Bináris fák. Függvénymutatók A programozás alapjai I.



Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék Farkas Balázs, Fiala Péter, Vitéz András, Zsóka Zoltán

2020. november 23.

Tartalom



- 1 Bináris fák
 - Definíció
 - Bináris rendezőfa
 - Bejárások

- Törlés
- Egyéb alkalmazások
- 2 Függvénymutatók
 - Motiváció
 - Megoldás

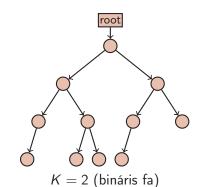
1. fejezet

Bináris fák

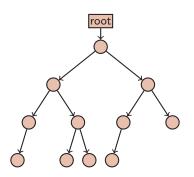




K = 1 (láncolt lista)



- Körmentes gráf
- Minden csomópontba egy él fut be
- K-ágú fa: minden csomópontból legfeljebb K él fut ki



A bináris fa adatszerkezetének deklarációja

```
typedef struct tree {
  int data;
  struct tree *left, *right;
} tree_elem, *tree_ptr;
link
```

Szokványos egyben deklarálni a mutató típust is







- Elem bal oldali részfájában csak nála kisebb elemek vannak
- Elem jobb oldali részfájában csak nála nagyobb elemek vannak
- A fa struktúrája az elemek érkezési sorrendjétől függ!

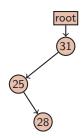






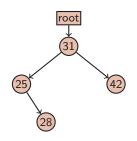
- Elem bal oldali részfájában csak nála kisebb elemek vannak
- Elem jobb oldali részfájában csak nála nagyobb elemek vannak
- A fa struktúrája az elemek érkezési sorrendjétől függ!





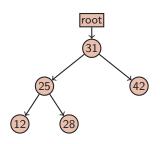
- 31 25 28 42 12 35 11 48 30 33 26
- Elem bal oldali részfájában csak nála kisebb elemek vannak
- Elem jobb oldali részfájában csak nála nagyobb elemek vannak
- A fa struktúrája az elemek érkezési sorrendjétől függ!





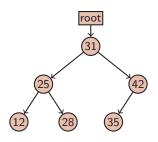
- 31 25 28 42 12 35 11 48 30 33 26
- Elem bal oldali részfájában csak nála kisebb elemek vannak
- Elem jobb oldali részfájában csak nála nagyobb elemek vannak
- A fa struktúrája az elemek érkezési sorrendjétől függ!





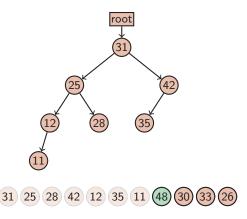
- 31 25 28 42 12 35 (11) (48) (30) (33) (26)
- Elem bal oldali részfájában csak nála kisebb elemek vannak
- Elem jobb oldali részfájában csak nála nagyobb elemek vannak
- A fa struktúrája az elemek érkezési sorrendjétől függ!



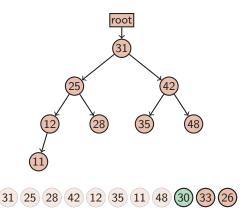


- 31 25 28 42 12 35 11 48 30 33 26
- Elem bal oldali részfájában csak nála kisebb elemek vannak
- Elem jobb oldali részfájában csak nála nagyobb elemek vannak
- A fa struktúrája az elemek érkezési sorrendjétől függ!



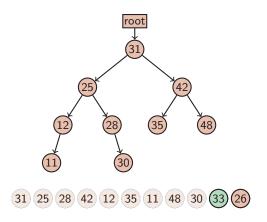


- Elem bal oldali részfájában csak nála kisebb elemek vannak
- Elem jobb oldali részfájában csak nála nagyobb elemek vannak
- A fa struktúrája az elemek érkezési sorrendjétől függ!



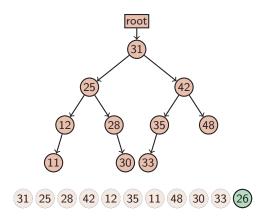
- Elem bal oldali részfájában csak nála kisebb elemek vannak
- Elem jobb oldali részfájában csak nála nagyobb elemek vannak
- A fa struktúrája az elemek érkezési sorrendjétől függ!



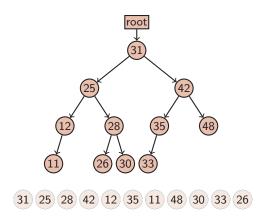


- Elem bal oldali részfájában csak nála kisebb elemek vannak
- Elem jobb oldali részfájában csak nála nagyobb elemek vannak
- A fa struktúrája az elemek érkezési sorrendjétől függ!

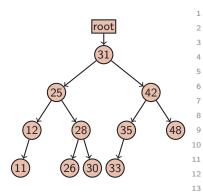




- Elem bal oldali részfájában csak nála kisebb elemek vannak
- Elem jobb oldali részfájában csak nála nagyobb elemek vannak
- A fa struktúrája az elemek érkezési sorrendjétől függ!



