \quad 50$ Hz,
- $f_{s2} = \quad 3 \cdot f_0 = \quad 15$ Hz,

- $f_{s3} = 1,2 \cdot f_0 =$ 6 Hz.

Průběh vygenerujte se stejnou délkou $T = 5$ s.

```
t10=... % časová osa pro fs=10*f0
y10=... % signál pro fs=10*f0

t3=... % časová osa pro fs=3*f0
y3=... % signál pro fs=3*f0

t1_2=... % časová osa pro fs=1.2*f0
y1_2=... % signál pro fs=1.2*f0
```

```
f0 = 5;
phi = pi/4;
T = 5;

fs10 = 10*f0
```

```
fs10 =
50
```

```
t10 = 0:1/fs10:T-1/fs10;
y10 = sin(2*pi*f0*t10+phi);
fs3 = 3*f0
```

```
fs3 =
15
```

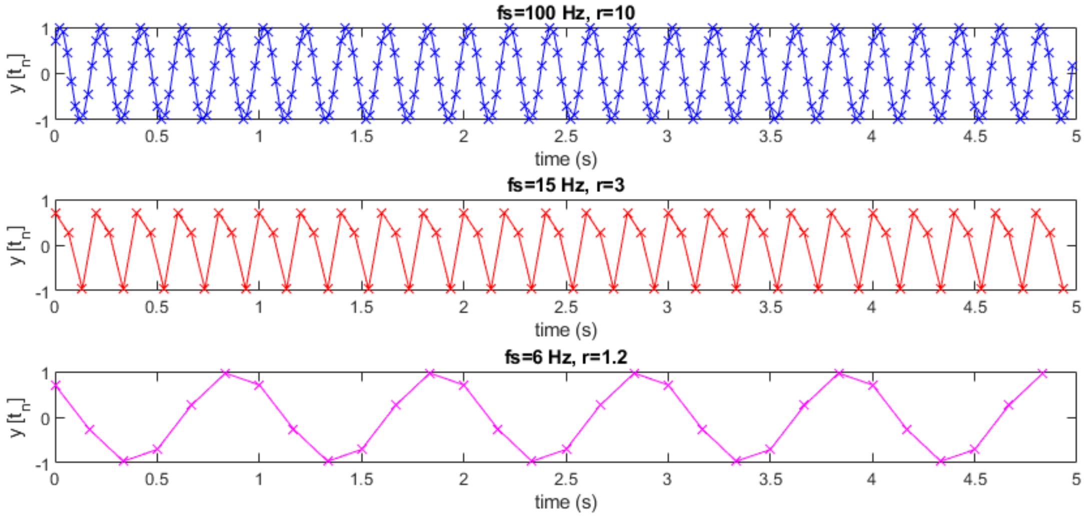
```
t3 = 0:1/fs3:T-1/fs3;
y3 = sin(2*pi*f0*t3+phi);

fs1_2 = 1.2*f0
```

```
fs1_2 =
6
```

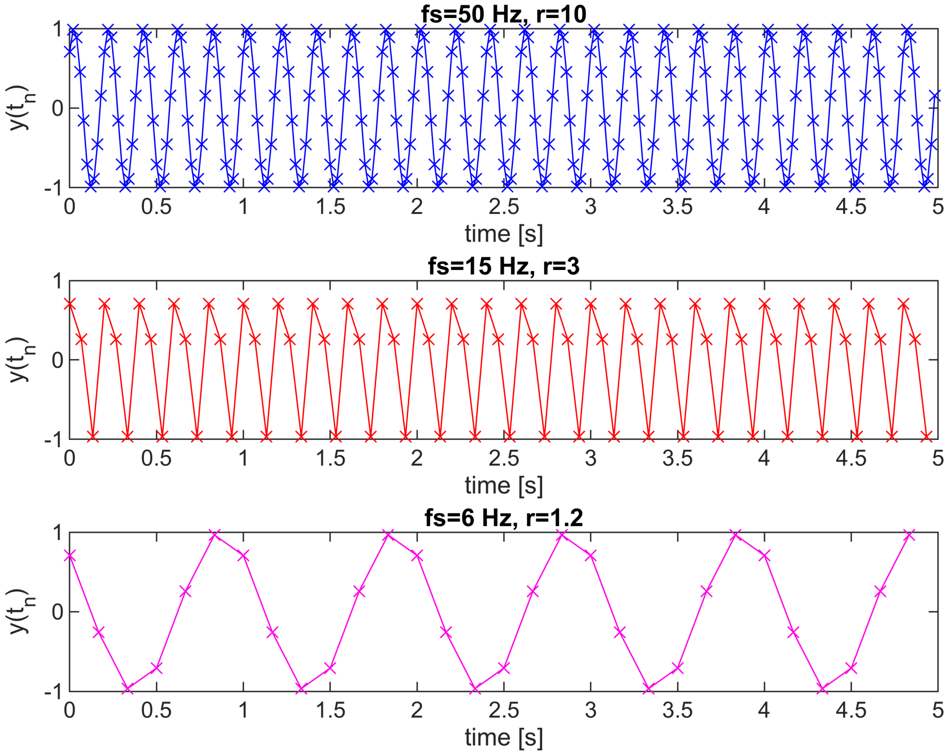
```
t1_2 = 0:1/fs1_2:T-1/fs1_2;
y1_2 = sin(2*pi*f0*t1_2+phi);
```

