# Algoritmos y Estructuras de Datos

Primer cuatrimestre de 2024

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Correctitud

# Transformación de estados

- Llamamos estado de un programa a los valores de todas sus variables en un punto de su ejecución:
    1. Antes de ejecutar la primera instrucción,
    2. entre dos instrucciones, y
    3. después de ejecutar la última instrucción.
- Podemos considerar la ejecución de un programa como una sucesión de estados.
- La asignación es la instrucción que permite pasar de un estado al siguiente en esta sucesión de estados.
- Las estructuras de control se limitan a especificar el flujo de ejecución (es decir, el orden de ejecución de las asignaciones).

# Afirmaciones sobre estados

- Sea el siguiente programa que se ejecuta con estado inicial $\{True\}$.
- $\{True\}$

  ```
  int x = 0;
  ```
  $\{x = 0\}$
  ```
  x = x + 3;
  ```
  $\{x = 3\}$
  ```
  x = 2 * x;
  ```
  $\{x = 6\}$
- ¿Finaliza siempre el programa? Sí, porque no hay ciclos
- ¿Cuál es el estado final al finalizar su ejecución? $\{x = 6\}$

# Afirmaciones sobre estados

- Sea el siguiente programa que se ejecuta con estado inicial con una variable $a$ ya definida ($\{a = A_0\}$).
- $\{a = A_0\}$
  ```
  int b = a + 2;
  ```
  $\{a = A_0 \land b = A_0 + 2\}$
  ```
  int result = b - 1;
  ```
  $\{a = A_0 \land b = A_0 + 2 \land result = (A_0 + 2) - 1 = A_0 + 1\}$
- ¿Finaliza siempre el programa? Sí, porque no hay ciclos
- ¿Cuál es el estado final al finalizar su ejecución?
  $\{a = A_0 \land b = A_0 + 2 \land result = A_0 + 1\} \Rightarrow \{result = a + 1\}$
- $A_0$ es lo mismo que $old(a)$, $a = A_0$ es lo mismo que $a = old(a)$, vamos a usar la notación que nos resulte cómoda.

# Corrección de un programa

- **Definición.** *Decimos que un programa $S$ es correcto respecto de una especificación dada por una precondición $P$ y una postcondición $Q$, si siempre que el programa comienza en un estado que cumple $P$, el programa* **termina su ejecución**, *y en el estado final* **se cumple** $Q$.
- **Notación.** Cuando $S$ es correcto respecto de la especificación $(P, Q)$, lo denotamos con la siguiente tripla de Hoare:

$$\{P\}\,S\,\{Q\}.$$

# Afirmaciones sobre estados

- Sea la siguiente especificación para incrementar en una unidad el valor de un entero.
- proc *spec_incrementar*(inout $a : \mathbb{Z}$){
  requiere $\{a = A_0\}$
  asegura $\{a = A_0 + 1\}$
  }
- ¿Es el siguiente programa S **correcto** con respecto a su especificación?

```
int incrementar(int& a) {
  int b = a + 2;
  int result = b - 1;
  a = result;
}
```

# Ejemplo

- proc $spec\_incrementar$(inout $a : \mathbb{Z}$){
  requiere $\{a = A_0\}$
  asegura $\{a = A_0 + 1\}$
  }
- Sea el siguiente programa que se ejecuta con estado inicial con una variable $a = A_0$.
- $\{a = A_0\}$
  ```
  int b = a + 2;
  ```
  $\{a = A_0 \land b = A_0 + 2\}$
  ```
  int result = b - 1;
  ```
  $\{a = A_0 \land b = A_0 + 2 \land result = (A_0 + 2) - 1 = A_0 + 1\}$
  ```
  a = result;
  ```
  $\{a = A_0 + 1 \land b = A_0 + 2 \land result = A_0 + 1\}$
  Por lo tanto, se deduce que:
  $\{a = A_0 + 1\}$

