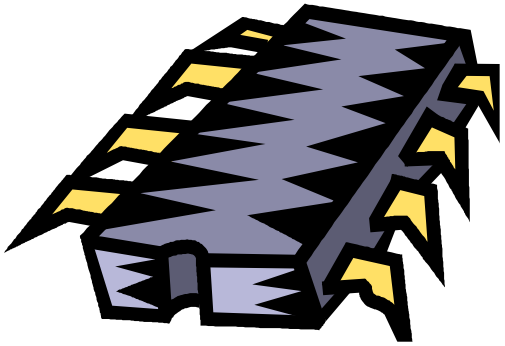
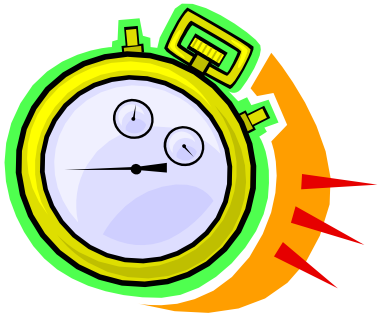




Análisis de la Complejidad de Algoritmos

Análisis de la Complejidad de Algoritmos

- Para resolver problemas, tenemos que diseñar algoritmos y estructuras de datos que
  - Funcionen correctamente
    - modelen bien el problema,
    - los algoritmos terminen
    - y produzcan el resultado correcto
  - Sean eficientes en términos del consumo de recursos
- Esa medida de eficiencia nos permitirá elegir entre
  - distintos algoritmos para resolver el mismo problema
  - distintas formas de implementar un TAD

Análisis de la Complejidad de Algoritmos

¿Cuáles son esos recursos que se consumen?

- Tiempo de ejecución
- Espacio (memoria)
- Cantidad de procesadores (en el caso de algoritmos paralelos)
- Utilización de la red de comunicaciones (para algoritmos paralelos)

Otros criterios (de interés para la Ingeniería de Software):

- Claridad de la solución
- Facilidad de codificación

Análisis de la Complejidad de Algoritmos

- Dependiendo de cómo balanceemos la importancia de cada uno de los criterios, podremos decir que un algoritmo es mejor que otro.
- No nos vamos a ocupar de ese balance, sí de los primeros criterios: eficiencia en tiempo y espacio
- Aunque…nos vamos a ocupar más del tiempo. ¿Por qué?

Complejidad Algorítmica

El análisis de la complejidad de un algoritmo se puede hacer de forma:

- Empírica o experimental
  - Medir el tiempo de ejecución para una determinada entrada y en una computadora concreta
  - Usando un cronómetro, o analizando el consumo de recursos de la computadora (tiempo de CPU)
  - Medidas del tipo: 3GB; 1,5 segundos.
- Teórica
  - Medida teórica del comportamiento de un algoritmo

Ejemplo

Problema “Búsqueda en un array”: dado un array A y un elemento x, encontrar la posición de x en el array

Algoritmo: Búsqueda Secuencial

```
I←1
encontré ←falso
Mientras ~encontré
    Si A[I] = x entonces encontré ← verdadero
    I←I+1
print(I-1)
```

- ¿Cuánto tarda la ejecución de:
  - Buscar(5, 

)?
- ¿Cuánta memoria necesito?

Complejidad Algorítmica

Ventajas del enfoque teórico:

- El análisis se puede hacer **a priori**, aún antes de escribir una línea de código
- Vale **para todas las instancias** del problema
- Es **independiente del lenguaje de programación** utilizado para codificarlo
- Es **independiente de la máquina** en la que se ejecuta
- Es **independiente de la pericia del programador**

Análisis Teórico

Basado en un “modelo de máquina” o “modelo de cómputo” consensuado

- En función del tamaño del input
- Para distintos tipos de input
- Análisis asintótico

Modelo de cómputo

Queremos una medida “universal”, válida para distintas implementaciones del algoritmo

- La idea es tener un “banco de pruebas”...pero teórico, virtual.

Definimos una máquina “ideal”, que vamos a usar para definir los conceptos de tiempo y espacio

Medida del tiempo: número de **pasos** o **instrucciones** que se ejecutan en esa máquina “ideal” para determinado input

Medida del espacio: número de **posiciones de memoria** en esa máquina ideal que se utilizan para determinado input

Ejemplo

- ¿Cuánto tarda la ejecución del algoritmo
  - Read (x)
  - I ← exp(2,(exp(2,x))
  - print (I)

?

- ¿Lo mismo que
  - Read (x)
  - I ← 2*x
  - print (I)

?

Operaciones Elementales

t(I) será una función que mida el número de operaciones elementales requeridas para la instancia I.