V subplot 3x1 zobrazte všechny signály, zvýrazněte vzorky symbolem (`'x'`). Popište osy, do titulku vložte hodnoty použitých `fs`. Poměr kmitočtů zobrazte jako `r=fs/fo`.

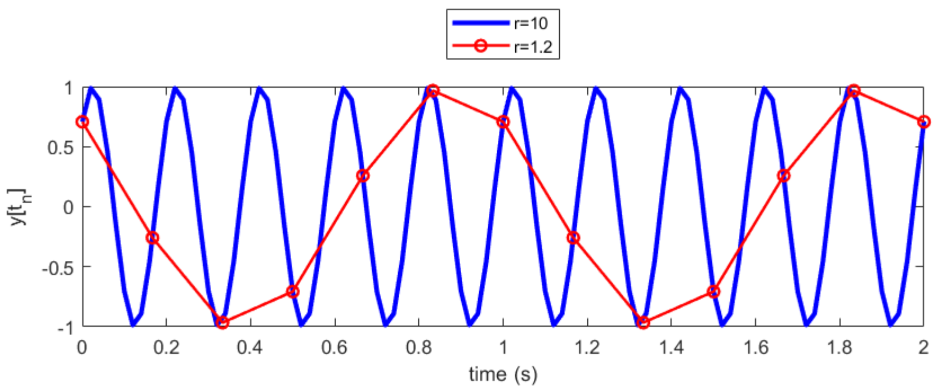
Zobrazte harmonický signál o f_0 pro různá f_s simulující splnění vzorkovacího teorému.



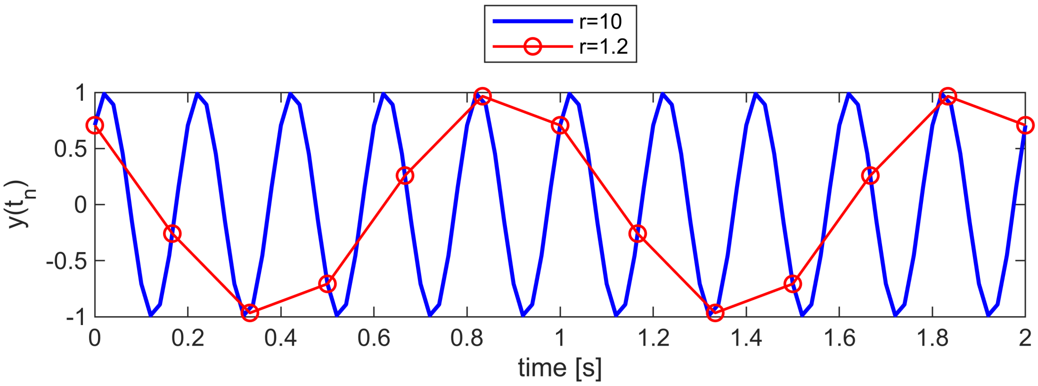

```
figure
subplot(3,1,1)
plot(t10,y10,Marker="x", color="b")
title("fs=50 Hz, r=10")
xlabel("time [s]")
ylabel("y(t_n)")

subplot(3,1,2)
plot(t3,y3, Marker="x", Color="r")
title("fs=15 Hz, r=3")
xlabel("time [s]")
ylabel("y(t_n)")

subplot(3,1,3)
plot(t1_2,y1_2, Marker="x", Color=[1 0 0.9])
title("fs=6 Hz, r=1.2")
xlabel("time [s]")
ylabel("y(t_n)")
```



Zobrazte přes sebe do jednoho grafu průběhy pro r=10 a r=1,2.




```
figure('Position',[0 0 600 200])
idx = t10<=2;
idx2 = t1_2<=2;
plot(t10(idx),y10(idx),"b", LineWidth=1.5)
hold on
plot(t1_2(idx2),y1_2(idx2), Color="r", Marker="o", LineWidth=1)
hold off
legend('r=10','r=1.2',Location='northoutside')
xlabel("time [s]")
ylabel("y(t_n)")
```



Odpovězte na otázky:

