Aufgabe 5.4 (5 Punkte): Gauß-Approximation mit Polynomen

Auf dem Intervall $[-1,1]$ betrachten wir den Polynomraum $P_2 := \text{span}\{1, x, x^2\}$ mit Skalarprodukt und Norm gegeben durch

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \quad \text{und} \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

(a) Sei $f \in C[-1,1]$ gegeben durch $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Bestimmen Sie die Funktion $g \in P_2$ mit der Eigenschaft

$$\|f - g\| = \min_{\phi\in P_2} \|f - \phi\|.$$ 3

(b) Wie groß ist $\|f - g\|$? 1

(c) Zeigen Sie explizit, dass $\langle f - g, p\rangle = 0$ für alle $p \in P_2$ gilt. 1

a) Gesucht ist die Projektion von f der Raum P_2

Polynom $g \in P_2$, $\|f-g\|$

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ und $g \in P_2$ d.h.

$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx$$

$\langle f-g, p\rangle = 0 \quad \forall \, p \in P_2$

$f-g$ ist orthogonal zu allen Polynomen im Raum P_2

Basis $:= \{1, x, x^2\}$ für P_2

für $p = 1$ $\quad \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)) \cdot 1 \, dx = 0$

für $p = x$ $\quad \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)) \cdot x \, dx = 0$

für $p = x^2$ $\quad \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)) \, x^2 dx = 0$

Berechne die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 von Polynom g

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx : \int_{-1}^{1} (x^3-x^2+x-1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} = 0-0=0$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,x\,dx : \int_{-1}^{1} (x^3-x^2+x-1)\,x\,dx = \int_{-1}^{1} x^4-x^3+x^2-x)\,dx = 0-0=0$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,x^2\,dx : \int_{-1}^{1} (x^3-x^2+x-1)\,x^2\,dx = \int_{-1}^{1} (x^5-x^4+x^3-x^2)\,dx = 0-0=0$$

Berechne den Basis:

$$\langle x^3-x^2+x-1, 1\rangle = 0$$

$$\langle x^3-x^2+x-1, x\rangle = 0$$

$$\langle x^3-x^2+x-1, x^2\rangle = 0$$

b) $\|f-g\|$

f Bereits orthogonal zu den Basisfunkt. und alle Integrale sind 0

d.h.

$$g(x) = 0$$

$$\|f-g\| = \|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

$$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{(x^3-x^2+x-1)^2}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} (x^6-2x^5+3x^4-4x^3+2x^2-2x+1)\,dx$$

$$\left[\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1}$$

setze Grenze ein

$$= \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{3}{5} - 1 + \frac{2}{3} - 1 - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{3}{5} - 1 + \frac{2}{3} - 1\right)\right) - \left(\frac{-1}{7} - \frac{-1}{7} + \frac{-3}{5} - 1 +\right.$$

$$= \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{3}{5} - 1 + \frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + 1 - \frac{2}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{2}{7} - \frac{2}{3} + \frac{6}{5} - 2 + \frac{4}{3}$$

$$\|f-g\| = \sqrt{\frac{-16}{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

c) Zeige explizit, dass $\langle f-g, p\rangle = 0$ für alle $p \in P_2$ gilt.

$\{1, x, x^2\}$

$g(x) = 0$

$\|f-g\|$ zu berechnen

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 + x - 1)^2 \, dx$$

das ist ein quadratische Polynom, ausmultiplizieren

$$(x^3-x^2+x-1)^2 = (x^3-x^2+x-1)(x^3-x^2+x-1)$$
$$= x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x + 1$$

$$\int_{-1}^{1} (x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x + 1) \, dx$$

$$= \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2x^6}{6} + \frac{3x^5}{5} - \frac{4x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - x^2 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{6} + \frac{3}{5} - 1 + \frac{2}{3} - 1 + 1\right) - \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + 1 - \frac{2}{3} + 1 - 1\right) = 0$$