Operaciones elementales (OE) serán aquellas que el procesador realiza en tiempo **acotado por una constante** (que no depende del tamaño de la entrada).

Consideraremos OE las operaciones aritméticas básicas, comparaciones lógicas, transferencias de control, asignaciones a variables de tipos básicos, etc.

- En el etc. está el peligro. Por eso es importante definir bien el modelo de cómputo, y cuáles son las operaciones elementales.

¿Qué pasa si el próximo modelo de computadora permite hacer las operaciones mucho más rápidamente?

- ¡Nada! (lo veremos después)

Cálculo de OE

Consideraciones generales:

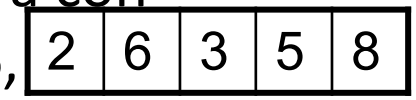
- Vamos a considerar que el tiempo de una OE es, por definición, 1.
- El tiempo de ejecución de una secuencia consecutiva de instrucciones se calcula sumando los tiempos de ejecución de cada una de las instrucciones.

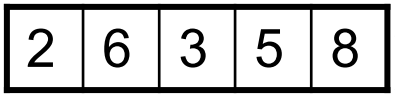
Ejemplo

Algoritmo: Búsqueda Secuencial

```
I←1
encontré ←falso
Mientras ~encontré
    Si A[I] = x entonces encontré ← verdadero
    I←I+1
print(I-1)
```

- ¿Cuánto tarda la ejecución de
  - Buscar(5, 

)?
- ¿Qué podemos contestar ahora?
- ¿Y qué pasará con
  - Buscar(6, 

)?
- ¿y con
  - Buscar(8, 

)?
- y más aún....con
  - Buscar(1, 

)?

Cálculo de OE (cont.)

Reglas generales (pensando en análisis del caso peor):

- Tiempo de ejecución de "**IF** C **THEN** S1 **ELSE** S2 ENDIF;":

  $T = T(C) + \max\{T(S1), T(S2)\}$.

- Tiempo de ejecución de la sentencia "**CASE** C **OF** v1:S1|v2:S2|...|vn:Sn **END**;":

  $T = T(C) + \max\{T(S1), T(S2), ..., T(Sn)\}$.

  Notar que $T(C)$ incluye el tiempo de comparación con $v1$, $v2$,..., vn.

- Tiempo de ejecución de un bucle de sentencias "WHILE C **DO** S **END**;":

  $T = T(C) + (\text{nº iteraciones}) * (T(S) + T(C))$.

  Notar que tanto T(C) como T(S) pueden variar en cada iteración, y por tanto habrá que tenerlo en cuenta para su cálculo.

Cálculo de OE (cont.)

- Tiempo de ejecución del resto de sentencias iterativas (FOR, REPEAT, LOOP) basta expresarlas como un bucle WHILE.
- Tiempo de ejecución de una llamada a un procedimiento o función F(P1, P2,..., Pn)
  - T = 1 + T(P1) + T(P2) + ... + T(Pn) + T(F).
  - 1 (por la llamada) + el tiempo de evaluación de los parámetros P1, P2,..., Pn, + el tiempo que tarde en ejecutarse F, esto es:
  - No contabilizamos la copia de los argumentos a la pila de ejecución, salvo que se trate de estructuras complejas (registros o vectores) que se pasan por valor. En este caso contabilizaremos tantas OE como valores simples contenga la estructura.
  - El paso de parámetros por referencia, por tratarse simplemente de punteros, no contabiliza tampoco.
- Tiempo de ejecución de las llamadas a procedimientos recursivos: ecuaciones en recurrencia (lo veremos posteriormente)

Tamaño de la entrada

¿Por qué complejidad en función del **tamaño de la entrada**?

- Queremos una complejidad relativa, no absoluta
- Es una medida general de lo que podemos encontrarnos al ejecutar (queremos predecir, no nos interesa tanto cuanto tarda para una instancia particular sino para clases de instancias)
- Más abstracta que pensarlo en función de cada input (¡en general, podría haber infinitos inputs distintos!)

- ***T(n)***: complejidad temporal (o en tiempo) para una entrada de tamaño *n*.

- ***S(n)***: complejidad espacial para una entrada de tamaño *n*.

Análisis del caso peor, medio, o mejor

Distintas instancias, aunque tengan el mismo tamaño, pueden hacer que el algoritmo se comporte de maneras muy diferentes, y por lo tanto, tomar **distinto tiempo**, y/o requerir **distinta cantidad memoria**.

Por eso estudiamos tres casos para un mismo algoritmo: *caso **peor***, *caso **mejor*** y *caso **medio***.

