Przykładowe zadania na kolokwium ze wstępu do kombinatoryki analitycznej

Uwaga - gdy jest pytanie o liczbę, za pełną odpowiedź uznajemy $[z^n]X(z)$ dla odpowiedniej funkcji X(z).

- 1. Rozwiń w 0 funkcję $A(z) = \frac{z^3}{1-3z}$.
- 2. Na ile sposobów można wypłacić 200\$ mając do dyspozycji nieograniczoną liczbę banknotów 1\$, 2\$, 5\$ i 10\$?
- 3. Napisz OFG, która opisuje ciąg Fibonacciengo.
- 4. Napisz EFG dla klasy permutacji złożonych z dwóch cykli.
- 5. Stosując wzór Lagrange'a wyznaczyć n-ty wyraz rozwinięcia funkcji T(z), która spełnia zależność rekurencyjną:

$$T(z) = z(T(z))^2 + z + 1.$$

- 6. Przedstaw automat, który akceptuje słowa nad alfabetem $\{a,b\}$ zawierający podciąg aaa. Ile jest takich słów długości 1000?
- 7. Niech W będzie zbiorem skończonych ciągów (słów) nad alfabetem $\{a,b,c,d\}$. Niech |x| oznacza długość ciągu, zaś $\chi(x)$ będzie liczbą występujących w x liter a. Niech $\mathcal{W}=(W,||,\chi)$ będzie klasą kombinatoryczną. Podaj BFG dla \mathcal{W} .
- 8. Ile jest funkcji ze zbioru $\{1,\ldots,n\}$ w $\{1,\ldots,r\}$, takich że przeciwobraz każdej wartości ma co najmniej dwa elementy?
- 9. Niech dla pewnego r < 1:

$$X(z) = \frac{z+1}{(1-zr)^2(1-z)}.$$

Podać możliwe dokładną asymptotykę $[z^n]X(z)$.

10. Ile jest drzew uporządkowanych o r węzłach, takich że każdy węzeł ma co najwyżej 3 potomków?