# Intercambiando los valores de dos variables enteras

- proc $swap$(inout $a : \mathbb{Z}$, inout $b : \mathbb{Z}$){
  requiere $\{a = A_0 \land b = B_0\}$
  asegura $\{a = B_0 \land b = A_0\}$
  }
- **Ejemplo:** Intercambiamos los valores de dos variables, pero sin una variable auxiliar!
- $\{a = A_0 \land b = B_0\}$
  `a = a + b;`
  $\{a = A_0 + B_0 \land b = B_0\}$
  `b = a - b;`
  $\{a = A_0 + B_0 \land b = (A_0 + B_0) - B_0\}$
  $\equiv \{a = A_0 + B_0 \land b = A_0\}$
  `a = a - b;`
  $\{a = A_0 + B_0 - A_0 \land b = A_0\}$
  $\equiv \{a = B_0 \land b = A_0\}$

# Alternativas

- Sea el siguiente programa con una variable a de entrada cuyo valor no se modifica (i.e. podemos asumir $a = A_0$ como constante)
- Cuando tenemos una alternativa, debemos considerar las dos ramas por separado.
- Por ejemplo:

  $\{a = A_0 \wedge b = B_0\}$

  ```
  if( a > 0 ) {
    b = a;
  } else {
    b = -a;
  }
  ```

  ¿$\{b = ||a||\}$?
- Verifiquemos ahora que $b = ||a||$ después de la alternativa.

# Alternativas

- Rama positiva:

  Se cumple la condición $a > 0$
  $\{a = A_0 \wedge b = B_0 \wedge a > 0\} \equiv \{a = A_0 \wedge b = B_0 \wedge A_0 > 0\}$
  `b = a;`
  $\{a = A_0 \wedge b = A_0 \wedge A_0 > 0\}$
  $\Rightarrow \{b = ||a||\}$

- Rama negativa:

  No se cumple la condición $a > 0$ (o sea $a <= 0$)
  $\{a = A_0 \wedge b = B_0 \wedge \neg a > 0\} \equiv \{a = A_0 \wedge b = B_0 \wedge A_0 \leq 0\}$
  `b = -a;`
  $\{a = A_0 \wedge b = -A_0 \wedge A_0 \leq 0\}$
  $\Rightarrow \{b = ||a||\}$

- En ambos casos vale $b = ||a||$
- Por lo tanto, esta condición vale al salir de la instrucción alternativa.

# Demostrando que un programa es correcto

- Sabemos razonar sobre la corrección de nuestros programas, anotando el código con predicados que representan los estados.
- Nos interesa formalizar estos razonamientos, para estar seguros de que no cometimos errores en la demostración.
- Una forma de conseguirlo es la siguiente: A partir de la tripla de Hoare $\{P\}\ S\ \{Q\}$, obtener una fórmula lógica $\alpha$ tal que

  $$\alpha \text{ es verdadera si y sólo si } \{P\}\ S\ \{Q\} \text{ es verdadera.}$$

- Entre otras cosas, esto nos permite automatizar la demostración con un verificador automático (!)

# Un lenguaje imperativo simplificado

- Para facilitar nuestro trabajo, definamos un lenguaje imperativo más sencillo que Java al que llamaremos SmallLang. [1]

- SmallLang únicamente soporta las siguientes instrucciones:

  1. Nada: Instrucción **skip** que no hace nada.
  2. Asignación: Instrucción **x := E**.

- Además, soporta las siguientes estructuras de control:

  1. Secuencia: **S1; S2** es un programa, si **S1** y **S2** son dos programas.
  2. Condicional: **if B then S1 else S2 endif** es un programa, si **B** es una expresión lógica y **S1** y **S2** son dos programas.
  3. Ciclo: **while B do S endwhile** es un programa, si **B** es una expresión lógica y **S** es un programa.

