Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Hridya Vinod Varma

Institut für Mathematik
Universität Heidelberg

Einführung in die Numerik

Sommersemester 2024

Übungsblatt 3 10.05.2024

Digitale Abgabe über MaMpf bis 9 Uhr am 17.05.2024!

Aufgabe 3.1 (6 Punkte): Schema von Neville-Aitken

Seien $n+1$ Wertepaare $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ gegeben. Es bezeichne $p_{i,j} \in P_k$ mit $j = i+k$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom vom Grad k, $k \in \mathbb{N}_0$, zu den Wertepaaren $(x_i, y_i), \ldots, (x_j, y_j)$.

- Zeigen Sie, dass die folgende Rekursionsformel gilt:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad p_{i,i}(x) = y_i && \text{für } i = 0, ..., n, \\
&(ii) \quad p_{i,j}(x) = \frac{(x-x_i)p_{i+1,j}(x) - (x-x_j)p_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i} && \text{für } i = 0, ..., n-k.
\end{aligned}
$$

2

- Mit Hilfe dieser Rekursionsformel kann das Interpolationspolynom $p = p_{0,n}$ zu den Wertepaaren $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ an einem beliebigen Punkt ξ ausgewertet werden (ohne p aufzustellen). Vergleichen Sie die Komplexität dieses Algorithmus mit der Komplexität der Aufstellung des Newtonschen Interpolationspolynoms und der Auswertung in ξ mit Hilfe des Horner-Schemas. 2

- Für verschiedene Orte wurde an einem bestimmten Tag die folgenden Tageslängen gemessen:

Ort	Tageslänge	Lage
A	17h 28m	$55,7°$
B	18h 00m	$57,7°$
C	18h 31m	$59,3°$
D	19h 56m	$62,6°$
E	22h 34m	$65,6°$

Bestimmen Sie die Tageslänge am Ort F bei $61,7°$ durch Auswertung des zugehörigen Interpolationspolynoms mit Hilfe des Neville-Algorithmus. 2

Aufgabe 3.2 (5 Punkte): Stützkoeffizienten für die Lagrange-Interpolation

Gegeben seien $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Die Stützkoeffizienten bezüglich der ersten $m+1$ Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_m$ (mit $0 \le m \le n$) seien durch

$$\kappa_k^{(m)} = \prod_{s=0, s\neq k}^{m} \frac{1}{x_k - x_s} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, m$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$\sum_{k=0}^{m} \kappa_k^{(m)} = 0 \quad \forall m \geq 1.$$

2

(b) Zeigen Sie für $m = 0, 1, \ldots, n-1$, dass die folgende Rekursionsformel gilt:

$$\kappa_k^{(m+1)} = \frac{\kappa_k^{(m)}}{x_k - x_{m+1}} \quad \forall k = 0, 1, \ldots, m.$$

1

(c) Formulieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung der Stützkoeffizienten $\kappa_k^{(n)}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$. Nutzen Sie hierfür die in (a) und (b) angegebenen Identitäten. Außerdem bestimmen Sie den dabei anfallenden Rechenaufwand in der Form "$an^q + \mathcal{O}(n^{q-1})$ arithmetische Operationen". 2

Aufgabe 3.3 (5 Punkte): Interpolationsfehler bei der Newton-Interpolation

Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ sei definiert durch $f : t \mapsto \sqrt{t}$.

(a) Berechnen Sie das Newtonsche Interpolationspolynom von Grad 2 ($p \in P_2$) für die Stützstellen $t_0 = \frac{1}{4}$, $t_1 = 1$, und $t_2 = 4$. 2

(b) Vergleichen Sie den Interpolationsfehler im Punkt $t = 3$ mit der Fehlerabschätzung für Interpolationspolynome glatter Funktionen in Satz 3.5.1 (Interpolationsfehler) und Korollar 3.5.2. 3

Programmieraufgabe 3: Polynomauswertung

Für die Newton-Interpolation schreiben Sie zwei Funktionen:

(a) Eine Funktion `newton_coeff`, die aus gegebenen Stützstellen $t_0, \ldots, t_k$ und Stützwerten $y_0, \ldots, y_k$ die Newton-Koeffizienten $a_0, \ldots, a_k$ berechnet, unter Verwendung dividierter Differenzen.

(b) Eine Funktion `newton_value`, die für ein gegebenes Newton-Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_k$ (also gegebene Stützstellen $t_0, \ldots, t_k$ und Koeffizienten $a_0, \ldots, a_k$) an der Stelle t sowohl den Funktionswert $p(t)$ als auch die Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} p(t)$ berechnet.
Hinweis: Überlegen Sie sich eine geeignete Erweiterung des Horner-Schemas.

Interpolieren Sie mit `newton_coeff` folgende Funktionen:

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad g(t) = \sqrt{|t|}, \quad -1 \leq t \leq 1,$$

jeweils zu den Stützstellen $t_i = -1 + ih$, $i = 0, \ldots, n$ mit $h = 2/n$ für $n = 5, 10, 15, 20$. Werten Sie die Interpolationspolynome mit `newton_value` auf einem dichten Gitter (z.B. 1000 Gitterpunkte) aus, stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar und vergleichen Sie sie mit den richtigen Funktionsverläufen.

