Aufgabe 11.1:

a) $x_{n+1} \overset{!}{=} x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$

$f'(x) = 2x - 1$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{0^2 - 0 + \frac{1}{4}}{2\cdot 0 - 1} = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{1}{4} - \frac{(\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{2\cdot\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{4} - \frac{1/16}{-1/2}$

$= \frac{1}{4} + \frac{2}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

$\Psi(x) = x \Rightarrow \Psi(x) = x^2 + \frac{1}{4}$

$x_{n+1} = \Psi(x_n)$

$x_1 = \Psi(x_0)$

$x_1 = 0^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$x_2 = \Psi(x_1)$

$x_2 = (\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

c) Annahme: $f'(x) = 0$. Da f zweimal diff.bar, schreiben wir eine Taylor-Entwickl. von f um Fixpunkt x

$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + O(h^3)$

Da $f(x) = x$ und $f'(x) = 0$ gilt:

$f(x+h) = x + \frac{f''(x)}{2}h^2 + O(h^3)$

Sei $x_k = x + e_k$, wobei e_k der Fehler in der k-ten Iteration:

$x_{k+1} = f(x_k) = f(x + e_k) = x + \frac{f''(x)}{2}e_k^2 + O(e_k^3)$

$e_{k+1} = x_{k+1} - x = \frac{f''(x)}{2}e_k^2 + O(e_k^3)$

Für hinreichend kleine e_k gilt:

$|e_{k+1}| \approx \left|\frac{f''(x)}{2}\right| |e_k|^2$

$\Rightarrow$ Fixpunktiteration konvergiert lokal quadratisch, d.h. es existiert eine Konstante $C \geq 0$, $C < \infty$, $k_0 \in \mathbb{N}$ und eine kompakte Umgebung B von x, sodass:

$$|e_{k+1}| \leq C\,|e_k|^2 \qquad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow |x^{(k+1)} - x| \leq C\,|x^k - x|^2 \qquad \forall k \geq k_0$$

Aufgabe 11.2:

a)
$$uv + u - v - 1 = 0$$
$$uv = 0$$

$\Rightarrow$ Entweder $u=0$ oder $v=0$

Fall 1: $u=0$

$$0 \cdot v + 0 - v - 1 = 0$$
$$-v - 1 = 0$$
$$v = -1$$

$\Rightarrow (u,v) = (0,-1)$ ist eine Lösung

Fall 2: $v=0$

$$u \cdot 0 + u - 0 - 1 = 0$$
$$u - 1 = 0$$
$$u = 1$$

$\Rightarrow (u,v) = (1,0)$ ist eine Lösung

b) $F(x) = 0$ mit $x = (u,v)$:

$x_{n+1} = x_n - J_F(x_n)^{-1} F(x_n)$ mit

$F(x) = \begin{pmatrix} uv+u-v-1 \\ uv \end{pmatrix}$ und $J_F(x)$ die Jacobi-Matrix von $F(x)$

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \partial/\partial u\,(uv+u-v-1) & \partial/\partial v\,(uv+u-v-1) \\ \partial/\partial u\,(uv) & \partial/\partial v\,(uv) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v+1 & u-1 \\ v & u \end{pmatrix}$$

$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F(x_0) = F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 - 0 - 1 \\ 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J_F(x_0) = \begin{pmatrix} 0+1 & 0-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Die Jacobi-Matrix $J_F(x_0)$ nicht invertierbar, da det $= 0$, daher kann der Newton-Schritt für diesen Startwert nicht berechnet werden

$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F(x_0) = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 - 0 - 1 \\ 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J_F(x_0) = \begin{pmatrix} 0+1 & 1-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Da $F(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ist x_0 bereits eine Lösung des Systems. Der Newton-Schritt zeigt, dass $x_1 = x_0$

Aufgabe 11.3

a) Da $f \in C^2(\mathbb{R})$, ist f zweimal stetig diffbar, d.h.:

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$

Da a eine Nullstelle von f ist, gilt $f(a) = 0$. Für $x > a$ gilt $f(x), f'(x), f''(x) > 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für $x_n > a$ ist $f(x_n) > 0$ und $f'(x_n) > 0$, daher ist $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$. $\Rightarrow$ $x_{n+1} < x_n$ $\Rightarrow$ Folge (x_n) ist streng monoton fallend

