Aufgabe 8.1 (4 Punkte): Frobeniusnorm

Die Frobenius-Norm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie:

(i) Die Frobenius-Norm definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(ii) Die Frobenius-Norm ist verträglich mit der euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$.

(iii) Die Frobenius-Norm ist submultiplikativ.

(iv) Die Frobenius-Norm ist keine natürliche Matrixnorm.

Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für die Teilaufgaben.

(i) Positive Definitheit $\|A\|_F \geq 0$

$\|A\|_F = 0$ genau dann wenn $A = 0$.

wenn $a_{ij} = 0$ sind $\forall \in ij$. dann A ist Nullmatrix

(ii) $\|\alpha A\|_F = |\alpha| \|A\|_F \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\|\alpha A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(|\alpha|^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

$$= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = |\alpha| \|A\|_F$$

Δ Ungl.

$$\|A+B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\|A+B\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (|a_{ij}| + |b_{ij}|)^2\right)^{1/2}$$

$$= \|A\|_F + \|B\|_F$$

b) $x \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$$

euklidischenorm von Ax

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|^2$$

Cauchy-Schwarz Ungl.

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \|Ax\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right) \|x\|_2^2$$

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$$

(iii) $\forall \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^2$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2 \right)$$

$$\|AB\|_F^2 \leq \|A\|_F^2 \|B\|_F^2 \quad \Big/ \cdot \sqrt{}$$

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

(iv)

Aufgabe 8.2

a)

$$uv^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \dots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ u_2v_1 & \dots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ u_nv_1 & \dots & \dots & u_nv_n \end{pmatrix}$$

Jede Spalte von uv^T ist ein Vielfaches von u. und da $v \neq 0$ ist jede Spalte eine lineare Kombination von u.

Jede Zeile von uv^T ist ein Vielfaches von v^T und da $u \neq 0$ ist jede Zeile eine lineare Kombination von v^T.

$\Rightarrow$ Da alle Spalten linear ~~unab~~ abhängig sind und von u abhängen hat die Matrix Rang 1.

Analog gilt das gleiche für vu^T, wobei jede Spalte ein Vielfaches von v und jede Zeile ein Vielfaches von u^T ist. $\Rightarrow vu^T$ hat Rang 1.

b)

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u} \qquad / \cdot A + uv^T$$

$$I = (A + uv^T)\left(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}\right)$$

$$\Rightarrow A\left(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}\right) = AA^{-1} - A\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

$$= I - \frac{uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

$$\Rightarrow uv^TA^{-1} - uv^T\cancel{A}\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u} = uv^TA^{-1} - \frac{(uv^TA^{-1})(uv^TA^{-1})}{1+v^TA^{-1}u}$$

$$= uv^TA^{-1}\left(1 - \frac{v^TA^{-1}u}{1+v^TA^{-1}u}\right) = uv^TA^{-1}\left(\frac{1+v^TA^{-1}u - v^TA^{-1}u}{1+v^TA^{-1}u}\right)$$

$$= \frac{uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

$$\Rightarrow I - \frac{uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u} + \frac{uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u} = I \quad \square$$

Aufgabe 8.4

a) zu zeigende Eigenschaften:

1. Abgeschlossenheit unter der Multiplikation

2. Existenz des neutr. Ele.

3. Existenz der Inversen

1. Sei $A, B \in L$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ a_{21} & 1 & \ddots & & 0 \\ a_{31} & \cdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & & 1 & \\ a_{n1} & \cdots & & & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & \vdots \\ b_{31} & \cdots & 1 & \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ b_{n1} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}+b_{21} & 1 & \cdots & \\ a_{31}+b_{31} & \cdots & 1 & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ AB ist ebenfalls eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen

$\Rightarrow$ unter der Multiplikation abgeschlossen

2. $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -a_{n1} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ist eine Untergruppe der Invertierbaren Matrizen

b) Annahme: $A = L_1 R_1 = L_2 R_2$

$$L_1 R_1 = L_2 R_2$$
$$L_1^{-1} L_1 R_1 = L_1^{-1} L_2 R_2 \quad \Rightarrow \text{ da } L \text{ invertierbar ist gilt}$$
$$R_1 = L_1^{-1} L_2 R_2$$

Sei $L = L_1^{-1} L_2$, sodass $R_1 = L R_2$

Da L_1^{-1} und L_2 eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen, ist das Produkt L auch eine untere Dreiecksmatrix.

Da R_1 und R_2 jeweils obere Dreiecksmatrizen sind muss L die Identitätsmatrix sein, sodass $R_1 = L R_2$ stimmt.

Daraus folgt: $L = L_1^{-1} L_2 = I \quad \Rightarrow \quad L_1 = L_2$

$\Rightarrow \quad R_1 = R_2$

$\Rightarrow$ die LR-Zerlegung $A = LR$ ist eindeutig.