

# Kolokwium

## ze wstępu do kombinatoryki analitycznej

Uwaga - gdy jest pytanie o liczbę, za pełną odpowiedź uznajemy  $[z^n]X(z)$  dla odpowiedniej funkcji  $X(z)$ .  
Wszystkie zadania za 1p.

1. Niech  $\mathcal{A} = (A, ||)$ , gdzie  $A = \{a, b\}$  oraz  $|a| = 1$  zaś  $|b| = 2$ . Podać OFG dla klas  $Cyc(\mathcal{A})$  oraz  $PSet(\mathcal{A})$ .
2. Niech  $\mathcal{A}$  będzie klasą kombinatoryczną słów nad alfabetem  $\{a, b, c\}$ . Podaj OFG dla  $A$ .
3. Rozwiń w 0 funkcję  $A(z) = \frac{z}{1+az} + \frac{1}{1-z}$  dla pewnej stałej  $a > 0$ .
4. Ile jest triangulacji 100-kąta?
5. Mikołaj ma w torbie trzy rozróżnialne prezenty warte po 5 złotych, pięć rozróżnialnych prezentów za 20 złotych oraz sto rozróżnialnych prezentów za 1 złoty. Na ile sposobów może przygotować paczkę o wartości 50 zł?
6. Napisz EFG dla klasy permutacji złożonych dokładnie z 3 cykli o długości co najwyżej 20.
7. Stosując wzór Lagrange'a wyznaczyć  $n$ -ty wyraz rozwinięcia funkcji  $T(z)$ , która spełnia zależność rekurencyjną:

$$T(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} (T(z) - 1)^k + 1.$$

8. Niech  $W$  będzie zbiorem skończonych ciągów (słów) nad alfabetem  $\{a, b, c, d\}$ . Niech  $|x|$  oznacza długość ciągu, zaś  $\chi(x)$  będzie liczbą występujących w  $x$  liter różnych od  $d$ . Niech  $\mathcal{W} = (W, ||, \chi)$  będzie klasą kombinatoryczną. Podaj BFG dla  $\mathcal{W}$ .
9. Niech dla pewnego  $r > 1$ :

$$X(z) = \frac{z^2 + 1}{(1 - zr)^4(1 - z)}.$$

Podać możliwe dokładną asymptotykę  $[z^n]X(z)$ .

10. (Z gwiazdką) Niech  $a_0 = 1, a_5$  oraz dla  $n > 1$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Znajdź funkcję tworzącą ciągu  $a_n$  oraz jego asymptotykę.