Análisis del caso **peor**

Sea *t(I)* el tiempo de ejecución de un algoritmo sobre una instancia I.

$T_{peor}(n) = max_{instancias\ I,\ |I| = n} \{t(I)\}$

Intuitivamente, $T_{peor}(n)$ es el tiempo de ejecución del algoritmo sobre la instancia que implica **mayor tiempo de ejecución** (entre los inputs de tamaño *n*).

- Da garantías sobre las prestaciones del algoritmo.

Análisis del caso **mejor**

- $T_{mejor}(n) = min_{instancias\ I,\ |I| = n}\{t(I)\}$

Intuitivamente, $T_{mejor}(n)$ es el tiempo de ejecución del algoritmo sobre la instancia que implica **menor tiempo** de ejecución (entre los inputs de tamaño n).

- No da mucha información....

Análisis del caso **medio**

Intuitivamente, $T_{prom}(n)$ corresponde al tiempo "**promedio**" de ejecución, al tiempo "**esperado**" sobre instancias "típicas"

Se define como la esperanza matemática de la variable aleatoria definida por todas las posibles ejecuciones del algoritmo para un tamaño de la entrada dado, con las probabilidades de que éstas ocurran para esa entrada.

- $P(I)$ probabilidad de que el input sea la instancia I
- $T_{prom}(n) = \sum_{instancias\ I,\ |I| = n} \{ P(I)\ t(I) \}$

¿Por qué las comillas?

- Requiere conocer la distribución estadística del input: en muchos casos eso no es realista
- En muchos casos la matemática se complica, y se termina haciendo hipótesis simplificatorias poco realistas.
- Podemos tener algoritmos para los cuales ningún input requiere tiempo medio (por ejemplo, un algoritmo que requiere o bien 1 o bien 100 pasos)

Ejemplo: Búsqueda.

¿Cuánto tarda la búsqueda secuencial?

```
I←1
encontré ←falso
Mientras ~encontré
    Si A[I] = x entonces encontré ← verdadero
    I←I+1
Print(I-1)
```

- $T_{peor}(n)= ?$
- $T_{mejor}(n)= ?$
- $T_{prom}(n)= ?$

¿Cuánto tarda la búsqueda secuencial si el arreglo está **ordenado**?

¿Cuánto tarda la **búsqueda binaria**?

Principio de invarianza

Dado un algoritmo y dos máquinas (o dos implementaciones) M_1 y M_2, que tardan $T_1(n)$ y $T_2(n)$ respectivamente sobre inputs de tamaño n,

Existe una cte. real $c>0$ y un $n_0 \in N$ tales que $\forall n \geq n_0$ se verifica que:

$$T_1(n) \leq cT_2(n)$$

Explicación: dos ejecuciones distintas del mismo algoritmo sólo difieren en cuanto a eficiencia en un factor constante para valores de la entrada suficientemente grandes.

Consecuencia: no necesitamos usar ninguna unidad para medir el tiempo.

Análisis Asintótico

Los distintos algoritmos que resuelven un mismo problema pueden tener grandes diferencias en su tiempo de ejecución, a veces, de **órdenes de magnitud**.

Interesa calcular, de forma aproximada, el **orden de magnitud** que tiene el **tiempo de ejecución** de cada algoritmo.

Cuando el tamaño de los datos es pequeño no habrá diferencias significativas en el uso de distintos algoritmos.

Cuando el **tamaño de los datos es grande**, los **costos** de los diferentes algoritmos sí pueden **variar de manera significativa.**

Análisis Asintótico

El orden (logarítmico, lineal, cuadrático, exponencial, etc.) de la función ***T(n)*,** que mide la complejidad temporal de un algoritmo, es el que **expresa el comportamiento dominante cuando el tamaño de la entrada es grande.**

Comportamiento Asintótico: comportamiento para valores de la entrada suficientemente grandes

Análisis asintótico

¿Por qué quiero algoritmos que sean eficientes asintóticamente?

	Tamaño n					
Complejidad Temporal	10	20	30	40	50	60
n	.00001 segundos	.00002 segundos	.00003 segundos	.00004 segundos	.00005 segundos	.00006 segundos
n^2	.0001 segundos	.0004 segundos	.0009 segundos	.0016 segundos	.0025 segundos	.0036 segundos
n^3	.001 segundos	.008 segundos	.027 segundos	.064 segundos	.125 segundos	.216 segundos
n^5	.1 segundos	3.2 segundos	24.3 segundos	1.7 minutos	5.2 minutos	13.0 minutos
2^n	.001 segundos	1.0 segundos	17.9 minutos	12.7 días	35.7 años	366 siglos
3^n	.059 segundos	58 minutos	6.5 años	3855 siglos	2×10^8 siglos	1.3×10^{13} siglos

Comparación de algoritmos con distintas complejidades, polinomiales y exponenciales

Fuente: Aho, Hopcroft, Ullman

Análisis asintótico

¿Por qué?