Für die Programmieraufgabe: Geben Sie ein Jupyter-Notebook ab, dass allen geforderten Code sowie Ergebnisse enthält. Versehen Sie den Code sofern zum Verständnis nötig mit Kommentaren. Kommentieren Sie ggf. die Ergebnisse in Markdown-Zellen.

Aufgabe 3.1 (6 Punkte): Schema von Neville-Aitken

Seien $n+1$ Wertepaare $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ gegeben. Es bezeichne $p_{i,j} \in P_k$ mit $j = i+k$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom vom Grad k, $k \in \mathbb{N}_0$, zu den Wertepaaren $(x_i, y_i), \ldots, (x_j, y_j)$.

- Zeigen Sie, dass die folgende Rekursionsformel gilt:

$$(i) \quad p_{i,i}(x) = y_i \qquad \text{für } i = 0, ..., n,$$

$$(ii) \quad p_{i,j}(x) = \frac{(x-x_i)p_{i+1,j}(x) - (x-x_j)p_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i} \qquad \text{für } i = 0, ..., n-k.$$

2

- Mit Hilfe dieser Rekursionsformel kann das Interpolationspolynom $p = p_{0,n}$ zu den Wertepaaren $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ an einem beliebigen Punkt ξ ausgewertet werden (ohne p aufzustellen). Vergleichen Sie die Komplexität dieses Algorithmus mit der Komplexität der Aufstellung des Newtonschen Interpolationspolynoms und der Auswertung in ξ mit Hilfe des Horner-Schemas. 2

- Für verschiedene Orte wurde an einem bestimmten Tag die folgenden Tageslängen gemessen:

Ort	Tageslänge	Lage
A	17h 28m	55,7°
B	18h 00m	57,7°
C	18h 31m	59,3°
D	19h 56m	62,6°
E	22h 34m	65,6°

Bestimmen Sie die Tageslänge am Ort F bei 61,7° durch Auswertung des zugehörigen Interpolationspolynoms mit Hilfe des Neville-Algorithmus. 2

I.A: $p_{i,i}(x) = y_i = y[x_i]$ for $k=0$

I. Annahme $i<j$ mit $j-i = k-1$

I.S. folgt $i<j$ mit $j-i=k$

$$p_{ij}(x) = \underbrace{p_{i,j-1}(x)}_{\in P_{k-1}} + a'_k(x-x_i)\ (x-x_{j-1})$$

z.z. $a'_k = y[x_i, \ldots x_j]$ $\quad p_{ij-1} \in P_{k-1}$

ist der führende Koeffizient d.h. Koeff. zu $z^k = a'_k$

$$p_{ij}(x) = \frac{(x-x_i)p_{i+1j}(x) - (x-x_j)\,p_{ij-1}(x)}{x_j - x_i}$$

I. Annahme folgt führende Koeffizienten p_{i+1j} und p_{ij-1} respektive $y[x_{i+1} \ldots x_j]$ $\quad y[x_i \cdots x_{j-1}]$ folgt

$$a_k^i = \frac{y(x_{i+1} \dots x_j) - y[x_i \dots x_{j-1})}{x_j - x_i} = y[x_i \dots x_j] \qquad \square$$

- Rekursionsformel Interpolationspolynom $p = p_{0,n}$

Wertepaare $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ Bel. Punkt ξ

Polynome gegeben Horner schema

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

Horner Schema

$b_n = a_n$

$b_k = a_k + b_{k+1} \xi \qquad k = n-1 \dots 0$

Polynome gegeben in Newton Darstellung

Newton. $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$

Skript von Scheidl

verwende Horner Schema

$b_n = a_n$

$b_k = a_k + b_{k+1}(\xi - x_k) \qquad$ für $k = n-1, \dots 0$

$p(\xi) = b_0$.

Ort	Tageslänge	Lage
A	17h 28m	$55,7°$
B	18h 00m	$57,7°$
C	18h 31m	$59,3°$
D	19h 56m	$62,6°$
E	22h 34m	$65,6°$

Ort	Tageslänge	Lage
A	1048m	$55,7°$
B	1080m	$57,7°$
C	1111m	$59,3°$
F	x	$61,7°$
D	1196	$62,6$

Pon (61,7)

$$\frac{(61,7-57,7)\cdot 1080-(61,7-55,7)\cdot 1048}{57,7-55,7}$$

$$\frac{\overset{4320}{4\cdot 1080} \qquad \overset{6288}{6\cdot 1048}}{2} = 984$$

16 std 04 min.

