

Algoritmos Geométricos

Carlos Alberto Ynoguti

Introdução e escopo

- A Geometria Computacional é um ramo da Ciência da Computação que estuda algoritmos e estruturas de dados para a resolução computacional de problemas geométricos.
- Para nossos propósitos, podemos vê-la como a geometria de segmentos de linha e polígonos discretos.

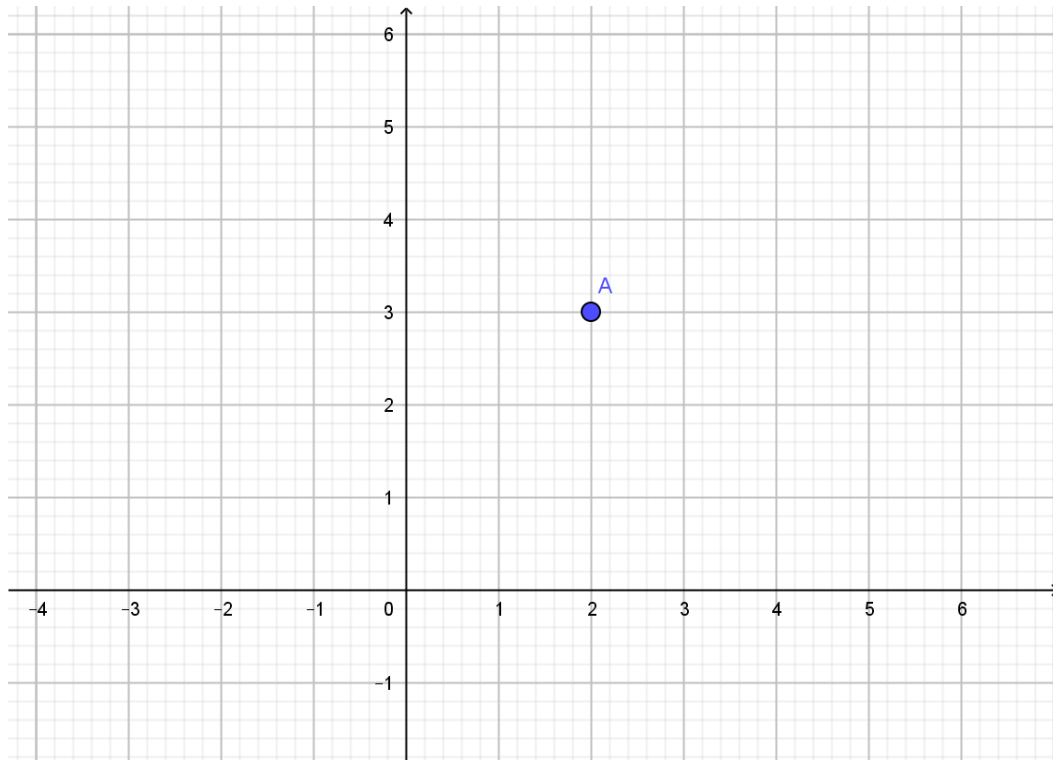
Aplicações

Vários problemas podem ser resolvidos com a Geometria Computacional:

