Aufgabe 12.1

a) Eine Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Kontraktion, wenn es eine Kontraktionskonstante $0 \leq k < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\| \Psi(x) - \Psi(y) \| \leq k \|x - y\|$$

$$\Psi_p(x) = x + p(b - G(x))$$

$$\| \Psi_p(x) - \Psi_p(y) \| = \| (x + p(b - G(x))) - (y + p(b - G(y))) \|$$

$$= \| x - y + p(G(y) - G(x)) \|$$

$$\| \Psi_p(x) - \Psi_p(y) \| \leq \|x - y\| + p \| G(x) - G(y) \|$$

$$\| G(x) - G(y) \| \leq L \|x - y\|$$

$$\| \Psi_p(x) - \Psi_p(y) \| \leq \|x - y\| + pL \|x - y\| = (1 + pL) \|x - y\|$$

Der Kontraktionsfaktor $1 + pL$ muss kleiner als 1 sein, daraus folgt

$$1 + pL < 1$$

$$pL < 0$$

$$p < \frac{1}{L}$$

$\Rightarrow$ Für $p \in (0, \frac{1}{L})$ ist Ψ_p eine Kontraktion

b) Kontraktionskonstante k: $k = 1 + pL$

p soll möglichst groß sein und da $p < \frac{1}{L}$ wählen wir:

$p = \frac{1 - \varepsilon}{L}$, wobei ε eine sehr kleine positive Zahl ist, sodass k minimal, aber kleiner als 1 ist.

$$k = 1 + pL = 1 + L\left(\frac{1 - \varepsilon}{L}\right) = 1 + 1 - \varepsilon = 2 - \varepsilon$$

Aufgabe 12.2

a) Setze $x = \sqrt{a}$

$$\sqrt{a} = A\sqrt{a} + \frac{B}{\sqrt{a}} + \frac{C}{a^{3/2}}$$

$\cdot\sqrt{a}$ I

$$a = Aa + B + \frac{C}{a} \qquad a - Aa - B - \frac{C}{a} = 0$$

$$\phi'(x) = A - \frac{B}{x^2} - \frac{3C}{x^4}$$

$\phi'(\sqrt{a})$ muss gleich 0 sein: $0 = A - \frac{B}{a} - \frac{3C}{a^2}$

$$\phi''(x) = \frac{2B}{x^3} + \frac{12C}{x^5}$$

$\phi''(\sqrt{a})$ muss gleich 0 sein: $0 = \frac{2B}{a^{3/2}} + \frac{12C}{a^{5/2}}$

$$\phi'''(x) = -\frac{6B}{x^4} - \frac{60C}{x^6}$$

$\phi'''(\sqrt{a})$ muss ungleich 0 sein $\phi'''(\sqrt{a}) = -\frac{6B}{a^2} - \frac{60C}{a^3}$

1. $a - Aa - B - \frac{C}{a} = 0$
2. $A - \frac{B}{a} - \frac{3C}{a^2} = 0$
3. $\frac{2B}{a^{3/2}} + \frac{12C}{a^{5/2}} = 0$
4. $-\frac{6B}{a^2} - \frac{60C}{a^3} \neq 0$

---

3. $\frac{2B}{a^{3/2}} = -\frac{12C}{a^{5/2}}$

$$2Ba^2 = -12C$$

$$B = -6\frac{C}{a^2}$$

2. $A - \frac{-6\frac{C}{a^2}}{a} - \frac{3C}{a^2} = 0$

$$A = \frac{3C}{a^2} - \frac{6C}{a^3} = \frac{3C}{a^2}\left(1 - \frac{2}{a}\right)$$

1. $a - a\left(\frac{3C}{a^2}\left(1-\frac{2}{a}\right)\right) - \left(-6\frac{C}{a^2}\right) - \frac{C}{a} = 0$

$$a - 3C\left(1 - \frac{2}{a}\right) - 6\frac{C}{a^2} - \frac{C}{a} = 0$$

...

X

Aufgabe 12.4

Eine Fixpunktiteration der Form $x_{n+1} = g(x_n)$ Konvergiert gegen einen Fixpunkt x^*, wenn $g(x^*) = x^*$ und $|g'(x^*)| < 1$.

a) $x_{n+1} = -\ln(x_n)$

$x = -\ln(x)$

$g(x) = -\ln(x) \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x}$

$|g'(x)| = \left|-\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$

Für $x = z \in [0{,}5, 0{,}6]$: $\frac{1}{0{,}5} = 2$, $\frac{1}{0{,}6} \approx 1{,}67$

$\Rightarrow |g'(x)| > 1$, Iteration Konvergiert nicht

b) $x_{n+1} = e^{-x_n}$

$x = e^{-x}$

$g(x) = e^{-x} \Rightarrow g'(x) = -e^{-x}$

$|g'(x)| = |-e^{-x}| = e^{-x}$

Für $x = z \in [0{,}5, 0{,}6]$: $e^{-0{,}5} \approx 0{,}607$, $e^{-0{,}6} \approx 0{,}549$

$\Rightarrow |g'(x)| < 1$, Iteration Konvergiert

c) $x_n = \frac{1}{2}(x_n + e^{-x_n})$

$x = \frac{1}{2}(x + e^{-x})$

$g(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x}) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x})$

$|g'(x)| = \left|\frac{1}{2}(1 - e^{-x})\right|$

Für $x = z \in [0{,}5, 0{,}6]$: $\frac{1}{2}(1 - e^{-0{,}5}) \approx 0{,}197$

$\frac{1}{2}(1 - e^{-0{,}6}) \approx 0{,}226$

$\Rightarrow |g'(x)| < 1$, Iteration Konvergiert

$\Rightarrow$ Iteration a) sollte nicht verwendet werden, da diese nicht Konvergiert

Aufgabe 12.5

⌈Die Funktion führt eine Gaußsche Elimination durch, die eine quadratische Matrix A in eine obere Dreiecksmatrix transformiert.⌋

Zuerst wird geprüft, ob die Matrix A quadratisch ist oder nicht. Im zweiten Fall wird ein AssertionError ausgelöst.
Die äußere for-Schleife läuft über jede Spalte j von 0 bis $n-2$ und die innere läuft über jede Zeile i von $j+1$ bis $n-1$. Für jedes Element unterhalb der Hauptdiagonalen $A[i,j]$, wird der Multiplikator für die Elimination berechnet $A[i,j] / A[j,j]$. Die Elemente rechts des aktuellen Elements in der i-ten Zeile werden aktualisiert, um das Element $A[i,j]$ zu eliminieren.
Nachdem alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen eliminiert wurden, wird die modifizierte Matrix A zurückgegeben.