Aufgabe 7.1

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

Für $f(x) = 1$:

$$\int_0^1 1\,dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1$$

Für $f(x) = x$:

$$\int_0^1 x\,dx = w_0 \cdot 0{,}25 + w_1 \cdot 0{,}5$$

$$\int_0^1 1\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 = w_0 + w_1$$

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = 0{,}25\,w_0 + 0{,}5\,w_1$$

$$\begin{cases} 1 = w_0 + w_1 \\ \frac{1}{2} = 0{,}25\,w_0 + 0{,}5\,w_1 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$0 = 0{,}5\,w_0$$

$$w_0 = 0$$

$$\Rightarrow 1 = 0 + w_1$$

$$\Rightarrow w_1 = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \approx 0 \cdot f(0{,}25) + 1 \cdot f(0{,}5) = f(0{,}5)$$

Aufgabe 7.2:

allg. Formel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$

für Doppelintegral: $\int_a^b \int_c^d f(y,x)\,dy\,dx \approx \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{d-c}{n}\right) \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \alpha_i \beta_j f(x_i, y_j)$

mit: $x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$, $i = 0,1,\dots,n$

$y_j = c + j\left(\frac{d-c}{n}\right)$, $j = 0,1,\dots,n$

$\Rightarrow Q_{n,n}(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{d-c}{n}\right) \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \alpha_i \beta_j f(x_i, y_j)$

$\Rightarrow$ Polynome, bei denen $k, l \leq n$ gilt, werden exakt integriert.

Aufgabe 7.3

a) (i) $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\Delta x) + f(b)\right]$

mit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$, $\xi \in [a,b]$

$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(1-x)^{9/2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{9}{2}(1-x)^{7/2}\right) = \frac{63}{4}(1-x)^{5/2}$

max von $|f''(x)|$ auf $[0,1]$

$|f''(0)| = \left|\frac{63}{4}\right| = \frac{63}{4}$

$E_T = -\frac{(1-0)^3}{12n^2} \cdot \frac{63}{4} = -\frac{63}{48n^2} = -\frac{21}{16n^2}$

$\left|\frac{21}{16n^2}\right| < 10^{-8}$

$n^2 > \frac{21}{16 \cdot 10^{-8}}$

$n^2 > \frac{21 \cdot 10^{8}}{16}$

$n > \sqrt{\frac{21 \cdot 10^{8}}{16}} \approx 11.457$

$\Rightarrow$ Die Trapezregel braucht min. 11.457 Intervalle, also

11.458 Funktionsauswertungen

a) (ii) $\int_a^b f(x)\,dx \approx$

$$\frac{\Delta x}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\Delta x) + 2\sum_{i=2}^{n-2} f(a+i\Delta x) + f(b)\right]$$

mit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$E_S = -\frac{(b-a)^5}{180\,n^4} f^{(4)}(\xi) \qquad , \xi \in [a,b]$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4}(1-x)^{9/2} = \frac{315}{8}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-1/2}$$

$$= -\frac{945}{16}(1-x)^{-1/2}$$

max von $|f^{(4)}(x)|$ auf $[0,1]$ ✗

Wir betrachten das Intervall $[0, 1-\varepsilon]$ und berechnen die max. Abl. bei ε.

$$E_S = -\frac{(1-0)^5}{180\,n^4}\,|f^{(4)}(\xi)|$$

$$|f^{(4)}(\xi)| = \frac{945}{16\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\left|\frac{1}{180\,n^4}\cdot\frac{945}{16\sqrt{\varepsilon}}\right| < 10^{-8}$$

$$n^4 > \frac{945}{16\cdot 180\cdot 10^{-8}\sqrt{\varepsilon}}$$

$$n^4 > \frac{945\cdot 10^8}{2880\sqrt{\varepsilon}}$$

$$n > \left(\frac{945\cdot 10^8}{2880\sqrt{\varepsilon}}\right)^{1/4}$$

b) Durch die Romberg-Integration, die die Trapezregel-Ergebnisse kombiniert, um die Genauigkeit zu erhöhen und die Anzahl an notwendigen Funktionsauswertungen zu reduzieren.

Aufgabe 7.4

a) $\theta = \arccos(x)$, $x = \cos(\theta)$

$\Rightarrow T_n(x) = \cos(n\theta)$, $x = \cos(\theta)$

$\Rightarrow T_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$$

$\theta = \arccos(x)$

$$\Rightarrow T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos((n+1)\arccos(x)) + \cos((n-1)\arccos(x))$$
$$= 2\cos(\arccos(x))\cos(n\arccos(x))$$
$$= 2x\cos(n\arccos(x)) = 2x\,T_n(x)$$

b) $x = \cos(\theta)$, $dx = -\sin(\theta)\,d\theta$

Grenzen des Integrals: $\theta \in [0, \pi]$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} T_n(\cos(\theta))\,T_m(\cos(\theta))\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta$$

$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \frac{1}{2}\left(\cos((n-m)\theta) + \cos((n+m)\theta)\right)$$

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\cos((n-m)\theta)\,d\theta + \int_0^{\pi}\cos((n+m)\theta)\,d\theta\right)$$

$\int_0^{\pi} \cos(k\theta)\,d\theta$ sind gleich Null, außer $k=0$

$$\begin{cases} \pi, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\delta_{n,m} + \delta_{n,-m}\right)$$

Da $n, m \in \mathbb{N}_0$ ist $\delta_{n,-m} = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}$$

Wenn $n=m$ gilt:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Wenn $n = m = 0$ gilt:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_0(x)\,T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$

Nullstellen:

$$T_n(x_i) = 0$$

$$\cos\left(n \arccos(x_i)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n \arccos(x_i) = \frac{(2i+1)\pi}{2} \quad , i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

c)

$$w_i = \int_{-1}^{1} \frac{L_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$w_i = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x_i)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i = \pi$$

$$\Rightarrow \quad w_i = \frac{\pi}{n} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$