Lista 6

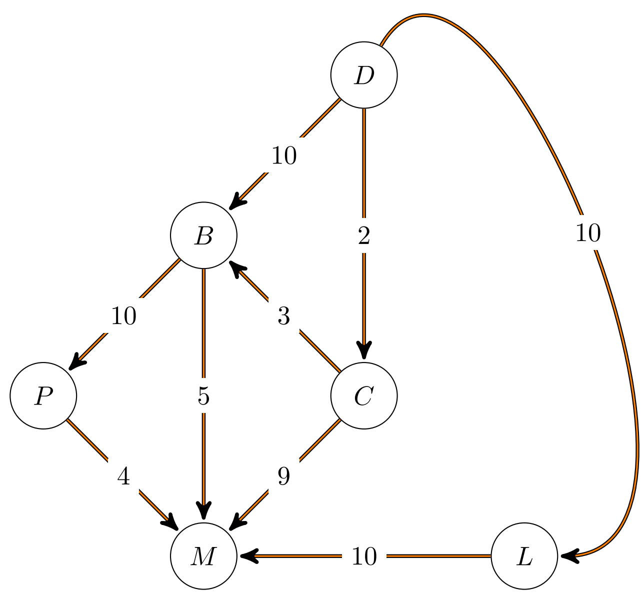
Zadanie 1

---

1 Problem

Rozważamy skierowany graf acykliczny (DAG) $G = (V, E, f)$ gdzie każda krawędź $e \in E$ ma swój koszt określany przez funkcję $f : V \times V \to \mathbb{R}$. Chcemy znaleźć wszystkie najkrótsze („najtańsze") ścieżki od źródła ($v_s \in V$ t. że $\deg^-(v_s) = 0$) do pozostałych wierzchołków $V \setminus \{v_s\}$.

W przykładzie poniżej wierzchołkiem źródłowym jest wierzchołek D.



Rysunek 1: Przykładowy DAG

2 Concept

Użyjemy tutaj metodologii programowania dynamicznego. Zapamiętujemy każdą nowo odkrytą najkrótszą ścieżkę pomiędzy danymi wierzchołkami, a podczas dalszego znajdowania ścieżek wykorzystujemy tę wiedzę, którą już mamy.

3 Rozwiązanie

Najpierw musimy ustalić kolejność, według której będziemy przeglądać wierzchołki. Wierzchołki grafu wejściowego sortujemy topologicznie względem wierzchołka startowego. Użyjemy tutaj algorytmu Kahn'a:

Algorithm 1 Algorytm Kahn'a

$L \leftarrow [\,]$
$S \leftarrow \{s\}$
while $S \neq \emptyset$ **do**:
    remove a node n from S
    $L \leftarrow \texttt{concat}(L, [n])$
    for each node m with an edge e from n to m **do**:
        remove edge e from the graph
        if $\deg^-(m) = 0$ **then**:
            insert m into S
        end if
    end for
end while

Złożoność obliczeniowa powyższego algorytmu wynosi $O(|V| + |E|)$. Algorytm Kahn'a daje nam „zlinearyzowany" graf, po którym możemy szukać najkrótszych ścieżek pomiędzy v_s a pozostałymi wierzchołkami.

Zdefiniujmy funkcję zwracającą nam indeksy wszystkich wierzchołków sąsiednich dla danego $v_k \in V$:

$$\mathcal{N}(k) = \{j : \forall (v_k, v_j) \in E\}.$$

Nasze poszukiwania zaczynamy od inicjalizacji tablicy odległości pomiędzy wszystkimi wierzchołkami V a wierzchołkiem v_s. Tablicę odległości $d[0, \dots, |V|]$ wypełniamy wartościami ∞, przy czym $d[s] = 0$. Wówczas $\forall_{i \in \{0, \dots, |V|\}}\ d[i]$ określa odległość pomiędzy wierzchołkiem źródłowym v_s a wierzchołkiem v_i.

Oprócz tablicy d musimy przechowywać numery indeksów wierzchołków, które tworzą znalezioną ścieżkę z v_s do v_i. Stworzymy listę list, którą nazwiemy r, gdzie $r[i]$ to lista indeksów wierzchołków, które tworzą najkrótszą ścieżką pomiędzy v_s a v_i.

1: $d \leftarrow [\infty, \ldots, \infty]$
2: $d[s] \leftarrow 0$
3: $r \leftarrow \big[\,[\,],\ \ldots,\ [\,]\,\big]$
4: **for each** i in $\{i : v_i \in V\}$ in linearized order **do**:
5:     **for each** j in $\mathcal{N}(i)$ **do**:
6:         **if** $d[i] > d[j] + f(j, i)$ **then**:
7:             $d[i] \leftarrow d[j] + f(j, i)$
8:             $r[i] \leftarrow \texttt{concat}(r[j], [i])$
9:         **end if**
10:     **end for**
11: **end for**

W linijkach 6-9 sprawdzamy, czy nie ma „tańszej” drogi z wierzchołka v_s do wierzchołka v_i. Złożoność obliczeniowa powyższego algorytmu wynosi $O(|E|)$, ponieważ w pętli rozważamy koszty powstałe dla każdej krawędzi w grafie.