[1] *The Semantics of a Small Language* de David Gries

# Demostraciones de corrección

- Buscamos un mecanismo para demostrar "automáticamente" la corrección de un programa respecto de una especificación (es decir, la validez de una tripla de Hoare).
- ¿Es válida esta tripla?

$$\{x \geq 4\}$$
$$\textbf{x := x + 1}$$
$$\{x \geq 7\}$$

- No. Contrajemplo: con $x = 4$ no se cumple la postcondición.
- ¿Es válida esta tripla?

$$\{x \geq 4\}$$
$$\textbf{x := x + 1}$$
$$\{x \geq 5\}$$

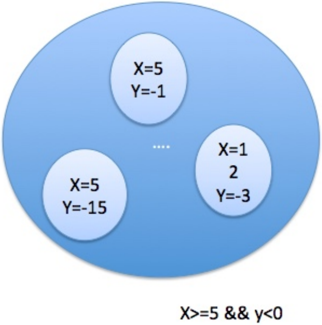
- Sí. Es válida!

# La precondición más débil

$$\{\ x \geq 4 \wedge y < -2\}$$

```
x := x + 1
```

$$\{\ x \geq 5 \wedge y < 0\}$$

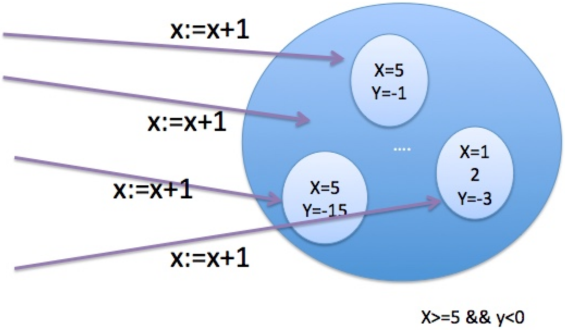


# La precondición más débil

$$\{\ x \geq 4 \wedge y < -2\}$$

```
x := x + 1
```

$$\{\ x \geq 5 \wedge y < 0\}$$

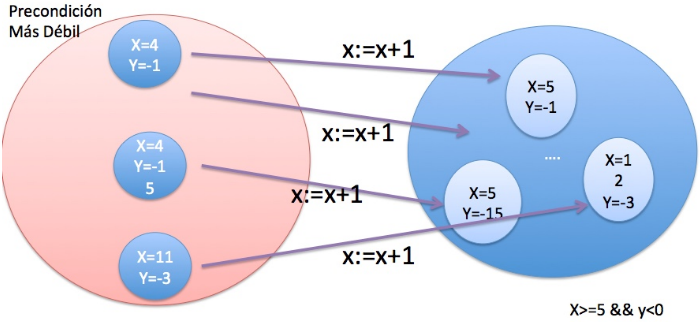


# La precondición más débil

$$\{\ x \geq 4 \wedge y < -2\}$$

```
x := x + 1
```

$$\{\ x \geq 5 \wedge y < 0\}$$

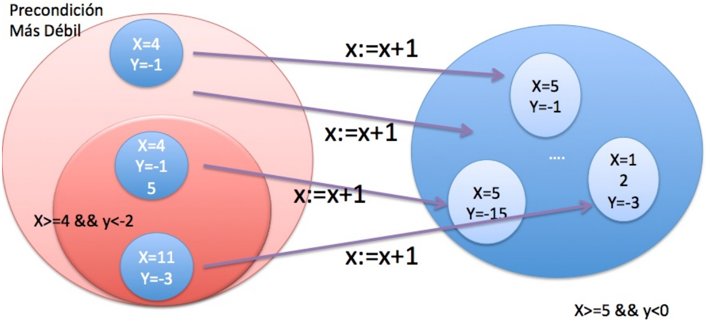


# La precondición más débil

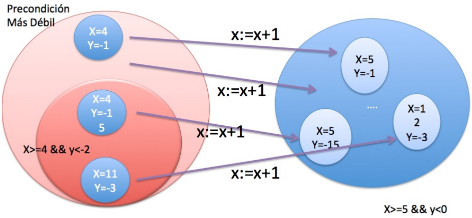
$$\{\ x \geq 4 \wedge y < -2\}$$

```
x := x + 1
```

$$\{\ x \geq 5 \wedge y < 0\}$$



# La precondición más débil




- Supongamos que tenemos un predicado que captura la precondición más débil del programa S con la postcondición $Q$ (**Notación:** $wp(\mathbf{S}, Q)$)
- ¿Qué formula podemos usar para probar que la tripla de Hoare es válida?