	Máximo tamaño de un problema resoluble en una hora		
Complejidad Temporal	**Con una computadora actual**	**Con una computadora 100 veces más veloz**	**Con una computadora 1000 veces más veloz**
n	N_1	$100\ N_1$	$1000\ N_1$
n^2	N_2	$10\ N_2$	$31.6\ N_2$
n^3	N_3	$4.64\ N_3$	$10\ N_3$
n^5	N_4	$2.5\ N_4$	$3.98\ N_4$
2^n	N_5	$N_5 + 6.64$	$N_5 + 9.97$
3^n	N_6	$N_6 + 4.19$	$N_6 + 6.29$

Efecto de la mejora de la tecnología en algoritmos con distintas complejidades

Fuente: Aho, Hopcroft, Ullman

Comportamiento Asintótico

El objetivo del **estudio de la complejidad** algorítmica es determinar el **comportamiento asintótico** de un algoritmo.

Medidas del comportamiento asintótico de la complejidad:

- O (O grande) cota superior.
- Ω (omega) cota inferior.
- Θ (theta) orden exacto de la función.

Cota superior – Notación O

La notación ***O*** (O, O grande, O mayúscula) sirve para representar el límite o cota superior del tiempo de ejecución de un algoritmo.

- La notación $f \in O(g)$ expresa que la función ***f*** **no crece más rápido que alguna función proporcional a *g***.
- A *g* se le llama cota superior de *f.*
- Si para un algoritmo sabemos que $T_{peor} \in O(g)$, se puede asegurar que para inputs de tamaño creciente, **en todos los casos** el tiempo será a lo sumo proporcional a la cota.
- Si para un algoritmo sabemos que $T_{prom} \in O(g)$, se puede asegurar que para inputs de tamaño creciente, en promedio el tiempo será proporcional a la cota.

Notación O

Asumimos funciones reales no negativas con dominio en los naturales.

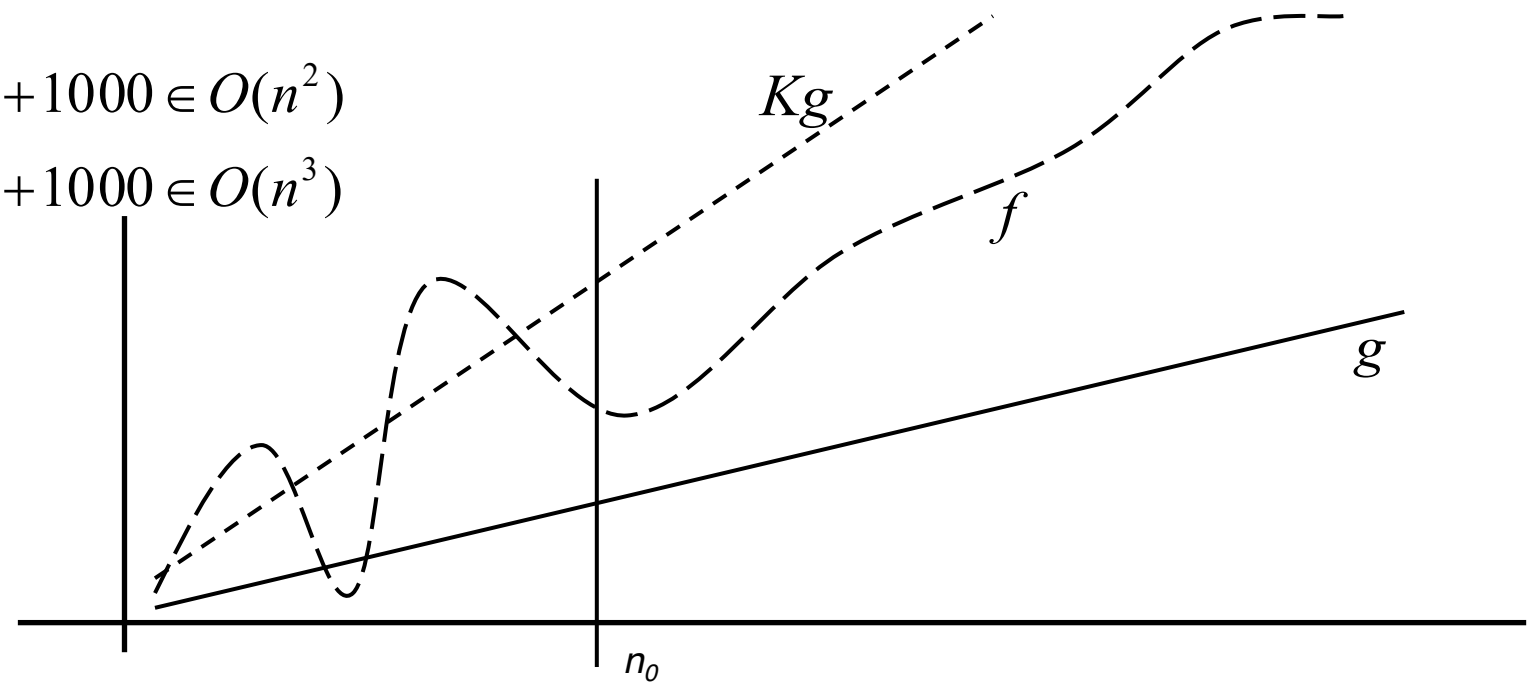
$f \in O(g)$ significa que f no crece más que g