- **Pro který případ není splněn vzorkovací kmitočet?**

pro případ kdy se fs = 1.2*f0

- **Pro vygenerovaný harmonický signál s f_0 a vzorkovací kmitočet f_s, který jste napsali v předchozí odpovědi, spočítejte magnitodové spektrum a určete dominantní kmitočet $f_0{}'$ na stupnici 0 až $\frac{f_s}{2}$ Hz (tj. určete z grafu první kmitočet s nejvyšší amplitudou)**

```
N = fs1_2*T;
Y = 1/N*fft(y1_2);
f = linspace(0,fs1_2-fs1_2/N,N);
disp(f(Y>0.1))
```

```
     1     5
```

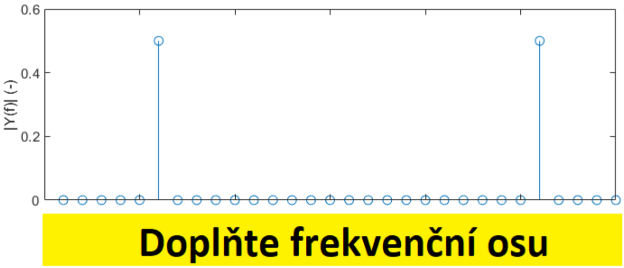
```
disp(abs(Y(f == 1)))
```

```
    0.5000
```

dominantní kmitočet je f_0 = 1Hz s amplitudou 0.5

- **Spočtěte teoreticky frekvenci $f_0{}'$, kam se zrcadlí f_0 při nesplnění vzorkovacího teorému**

$$f_0{}' = \frac{f_s}{2} - \text{abs}\left(\frac{f_s}{2} - f_0\right) = 3 - \text{abs}(3-5) = 3 - 2 = 1$$



Vypočtěte teoreticky hodnotu f_0':

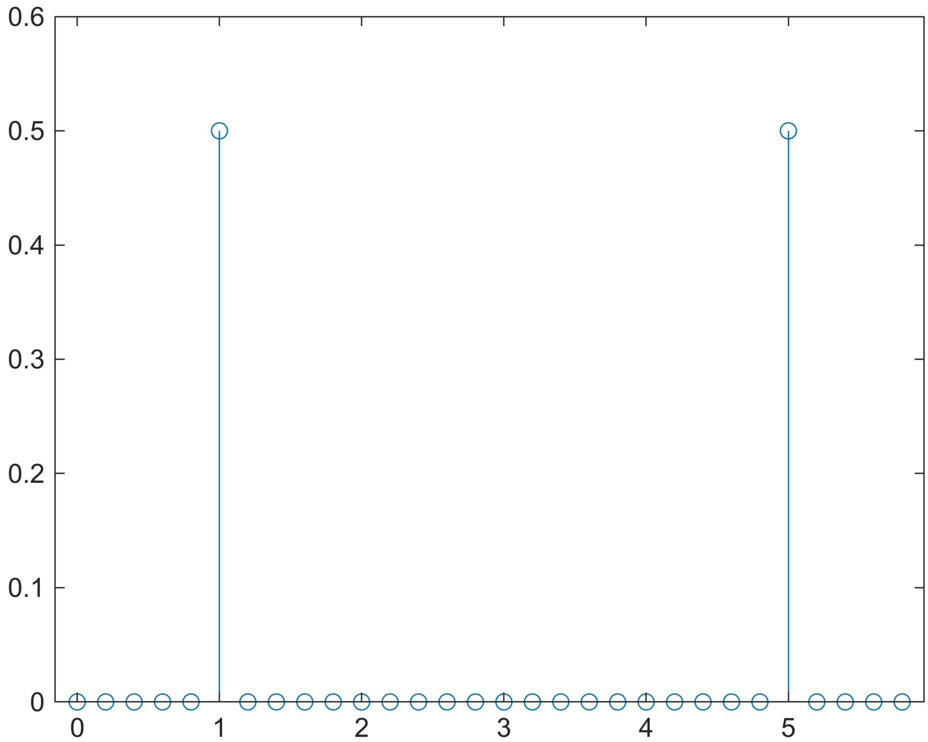
```
N = fs1_2*T;
Y = 1/N*fft(y1_2);
f = linspace(0,fs1_2-fs1_2/N,N);
disp(f(Y>0.1))
```

```
     1     5
```

```
disp(abs(Y(f == 1)))
```

```
    0.5000
```

```
figure
stem(f,abs(Y))
```



Odečtěte ze spektra:

$f_0' =$ **1** **Hz, s amplitudou |Y| =** `0.5`

Filtrace ve spektru

Odstraníme síťové rušení 50±1 Hz a jeho vyšších harmonických složek $m \times (50 \pm 1), m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ve spektru nahradíme odpovídající spektrální čáru nulovou amplitudou $X[f_k] = 0$. Uvědomte si, že musíme nulovat spektrální čáry na obou stranách spektra, tj. f a $f_s - f$. Pro rekonstrukci signálu provedeme inverzní Fourierovu transformaci.