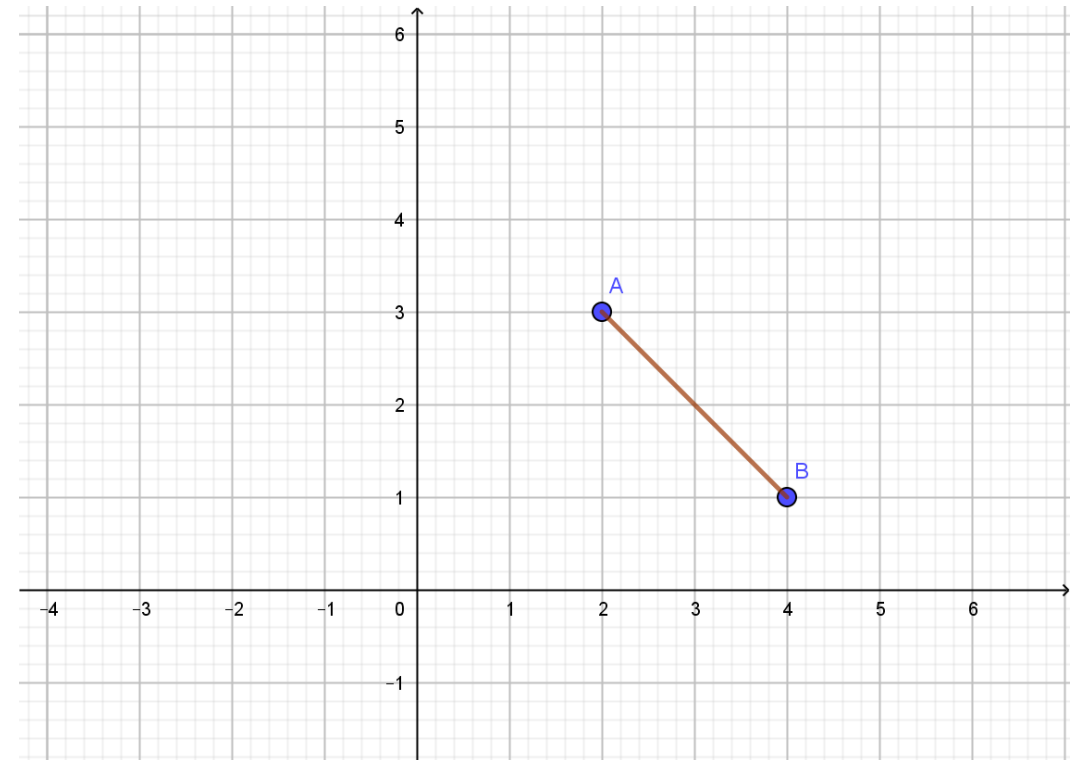
- Química: modelagem de moléculas
- Cartografia: SIG, projeções cartográficas
- Física e Engenharia: modelos de antenas, CAD, simulações
- Games e animações: camadas de objetos, engines para FPS
- entre outras

Estruturas de dados

```
typedef struct
{
    int x;
    int y;
} ponto;
```



```
typedef struct
{
    ponto a;
    ponto b;
} segmento;
```



Algoritmos básicos

- área de um triângulo
- coordenadas baricêntricas
- ponto em triângulo
- verificando se um ponto está à esquerda ou à direita de um segmento
- fecho convexo
- cálculo de áreas de polígonos convexos
- triangulação

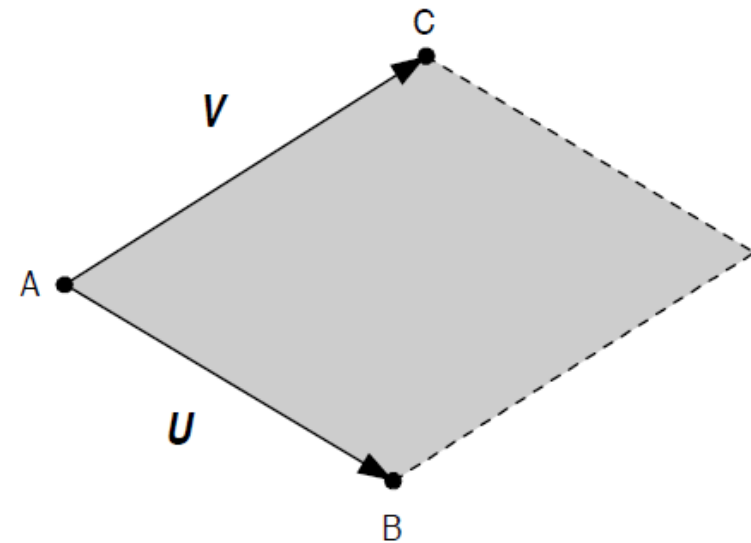
Área de um triângulo

A área do paralelogramo formado pelos vetores u e v é dado pelo produto vetorial entre estes dois vetores, e pode ser calculado a partir do determinante:

$$S = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B - y_A x_B + y_A x_C - x_A y_C + x_B y_C - y_B x_C$$