$$O(g) = \left\{ f \,\middle|\, \exists n_0, k \rangle 0 \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq k * g(n) \right\}$$

Ejemplo:

$100n^2 + 300n + 1000 \in O(n^2)$

$100n^2 + 300n + 1000 \in O(n^3)$



Propiedades de O

1. Para cualquier función f se tiene que $f \in O(f)$.
2. $f \in O(g) \Rightarrow O(f) \subset O(g)$.
3. $O(f) = O(g) \Leftrightarrow f \in O(g)$ y $g \in O(f)$.
4. Si $f \in O(g)$ y $g \in O(h) \Rightarrow f \in O(h)$.
5. Si $f \in O(g)$ y $f \in O(h) \Rightarrow f \in O(min(g,h))$.
6. Regla de la suma: Si $f1 \in O(g)$ y $f2 \in O(h) \Rightarrow f1 + f2 \in O(max(g,h))$.
7. Regla del producto: Si $f1 \in O(g)$ y $f2 \in O(h) \Rightarrow f1 * f2 \in O(g*h)$.
8. Si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$, según los valores que tome k:
   i. Si $k \neq 0$ y $k < \infty$ entonces $O(f) = O(g)$.
   ii. Si $k = 0$ entonces $f \in O(g)$, es decir, $O(f) \subset O(g)$, pero sin embargo se verifica que $g \notin O(f)$.

Funciones de complejidad temporal comunes

- *O(1)* **Complejidad constante.**

  Es independiente de los datos de entrada

- *O(lg n)* **Complejidad logarítmica.**

  Suele aparecer en determinados algoritmos con iteración o recursión (p.e., búsqueda binaria).

  Todos los logaritmos, sea cual sea su base, son del mismo orden, por lo que se representan en cualquier base.

- *O(n)* **Complejidad lineal**

  Suele aparecer en bucles simples cuando la complejidad de las operaciones internas es constante o en algunos algoritmos con recursión.

Funciones de complejidad temporal comunes

- *O(n lg n)*

  En algunos algoritmos “Divide & Conquer” (p.e. Mergesort)

- $O(n^2)$ **Complejidad cuadrática**

  Aparece en bucles o recursiones doblemente anidados

- $O(n^3)$ **Complejidad cúbica**

  En bucles o recursiones triples

- $O(n^k)$ **Complejidad polinómica** ($k \geq 1$)

- $O(2^n)$ **Complejidad exponencial**

  Suele aparecer en subprogramas recursivos que contengan dos o más llamadas internas

Notación: Si $f \in O(g)$ vamos a abusar de la notación y escribir a veces $f = O(g)$ y decir cosas como “*f* es *O* de *g*” o “*f* es *O* grande de *g*” o “*f* es del orden de *g*”

Cota Inferior - Notación Ω

La notación Ω permite representar el límite o cota inferior del tiempo de ejecución de un algoritmo.

La notación $f \in \Omega(g)$ expresa que la función *f* está acotada inferiormente por alguna función proporcional a *g.*

- A *g* se le llama cota inferior de *f.*

Si para un algoritmo sabemos que $T_{peor} \in \Omega(g)$, se puede asegurar que para inputs de tamaño creciente, el tiempo será, en el peor caso, al menos proporcional a la cota.

La notación se usa también para dar cotas inferiores para problemas. A veces se puede decir para un problema que para cualquier algoritmo que lo resuelva, $T_{peor} \in \Omega(g)$, lo que significa que cualquier algoritmo que lo resuelva tiene una complejidad, en el peor caso, proporcional a la cota.