Nejprve si vyčistíme proměnné ve workspace a zavřeme všechny figury:

```
clear all; % vymaže všechny proměné
close all; % zavře všechny figury
```

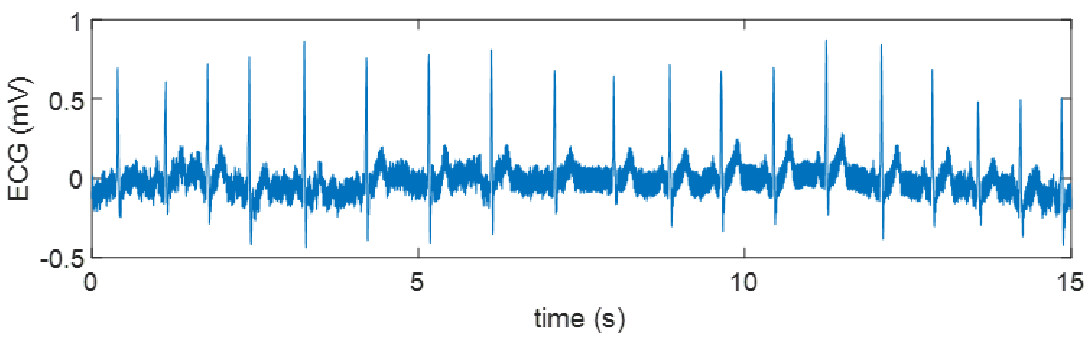
Pomocí funkce `load` si načtěte signál EKG uložený v `.txt` souboru, který obsahuje časovou řadu amplitud.

```
EKG=load('ecg_hum_fs500Hz.txt');
```

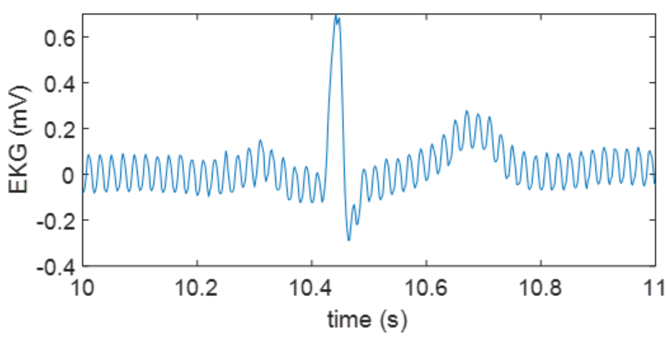
Na rozdíl od kontejneru `.mat`, textový soubor neobsahuje další metadata jako např. informace o vzorkovacím kmitočtu nebo o fyzikálních jednotkách. Vzorkovací kmitočet f_s zde vyčtete z názvu souboru. Prozradím, že měřené jednotky jsou v **mV**.

```
fs=500; % vzorkovací kmitočet
```

Ze znalosti počtu vzorků signálu a vzorkovacího kmitočtu vytvořte časovou osu.



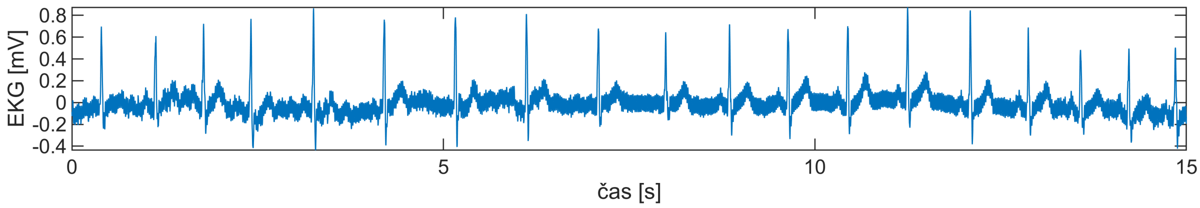
Detail:



EKG signál zobrazuje elektrickou aktivitu srdce. Špičky v signálu (R-špičky) odpovídají kontrakci komor a vypuzení krve. Po přiblížení však vidíme téměř "harmonickou" složku superponovanou na signálu. Jedná se o síťové rušení 50 Hz (např. v USA by byla 60 Hz).