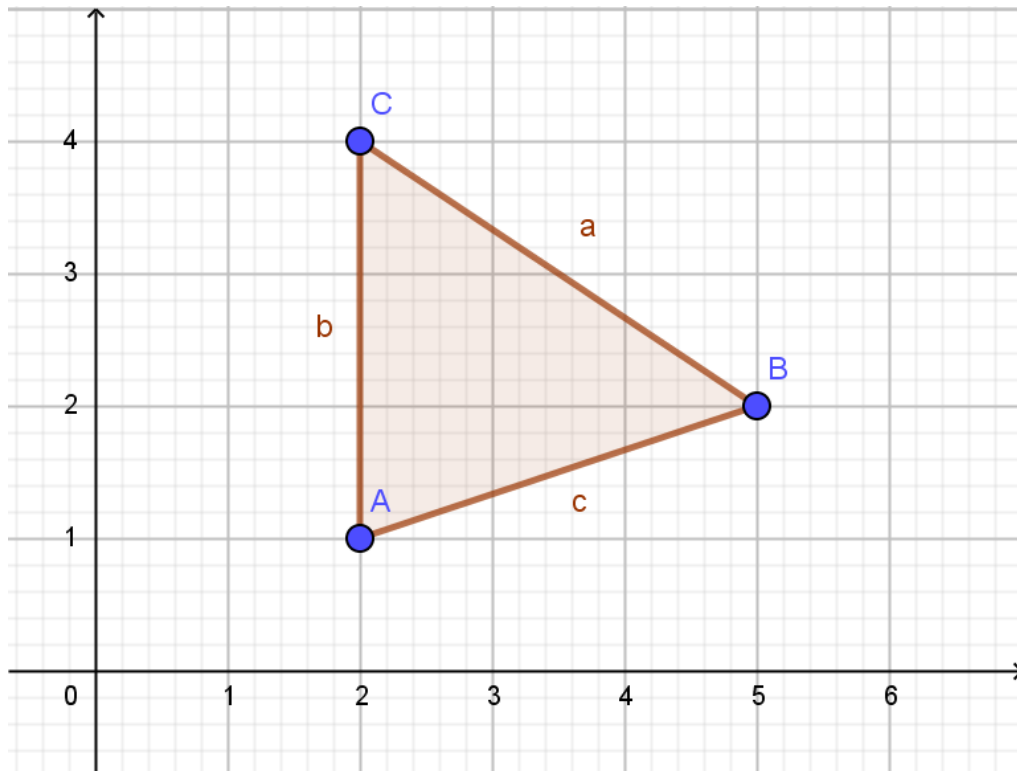
E como a área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo ABC, temos:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (x_A y_B - y_A x_B + y_A x_C - x_A y_C + x_B y_C - y_B x_C)$$



Sentido dos vértices

A área será negativa se a seqüência de vértices estiver orientada em sentido horário, e positiva caso contrário:

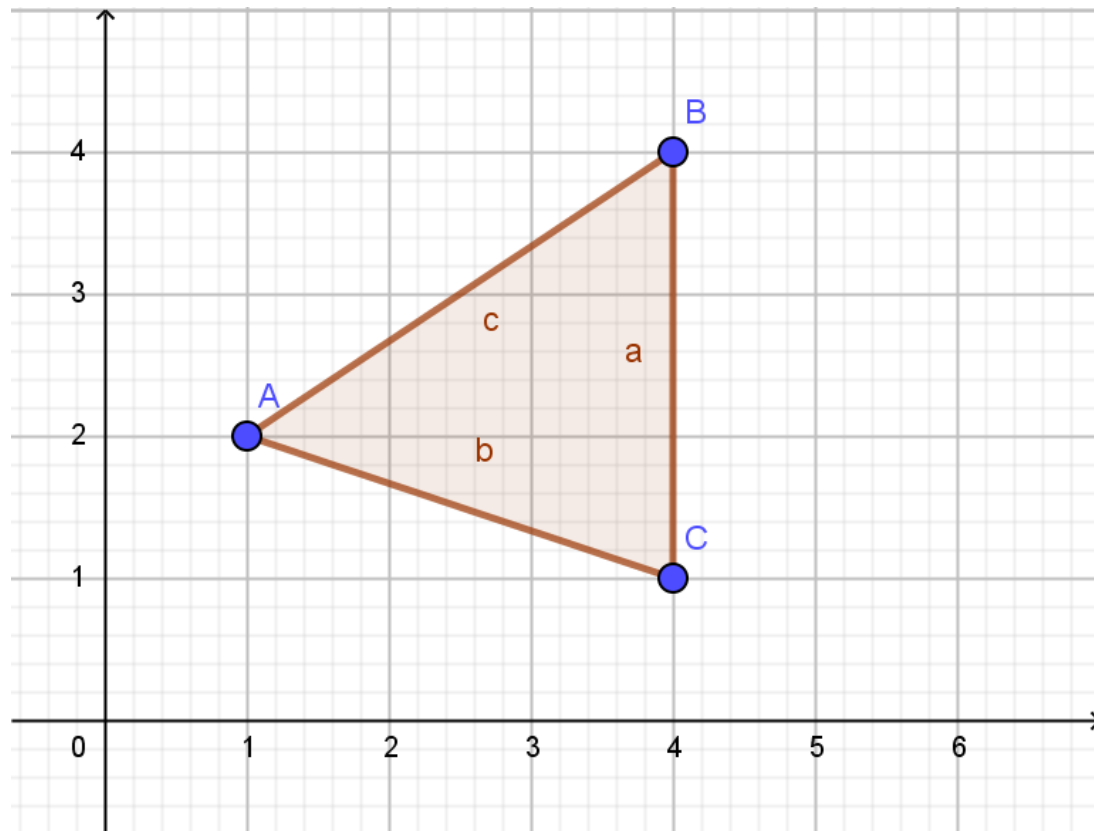


$$A(1,1) \quad B(5,2) \quad C(2,4)$$

$$S = \frac{1}{2}(13) = 6,5$$

Área positiva =>
ABC em sentido anti-horário

Exercício



Coordenadas baricêntricas

Teorema: Sejam p_1 , p_2 e p_3 pontos não colineares no plano. Então cada ponto p do plano pode ser escrito na forma

$$p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$$

onde λ_1 , λ_2 e λ_3 são números reais e

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

Os coeficientes λ_1 , λ_2 e λ_3 são denominados coordenadas baricêntricas de p em relação a p_1 , p_2 e p_3 .

Cálculo das coordenadas baricêntricas

Podemos usar a expressão da área de um triângulo, definida anteriormente para calcular as coordenadas baricêntricas:

$$\lambda_1 = \frac{S_{\Delta}(p, p_2, p_3)}{S_{\Delta}(p_1, p_2, p_3)} \quad \lambda_2 = \frac{S_{\Delta}(p_1, p, p_3)}{S_{\Delta}(p_1, p_2, p_3)} \quad \lambda_3 = \frac{S_{\Delta}(p_1, p_2, p)}{S_{\Delta}(p_1, p_2, p_3)}$$

