Mathematical Methods of Physics

Tobias Laser*

17. November 2025

Kurzfassung

-//-

Inhaltsverzeichnis

*tobias.laser@uibk.ac.at

1 Funktionentheorie

1.1 Komplexe Funktionen

1.1.1 Komplexe Zahl -> komplexe Analysis

Definiton: $z \in \mathbb{C}$: Tupel (a,b) mit $a, b \in \mathbb{R}$ für die gilt:
Addition: $(a,b) \pm (u,v) = ((a \pm u),(b \pm v))$
Multplikation: $(a,b) \cdot (u,v) = ((au - bv),(av + bu))$
Körper:

- Assoziativgesetzt und Kommutativgestz

  $z_1 \times (z_2 \times z_3)$

  $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$

  für für Addition ($\times \triangleq +$) und Multiplikation ($\times \triangleq \cdot$).

- Distributivgesetz: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Inverse:

- Addition: $z + (-z) = 0$
- Multiplikation: $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ ($z \neq 0$)

Neutrale:

- Addition: (0,0)
- Multiplikation: (1,0)

$\implies$ ünitärer Ring"(Aber: keine Anordnungseigenschaft.)

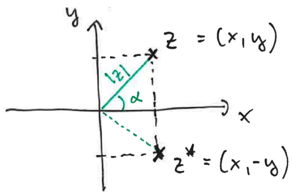
Definition: $z := a + ib$ mit $i^2 = -1$ $(a,b \in \mathbb{R})$

Betrag einer kompleen Zahl: uklidische Norm: $|z| := |(a,b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Definition: Komplee Konjugation: $z^* := a - ib$ zu $z = a + ib$
$\implies |z| = \sqrt{z \cdot z^*}$
Realteil: $Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) = a$
Imaginärteil: $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) = b$

Potenzen: $z^n = z \cdot z \cdot ... \cdot z$ (n-mal)
$z^{-n} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot ... \cdot \frac{1}{z}$ (n-mal)
wobei: $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ für $z := x + iy$ $x,y \in \mathbb{R}$
($\implies f(z) = \frac{1}{z} := u + iv$ Normalform, $u,v \in \mathbb{R}$)

Darstellung in 2D Ebene: $z := x + iy$



-> auch darstellbar durch Betrag $|z|$ und Winkel α (:= Ärgument").

1.1.2 Komplexe Funktionen

1. Polynome (vom Grad n): $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$; $n \in N_0$ z.B.: $w = f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = u + iv$
2. Rationale Funktionen: $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ mit Polynom P_n, Q_m
3. Potenzreihen: $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$

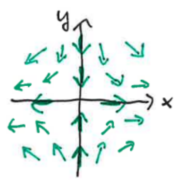
   -> Konvergenz ?

   relle Funkton: "Konvergenzradius"

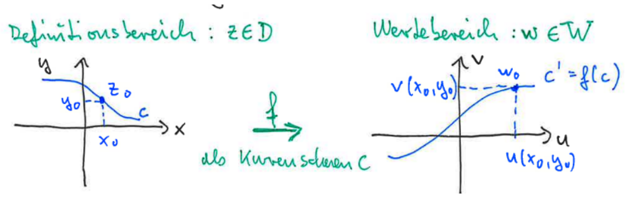
   -> komplexe Funktionen: offene Kresscheibe um $0 in \mathbb{C}$ mit Radius r.

   Geometrische Darstellung

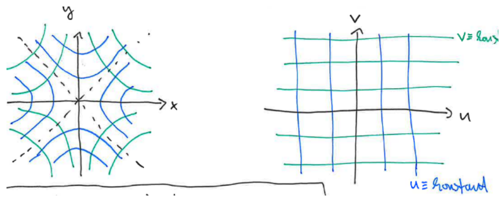
- Darstellung von $u(x,y)$ und $v(x,y)$ separat als Funktionen von x,y (Z.B "Höhenlinienïn 2D)
- Darstellung als Vektorfeld $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$:



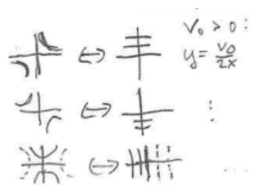
- (z,w) Darstellung:



Beispiel: $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$



Suche die Kurven in der z-Ebene, die auf ein orthogonals karteschies Netz in der w-Ebene abgebildet werden. (hier: Scharen orthogonaler Hyprbahn.)



1.1.3 Exponentalfunktion

Definition: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

$f(z) = \exp(z) = e^z$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ konvergent.

(Beweis: analog wie in $\mathbb{R}$ mit Quotienten-Kriterium.)

Euler-Formel: $\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\exp(i\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{\alpha^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)
\end{aligned}$$

Für die efinition von $\cos$, $\sin$.

Durch geeignete Definition von $\sin(z)$ und $cos(z)$: $(\alpha \to z)$ Euler-Formel auch für $z \in \mathbb{C}$ gültig!

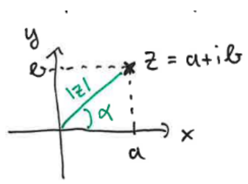
1.1.4 Trigonometrisch Funktionen:

$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$\Longrightarrow$

- $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{1}{\cot(z)}$
- $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$

Hyperbelfunktionen: $\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$
$\sinh(z) := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$
$\implies \cosh^2(z) + \sinh^2(z) = 1$



Exponentialfunktion und Polarsdarstellung: $z = (a,b) = a + ib = \sqrt{a^2+b^2} \cdot (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = |z| \exp(i\alpha)$ wobei $\alpha := \arg(z)$ das Ärgument"von z ist.

Exponentialfunktion: $e^w \cdot e^z = w^{w \cdot z}$ für $w,z \in \mathbb{C}$ auch: $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Damit: $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^z \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$ mit $|e^z| = e^x$ und $= \arg(e^z)$
(Beweis für $e^w \dot{e}^z = e^{w+z}$: siehe Lehrbücher)

Produkt: $z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$ für $z := |z| \cdot e^{i\alpha}$ und $w := |w| \cdot e^{i\beta}$
-> Interpretation: Drehung um β und Streckung um $|w|$ von z .
(Achtung: in der Regel ist $z \cdot w \in \mathbb{C} \implies$ <u>kein</u> SSkalarprodukt"!)