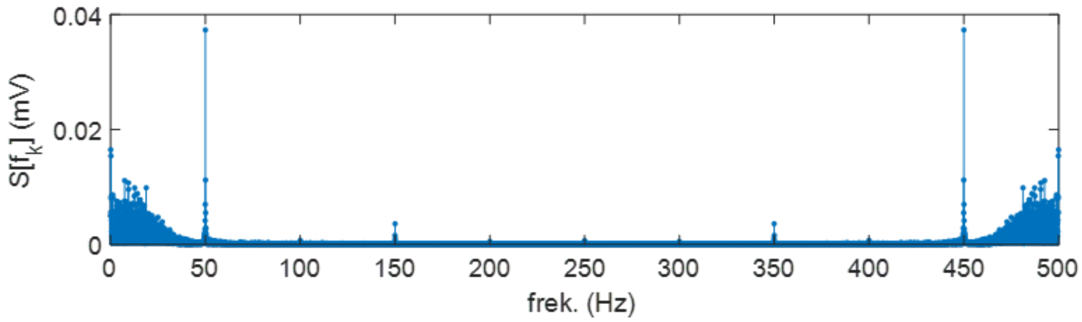
Vykreslete EKG signál do grafu, připravte si figure(1) se subplot 5x1:

```
N=length(EKG);
t= 0:1/fs:N*1/fs-1/fs;       % t=...
figure(1)
set(gcf, 'Position', [0 0 800 700]);
subplot(5,1,1)
plot(t, EKG)
axis tight
xlabel("čas [s]")
ylabel("EKG [mV]")
```



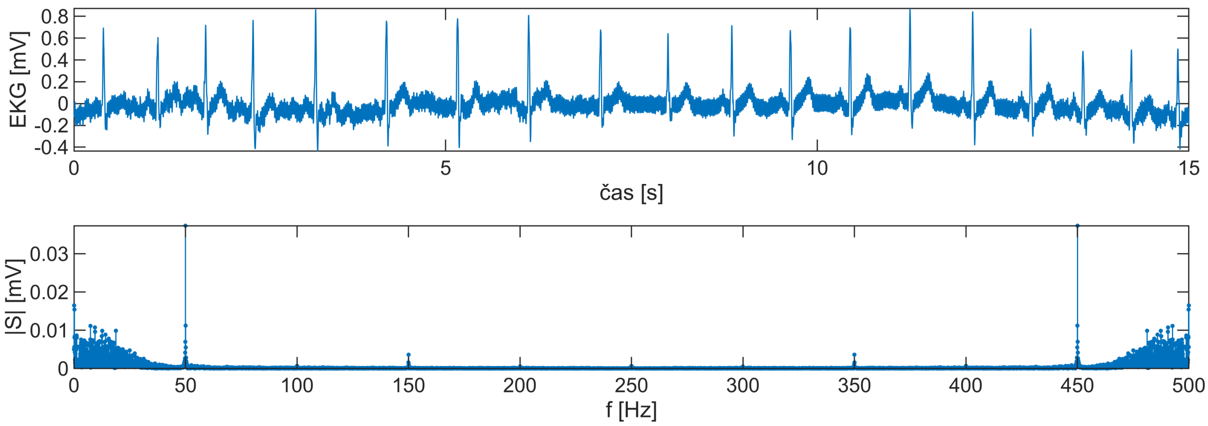
Spočítejte komplexní spektrum EKG signálu, označenou např. $S[f_k]$. Zobrazte absolutní spektrum $|S[f_k]|$, nezapomeňte spektrálním čarám přiřadit odpovídající frekvence f_k (frekvenční osu).

```
% seznamte se s grafem typu stem
stem(x,y,'.')
```



Doplňte:

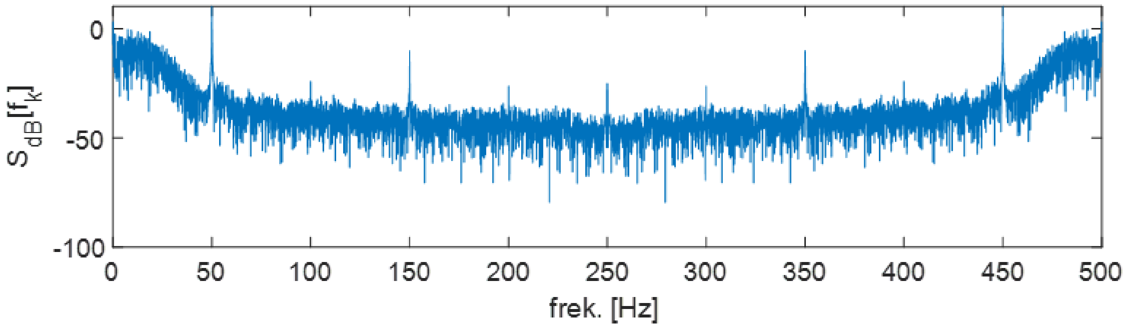
```
S = 1/N*fft(EKG);% S=...; komplexní spektrum
F = linspace(0,fs,N);     % F=...; frekvenční osa
subplot(5,1,2)
set(gcf, 'Position', [0 0 800 700]);
stem(F,abs(S),'.') % zobrazení absolutního spektra
axis tight
xlabel("f [Hz]")
ylabel("|S| [mV]")
```