$$(x \geq 4 \wedge y < -2) \Rightarrow_L wp(x := x + 1, x \geq 5 \wedge y < 0)$$

# Precondición más débil

- **Definición.** La precondición más débil de un programa **S** respecto de una postcondición $Q$ es el predicado $P$ más débil posible tal que $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$.

- **Notación.** $wp(\mathbf{S}, Q)$.

- **Teorema:** Una tripla de Hoare $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ es válida si y sólo si:

$$P \Rightarrow_L wp(S, Q)$$

# Precondición más débil

- Ejemplo:

$$\{wp(\mathbf{x := x{+}1}, Q)\}$$
$$\mathbf{x := x + 1}$$
$$\{Q : x \geq 7\}$$

- ¿Cuál es la precondición más débil de `x:=x+1` con respecto a la postcondición $x \geq 7$?
- $wp(\mathbf{x := x{+}1}, Q)) \equiv \ x \geq 6$.

# Precondición más débil

- Otro ejemplo:

$$\{wp(\mathbf{S2}, Q)\}$$

$$\mathbf{S2: x := 2 * |x| + 1}$$

$$\{Q : x \geq 5\}$$

- $wp(\mathbf{S2}, Q) \;\equiv\; x \geq 2 \;\vee\; x \leq -2.$
- Otro más:

$$\{wp(\mathbf{S3}, Q)\}$$

$$\mathbf{S3: x := y{*}y}$$

$$\{Q : x \geq 0\}$$

- $wp(\mathbf{S3}, Q) \;\equiv\; \mathit{True}.$

# Precondición más débil

- Si para demostrar la validez de $\{P\}\mathbf{S}\{Q\}$ nos alcanza con probar la fórmula:
$$P \Rightarrow_L wp(S, Q)$$
- Entonces lo que necesitamos un mecanismo para obtener la *wp* de (S,Q).
- Afortunadamente, existe un conjunto de axiomas que podemos usar para obtener la *wp*
- Antes de empezar a ver estos axiomas, definamos primero dos predicados: $def(E)$ y $Q^x_E$

# Predicado def(E)

- **Definición.** Dada una expresión $E$, llamamos $\text{def}(E)$ a las condiciones necesarias para que $E$ esté definida. Por ejemplo:
  1. $\text{def}(x + y) \equiv \text{def}(x) \wedge \text{def}(y)$.
  2. $\text{def}(x/y) \equiv \text{def}(x) \wedge (\text{def}(y) \wedge_L y \neq 0)$.
  3. $\text{def}(\sqrt{x}) \equiv \text{def}(x) \wedge_L x \geq 0$.
  4. $\text{def}(a[i] + 3) \equiv (\text{def}(a) \wedge \text{def}(i)) \wedge_L 0 \leq i < |a|$.
- Suponemos $\text{def}(x) \equiv \mathit{True}$ para todas las variables, para simplificar la notación.
- Con esta hipótesis extra:
  1. $\text{def}(x + y) \equiv \mathit{True}$.
  2. $\text{def}(x/y) \equiv y \neq 0$.
  3. $\text{def}(\sqrt{x}) \equiv x \geq 0$.
  4. $\text{def}(a[i] + 3) \equiv 0 \leq i < |a|$.

# Predicado $Q^x_E$

- **Definición.** Dado un predicado $Q$, el predicado $Q^x_E$ se obtiene reemplazando en $Q$ todas las apariciones libres de la variable $x$ por $E$.

