Mathematical Methods of Physics

Tobias Laser*

19. November 2025

Kurzfassung

-//-

Inhaltsverzeichnis

*tobias.laser@uibk.ac.at

1 Funktionentheorie

1.1 Komplexe Funktionen

1.1.1 Komplexe Zahl -> komplexe Analysis

Definiton: $z \in \mathbb{C}$: Tupel (a,b) mit $a, b \in \mathbb{R}$ für die gilt:
Addition: $(a,b) \pm (u,v) = ((a \pm u),(b \pm v))$
Multplikation: $(a,b) \cdot (u,v) = ((au - bv),(av + bu))$
Körper:

- Assoziativgesetzt und Kommutativgestz

  $z_1 \times (z_2 \times z_3)$

  $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$

  für für Addition ($\times \triangleq +$) und Multiplikation ($\times \triangleq \cdot$).

- Distributivgesetz: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Inverse:

- Addition: $z + (-z) = 0$
- Multiplikation: $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ $(z \neq 0)$

Neutrale:

- Addition: (0,0)
- Multiplikation: (1,0)

$\Longrightarrow$ ünitärer Ring"(Aber: keine Anordnungseigenschaft.)

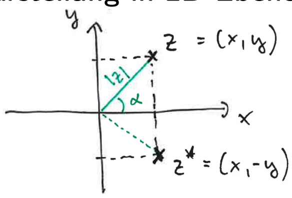
Definition: $z := a + ib$ mit $i^2 = -1$ $(a,b \in \mathbb{R})$

Betrag einer kompleen Zahl: uklidische Norm: $|z| := |(a,b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Definition: Komplee Konjugation: $z^* := a - ib$ zu $z = a + ib$
$\Longrightarrow$ $|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$
Realteil: $Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) = a$
Imaginärteil: $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) = b$

Potenzen: $z^n = z \cdot z \cdot ... \cdot z$ (n-mal)
$z^{-n} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot ... \cdot \frac{1}{z}$ (n-mal)
wobei: $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ für $z := x + iy$ $x,y \in \mathbb{R}$
($\Longrightarrow$ $f(z) = \frac{1}{z} := u + iv$ Normalform, $u,v \in \mathbb{R}$)

Darstellung in 2D Ebene: $z := x + iy$



-> auch darstellbar durch Betrag $|z|$ und Winkel α (:= Ärgument").

1.1.2 Komplexe Funktionen

1. Polynome (vom Grad n): $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$; $n \in N_0$ z.B.: $w = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = u + iv$

2. Rationale Funktionen: $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ mit Polynom P_n, Q_m

3. Potenzreihen: $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$

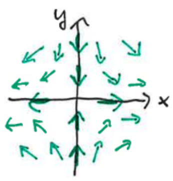
   -> Konvergenz ?

   relle Funkton: "Konvergenzradius"

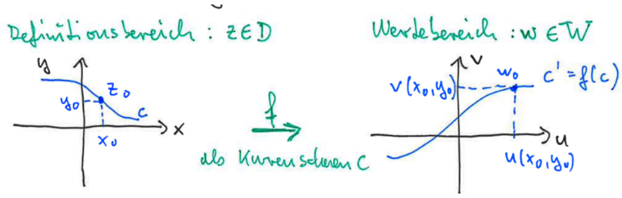
   -> komplexe Funktionen: offene Kresscheibe um $0 in \mathbb{C}$ mit Radius r.

   Geometrische Darstellung

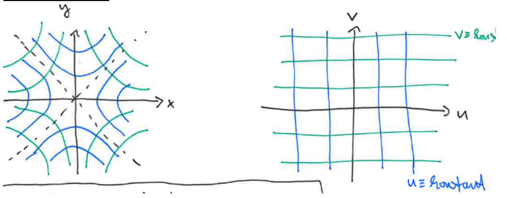
- Darstellung von $u(x,y)$ und $v(x,y)$ separat als Funktionen von x,y (Z.B "Höhenlinienïn 2D)
- Darstellung als Vektorfeld $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$:



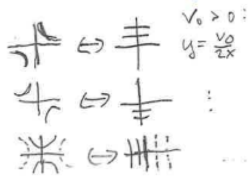
- (z,w) Darstellung:



Beispiel: $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$



Suche die Kurven in der z-Ebene, die auf ein orthogonals karteschies Netz in der w-Ebene abgebildet werden. (hier: Scharen orthogonaler Hyprbahn.)



1.1.3 Exponentalfunktion

Definition: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

$f(z) = \exp(z) = e^z$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ konvergent.