V absolutním spektru signálu si povšimněte, které frekvence nesou informaci ("nenulové" spektrální čáry). Pro EKG jsou to frekvence mezi 0-45 Hz. Výrazné špičky, zejména pak 50 Hz, méně pak na 100, 150, ... Hz odpovídají síťovému rušení a jeho vyšším harmonickým složkám, které se naindukovalo na kabely vedoucí od snímacích elektrod. Opět si připomeňme, že spektrum se zrcadlí kolem $\frac{f_s}{2}$, tj. zde 250 Hz.

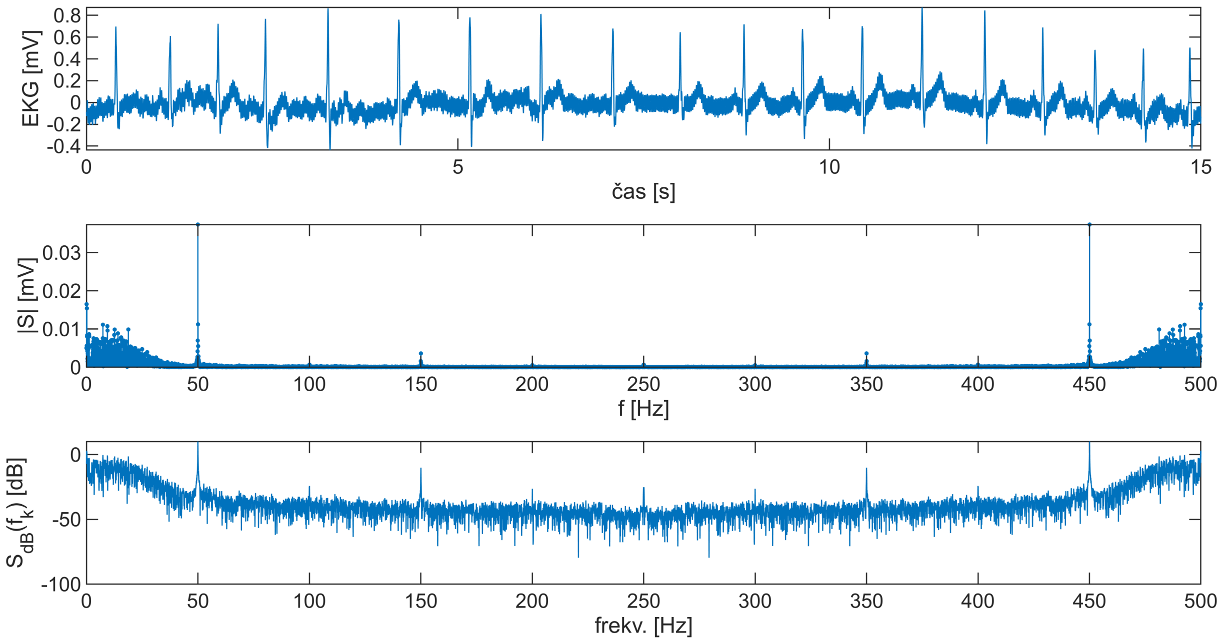
Zobrazte absolutní spektrum v dB. Jelikož hodnoty mV v dB budou nabývat záporných hodnot, funkce `stem` pro zobrazení není vhodná. Spokojíme se se známou funkcí `plot`.

$$X_{\mathrm{dB}}[f_k] = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{N}|X\,[f_k]|^2\right)$$



Doplňte:

```
SdB = 10*log10(1/N*abs(fft(EKG)).^2);        % SdB=... ; absolutní spektrum v dB
subplot(5,1,3)
set(gcf, 'Position', [0 0 800 700]);
plot(F,SdB)
xlabel("frekv. [Hz]")
ylabel("S_{dB}(f_k) [dB]")
```



Logaritmické zobrazení magnitudy odhalí i menší špičky ve spektru, kde je síťové rušení jasně patrné i na 100, 150, 200 a 250 Hz. ,

Nulování spektrálních čar

Vizuálně jsme odhalily přítomnost síťového rušení v signálu (jak v časové rovině, tak i ve spektru). Najděme tedy spektrální čáry odpovídající rušení a odstraňme je z komplexního spektra vynulováním.

```
SN=S; % komplexní spektrum si zkopírujeme do SN, kde provedeme nulování
```