  1. $Q \equiv 0 \leq i < j < n \wedge_L a[i] \leq x < a[j]$.
     $Q^i_k \equiv 0 \leq k < j < n \wedge_L a[k] \leq x < a[j]$.
     $Q^i_{i+1} \equiv 0 \leq i+1 < j < n \wedge_L a[i+1] \leq x < a[j]$.
  2. $Q \equiv 0 \leq i < n \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})(a[j] = x)$.
     $Q^j_k \equiv 0 \leq i < n \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})(a[j] = x)$.

# Axioma 1: Asignación

- **Axioma 1.** $wp(\mathbf{x := E}, Q) \equiv \mathrm{def}(E) \wedge_L Q^x_E$.
- Ejemplo:

$$\{??\}$$
$$\mathbf{x := x + 1}$$
$$\{Q : x \geq 7\}$$

- Tenemos que ...

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{x := x{+}1}, Q) &\equiv \mathrm{def}(x+1) \wedge_L Q^x_{x+1} \\ &\equiv \mathit{True} \wedge_L (x+1) \geq 7 \\ &\equiv x \geq 6 \end{aligned}$$

# Axioma 1: Asignación

- Este axioma está justificado por la siguiente observación. Si buscamos la precondición más débil para el siguiente programa ...

$$\{??\}$$
$$\mathbf{x := E}$$
$$\{Q : x = 25\}$$

- ... entonces tenemos $wp(\mathbf{x := E}, Q) \ \equiv \ \mathrm{def}(E) \ \wedge_L \ E = 25.$
- Es decir, si luego de **x := E** queremos que $x = 25$, entonces se debe cumplir $E = 25$ antes de la asignación!

# Axioma 1: Asignación

- Otro ejemplo:

$$\{??\}$$
$$\mathbf{x := 2 * |x| + 1}$$
$$\{Q : x \geq 5\}$$

- Tenemos que ...

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{x := 2 * |x| + 1}, Q) &\equiv \text{def}(2 * |x| + 1) \ \wedge_L \ Q^x_{2*|x|+1} \\ &\equiv \mathit{True} \ \wedge_L \ 2 * |x| + 1 \geq 5 \\ &\equiv |x| \geq 2 \\ &\equiv x \geq 2 \ \vee \ x \leq -2 \end{aligned}$$

# Axioma 1: Asignación

- Un ejemplo más:

$$\{??\}$$

$$\textbf{x := y*y}$$

$$\{Q : x \geq 0\}$$

- Tenemos que ...

$$\begin{aligned} wp(\textbf{x := y*y}, Q) &\equiv \operatorname{def}(y * y) \ \wedge_L \ Q^x_{y*y} \\ &\equiv \mathit{True} \ \wedge_L \ y * y \geq 0 \\ &\equiv \mathit{True} \end{aligned}$$

# Demostraciones de corrección

- Dijimos que $\{P\}$ **S** $\{Q\}$ sii $P \Rightarrow_L wp(\mathbf{S}, Q)$.
- Es decir, queremos que $P \Rightarrow_L wp(\mathbf{S}, Q)$ capture el hecho de que si **S** comienza en un estado que satisface $P$, entonces termina y lo hace en un estado que satisface $Q$.
- Por ejemplo, la siguiente tripla de Hoare es válida ...

$$\{P : x \geq 10\}$$

**S: x := x+3**

$$\{Q : x \neq 4\}$$

- ... puesto que:
  - $wp(\mathbf{S}, Q) \equiv x \neq 1$ y
  - $x \geq 10 \Rightarrow_L x \neq 1$.

# Demostraciones de corrección

- La definición anterior implica que:
  1. Si $P \Rightarrow_L wp(\mathbf{S}, Q)$, entonces $\{P\}$ **S** $\{Q\}$ es válida (i.e., es verdadera).
  2. Si $P \not\Rightarrow_L wp(\mathbf{S}, Q)$, entonces $\{P\}$ **S** $\{Q\}$ no es válida (i.e., es falsa).

- Por ejemplo: $wp(\mathbf{x{:=}x{+}1}, x \geq 7) \equiv x \geq 6$.

