Lista 6

Zadanie 4

---

1 Problem

Jedziemy samochodem palącym 1 litr paliwa na 1 km. Samochód ma górne ograniczenie paliwa, które może przewieźć wynoszące W. Na drodze są porozstawiane stacje paliwowe, gdzie w_i to cena za 1 litr paliwa na stacji i. Należy znaleźć jak najtańszą drogę do stacji końcowej n.

2 Concept

Rozważamy drogę, po której jedzie samochód jako DAG (directed acyclic graph). Wierzchołkami w tym grafie są stacje. Krawędzie pomiędzy wierzchołkami tworzymy tylko wtedy kiedy pozwala na to zasięg samochodu. Jednakże, w takim modelu nie rozważamy sytuacji kiedy tankujemy więcej paliwa niż potrzebujemy do dojechania do następnej stacji, a może być sytuacja, że zatankowanie wcześniej większej ilości paliwa dałoby tańszą podróż. Musimy zatem rozszerzyć wierzchołki reprezentujące stacje o dodatkową informację — ilość pozostałego paliwa w baku samochodu.

Zatem rozbijamy wierzchołki reprezentujące poszczególne stacje na grupy wierzchołków oznaczanych przez parę (k, i) gdzie k to indeks stacji, a i to liczba litrów paliwa pozostałego w baku po dojechaniu do tej stacji.

3 Rozwiązanie

Budujemy odpowiedni DAG $G = (V, E, f)$ gdzie V to wierzchołki grafu, E to krawędzie grafu a $f : V \times V \to \mathbb{R}$ to funkcja wag krawędzi. Mamy wierzchołki (k, i), gdzie k to indeks stacji, a i to liczba litrów paliwa „nadmiarowego" (ile litrów paliwa zostało po dojechaniu do $k$tej stacji) gdzie $i \in \{0, \ldots, W\}$

Ustalmy ciąg s_k określający kilometr stacji k (odległość stacji k od stacji startowej). Wówczas odległość między stacjami a, b wynosi $d_{a\to b} = s_b - s_a$.

Układ krawędzi i wierzchołków musi uwzględniać parametr W (zasięg samochodu). Zaczynamy od wierzchołka źródłowego $(1, 0)$ który reprezentuje stację, na której samochód rozpoczyna podróż. Dla pozostałych stacji budujemy wierzchołki (k, i) dla $i \in \{0, \ldots, W\}$, $k \in \{2, \ldots, n\}$. Łączymy wierzchołki krawędziami uwzględniając zasięg oraz ile litrów paliwa „nadmiarowego" przewozi samochód. Czyli dla każdego wierzchołka (k,i) rozważamy stacje o wierzchołkach (l,j) takich, że $d_{k\to l} \leqslant W - j$. Oczywiście nie łączymy wierzchołków dla tej samej stacji (czyli $\forall k\ \forall i,j\ i \neq j :\ \big((k,i),(k,j)\big) \notin E$).

Funkcję wag krawędzi określamy jako $f\big((k,i),(l,j)\big) = w_k \cdot \big(d_{k\to l} - i + j\big)$. Wówczas za część przebytej drogi do następnej stacji możemy „zapłacić” paliwem kupionym na którejś z poprzednich stacji.

Stosujemy zmodyfikowany algorytm wyszukiwania najkrótszej drogi w DAG-u z zadania 1. Określamy wierzchołek startowy jako stację o indeksie 1 — czyli w poniższym algorytmie $s = 0$.

```
d ← matrix n × W filled with ∞
d[1][0] ← 0
r ← matrix n × W filled with [ ]
for each k in {2, ..., n} do:
    for each i in {0, ..., W} do:
        for each l in N(k) do:
            for each j in {0, ..., W} do:
                if d[k][i] > d[l][j] + f((k, i), (l, j)) then:
                    d[k][i] ← d[l][j] + f((k, i), (l, j))
                    r[k][i] ← concat(r[l][j], [(k, i)])
                end if
            end for
        end for
    end for
end for
```

Gdzie $\mathcal{N}$ to funkcja definiowana przez: $\mathcal{N}(k) = \{l : \forall i,j \in \{0,\ldots,W\}\ \forall\big((k,i),(l,j)\big) \in E\}$.

Tablica $r[n][0]$ reprezentuje ciąg wierzchołków określających kolejne stacje i liczbę litrów pozostałego paliwa na tych stacjach podczas najtańszej podróży do końca drogi. Liczba $d[n][0]$ reprezentuje koszt tej podróży.

W celu określenia na jakiej stacji ile bierzemy litrów paliwa musimy odpowiednio przetworzyć ciąg wynikowy $r[n][0]$: niech R_p określa liczbę litrów paliwa pozostałą po dotarciu do stacji $p$tej (bierzemy stacje tylko z tego ciągu wynikowego z zachowaniem oryginalnych indeksów stacji). Ciągiem określającym nasz ostateczny wynik będzie S_n, gdzie S_p to liczba litrów paliwa, którą samochód musi zatankować na stacji $p$tej. Element tego ciągu obliczamy w następujący sposób: $S_p = d_{p\to p+1} + R_{p+1} - R_p$ przy czym $S_n = 0$.