Notation Ω

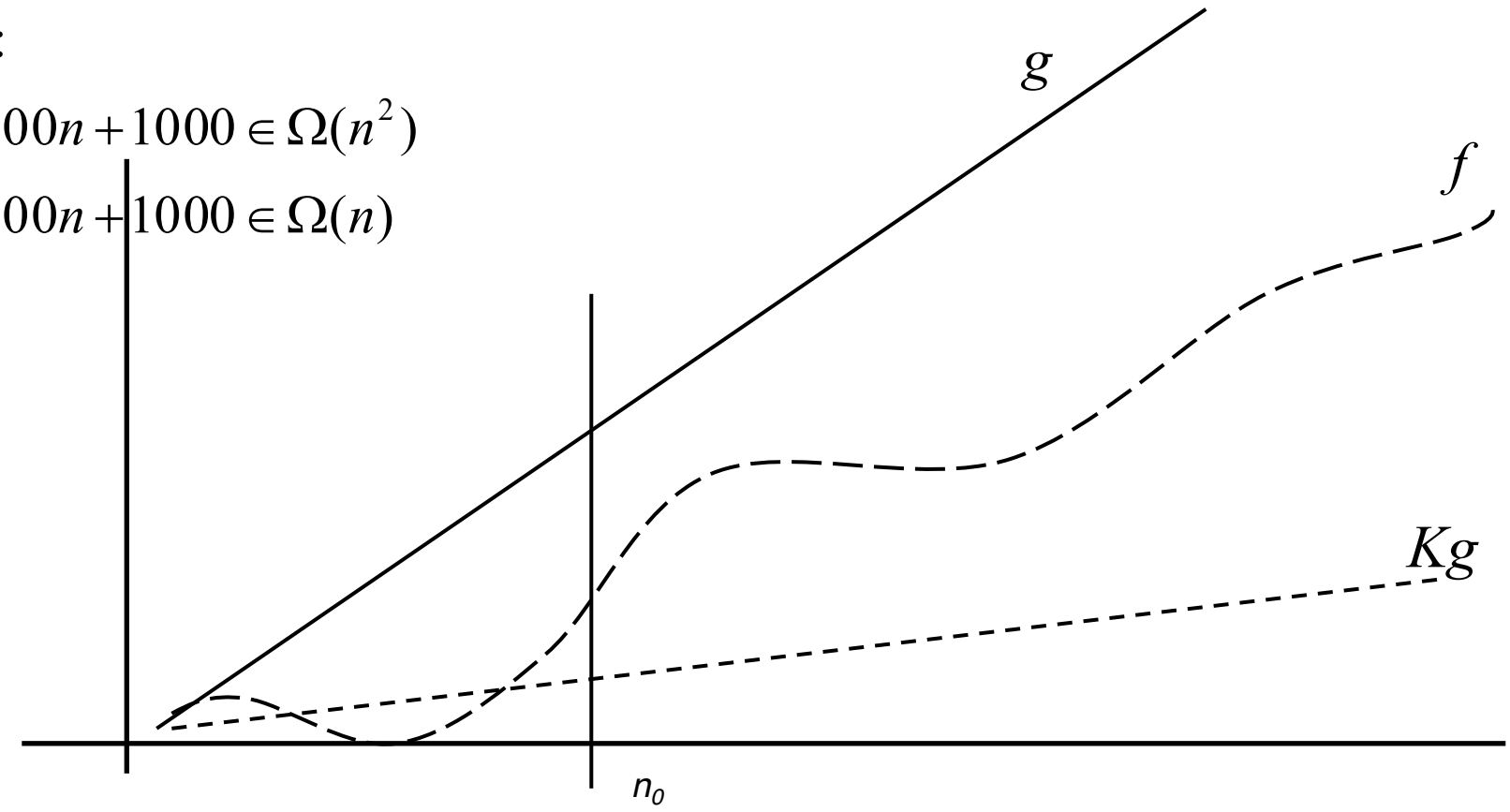
$f \in \Omega(g)$ significa que f crece al menos como g

$$\Omega(g) = \left\{ f \middle| \exists n_0, k \rangle 0 \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq k * g(n) \right\}$$

Ejemplo:

$100n^2 + 300n + 1000 \in \Omega(n^2)$

$100n^2 + 300n + 1000 \in \Omega(n)$



Cota Inferior

Obtener buenas cotas inferiores ajustadas es en general difícil, aunque siempre existe una cota inferior trivial para cualquier algoritmo: al menos hay que leer los datos y luego escribirlos, de forma que ésa sería una primera cota inferior.