- Como $x \geq 4 \not\Rightarrow_L x \geq 6$ (contraejemplo, $x = 5$), entonces se concluye que

$$\{P : x \geq 4\}$$

**S: x := x+1**

$$\{Q : x \geq 7\}$$

no es válida.

# Más axiomas

- **Axioma 2.** $wp(\textbf{skip}, Q) \equiv Q$.
- **Axioma 3.** $wp(\textbf{S1; S2}, Q) \equiv wp(\textbf{S1}, wp(\textbf{S2}, Q))$.
- Ejemplo:

$$\{wp(\textbf{y := 2*x}, R)\} \equiv \{\text{def}(2*x) \wedge_L 2*x \geq 6\} \equiv \{x \geq 3\}$$

**y := 2*x;**

$$\{wp(\textbf{x := y+1}, Q)\} \equiv \{\text{def}(y+1) \wedge_L y+1 \geq 7\}$$
$$\equiv \{y \geq 6\}$$

**x := y + 1**

$$\{Q : x \geq 7\}$$

# Intercambiando los valores de dos variables

- **Ejemplo:** Recordemos el programa para intercambiar dos variables numéricas.
- $$\{wp(\mathbf{a := a + b}, E_2)\}$$
  $$\equiv \{def(a+b) \wedge_L (b = B_0 \wedge (a+b) - b = A_0)\}$$
  $$\equiv \{b = B_0 \wedge a = A_0\} \equiv \{E_3\}$$
  ```
  a := a + b;
  ```
  $$\{wp(\mathbf{b := a - b}, E_1)\}$$
  $$\equiv \{def(a-b) \wedge_L (a - (a-b) = B_0 \wedge a - b = A_0)\}$$
  $$\equiv \{b = B_0 \wedge a - b = A_0\} \equiv \{E_2\}$$
  ```
  b := a - b;
  ```
  $$\{wp(\mathbf{a := a - b}, Q)\}$$
  $$\equiv \{def(a-b) \wedge_L (a - b = B_0 \wedge b = A_0)\}$$
  $$\equiv \{a - b = B_0 \wedge b = A_0\} \equiv \{E_1\}$$
  ```
  a := a - b;
  ```
  $$\{Q\} \equiv \{a = B_0 \wedge b = A_0\}$$

# Intercambiando los valores de dos variables

- Como $P \Rightarrow E_3 \equiv wp(S, Q)$, entonces podemos concluir que el algoritmo es correcto respecto de su especificación.
- Observar que los estados intermedios que obtuvimos aplicando *wp* son los mismos que habíamos usado para razonar sobre la corrección de este programa!

$\{a = A_0 \wedge b = B_0\}$
```
a := a + b;
```
$\{a = A_0 + B_0 \wedge b = B_0\}$
```
b := a - b;
```
$\{a = A_0 + B_0 \wedge b = A_0\}$
```
a := a - b;
```
$\{a = B_0 \wedge b = A_0\}$

- En lugar de razonar de manera informal, ahora podemos dar una demostración de que estos estados describen el comportamiento del algoritmo.

# Recap: Axiomas wp

- **Axioma 1.** $wp(\mathbf{x := E}, Q) \equiv \mathrm{def}(E) \wedge_L Q^x_E$.
- **Axioma 2.** $wp(\mathbf{skip}, Q) \equiv Q$.
- **Axioma 3.** $wp(\mathbf{S1;\ S2}, Q) \equiv wp(\mathbf{S1}, wp(\mathbf{S2}, Q))$.

# Alternativas

- **Axioma 4.** Si **S** $=$ **if B then S1 else S2 endif**, entonces

$$wp(\mathbf{S}, Q) \equiv def(B) \wedge_L \Big((B \wedge wp(\mathbf{S1}, Q)) \vee (\neg B \wedge wp(\mathbf{S2}, Q))\Big)$$

- Ejemplo:

$$\{??\}$$

**S: if (x $>$ 0) then y := x else y := -x endif**

$$\{Q : y \geq 2\}$$

- Tenemos que ...

