Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Hridya Vinod Varma

Institut für Mathematik
Universität Heidelberg

Einführung in die Numerik

Sommersemester 2024

Übungsblatt 4 (Aktualisiert!) 17.05.2024

Digitale Abgabe über MaMpf bis 9 Uhr am 24.05.2024!

Aufgabe 4.1 (4 Punkte): Lineare Interpolation

Sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, sei p_1 die lineare Interpolierende von f für die Stützstellen $x_0 < x_1 \in \mathbb{R}$ und sei $e(x) := f(x) - p_1(x)$ der Interpolationsfehler.

(a) Betrachten Sie für festes $x \in (x_0, x_1)$ die Funktion

$$g(t) = e(t) - \frac{e(x)}{w_2(x)} w_2(t), \quad t \in [x_0, x_1], \qquad \text{mit} \quad w_2(x) = (x - x_0)(x - x_1).$$

Zeigen Sie, dass g in drei Punkten in $[x_0, x_1]$ verschwindet. Folgern Sie daraus durch mehrmaliges Anwenden des Satzes von Rolle, dass es ein $\xi \in (x_0, x_1)$ gibt, sodass

$$e(x) = \frac{f''(\xi)}{2} w_2(x)\,.$$ 2

(b) Sei $x_0 = -1, x_1 = 1$ und $f(x) = \sin x$. Berechnen Sie die lineare Interpolierende $p_1(x)$. Benutzen Sie das Ergebnis aus Teil (a) um zu zeigen, dass

$$\|e\|_{\infty,[-1,1]} := \max_{x \in [-1,1]} |e(x)| \leq \frac{1}{2} \sin(1)\,.$$

2

Aufgabe 4.2 (6 Punkte): Tschebyschev-Polynome der zweiten Art

Die Tschebyschev-Polynome der zweiten Art $U_n(x) \in P_n$ sind definiert durch

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin\left((n+1)\,\theta\right)}{\sin\theta} \quad \text{für } \theta \in (0, \pi),\ n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Rekursionsformel gilt für $x \in [-1, 1]$

$$U_0(x) := 1, \quad U_1(x) := 2x, \quad U_{n+1}(x) := 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$ 2

(b) Zeigen Sie, dass $T_n'(x) = nU_{n-1}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-1, 1]$. Dabei bezeichnet $T_n(x) \in P_n$ die Tschebyschev-Polynome der ersten Art

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [-1, 1],$$

welche aus der Vorlesung bekannt sind. 2

(c) Eine Fortsetzung des Definitionsbereichs von U_n auf ganz $\mathbb{R}$ liefert Polynome U_n vom genauen Grad n mit führenden Koeffizienten 2^n für $n \in \mathbb{N}$. 2

Aufgabe 4.3 (6 Punkte): Stabilität der numerischen Differentiation

Sei $f \in C^3([a,b])$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a,b]$. Ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $f'(x)$ besteht darin, eine möglichst kleine Schrittweite h zu wählen und den *zentralen Differenzenquotienten*

$$d_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

zu berechnen.

(a) Der Differenzenquotient d_h werde exakt berechnet, ohne Runden. Zeigen Sie, dass für den dabei gemachten *Diskretisierungsfehler* gilt:

$$|d_h(x) - f'(x)| \leq c \cdot h^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dabei darf c von f abhängen, aber nicht von h. $\boxed{2}$

(b) Untersuchen Sie die Konditionierung der exakten Berechnung der Funktion $d(h,x) = d_h(x)$ für $h \approx 0$. Zeigen Sie außerdem, dass die numerische Berechnung von $d(h,x)$ für $h \approx 0$ numerisch instabil ist. $\boxed{4}$

Programmieraufgabe 4: Richardson Extrapolation

Setzten Sie die Python Funktionen zur Lösung der Lagrange'schen Interpolationsaufgabe mittels der Newton'schen Basispolynome von Übungsblatt 3 ein[1], um ein Extrapolationsverfahren nach Richardson zu implementieren.

Schreiben Sie eine Funktion `extrapolate`, die zu einer gegebenen Funktion $a(h)$, welche für kleine Werte $h > 0$ auswertbar ist, den Wert $a(0)$ durch Richardson-Extrapolation berechnet und zurückliefert.

Ermöglichen Sie dem Benutzer dieser Funktion folgende Angaben:

- Die Angabe der Folge $(h_j)_{j=0,1,2,\ldots}$ mit $h_j = h_0/2^j$.
- Die feste Vorgabe des Index k und der Anzahl n der zur Interpolation zu verwendenden Folgenglieder h_{k+i}, $i = 0, \ldots, n$.

