Aufgabe 9.1 (4 Punkte): LR-Zerlegung für diagonaldominante Matrizen

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei regulär und diagonaldominant, d.h

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |a_{jk}| \leq |a_{jj}|, \quad \forall j = 1, ..., n.$$

Zeigen Sie, dass eine LR-Zerlegung $A = LR$ existiert, die mit Gauß-Elimination ohne Pivotierung bestimmt werden kann.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die nach jedem Eliminationsschritt resultierenden (Unter-) Matrizen weiterhin diagonaldominant sind.

$A \in R^{n\times n}$

Matrix A diagonaldominant wenn $\forall$ Zeilen $j=1,\dots,n$ gilt

$$|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |a_{jk}|$$

Eliminiere unterhalb a_{11}:

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{ij}, \quad \text{für } i=2,\dots,n \text{ und } j=2,\dots,n$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$$

ZZ Resultierende Matrix weiterhin diagonaldom. ist

Betrachte i-te Zeile nach d. Elim. Für $i>1$ $j>1$

$$|a'_{ii}| = \left| a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \right|$$

Da A diagonaldominant ist

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}|$$

Beachte
$$|a'_{ii}| = \left| a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \right|$$

$$|a_{11}| \geq \sum_{k=2}^{n} |a_{1k}|$$

a_{i1} und a_{1i} haben kleine Werte als a_{11}

Angenommen nach dem k-ten Eliminationsschritt ist verbleibende subdiagonale Matrix A' weiterhin diagonaldominant

Dann bleibt es auch nach dem $(k+1)$-ten Eli. schritt erhalten.

jede Spalte ist unabhängig von den anderen Eliminierten usw.

Diagonal matrix bleibt erhalten

Jede Eli. Schritt resultierende Matrix bleibt erhalten Alle Diagonalelemente von $A \neq 0$, weil A regulär ist
Ohne NuK Diagonale erscheint
Dh. LR Zerlegung $A = LR$ existiert

Aufgabe 9.2

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & y_0 & y_0^2 \\ 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Normalengleichungen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

b)

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^TA = LL^T$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{11}^2 = 4 \Rightarrow l_{11} = 2$$

$$l_{11} l_{21} = 6 \Rightarrow 2 l_{21} = 6 \Rightarrow l_{21} = 3$$

$$l_{11} l_{31} = 14 \Rightarrow 2 l_{31} = 14 \Rightarrow l_{31} = 7$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 14 \Rightarrow 3^2 + l_{22}^2 = 14 \Rightarrow l_{22}^2 = 5 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{5}$$

$$l_{21} l_{31} + l_{22} l_{32} = 36 \Rightarrow 3 \cdot 7 + \sqrt{5} \cdot l_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{15}{\sqrt{5}} \Rightarrow l_{32} = 3\sqrt{5}$$

$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 98 \Rightarrow 7^2 + (3\sqrt{5})^2 + l_{33}^2 = 98$

$\Rightarrow l_{33}^2 = 4 \Rightarrow l_{33} = 2$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & 0 \\ 7 & 3\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$Ly = A^T b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & 0 \\ 7 & 3\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$2y_1 = 3 \Rightarrow y_1 = \frac{3}{2}$

$3y_1 + \sqrt{5}y_2 = 4 \Rightarrow \frac{9}{2} + \sqrt{5}y_2 = 4 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$7y_1 + 3\sqrt{5}y_2 + 2y_3 = 10 \Rightarrow \frac{21}{2} + 3\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right) + 2y_3 = 10$

$\Rightarrow \frac{21}{2} - \frac{3}{2} + 2y_3 = 10 \Rightarrow 2y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{2}$

$L^T x = y$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & \sqrt{5} & 3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \cancel{-\frac{1}{2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$2x_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{4}$

$\sqrt{5}x_2 + 3\sqrt{5}x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{5}x_2 + \frac{3\sqrt{5}}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$\Rightarrow x_2 = -\frac{17}{20}$

$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x_1 + 3\cdot\left(-\frac{17}{20}\right) + 7\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2x_1 = \frac{3}{5} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{10}$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/10 \\ -17/20 \\ 1/4 \end{pmatrix} \qquad p(y) = \frac{3}{10} + \left(-\frac{17}{20}\right)y + \frac{1}{4}y^2$$

