Lista 6

Zadanie 4

---

1 Problem

Jedziemy samochodem palącym 1 litr paliwa na 1 km. Samochód ma górne ograniczenie paliwa, które może przewieźć wynoszące W. Na drodze są porozstawiane stacje paliwowe, gdzie w_i to cena za 1 litr paliwa na stacji i. Należy znaleźć jak najtańszą drogę do stacji końcowej n.

2 Concept

Reprezentujemy drogę z porozstawianymi stacjami jako DAG (directed acyclic graph) gdzie każda z krawędzi ma jakąś wagę. Odległość pomiędzy stacjami (wierzchołkami na grafie) możemy prosto obliczyć: $d_{i \to j} = i - j, i \leqslant j$, gdzie i oraz j to indeksy stacji. Wówczas wagi krawędzi można obliczać poprzez pomnożenie odległości między stacjami przez cenę paliwa w stacji początkowej dla tej krawędzi: $f\big((i,j) \in E\big) = d_{i \to j} \cdot w_i$. Jednakże, algorytm musi brać pod uwagę parametr W, będący ograniczeniem mówiącym, ile litrów może zostać wziętych przez samochód. Wystarczy wprowadzić „zakaz" tworzenia krawędzi pomiędzy stacjami, gdzie odległość jest większa niż W.

3 Rozwiązanie

Przygotowujemy odpowiedni graf. Sortowanie topologiczne nie jest potrzebne, bo trzymamy się oryginalnej kolejności stacji na drodze. Dalej, dla każdego wierzchołka generujemy krawędzie do wszystkich wierzchołków oddalonych o maksymalnie W.

Stosujemy algorytm wyszukiwania najkrótszej drogi w DAG-u z zadania 1. Określamy wierzchołek startowy jako stację o indeksie 0 — czyli w poniższym algorytmie $s = 0$.

$d \leftarrow [\infty, \ldots, \infty]$
$d[s] \leftarrow 0$
$r \leftarrow \big[\ [\ ],\ \ \ldots,\ [\ ]\ \big]$
for each i in $\{1, \ldots, n\}$ **do**:
    for each j in $\mathcal{N}(i)$ **do**:
        if $d[i] > d[j] + f(j, i)$ **then**:
            $d[i] \leftarrow d[j] + f(j, i)$
            $r[i] \leftarrow \texttt{concat}(r[j], [i])$
        end if
    end for
end for

Gdzie $\mathcal{N}$ to funkcja definiowana przez: $\mathcal{N}(k) = \{j : \forall (v_k, v_j) \in E\}$.

Rozwiązaniem naszego problemu jest tablica $r[n]$ reprezentująca indeksy kolejnych stacji, które tworzą najtańszą ścieżkę oraz liczba $d[n]$ reprezentująca koszt tej podróży.