Extrapolieren Sie mit `extrapolate` folgende Funktionen nach $h = 0$:

$$f(h) = \frac{\cos(h) - 1}{\sin(h)},$$

$$g(h) = \frac{\sin(h)}{h}.$$

Wählen Sie k und n geeignet und stellen Sie den Extrapolationsvorgang graphisch dar. Vergleichen Sie auch mit dem analytischen Grenzwert und stellen Sie ein Extrapolationsfehler für festes k und wachsendes n graphisch dar.

Für die Programmieraufgabe: Geben Sie ein Jupyter-Notebook ab, dass allen geforderten Code sowie Ergebnisse enthält. Versehen Sie den Code sofern zum Verständnis nötig mit Kommentaren. Kommentieren Sie ggf. die Ergebnisse in Markdown-Zellen.

[1] Diese gibt es jetzt auch zum Download auf MaMpf.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte): Lineare Interpolation

Sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, sei p_1 die lineare Interpolierende von f für die Stützstellen $x_0 < x_1 \in \mathbb{R}$ und sei $e(x) := f(x) - p_1(x)$ der Interpolationsfehler.

(a) Betrachten Sie für festes $x \in (x_0, x_1)$ die Funktion

$$g(t) = e(t) - \frac{e(x)}{w_2(x)} w_2(t), \quad t \in [x_0, x_1], \qquad \text{mit} \quad w_2(x) = (x - x_0)(x - x_1).$$

Zeigen Sie, dass g in drei Punkten in $[x_0, x_1]$ verschwindet. Folgern Sie daraus durch mehrmaliges Anwenden des Satzes von Rolle, dass es ein $\xi \in (x_0, x_1)$ gibt, sodass

$$e(x) = \frac{f''(\xi)}{2} w_2(x).$$

2

(b) Sei $x_0 = -1, x_1 = 1$ und $f(x) = \sin x$. Berechnen Sie die lineare Interpolierende $p_1(x)$. Benutzen Sie das Ergebnis aus Teil (a) um zu zeigen, dass

$$\|e\|_{\infty,[-1,1]} := \max_{x\in[-1,1]} |e(x)| \leq \frac{1}{2} \sin(1).$$

c) Betrachte die Funktion $g(t) = e(t) - \frac{e(x)}{w_2(x)} w_2(t)$

mit $w_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$

Bei $t = x_0$:

$g(x_0) = e(x_0) - \frac{e(x)\, w_2(x_0)}{w_2(x)}$

$p_1(x_0) = f(x_0)$ $\quad e(x_0) = f(x_0) - p_1(x_0) = 0$ Somit

$g(x_0) = 0 - e(x) \cdot 0 = 0$

Bei $t = x_1$:

$g(x_1) = e(x_1) - \frac{e(x)\, w_2(x_1)}{w_2(x)}$

$p_1(x_1) = f(x_1)$, ist $e(x_1) = f(x_1) - p_1(x_1) = 0$

$g(x_1) = 0 - e(x) \cdot 0 = 0$

ZZ g in drei Punkte $(x_0, x_1]$ verschwindet

$\xi \in (x_0, x_1)$

$e(t) = \frac{f''(\xi)}{2} w_2(x)$

$g(t) = e(t) - \frac{e(x)\, w_2(t)}{w_2(x)}$

$e(x) = f(x) - p_1(x)$

$$g''(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\left(e(t) - e(x) \frac{w_2(t)}{w_2(x)}\right)\Bigg|_{t=\xi} = 0$$

$$e(x) = \frac{f''(\xi)}{2} w_2(x)$$

Dies zeigt, ein $\xi \in (x_0 \; x_1)$

$$e(x) = \frac{f''(\xi) w_2(x)}{2}$$

Aufgabe 4.1

(b) Lineare Interpolationsfunktion $p_1(x)$ durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$:

$$p_1(x) = \sin(-1) + \frac{\sin(1) - \sin(-1)}{1-(-1)}(x-(-1))$$

$$p_1(x) = -\sin(1) + \frac{\sin(1)+\sin(1)}{2}(x+1)$$

$$p_1(x) = -\sin(1) + \sin(1)(x+1)$$

$$p_1(x) = -\sin(1) + \sin(1)\,x + \sin(1)$$

$$p_1(x) = \sin(1)\,x$$

$$e(x) = f(x) - p_1(x) = \sin(x) - \sin(1)\,x$$

$$e(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x+1)(x-1) \qquad f''(x) = -\sin(x)$$

$$w_2(x) = (x+1)(x-1) = x^2-1$$

$$\Rightarrow e(x) = \frac{-\sin(\xi)}{2}(x^2-1)$$

$$|e(x)| = \left|\frac{-\sin(\xi)}{2}(x^2-1)\right| \leq \frac{|\sin(\xi)|}{2}|x^2-1|$$