Aufgabe 9.3

a)

$$H_u^T = \left(1 - 2\frac{uu^T}{u^Tu}\right)^T = 1^T - 2\left(\frac{uu^T}{u^Tu}\right)^T = 1 - 2\frac{uu^T}{u^Tu}$$

$$\Rightarrow H_u^T = H_u$$

$$H_u^T H_u = H_u H_u = \left(1 - 2\frac{uu^T}{u^Tu}\right)\left(1 - 2\frac{uu^T}{u^Tu}\right)$$

$$= 1 - 2\frac{uu^T}{u^Tu} - 2\frac{uu^T}{u^Tu} + 4\frac{uu^T uu^T}{(u^Tu)^2}$$

$$= 1 - 2\frac{uu^T}{u^Tu} - 2\frac{uu^T}{u^Tu} + 4\frac{uu^T}{u^Tu} = I$$

$$\Rightarrow H_u^{-1} = H_u^T \quad \Rightarrow H_u^{-1} = H_u \quad \Rightarrow H_u = H_u^T = H_u^{-1}$$

Sei v Eigenvektor von H_u mit Eigenwert λ

$$Hv = \lambda v$$

$$\left(1 - 2\frac{uu^T}{u^Tu}\right)v = \lambda v$$

$$v - 2\frac{uu^Tv}{u^Tu} = \lambda v$$

$$u^Tv - 2\frac{u^Tuu^Tv}{u^Tu} = \lambda u^Tv$$

$$u^Tv - 2u^Tv = \lambda u^Tv$$

$$-u^Tv = \lambda u^Tv$$

$$u^Tv(1+\lambda) = 0$$

Fall 1: $u^Tv = 0$

$\Rightarrow$ v ist orthogonal zu u. Jeder Vektor, der orthogonal zu u ist, ist ein Eigenvektor von H mit Eigenwert $\lambda = 1$

Fall 2: $\lambda = -1$

$\Rightarrow u^Tv \neq 0 \Rightarrow v$ liegt in der Richtung von u

$\Rightarrow$ H hat die Eigenwerte 1 und -1:

- Eigenwert 1 hat eine Vielfachheit von $n-1$ und der zugehörige Eigenraum ist der Raum der Vektoren, die orthogonal zu u sind.
- -1 hat Vielfachheit von 1 und Eigenraum ist der Raum, der von u aufgespannt ist.

b)

$$\begin{aligned} v^T v &= (x + \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 e_1)^T (x + \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 e_1) \\ &= x^T x + 2 \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 \, x^T e_1 + \|x\|_2^2 \\ &= \|x\|_2^2 + 2 \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 \, x_1 + \|x\|_2^2 \\ &= 2\|x\|_2^2 + 2 \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 \, x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_v v &= \left(I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}\right) v \\ &= v - 2 \frac{vv^T v}{v^T v} \\ &= v - 2 \frac{(x + \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 e_1)(x + \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 e_1)^T v}{2\|x\|_2^2 + 2 \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 \, x_1} \\ &= v - (x + \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 e_1) \frac{x^T v + \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 v_1}{\|x\|_2^2 + \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2 \, x_1} \\ &= v - w \cdot \beta w^T v = v - s w \end{aligned}$$

Aufgabe 9.4

a)

$$\operatorname{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty$$

$$\|A\|_\infty = \max\left(\textstyle\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right) = \max(4, 101) = 101$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -25 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left(\left|\tfrac{1}{4}\right|, |-25| + 1\right) = \max\left(\tfrac{1}{4}, 26\right) = 26$$

$$\Rightarrow \operatorname{cond}_\infty(A) = 101 \cdot 26 = 2626$$

b) Sei $\kappa = \operatorname{cond}_\infty(A)$:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad , \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} < 0{,}01$$

$$\Rightarrow \kappa \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} < 0{,}01$$

$$2626 \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} < 0{,}01$$

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} < \frac{0{,}01}{2626} \approx 3{,}81 \cdot 10^{-6}$$

$\Rightarrow$ Der rel. Fehler in b darf max. $\approx 3{,}81 \cdot 10^{-6}$ sein, damit der rel. Fehler in der gestörten Lösung $< 0{,}01$ ist.