Da x_n abfällt und $f \in C^2(\mathbb{R})$, kommt x_n immer näher an a heran ohne a zu unterschreiten, da $f(x_n)$ und $f'(x_n)$ immer positiv bleiben und $f(x)$ nur Null an a ist. Daher gilt $x_n > a$ für alle n $\Rightarrow$ Folge (x_n) konvergiert gegen a

b) $f \in P_n(\mathbb{R}) \Rightarrow$ f ist ein Polynom vom Grad n mit min. zwei reellen Nullstellen, wobei a die größte Nullstelle ist.
Sei a die größte und alle anderen b_i mit $b_i < a$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für $x_0 > a$, da a die größte Nullstelle, gilt $f(x) > 0 \quad \forall x > a$
Da f ein Polynom, dass in $C^2(\mathbb{R})$ liegt und die Nullstellen reelle sind, haben wir $f(x) > 0$ für $x > a$ und $f'(x) > 0$ für x nahe bei a, weil der Grad des Polynoms $n \geq 2$ ist und $f'(x)$ nicht an den Nullstellen null ist.
Für $x_n > a$ gilt daher, dass $x_{n+1} < x_n$, da $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$

$\Rightarrow x_n$ streng monoton fallend und $x_n > a$. Daraus folgt wie in a), dass x_n gegen a konvergiert, da f ein Polynom ist und a eine Nullstelle von f wird x_n a erreichen.

Aufgabe 11.4:

a) Sei $J^+ = J^{-1}$:

1. $JJ^+J = JJ^{-1}J = JI = J$
2. $J^+JJ^+ = J^{-1}JJ^{-1} = J^{-1}I = J^{-1} = J^+$
3. $(JJ^+)^T = (JJ^{-1})^T = I^T = I = JJ^{-1} = JJ^+$
4. $(J^+J)^T = (J^{-1}J)^T = I^T = I = J^{-1}J = J^+J$

b) 1. $JJ^+J = JJ^T(JJ^T)^{-1}J$

$\boxed{\text{Sei } A = JJ^T, \text{ dann } J^+ = J^TA^{-1}}$

$$JJ^+J = J(J^TA^{-1})J = J(J^T(JJ^T)^{-1})J$$
$$= JJ^T(JJ^T)^{-1}J = A(JJ^T)^{-1}J = J$$

2. $$J^+JJ^+ = (J^T(JJ^T)^{-1})J(J^T(JJ^T)^{-1})$$
$$= J^TA^{-1}J(J^TA^{-1}) = J^TA^{-1}(JJ^T)A^{-1}$$
$$= J^TA^{-1}AA^{-1} = J^TA^{-1} = J^+$$

3. $(JJ^+)^T = (JJ^T(JJ^T)^{-1})^T$
$= (JJ^T A^{-1})^T = (AA^{-1})^T = I^T = I = JJ^+$

4. $(J^+J)^T = ((J^T(JJ^T)^{-1})J)^T$
$= (J^T A^{-1} J)^T = J^T (A^{-1})^T J^T = J^T A^{-1} J$
$= J^+ J$

c) Sei eine Folge von Matrizen $\{J_k\}$ in $\mathbb{R}^{m\times n}$ mit
~~R~~ rang $J_k = m$ $\forall k$ und $J_k \to J$ für $k \to \infty$
zz: $J_k^+ \to J^+$ für $k \to \infty$

Gegeben sei $J \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit rang $J = m$. Dann ist JJ^T invertierbar.
Für J_k, wenn $J_k \to J$, dann gilt auch $J_k J_k^T \to JJ^T$
Da die Inversion stetig ist, gilt $(J_k J_k^T)^{-1} \to (JJ^T)^{-1}$
Dann: $J_k^+ = J_k^T (J_k J_k^T)^{-1} \to J^T (JJ^T)^{-1} = J^+$
Da $J_k^+ \to J^+$, ist $J \to J^+$ stetig.

d) $J(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Für $\varepsilon \neq 0$:
$$J(\varepsilon) J(\varepsilon)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J(\varepsilon) J(\varepsilon)^T)^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J(\varepsilon)^+ = J(\varepsilon)^T (J(\varepsilon) J(\varepsilon)^T)^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Für $\varepsilon = 0$
$$J(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J(0) J(0)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J(0) J(0)^T)^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J(0)^+ = J(0)^T (J(0) J(0)^T)^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Da $\frac{1}{\varepsilon} \to \infty$ für $\varepsilon \to 0$, konvergiert $J(\varepsilon)^+$ nicht stetig gegen $J(0)^+$. Durch das Bsp ist gezeigt, dass die Abbildung $J \to J^+$ im allgemeinen Fall nicht stetig ist.