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{S}, Q) &\equiv (x > 0 \wedge x \geq 2) \vee (x \leq 0 \wedge -x \geq 2) \\ &\equiv (x \geq 2) \vee (x \leq -2) \\ &\equiv |x| \geq 2 \end{aligned}$$

# Alternativas

- La definicion operacional que vimos para demostrar la corrección de una alternativa es ahora un teorema derivado de este axioma!
- **Teorema.** Si $P \Rightarrow \mathit{def}(B)$ y

$$\begin{array}{rcc} \{P \;\wedge\; B\} & \textbf{S1} & \{Q\} \\ \{P \;\wedge\; \neg B\} & \textbf{S2} & \{Q\} \end{array}$$

  entonces

$$\{P\} \quad \textbf{if B then S1 else S2 endif} \quad \{Q\}.$$

# Alternativas

- **Demostración.**

$$
\begin{array}{rl}
 & [P \wedge B \Rightarrow wp(\mathbf{S1}, Q)] \;\wedge\; [P \wedge \neg B \Rightarrow wp(\mathbf{S2}, Q)] \\
\equiv & [\neg(P \wedge B) \vee wp(\mathbf{S1}, Q)] \;\wedge\; [\neg(P \wedge \neg B) \vee wp(\mathbf{S2}, Q)] \\
\equiv & [\neg P \vee \neg B \vee wp(\mathbf{S1}, Q)] \;\wedge\; [\neg P \vee B \vee wp(\mathbf{S2}, Q)] \\
\equiv & \neg P \vee \big([\neg B \vee wp(\mathbf{S1}, Q)] \;\wedge\; [B \vee wp(\mathbf{S2}, Q)]\big) \\
\equiv & P \Rightarrow [B \Rightarrow wp(\mathbf{S1}, Q)] \;\wedge\; [\neg B \Rightarrow wp(\mathbf{S2}, Q)] \\
\equiv & P \Rightarrow [B \wedge wp(\mathbf{S1}, Q)] \;\vee\; [\neg B \wedge wp(\mathbf{S2}, Q)] \\
\equiv & P \Rightarrow def(B) \wedge_L \big([B \wedge wp(\mathbf{S1}, Q)] \;\vee\; [\neg B \wedge wp(\mathbf{S2}, Q)]\big) \\
\equiv & P \Rightarrow wp(\textbf{if B then S1 else S2 endif}, Q) \;\square
\end{array}
$$

# Alternativas

- En el ejemplo anterior, vimos que:

$$\{P : |x| \geq 2\}$$

$$\textbf{S: if (x} > \textbf{0) then y := x else y := -x endif}$$

$$\{Q : y \geq 2\}$$

- Veamos ahora la validez de esta tripla de Hoare por medio del teorema anterior.

$$\begin{array}{rcl} P \ \wedge \ B & \Rightarrow_L & wp(\textbf{y := x}, Q) \\ |x| \geq 2 \wedge x > 0 & \Rightarrow_L & \mathit{def}(x) \wedge_L x \geq 2 \ \equiv \ x \geq 2 \quad \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P \ \wedge \ \neg B & \Rightarrow_L & wp(\textbf{y := -x}, Q) \\ |x| \geq 2 \wedge x \leq 0 & \Rightarrow_L & \mathit{def}(x) \wedge_L -x \geq 2 \ \equiv \ x \leq -2 \quad \checkmark \end{array}$$

# Asignación a elementos de una secuencia

- ¿Podemos usar el Axioma 1 para el programa `b[i]:=E`?
- El Axioma 1 matchea con `x:=E`, pero `x` es una variable, no una posición de una secuencia
- Entonces, necesitamos reescribir $b[i] := E$ como $b := setAt(b, i, E)$.
- Donde

$$\begin{array}{rcl} \text{def}(setAt(b, i, E)) & = & (\text{def}(E) \ \wedge \text{def}(b) \ \wedge \ \text{def}(i)) \\ & \wedge_L & \big(0 \le i < |b|\big). \end{array}$$