(Beweis: analog wie in $\mathbb{R}$ mit Quotienten-Kriterium.)

Euler-Formel: $\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\exp(i\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{\alpha^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)
\end{aligned}$$

Für die efinition von $\cos, \sin$.

Durch geeignete Definition von $\sin(z)$ und $cos(z)$: $(\alpha \to z)$ Euler-Formel auch für $z \in \mathbb{C}$ gültig!

1.1.4 Trigonometrisch Funktionen:

$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

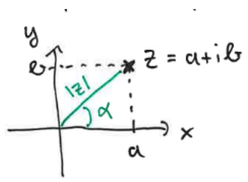
$\Longrightarrow$

- $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{1}{\cot(z)}$
- $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$

Hyperbelfunktionen: $\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$

$\sinh(z) := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$

$\Longrightarrow \cosh^2(z) + \sinh^2(z) = 1$



Exponentialfunktion und Polarsdarstellung:

$z = (a,b) = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = |z| \exp(i\alpha)$ wobei $\alpha := \arg(z)$ das Ärgument"von z ist.

Exponentialfunktion: $e^w \cdot e^z = w^{w \cdot z}$ für $w,z \in \mathbb{C}$ auch: $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Damit: $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^z \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$ mit $|e^z| = e^x$ und $= \arg(e^z)$

(Beweis für $e^w \dot{e}^z = e^{w+z}$: siehe Lehrbücher)

Produkt: $z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$ für $z := |z| \cdot e^{i\alpha}$ und $w := |w| \cdot e^{i\beta}$

-> Interpretation: Drehung um β und Streckung um $|w|$ von z .

(Achtung: in der Regel ist $z \cdot w \in \mathbb{C} \implies$ kein SSkalarprodukt"!)

1.2 Komplexe Umkehrfunktionen

1.2.1 Eindeutige Funktionen

Eine komplexe Funktion heißt eindeutig, wenn es für jeden Wert $z \in D \subset \mathbb{C}$ genau einen Funktionswert $w = f(z) \in \mathbb{C}$ gibt. ($D :=$ Definitionsbereich).

Beispiel: $f(z) = z^2$, $f(z) = e^z$

Mehrwertige Funktionen: z.B. $f(z) = \sqrt{z}$, $f(z) = \log(z)$

(-> Verzweigungsspunkte/ Schnitte)

Eine komplexe Funktion ist injektiv, wenn für $z_1 \neq z_2$ folgt, dass auch $f(z_1) \neq f(z_2)$. (Bzw. $f(z_1) = f(z_2) \implies z_1 = z_2$).

Beispiel: $f(z) = z^2$ ist eindeutig, aber nicht injektiv.

surjektiv: für $f : z \in D \subset \mathbb{C} \to w \in W \subset \mathbb{C}$ gitl: fpr jedes $w \in W$ existiert ein $z \in D$, sodass $f(z) = w$. -> dann existiert eine umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$, die ebenfalls eindeutig ("wohldefniert") ist.

(Bijektiv: sowohl injektiv als auch surjektiv).

Beispiel

- $f(z) = az + b$, $a \neq 0$: injektiv und surjektiv
- $f(z) = z^2$, nicht injektiv(da $f(1) = f(-1) = 1$), aber surjektiv (da in $\mathbb{C} jede Wurzellsbarist$).

Die komplexe xponentialfunktion ist nicht injektiv:
$f(z) = e^z = w$ mit$w := |w|(\cos(\alpha) + i\sin(\beta))$ mit $\alpha := \psi + 2\pi k$, $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, ...\} \implies$

$$\begin{aligned} w =& |w|[(\cos(\psi)\dot{\cos}(2\pi k) - \sin(\psi)\sin(i2\pi k) + i(\sin(\psi)\cos(s\pi k) + \cos(\psi)\sin(2\pi k)))] \\ =& |w|(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) \end{aligned}$$

1.3 Komplexe Ableitung

1.4 Komplexe Integration

1.5 Komplexe Potenzreihen

1.6 Residuensatz

1.7 Uneigentliche reele Integrale

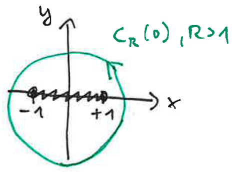
1.8 Integrale um Schnitte

1.8.1 Endliche Schnitte

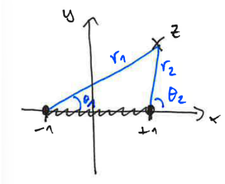
Beispiel: $f(z) = \ln(\frac{z+1}{z-1})$ für $z \neq \pm 1$

Wähle Schnitt auf reeler Achse $(y = 0)$ mit $-1 < x < +1$: darin ist $\frac{z+1}{z-1}$ reell und negativ, und $-\pi < \arg(\frac{z+1}{z-1}) \leq +\pi$.