Por ejemplo, para ordenar *n* números una cota inferior sería $\Omega(n)$, y para multiplicar dos matrices de orden *n* sería $\Omega(n2)$; sin embargo, los mejores algoritmos conocidos son de órdenes $O(nlogn)$ y $O(n^{2.8})$ respectivamente.

Propiedades de Ω

1. Para cualquier función f se tiene que $f \in \Omega(f)$.
2. $f \in \Omega(g) \Rightarrow \Omega(f) \subset \Omega(g)$.
3. $\Omega(f) = \Omega(g) \Leftrightarrow f \in \Omega(g)$ y $g \in \Omega(f)$.
4. Si $f \in \Omega(g)$ y $g \in \Omega(h) \Rightarrow f \in \Omega(h)$.
5. Si $f \in \Omega(g)$ y $f \in \Omega(h) \Rightarrow f \in \Omega(\max(g,h))$.
6. Regla de la suma: Si $f1 \in \Omega(g)$ y $f2 \in \Omega(h) \Rightarrow f1 + f2 \in \Omega(g+h)$.
7. Regla del producto: Si $f1 \in \Omega(g)$ y $f2 \in \Omega(h) \Rightarrow f1*f2 \in \Omega(g*h)$.
8. Si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$,según los valores que tome k:

   i. Si $k \neq 0$ y $k < \infty$. entonces $\Omega(f) = \Omega(g)$.

   ii. Si $k = 0$ entonces $g \in \Omega(f)$, es decir, $\Omega(g) \subset \Omega(f)$, pero sin embargo se verifica que $g \notin O(f)$.

Orden exacto – Notación Θ

• Como última cota asintótica, definiremos los conjuntos de funciones que crecen asintóticamente de la misma forma.

$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$

• Intuitivamente, $t \in \Theta(f)$ indica que *t* está acotada por *f* tanto superior como inferiormente

Orden exacto Θ

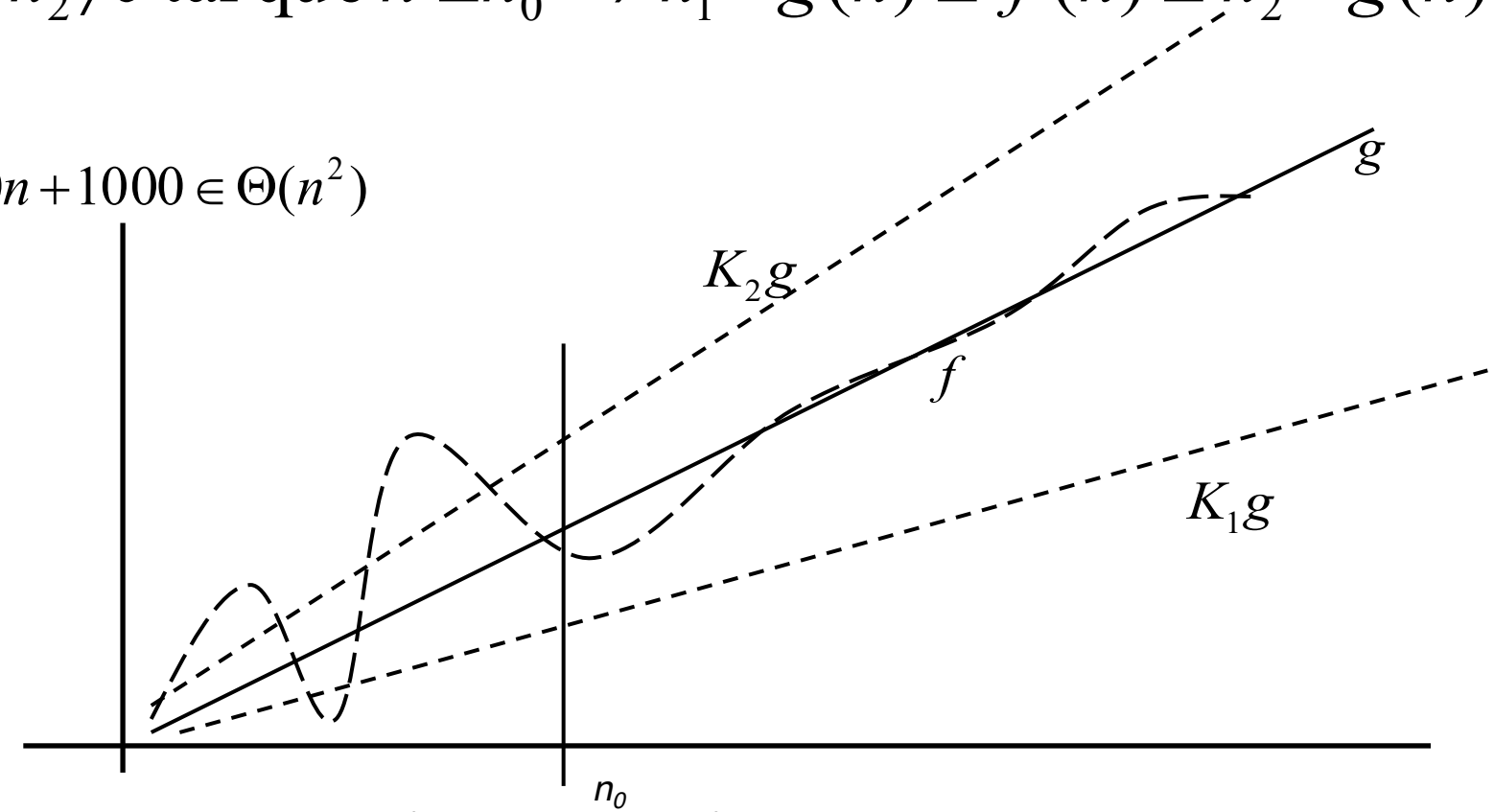
$f \in \Theta(g)$ significa que f crece (a partir de cierto momento) igual que g