- **Observación:** En el libro de Gries se usa la notación $(b; i; E)$ en lugar de $setAt(b, i, E)$

# Asignación a elementos de una secuencia

- Aplicando el Axioma 1, tenemos:

$wp(b[i] := E, Q)$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \quad wp(b := setAt(b, i, E), Q) \\
&\equiv \quad def(setAt(b, i, E)) \wedge_L Q^b_{setAt(b,i,E)} \\
&\equiv \quad \big((def(b) \wedge def(i)) \wedge_L 0 \leq i < |b|\big) \wedge \ \mathrm{def}(E)) \wedge_L Q^b_{setAt(b,i,E)}
\end{aligned}
$$

Además, se cumple que dados $0 \leq i, j < |b|$ sabemos que:

$$
setAt(b, i, E)[j] \ = \begin{cases} E & \text{si } i = j \\ b[j] & \text{si } i \neq j \end{cases}
$$

## Asignación a elementos de una secuencia

- **Ejemplo.** Supongamos que $i$ está definida y dentro del rango de la secuencia $b$.

$$
\begin{aligned}
& wp(\mathbf{b[i]\ :=\ 5}, b[i] = 5) \\
\equiv\ & ((\mathrm{def}(i)\ \wedge_L\ 0 \leq i < |b|)\ \wedge\ \mathrm{def}(5))\ \wedge_L\ setAt(b, i, 5)[i] = 5 \\
\equiv\ & setAt(b, i, 5)[i] = 5 \\
\equiv\ & 5 = 5\ \equiv\ True
\end{aligned}
$$

- **Ejemplo.** Con las mismas hipótesis.

$$
\begin{aligned}
& wp(\mathbf{b[i]\ :=\ 5}, b[j] = 2) \\
\equiv\ & setAt(b, i, 5)[j] = 2 \\
\equiv\ & (i \neq j\ \wedge\ setAt(b, i, 5)[j] = 2)\ \vee\ (i = j\ \wedge\ setAt(b, i, 5)[j] = 2) \\
\equiv\ & (i \neq j\ \wedge\ b[j] = 2)\ \vee\ (i = j\ \wedge\ setAt(b, i, 5)[i] = 2) \\
\equiv\ & (i \neq j\ \wedge\ b[j] = 2)\ \vee\ (i = j\ \wedge\ 5 = 2) \\
\equiv\ & i \neq j\ \wedge\ b[j] = 2
\end{aligned}
$$

# Propiedades

- Monotonía:
  - Si $Q \Rightarrow R$ entonces $wp(S, Q) \Rightarrow wp(S, R)$.
- Distributividad:
  - $wp(S, Q) \wedge wp(S, R) \Rightarrow wp(S, Q \wedge R)$,
  - $wp(S, Q) \vee wp(S, R) \Rightarrow wp(S, Q \vee R)$.
- *"Excluded Miracle"*:
  - $wp(S, \mathit{false}) \equiv \mathit{false}$.

# Corolario de la monotonía

- **Corolario:** Si
  - $P \Rightarrow wp(S1, Q)$,
  - $Q \Rightarrow wp(S2, R)$,

  entonces
  - $P \Rightarrow wp(S1; S2, R)$.

- **Demostración**.

$$
\begin{array}{rcll}
P & \Rightarrow & wp(S1, Q) & \text{(por hipótesis)} \\
 & \Rightarrow & wp(S1, wp(S2, R)) & \text{(monotonía)} \\
 & \equiv & wp(S1; S2, R) & \text{(Axioma 2)}
\end{array}
$$

# Bibliografía


- David Gries - The Science of Programming
  - Part II - The Semantics of a Small Language
    - Chapter 7 - The Predicate Transformer wp
    - Chapter 8 - The Commands skip, abort and Composition
    - Chapter 9 - The Assignment Command
    - Chapter 10 - The Alternative Command