

Ćwi 1

Termin oddania: 28. 10. 2020

Przyjmujemy, że OFG klasy \mathcal{A} to $A(z)$.

1. (1 p.) Ciąg (a_1, a_2, \dots) odpowiada funkcji generującej $A(z)$. Jakim ciągom odpowiadają funkcje:

- $A'(z) + A(z)$,
- $2A(z)$,
- $A^2(z)$.

2. (3 p.) Rozważmy dwie klasy kombinatoryczne: $\mathcal{A} = (\{\star, 1, 2, \varepsilon\}, |\cdot|)$, gdzie $|\star| = 5, |1| = 1, |2| = 2, |\varepsilon| = 0$ oraz

$$\mathcal{B} = (\{a\}, \{a \rightarrow 1\}) .$$

Opisz poniższe klasy (jeśli istnieją) i podaj ich funkcje generujące:

- (a) $\mathcal{A} + \mathcal{B}$,
- (b) $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$,
- (c) $Seq(\mathcal{A})$,
- (d) $Seq(\mathcal{B})$,
- (e) $Seq(\mathcal{A} + \mathcal{B})$,
- (f) $Seq(\mathcal{A}) + Seq(\mathcal{B})$,
- (g) $MSet(\mathcal{B})$,
- (h) $PSet(\mathcal{A}) + PSet(\mathcal{B})$,
- (i) $Cyc(\mathcal{A})$.

3. (1 p.) W przypadku definiowania $Seq(\mathcal{A})$ zakładaliśmy, że $[z^0]A(z) = 0$. Dlaczego?

4. (1 p.) Policzyc $[z^{30}] \frac{1}{(1-z)^7}$ (bez użycia komputera - tylko na podstawie mądrości z wykładu 1).

5. (1 p.) Przepisać sobie wszystkie 6. opisanych na wykładzie 1 równań (tożsamości kombinatorycznych). Zapamiętać i zrozumieć nierówności 1-4.

6. (3 p.) Niech \mathcal{N} oznacza klasę kombinatoryczną liczb naturalnych z funkcją rozmiaru równą wartości liczby. Niech $\mathcal{N}_{r,k}$ oznacza klasę liczb naturalnych, które dają resztę r z dzielenia przez k . Uzasadnij, że

$$\mathcal{N} \simeq \mathcal{N}_{0,k} + \dots + \mathcal{N}_{k-1,k} .$$

7. (0 p.) Czy Justyn Beiber korzysta z najnowszych osiągnięć kombinatoryki analitycznej?

Lab 1

Termin oddania: 28. 10. 2020

1. (1 p.) Dla jakich x zachodzi

$$x > 10^6 \log(x)?$$

Proszę narysować odpowiednie wykresy.

2. (1 p.) Wielu kulturalnych ludzi twierdzi, że

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Oszacować błąd względy i bezwzględny¹ tego oszacowania. Czy takiemu oszacowaniu należy się szacunek²?

3. (3 p.) Na ile sposobów można wypłacić 200\$ mając do dyspozycji 20 banknotów 20\$, 10 banknotów 10\$, 10 banknotów 5\$ dolarowych oraz 50 banknotów 1\$. Uwaga: banknoty są rozróżnialne³.
4. (3 p.) Na ile sposobów Rychu Peja może wypłacić 16 zł mając do dyspozycji 3 monety 5 zł, 5 monet 2 zł 10 monet 1 zł oraz 100 monet 10 gr. Zakładamy, że kolejność wydawania monet nie ma znaczenia a monety są nierozróżnialne.
5. (3 p.) Na ile sposobów można przedstawić liczbę 200 jako sumę 30 liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 50, 100\}$? Zakładamy, że kolejność sumowania ma znaczenie⁴.
6. (4 p.) Ile jest naszyjników 3-kolorowych o długości 5? Który jest najładniejszy?
7. (4 p.) Ile jest naszyjników 4-kolorowych o długości 20?
8. (0 p.) Kto reprezentuje biedę?



¹Wszystko jest względne, tylko Chuck Norris jest bezwzględny.

²Chodzi o szacunek ludzi ulicy.

³Bo mają numery seryjne.

⁴Zatem $10 = 8 + 2$ i $10 = 2 + 8$ to dwie różne reprezentacje.



Wiesz co się liczy?
Szacunek Ludzi Ulicy.