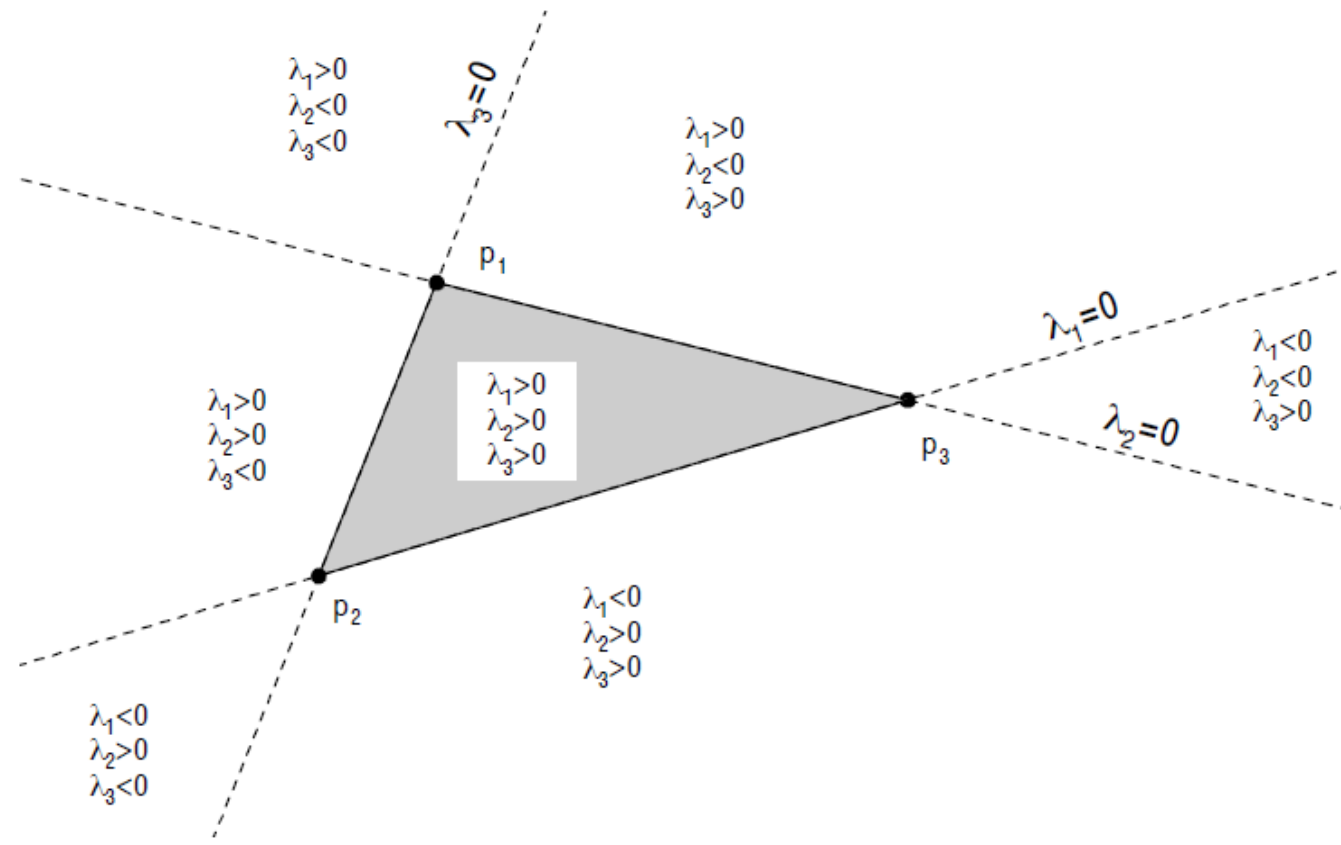
Exercício

Calcule as coordenadas baricênticas do ponto P em relações aos pontos p_1 , p_2 e p_3 :