Budeme na frekvenční ose hledat pozici spektrálních čar, které odpovídají hledaným násobkům 50 Hz a okolí ±1 Hz.

```
idxL=find(F>(50-1) & F<(50+1)); % spektrální čáry 'k' pro f=(49 až 51) Hz (L-levá strana spektra <fs/2)
idxR=find(F>(fs-50-1) & F<(fs-50+1)); % spektrální čáry 'k' pro f=fs-(49 až 51) Hz (R-pravá strana spektra >fs/2)
SN(idxL)=0; % nulování spektrálních čar
SN(idxR)=0; % nulování spektrálních čar
```

Tento postup musíme opakovat pro každou vyšší harmonickou 100±1, 150±1, ... , 250 ±1 Hz. Nežli výše popsaný kód kopírovat pro všechny frekvence, využijeme for cyklu:

```
% nastudujte si zápis for cyklu v MATLAB. Př.:
f_x50=zeros(1,9); % rezervace proměnné v paměti - nulový vektor 1x9
for m=1:9 % pro každé m
  f_x50(1,m)=m*50; % na m-tou pozici vektoru ulož m-tý násobek 50
end
```

For cyklus nulující násobky $m \times 50 \pm 1\ \mathrm{Hz}$:

Počet cyklů zvolte pro interval $\left\langle 50; \frac{f_s}{2} \right\rangle$ Hz. Můžete také využít pomocného vektoru do kterého si uložíte násobky 50 Hz až po $\frac{f_s}{2}$. Počet cyklů určíte délkou tohoto vektoru, nebo do `for` tento vektor přímo vložíte:

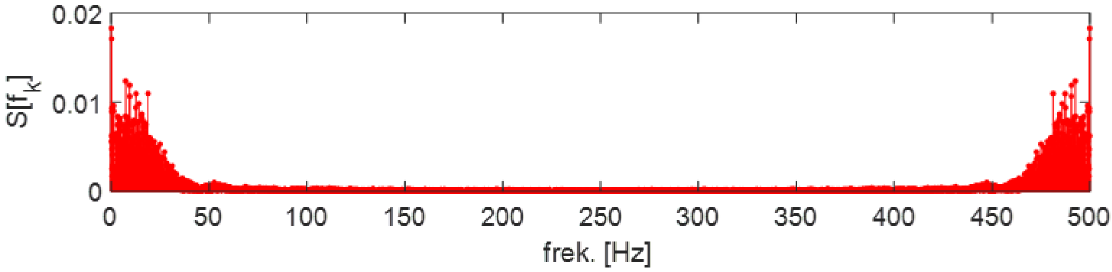
```
% Př. 1 ----------------------------------
f50=50:50:fs/2;
for m=1:length(f50)
               % výběr frekvence: f50(m)
end

% Př. 2 ----------------------------------
f50=50:50:fs/2;
for m=f50
               % m je přímo hodnota z vektoru f50
end
```

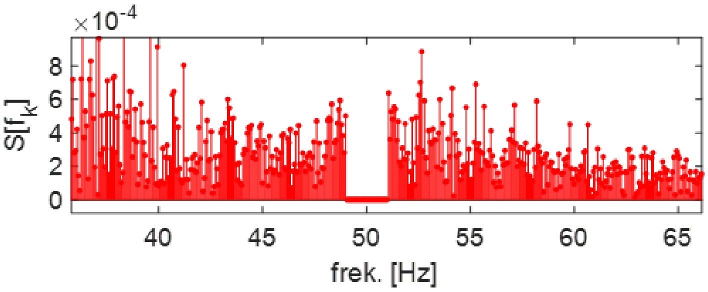
Realizujte nulování ve for cyklu:

```
f50=50:50:fs/2;
for m=1:length(f50)
   SN(F >= f50(m)-1 & F<= f50(m)+1) = 0;            % výběr frekvence: f50(m)
end
```

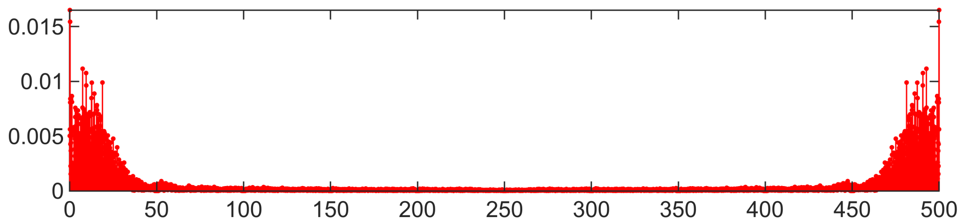
```
f50=fs/2:50:fs-50;
for m=1:length(f50)
   SN(F >= f50(m)-1 & F<= f50(m)+1) = 0;              % výběr frekvence: f50(m)
end
```

