Aufgabe 6.3 (2 Punkte): Näherungswert mit Quadratur

Bestimmen Sie einen Näherungswert zu den Integralen

(a) $\int_{-1}^{1} \cos(x)\mathrm{d}x$

(b) $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 2e^x - 5)\mathrm{d}x$

unter Verwendung der Trapezregel und der Simpsonregel. Bestimmen Sie darüberhinaus den exakten Wert der Integrale sowie den jeweiligen absoluten Fehler.

Trapezregel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\cdot h) + f(b)\right)$ $\quad h = \frac{b-a}{n}$ (Schrittweite)

Simpsonregel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1,3,5\ldots}^{n-1} f(a+i\cdot h) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(a+i\cdot h) + f(b)\right) \quad h = \frac{b-a}{n}$$

→ muss geradezahl sein.

a) $\int_{-1}^{1} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_{-1}^{1} = \sin(1) - \sin(-1) = 2\sin(1)$

Trapez Regel: $\approx 1,6829$

Simpson Regel: $\approx 1,6829$

Exaktwert $2\sin(1) \approx 1,6829$

Ab. Fehler Trapezregel: 0.0

" " Simpsonregel: 0,0

b) $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 2e^x - 5)\,dx = \left[x^3 - 2e^x - 5x\right]_{-1}^{1} = (1^3 - 2e^1 - 5\cdot 1) - ((-1)^3 - 2e^{-1} - 5$

Trapez Regel: $\approx -19,1587$

Simpson Regel: $\approx -19,1587$

Exaktwert $\approx -19,1587$

Ab. Fehler Trapezregel: 0.0

" " Simpsonregel: 0.0

Aufgabe 6.1:

a) $s_i(x) = a_i(x-x_i)^2 + b_i(x-x_i) + c_i$

Bedingungen:

1. Interpolationsbedin: $s_i(x_i) = f_i \quad , \quad s_i(x_i+1) = f_{i+1}$

$\forall\, i = 0,1,\dots,n-1$

2. Stetigkeit der ersten Ableitung: $s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$

$\forall\, i = 0,1,\dots,n-2$

3. $s'(x_0) = f_0'$

1. $s_i(x_i) = c_i = f_i$

$s_i(x_{i+1}) = a_i(x_{i+1}-x_i)^2 + b_i(x_{i+1}-x_i) + f_i = f_{i+1}$

$\Rightarrow a_i(x_{i+1}-x_i)^2 + b_i(x_{i+1}-x_i) = f_{1+1} - f_i$

2. $s_i'(x_{i+1}) = 2a_i(x_{i+1}-x_i) + b_i$

$s_{i+1}'(x_{i+1}) = b_{i+1}$

$\Rightarrow 2a_i(x_{i+1}-x_i) + b_i = b_{i+1}$

3. $s_0'(x_0) = b_0 = f_0'$

Berechnung der Koeffizienten:

Für s_0 in $[x_0, x_1]$:

$c_0 = f_0$

$a_0(x_1-x_0)^2 + f_0'(x_1-x_0) + f_0 = f_1$

$\Rightarrow a_0 = \dfrac{f_1 - f_0 - f_0'(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^2}$

$b_0 = f_0'$

Für s_1 in $[x_1, x_2]$:

$c_1 = f_1$

$b_1 = 2a_0(x_1-x_0) + b_0 = 2a_0(x_1-x_0) + f_0'$

$a_1(x_2-x_1)^2 + b_1(x_2-x_1) + f_1 = f_2$

$a_1 = \dfrac{f_2 - f_1 - b_1(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)^2}$

Für s_i in $[x_i, x_{i+1}]$

$c_i = f_i$

$b_i = 2a_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + b_{i-1}$

$$a_i = \frac{f_{i+1} - f_i - b_i(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

$\Rightarrow$ Die eindeutige Bestimmung der Koeffizienten zeigt, dass es jedes $f_0' \in \mathbb{R}$ genau einen interpolierenden quadratischen Spline gibt, der die Zusatzbedingung $s'(x_0) = f_0'$ erfüllt.

b) periodische Randbedingung: $s'(x_0) = s'(x_n)$

$s_0'(x_0) = b_0$

$s_{n-1}'(x_n) = s_{n-1}'(x_{n-1}) + 2a_{n-1}(x_n - x_{n-1})$

$\quad = b_{n-1} + 2a_{n-1}(x_n - x_{n-1})$

$s_0'(x_0) = s_{n-1}'(x_n)$

$\Rightarrow \quad b_0 = b_{n-1} + 2a_{n-1}(x_n - x_{n-1})$

$\Rightarrow \quad b_i = 2a_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + b_{i-1}$

Die Splinefunktion s mit der per. Randbedin. $s'(x_0) = s'(x_n)$ ist eindeutig, wenn das Gleichungssystem aus der Interpolations-bedingung, der Stetigkeit der ersten Ableitung und der per. Randbedin. regulär ist.