Aufgabe: bestimme $\oint\limits_{C_r(0)} f(z)dz$ für Kreis um 0 mit $R > 1$.



Sei $z + 1 := r_1 e^{i\theta_1}$, $z + 1 := r_2 e^{i\theta_2}$ bzw. $z = -1 + r_1 e^{i\theta_1}$, $z = +1 + r_2 e^{i\theta_2}$

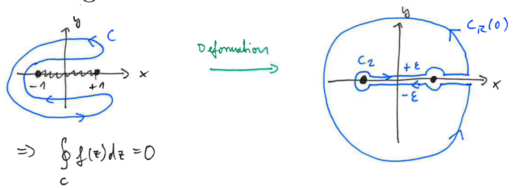


$\Longrightarrow \ln\frac{z+1}{z-1} = \ln|\frac{r_1}{r_2}| + i(\theta_1 - \theta_2 + 2\pi m)$

hier: Hauptwert -> $m := 0$

$\theta_1, \theta_2 \in (-\pi, \pi]$

Zuerst: geschlossene Kurve außerhalb des Schnitts:



$\Longrightarrow \oint\limits_c f(z)dz = 0$

$\Longrightarrow \oint\limits_{C_{R>1}(0)} f(z)dz = -\oint\limits_{C_2} f(z)dz = -\oint\limits_{C_\epsilon(-1)} f(z)dz - \oint\limits_{C_\epsilon(+1)} f(z)dz + \lim\limits_{\epsilon\to 0}\int\limits_{+1}^{-1} f(x - i\epsilon)dx + \lim\limits_{\epsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{+1} f(x + i\epsilon)dx (+ \int\limits_{+1\Leftrightarrow r} f(z)dz)$

1: $C_\epsilon(+1) : f(z)?\frac{z+1}{z-1} \overset{z\to+1}{\approx} \ln(2) - \ln(z-1)\ (z \neq 1)$

$\oint\limits_{c_\epsilon(1)} \ln(z-1)dz = [z := 1 + \epsilon e^{it}] = \int\limits_0^{2\pi} \ln(\epsilon e^{it})\epsilon i e^{it} dt \approx \int\limits_0^{2\pi} O(\epsilon \ln\epsilon)dt \to 0$

wobei $\ln(\epsilon e^{it}) = \ln|\epsilon e^{it}| + it + \ln(\epsilon) + it$

$\lim\limits_{\epsilon\to 0} \epsilon\ln(\epsilon) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{\ln(\epsilon)}{\frac{1}{\epsilon}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{\frac{1}{\epsilon}}{-\frac{1}{\epsilon^2}} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} -\epsilon \to 0$

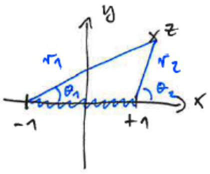
2. $C_\epsilon : \int\limits_{C_\epsilon(-1)} f(z)d(z) \approx \oint\limits_{C_\epsilon(-1)} \ln(z+1) - \ln(-z)\ (z \neq -1)$

$\oint[C^*_\epsilon(+1) + C_\epsilon(-1)] = 0$

tragen nichts bei.

$\Longrightarrow \oint\limits_{C_{R>1}(0)} f(z)dz$ hängt nur von Differenz der Funktionswerte entlang des Schnitts ab.

$$\Longrightarrow \oint\limits_{C_{R>1}(0)} f(z)dz = ... = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-1}^{+1} [f(x+i\epsilon)] - f(x-i\epsilon)dx$$

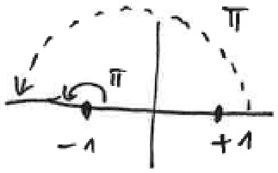


$y := 0 \pm \epsilon$, $x \in (-1, +1)$

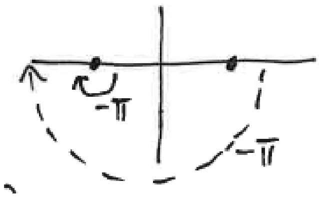
$\Longrightarrow\ r_1 = 1 + x,\ R_2 = 1 - x$

Argument: $-\pi < \theta_1, \theta_2 \leq +\pi$.