Zobrazte spektrum po nulování. Vytvořte nový figure(2) se subplot 3x1:






```
figure(2)
subplot(3,1,1)
stem(F, abs(SN),Marker=".",Color="r")          % stem
axis tight
```



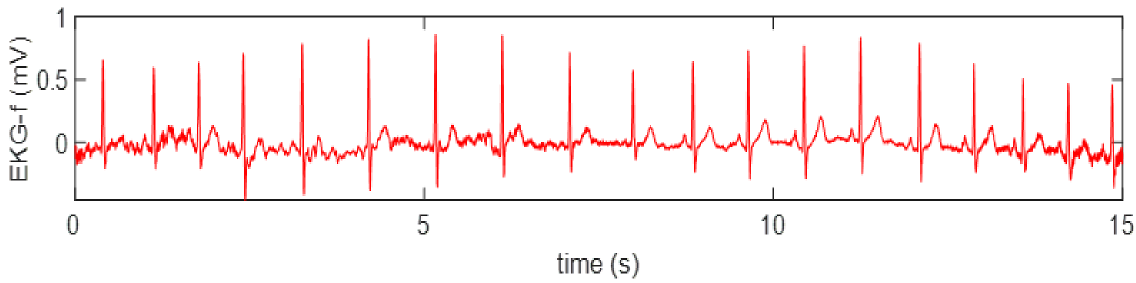
Přibližte si spektrum a zkontrolujte, zda nulování provádíte správně na levé i pravé straně spektra (0 až $\frac{f_s}{2}$, $\frac{f_s}{2}$ až f_s).

Rekonstrukce signálu:

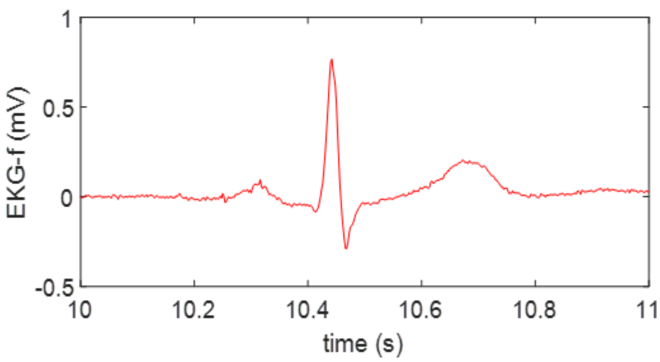
Z komplexního spektra s odstraněnými harmonickými složkami síťového rušení opět sestavíme signál. Použijeme inverzní rychlou Fourierovu transformaci (IFFT).

Připomeňme si, že pokud jsme normalizaci amplitudy $\frac{1}{N}$ prováděly na straně dopředné transformace. U zpětné proto musíme výsledek vynásobit N.

```
X=(1/N)*fft(x); % DFT – komplexní spektrum X[k]
x=N*ifft(X); % IDFT – rekonstrukce signálu x[n]

x=real(x); % pouze reálná složka při numerické nepřesnosti
```

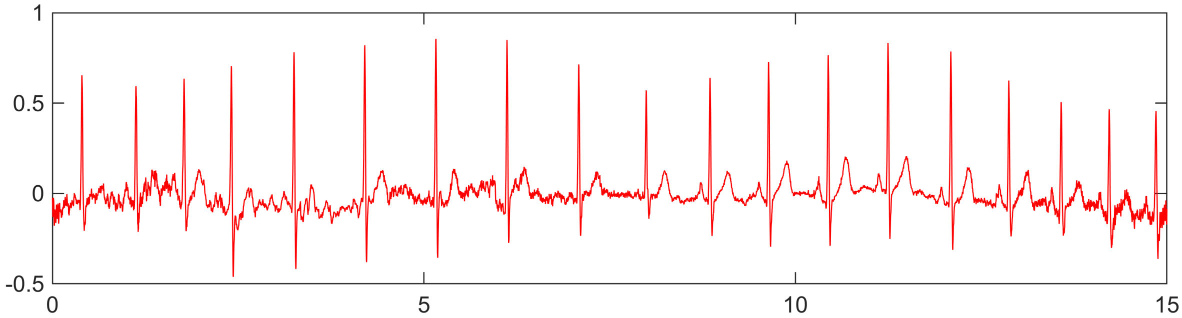


Detail:



Spočtěte IFFT a zobrazte filtrovaný signál:

```
s = N*ifft(SN);
s = real(s);
figure
set(gcf, 'Position', [0 0 800 700]);
subplot(3,1,1)
plot(t,s,Color='r')
```



Subjektivně popište rozdíly mezi původním EKG signálem a výsledkem filtrace ve spektru:

Lépe se dají rozpoznat detaily, protože se signál nemění příliš rychle. U původního EKG je signál tak rozkmitaný, že po vykreslení vypadá jako tlustá čára.