max von $|x^2-1|$ im Intervall $[-1,1]$ ist 1

$$\|e\|_{\infty,[-1,1]} = \max_{x\in[-1,1]} |e(x)| \leq \frac{|\sin(\xi)|}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Da $\sin(\xi) \leq \sin(1)$ für $\xi \in [-1,1]$, gilt:

$$\|e\|_{\infty,[-1,1]} \leq \frac{\sin(1)}{2}$$

$$\Rightarrow \|e\|_{\infty,[-1,1]} := \max_{x\in[-1,1]} |e(x)| \leq \frac{\sin(1)}{2}$$

Aufgabe 4.3

a) Taylor-Entwicklung von $f(x+h)$ und $f(x-h)$ um x:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$$

für geeignete ξ_1 und ξ_2 in $(x, x+h)$ bzw. $(x-h, x)$.

$$d_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{\left(f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3\right) - \left(f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3\right)}{2h}$$

$$= \frac{2f'(x)h + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3 + \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3}{2h}$$

$$= f'(x) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}\right)$$

$$|d_h(x) - f'(x)| = \left|\frac{h^2}{12}\left(\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}\right)\right|$$

Da f''' stetig und auf $[a,b]$ beschränkt gilt:

$$\exists M \;\forall x \in [a,b] : |f'''(x)| \leq M$$

$$\Rightarrow \quad |d_h(x) - f'(x)| \leq \frac{h^2}{12} \cdot M$$

Wählen wir $c = \frac{M}{12}$:

$$|d_x(x) - f'(x)| \leq c \cdot h^2$$

b) Wenn h sehr klein ist, sind $f(x+h)$ und $f(x-h)$ fast gleich. Bei der Subtraktion der beiden kann es zu einem erheblich relativen Fehler führen. Bei der Division durch die sehr kleine Zahl h können Rundungsfehler verstärkt werden.

Sei $\hat{f}(x)$ der Wert von $f(x)$ unter Berücksichtigung von Rundungsfehlern:

$$\hat{d}_h(x) = \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x-h)}{2h}$$

Sei ε der Rundungsfehler von f, sodass:

$$\hat{f}(x) = f(x) + \delta(x) \quad \text{mit} \quad |\delta(x)| \leq \varepsilon |f(x)|$$

$$\Rightarrow \hat{\partial}_h(x) = \frac{(f(x+h) + \delta(x+h)) - (f(x-h) + \delta(x-h))}{2h}$$

$$= \partial_h(x) + \frac{\delta(x+h) - \delta(x-h)}{2h}$$

Da δ von der Maschinengenauigkeit abhängt und sich die Fehler durch die Division durch h verstärken, führt dies zu:

$$\left| \frac{\delta(x+h) - \delta(x-h)}{2h} \right| \approx \frac{2\varepsilon}{h}$$

Für sehr kleine h ist dieser Term sehr groß. Das bedeutet, dass die numerische Berechnung von $\partial(h, x)$ für $h \approx 0$ numerisch instabil ist.

Aufgabe 4.2:

a) zz.: Für $n = 0$

$$U_0(\cos\theta) = \frac{\sin((0+1)\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1 = U_0(x)$$

Für $n = 1$

$$U_1(\cos\theta) = \frac{\sin((1+1)\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{Da } 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta = 2x = U_1(x)$$

Annahme: Die Formel gilt für n und $n-1$

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} \qquad U_{n-1}(\cos\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

zz: Für $n \to n+1$

$$U_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\, U_n(\cos\theta) - U_{n-1}(\cos\theta)$$

$$= 2\cos\theta \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin\theta}$$

$\boxtimes$

b) $T_n'(x) = \frac{d}{dx} \cos(n \arccos x)$

$$T_n'(x) = -n \sin(n \arccos x) \cdot \frac{d}{dx} \arccos x$$

$$= -n \sin(n \arccos x) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad T_n'(x) = n\, U_{n-1}(x)$$

c) $U_{n+1}(x) = 2x\, U_n(x) - U_{n-1}(x)$

mit $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$

$\Rightarrow$ $U_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n.

Wir zeigen den führenden Koeffizienten durch Induktion.

Für $n=0$ ist der führende Koeffizient 1,

für $n=1$ ist er 2.

Annahme: $U_n(x)$ hat den führenden Koeffizienten 2^n

$U_{n+1}(x) = 2x\, U_n(x) - U_{n-1}(x)$ hat den führenden Koeffizienten

$2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

$\Rightarrow$ $U_n(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ hat den führenden Koeffizienten 2^n