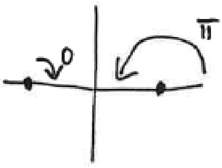
I) $x < -1$: $+\epsilon$: $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = \pi \implies \Im(f) = \theta_1 - \theta_2 = 0$ (für $m := 0$)



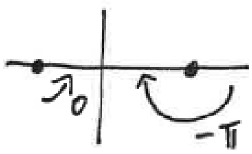
$-\epsilon$: $\theta_1 = -\pi$, $\theta_2 = -\pi \implies \Im(f) = 0$



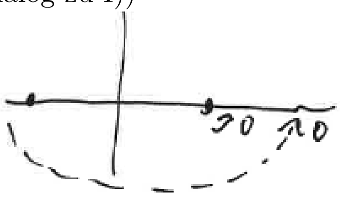
II) $-1 < x < 1$: $+\epsilon$: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi \implies \Im(f) = -\pi$



$-\epsilon$: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\pi \implies \Im(f) = +\pi \neq -\pi$



III) $x > +1$: $\pm\epsilon \implies \Im(f) = 0$ (analog zu I))



$\Longrightarrow\ f(x + i\epsilon) = \ln|\frac{r_1}{r_2}| + i(-pi)$ für $-1 < x < +1$

$f(x - i\epsilon) = \ln|\frac{r_1}{r_2}| + ipi$

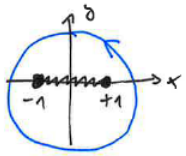
mit $r_1 = |x - (-1)| = |x + 1| > 0$

$r_2 = |x - (+1)| = |x - 1| > 0$

$\Longrightarrow\ f(x + i\epsilon) - f(x - i\epsilon) = -2\pi i$

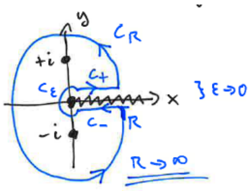
$$\Longrightarrow \oint\limits_{C_{R>1}(0)} \ln(\tfrac{z+1}{z-1})dz = -\int\limits_{-1}^{+1}[f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)]dx = 4\pi i. \text{ mit}$$

$C_R(0)$:



1.8.2 Unendliche Schnitte

Beispiel $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+^2}dx =? \Leftrightarrow \oint\limits_{C_{R\to\infty}} \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}dz$, wobei $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \overset{R\to\infty}{\to} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = x^{-\frac{3}{2}}$ stärker als $\frac{1}{}$ abfällt.



$C_\epsilon(0)$: $t(z) := \epsilon e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi)$:

$\oint\limits_{C_\epsilon} \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}dz = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\epsilon e^{it}}}{1+(\epsilon e^{it})}i\epsilon e^{it}dt = i e^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{ri\frac{1}{2}t}}{1+\epsilon^2 e^{2it}}dt$

$\to 0$ für $\epsilon \to 0$

$\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx \mathrel{\widehat{=}} \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}dz$

wobei $\int\limits_\infty^0 \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}dz = \int\limits_\infty^0 \frac{\sqrt{re^{2\pi i}}}{1+r^2e^{4\pi i}}dr = [$für $z := re^{i\phi}$ mit $\phi := 2\pi$, da $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1]$

$= \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{r}}{1+r^2}dr = \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx \implies$ identisch.

$\Longrightarrow \oint\limits_C \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}dz = 2 \cdot \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+^2}dx + 0$

($\neq 0$ da zwei einfache Pole enthalten!)

$\text{Res}[\frac{\sqrt{z}}{1+z^2}]z = +i = \frac{\sqrt{i}}{2i} = \frac{\sqrt{2}}{4i}(1+i)$

$\text{Res}[\frac{\sqrt{z}}{1+z^2}]_{z=-i} = \frac{\sqrt{-i}}{2i} = \frac{\sqrt{2}}{4i}(1-i)$

wobei Hauptwert: $\sqrt{\pm i} = \sqrt{|i|}e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \cos(\pm\frac{\pi}{2}) + i\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

und $\text{Res}[\frac{\sqrt{z}}{(z+i)(z-i)}]_{z=\pm i} = \lim\limits_{z\to\pm i}(z \pm i)\frac{\sqrt{z}}{(z+1)(z-i)} = \frac{\sqrt{\pm i}}{2i}$

$\Longrightarrow \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}2\pi i[\frac{\sqrt{2}}{4i}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{4i}(1-i)] = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$

1.9 Partielle Differentialgleichungen

1.10 Laplacegleichung