$$\Theta(g) =$$

$$\left\{ f \middle| \exists n_0, k_1, k_2 \rangle 0 \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow k_1 * g(n) \leq f(n) \leq k_2 * g(n) \right\}$$

Ejemplo:

$$100n^2 + 300n + 1000 \in \Theta(n^2)$$



Propiedades de Θ

1. Para cualquier función f se tiene que $f \in \Theta(f)$.
2. $f \in \Theta(g) \Rightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$.
3. $\Theta(f) = \Theta(g) \Leftrightarrow f \in \Theta(g)$ y $g \in \Theta(f)$.
4. Si $f \in \Theta(g)$ y $g \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(h)$.
5. Si $f \in \Theta(g)$ y $f \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(\max(g,h))$.
6. Regla de la suma:
   Si $f1 \in \Theta(g)$ y $f2 \in \Theta(h) \Rightarrow f1 + f2 \in \Theta(\max(g,h)) = \Theta(g+h)$.
7. Regla del producto: Si $f1 \in \Theta(g)$ y $f2 \in \Theta(h) \Rightarrow f1 * f2 \in \Theta(g*h)$.
8. Si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$, según los valores que tome k:

   i. Si $k \neq 0$ y $k < \infty$. entonces $\Theta(f) = \Theta(g)$.
   ii. Si $k = 0$ entonces $\Theta(g) \neq \Theta(f)$.

Observaciones

La utilización de las cotas asintóticas para comparar funciones de tiempo de ejecución se basa en la hipótesis de que son suficientes para decidir el mejor algoritmo, prescindiendo de las constantes de proporcionalidad.

Sin embargo, esta hipótesis puede no ser cierta cuando el tamaño de la entrada es pequeño, o cuando las constantes involucradas son demasiado grandes, etc.

Última sobre el tamaño de la entrada

¿Cual es la complejidad de multiplicar dos enteros?

- Depende de cual sea la medida del tamaño de la entrada.
- Podrá considerarse que todos los enteros tienen tamaño O(1), pero eso no será útil para comparar este tipo de algoritmos.
- En este caso, conviene pensar que la medida es el **logaritmo del número**.
- Si por el contrario estuviésemos analizando algoritmos que ordenan arreglos de enteros, lo que importa no son los enteros en sí, sino **cuántos** tengamos.
- Entonces, para ese problema, la medida va a decir que todos los enteros miden lo mismo.

Complejidad de algoritmos recursivos

¿Cómo calculamos la complejidad de los algoritmos recursivos?

- Dijimos: “El tiempo de ejecución de las llamadas a procedimientos recursivos va a dar lugar a ecuaciones en recurrencia, que veremos posteriormente.”

Igual podemos pensarlo: hay que poder resolver las ecuaciones de recurrencia, por ejemplo:

- $T(n)= n + T(n-1)$

Bibliografía

- Data Structures and Algorithms. Alfred V. Aho, Jefrey D. Ullman, John E. Hopcroft. Addison-Wesley.
- Introduction to Algorithms, Second Edition. Thomas H.Cormen, Charles E. Leiserson and Ronald L. Rivest. MIT Press, 2001.
- Cualquier libro de Estructuras de Datos y/o Algoritmos