Aufgabe 6.2

Zu suchen: $p(x)$ in den jew. Räumen P_0, P_1 mit der Bedingung:

$$\int_0^1 (f(x) - p(x))^2 \, dx \text{ ist minimal}$$

In P_0: $\quad p(x) = a_0$

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a_0)^2 \, dx$$

$$\frac{d}{da_0} \int_0^1 (\sqrt{x} - a_0)^2 \, dx = 0$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a_0)^2 \, dx = \int_0^1 (x - 2a_0\sqrt{x} + a_0^2) \, dx$$

$$= \int_0^1 x \, dx - 2a_0 \int_0^1 \sqrt{x} \, dx + a_0^2 \int_0^1 1 \, dx$$

$$\int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad , \quad \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 1 \, dx = [x]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - 2a_0 \cdot \frac{2}{3} + a_0^2 \cdot 1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} a_0 + a_0^2$$

$$\frac{d}{da_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} a_0 + a_0^2\right) = -\frac{4}{3} + 2a_0 = 0 \quad \Rightarrow a_0 = \frac{2}{3}$$

In P_1: $\quad p(x) = a_0 + a_1 x$

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - (a_0 + a_1 x))^2 \, dx$$

$$\frac{d}{da_0} \int_0^1 (\sqrt{x} - a_0 - a_1 x)^2 \, dx = 0$$

$$\frac{d}{da_1} \int_0^1 (\sqrt{x} - a_0 - a_1 x)^2 \, dx = 0$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx - a_0 \int_0^1 1\, dx - a_1 \int_0^1 x\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} - a_0 - \frac{a_1}{2} = 0 \quad \Rightarrow 2 - 3a_0 - a_1 = 0 \quad \Rightarrow 3a_0 + a_1 = 2$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, x\, dx - a_0 \int_0^1 x\, dx - a_1 \int_0^1 x^2\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^{3/2} dx - a_0 \frac{1}{2} - a_1 \frac{1}{3} = 0$$

$$\int_0^1 x^{3/2} dx = \left[\frac{2}{5} x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} - a_0 \frac{1}{2} - a_1 \frac{1}{3} = 0 \quad \Rightarrow 6 - 5a_0 - 2a_1 = 0 \quad \Rightarrow 5a_0 + 2a_1 = 6$$

$$\text{I. } 3a_0 + a_1 = 2 \qquad | \cdot 2$$
$$\text{II. } 5a_0 + 2a_1 = 6$$

$$a_0 = -2$$

$$\text{I. } 3 \cdot (-2) + a_1 = 2$$
$$a_1 = 8 \qquad p(x) = -2 + 8x$$

$\Rightarrow$ Beste Approx. in P_0: $a_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow p(x) = \frac{2}{3}$

Beste Approx. in P_1: $p(x) = -2 + 8x$

Aufgabe 6.4:

a) Für $n=0$:

$$x_0 = a + \frac{b-a}{2}$$

$$p_0(x) = f(x_0)$$

$$Q_0(f) = (b-a)\, f\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow w_0 = b-a$$

Für $n=1$:

$$x_0 = a + \frac{b-a}{3} \quad , \quad x_1 = a + \frac{2(b-a)}{3}$$

$$Q_1(f) = \int_a^b p_1(x)\, dx \quad , \quad Q_1(f) = A\, f(x_0) + B\, f(x_1)$$

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x - \left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right)}{\left(a + \frac{b-a}{3}\right) - \left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right)}$$

$$= \frac{x - \left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right)}{-\frac{b-a}{3}} = -3\, \frac{x - \left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right)}{b-a}$$

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x - \left(a + \frac{b-a}{3}\right)}{\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) - \left(a + \frac{b-a}{3}\right)}$$

$$= \frac{x - \left(a + \frac{b-a}{3}\right)}{\frac{b-a}{3}} = 3\, \frac{x - \left(a + \frac{b-a}{3}\right)}{b-a}$$

$$w_0 = \int_a^b L_0(x)\, dx = -3 \int_a^b \frac{x - \left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right)}{b-a}\, dx$$

$$w_1 = \int_a^b L_1(x)\, dx = 3 \int_a^b \frac{x - \left(a + \frac{b-a}{3}\right)}{b-a}\, dx$$

$$\Rightarrow w_0 = w_1 = \frac{b-a}{2}$$

Für $n=2$:

$$x_0 = a + \frac{b-a}{4}, \quad x_1 = a + \frac{2(b-a)}{4}, \quad x_2 = a + \frac{3(b-a)}{4}$$

$$Q_2(f) = \int_a^b p_2(x)\, dx$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

...

$$w_0 = \frac{b-a}{6}, \quad w_1 = \frac{2(b-a)}{3}, \quad w_2 = \frac{b-a}{6}$$

b) Für $n=0$:

$p_0(x)$ ist konstant, also wird jedes konstante Polynom (Grad 0) genau integriert. Der Genauigkeitsgrad ist 0.

Für $n=1$:

$p_1(x)$ ist linear, also werden konstante und lineare Polynome genau integriert. Der Genauigkeitsgrad ist 1.

Für $n=2$:

$p_2(x)$ ist quadratisch, also werden konstante, lineare und quadratische Polynome genau integriert. Der Genauigkeitsgrad ist 2.