Aufgabe 3.2 (5 Punkte): Stützkoeffizienten für die Lagrange-Interpolation

Gegeben seien $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Die Stützkoeffizienten bezüglich der ersten $m+1$ Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_m$ (mit $0 \leq m \leq n$) seien durch

$$\kappa_k^{(m)} = \prod_{s=0, s\neq k}^{m} \frac{1}{x_k - x_s} \qquad \text{für } k = 0, 1, \ldots, m$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$\sum_{k=0}^{m} \kappa_k^{(m)} = 0 \quad \forall m \geq 1.$$

(b) Zeigen Sie für $m = 0, 1, \ldots, n-1$, dass die folgende Rekursionsformel gilt:

$$\kappa_k^{(m+1)} = \frac{\kappa_k^{(m)}}{x_k - x_{m+1}} \qquad \forall k = 0, 1, \ldots, m.$$

(c) Formulieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung der Stützkoeffizienten $\kappa_k^{(n)}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$. Nutzen Sie hierfür die in (a) und (b) angegebenen Identitäten. Außerdem bestimmen Sie den dabei anfallenden Rechenaufwand in der Form "$an^q + \mathcal{O}(n^{q-1})$ arithmetische Operationen".

a) ZZ. dass die Identität

$$\sum_{k=0}^{m} k(m)_k = 0 \quad \text{for alle } m \geq 1$$

$$K(m)_k = \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{x_k - x_s}$$

$$\sum_{k=0}^{m} k(m)_k = \sum_{k=0}^{m} \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{x_k - x_s}$$

$$\sum_{s=0}^{m} \sum_{k=s}^{m} \frac{1}{x_k - x_s}$$

$$\sum_{s=0}^{m} \left(\sum_{k=s}^{m} \frac{1}{x_k - x_s} \right)$$

$$\sum_{k=s}^{m} \frac{1}{x_k - x_s} = \frac{1}{x - x_s} + \frac{1}{x_{s+1} - x_s} + \ldots + \frac{1}{x_m - x_s}$$

also gilt Identität

$$\sum_{k=0}^{m} k(m)_k \quad \text{für alle } m \geq 1$$

b)

Zeigen Sie für $m = 0, 1, \ldots, n-1$, dass die folgende Rekursionsformel gilt:

$$\kappa_k^{(m+1)} = \frac{\kappa_k^{(m)}}{x_k - x_{m+1}} \quad \forall k = 0, 1, \ldots, m.$$

$$K_k^{(m+1)} = \frac{K_k^{(m)}}{x_k - x_{m+1}} \qquad \forall\ k = 0, 1, \ldots, m$$

für $m = 0, 1, \ldots\ n-1$

I.A.

$m=0$ · $k(0)_k = 0$

$$k(1)_k = k(0)_k \frac{1}{x_k - x_1}$$

$k(0)_k = 0 \quad m=0$

I.V. $\quad k(p+1)_k \quad k(p)_k \dfrac{1}{x_k - x_{p+1}} \qquad k = 0, 1, \ldots p$

I.S. $$k(p+1)_k = \sum_{s=0}^{p+1} \frac{1}{x_k - x_s} = \frac{1}{x_k - x_{p+1}} + \sum_{s=0}^{p} \frac{1}{x_k - x_s}$$

$$= \frac{1}{x_k - x_{p+1}} + k(p)_k \frac{1}{x_k - x_{p+1}}$$

$$= \frac{2}{x_k - x_{p+1}}$$

$m = p+1$ erfolgt

Aufgabe 3.3:

a) $f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = f[t_0]$

$f(1) = \sqrt{1} = 1 = f[t_1]$

$f(4) = \sqrt{4} = 2 = f[t_2]$

$f[t_0, t_1] = \frac{f[t_1] - f[t_0]}{t_1 - t_0} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

$f[t_1, t_2] = \frac{f[t_2] - f[t_1]}{t_2 - t_1} = \frac{2-1}{\cancel{2-1}\; 4-1} = \frac{1}{3}$

$f[t_0, t_1, t_2] = \frac{f[t_1, t_2] - f[t_0, t_1]}{t_2 - t_0} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{4 - \frac{1}{4}} = -\frac{4}{45}$

$p(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1](t - t_0) + f[t_0, t_1, t_2](t - t_0]$
$\cdot (t - t_1)$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(t - \frac{1}{4}) - \frac{4}{45}(t - \frac{1}{4})(t-1)$

b) $E(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - t_i)$, $\xi \in [\min(t_0, .., t_n),$
$\max(t_0, .., t_n)]$

$E(t) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} (t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)$

$f(t) = t^{1/2}$

$f'(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$

$f''(t) = -\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(t) = \frac{3}{8} t^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8 t^{5/2}}$ $\qquad \xi \in [\frac{1}{4}, 4]$, $f'''(\xi) = \frac{3}{8 \xi^{5/2}}$

Für $t = 3$:

$E(3) = \frac{3}{8\xi^{5/2}} \cdot \frac{1}{6} (3 - \frac{1}{4})(3-1)(3-4) = -\frac{11}{32 \xi^{5/2}}$

$-\frac{11}{32 \cdot 4^{5/2}} \leq E(3) \leq -\frac{11}{32(\frac{1}{4})^{5/2}}$

$\approx -0{,}0107 \leq E(3) \leq -11$