$p = (3,2)$, $p_1 = (1,2)$, $p_2 = (4,4)$ e $p_3=(4,1)$

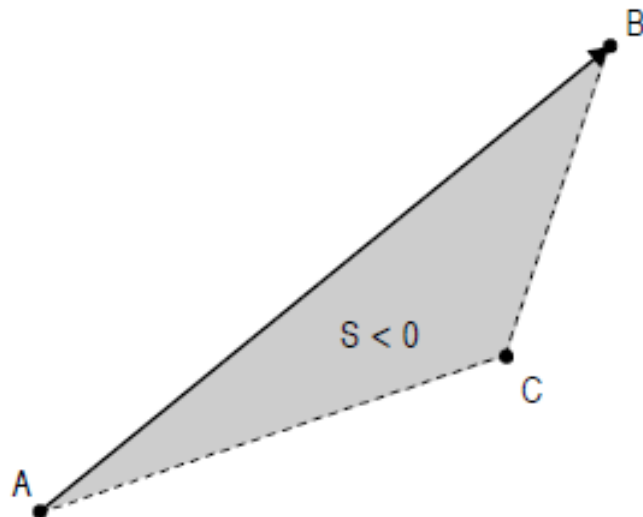
Posição de um ponto em relação a um triângulo

A análise do sinal das coordenadas baricêntricas indica a região do plano em que se encontra p , em relação ao triângulo $p_1p_2p_3$

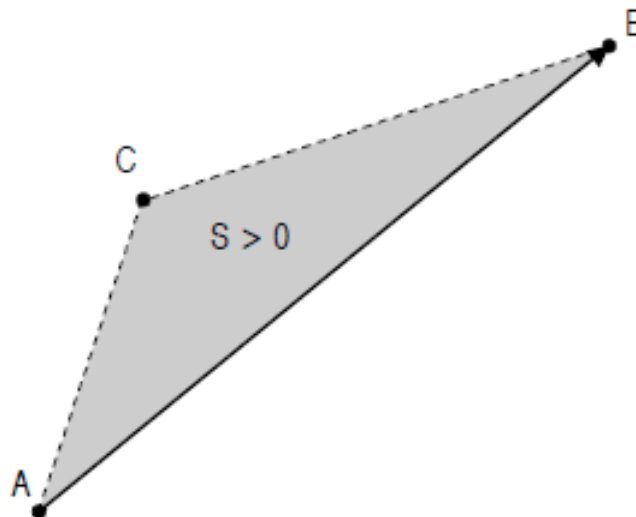


Posição relativa entre ponto e segmento orientado

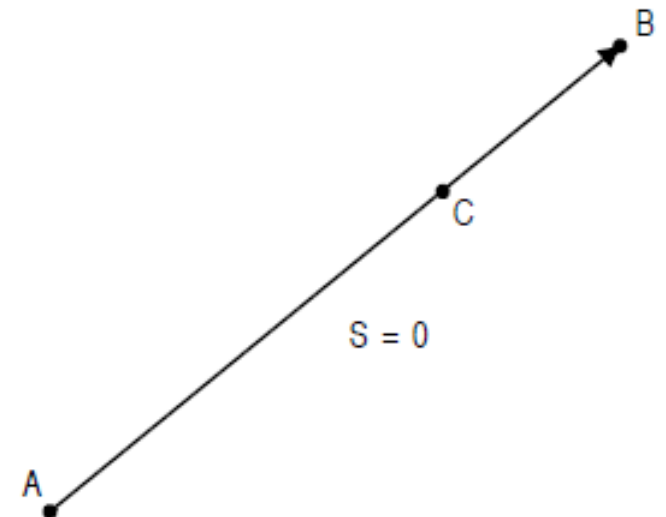
Para determinar se um ponto C está à direita ou à esquerda do segmento orientado AB , basta calcular a área do triângulo ACB . Se esta for positiva, o ponto C está à esquerda (a); se for negativa, C está à direita (b). Se a área calculada for nula, então A , B e C estão alinhados.



(a)



(b)



(c)

Exercício

Faça uma função em C++ para verificar se um ponto *p* está à direita, à esquerda ou alinhado com o segmento *ab*.

```
// retorna: 1 se p estiver à esquerda de ab,  
// -1 se p estiver à direita,  
// 0 se estiver alinhado  
int lado(ponto a, ponto b, ponto p)
```