- Elem bal oldali részfájában csak nála kisebb elemek vannak
- Elem jobb oldali részfájában csak nála nagyobb elemek vannak
- A fa struktúrája az elemek érkezési sorrendjétől függ!



```
tree_ptr find(tree_ptr root,
                  int data)
3
    while (root != NULL &&
5
       data != root->data)
    {
6
       if (data < root->data)
         root = root->left;
       else
         root = root->right;
    return root;
                                link
```



```
tree_ptr find(tree_ptr root,
root
                                  int data)
               3
                    while (root != NULL &&
               5
                      data != root->data)
                    {
                      if (data < root->data)
                         root = root->left;
                      else
                         root = root->right;
                    }
              11
                    return root;
              13
                                                link
```

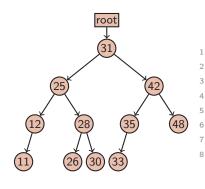
Ez még nem rekurzió!

```
tree_ptr find(tree_ptr root,
root
                                  int data)
               3
                    while (root != NULL &&
               5
                      data != root->data)
                      if (data < root->data)
                         root = root->left;
                      else
                        root = root->right;
                    }
              11
                    return root;
              13
                                                link
```

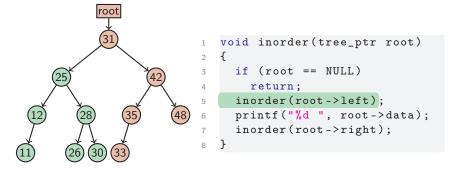
- Ez még nem rekurzió!
- d mély fában max. d lépés alatt megvan az eredmény

```
tree_ptr find(tree_ptr root,
                                  int data)
root
               3
                    while (root != NULL &&
               5
                      data != root->data)
                      if (data < root->data)
                         root = root->left;
                      else
                        root = root->right;
                    }
              11
                    return root;
              13
                                                link
```

- Ez még nem rekurzió!
- d mély fában max. d lépés alatt megvan az eredmény
- Kiegyensúlyozott fában n elem közül $\approx \log_2 n$ lépés!



```
void inorder(tree_ptr root)
  if (root == NULL)
    return;
  inorder(root->left);
  printf("%d ", root->data);
  inorder(root->right);
```

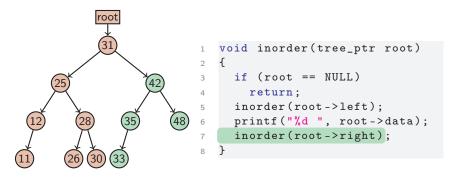


11 12 25 26 28 30

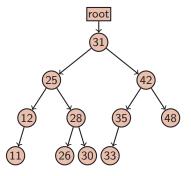


```
root
                 void inorder(tree_ptr root)
                   if (root == NULL)
                     return;
                   inorder(root->left);
                   printf("%d ", root->data);
                   inorder(root->right);
               8
```

11 12 25 26 28 30 31



11 12 25 26 28 30 31 33 35 42 48



```
void inorder(tree_ptr root)

{
   if (root == NULL)
     return;
   inorder(root->left);
   printf("%d ", root->data);
   inorder(root->right);
}
```

11 12 25 26 28 30 31 33 35 42 48

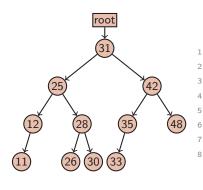
- inorder bejárás
 - bal részfa
 - 2 gyökérelem
 - 3 jobb részfa

Ebben a sorrendben nagyság szerinti sorrendben dolgozzuk fel az elemeket

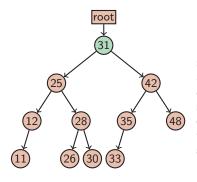
Másként is szervezhetjük a bejárást

```
void inorder(tree_ptr root)
{
    if (root->left != NULL)
        inorder(root->left);
    printf("%d ", root->data);
    if (root->right != NULL)
        inorder(root->right);
}
```

Ebben az esetben a hívó függvénynek kell vizsgálnia a root != NULL feltételt



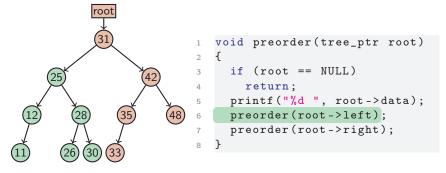
```
void preorder(tree_ptr root)
{
  if (root == NULL)
    return;
  printf("%d ", root->data);
  preorder(root->left);
  preorder(root->right);
}
```



```
void preorder(tree_ptr root)
{
   if (root == NULL)
     return;
   printf("%d ", root->data);
   preorder(root->left);
   preorder(root->right);
}
```

31

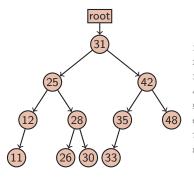




31 25 12 11 28 26 30

```
root
                 void preorder(tree_ptr root)
                   if (root == NULL)
                     return:
                   printf("%d ", root->data);
                   preorder(root->left);
                   preorder(root->right);
               8
```

12 11 28 26 30 42 35 33 48



```
void preorder(tree_ptr root)
    if (root == NULL)
      return;
    printf("%d ", root->data);
    preorder(root->left);
    preorder(root->right);
8
```

12 11 28 26 30 42 35 33 48

- preorder bejárás
 - gyökérelem
 - bal részfa
 - jobb részfa

Ebben a sorrendben kimentve majd visszaolvasva az elemeket, a fa struktúrája visszaállítható.

Faépítés

Új elem beillesztése a fába

```
tree_ptr insert(tree_ptr root, int data)
2
     if (root == NULL) {
3
       root = (tree_ptr)calloc(1, sizeof(tree_elem));
4
       root -> data = data;
5
     }
6
     else if (data < root->data)
7
       root->left = insert(root->left, data);
8
     else
9
       root->right = insert(root->right, data);
10
     return root;
11
                                                           link
12
```

Faépítés

Új elem beillesztése a fába

```
tree_ptr insert(tree_ptr root, int data)
2
     if (root == NULL) {
3
       root = (tree_ptr)calloc(1, sizeof(tree_elem));
4
       root -> data = data;
5
     }
6
    else if (data < root->data)
7
       root->left = insert(root->left, data);
8
     else
9
       root->right = insert(root->right, data);
10
     return root;
11
                                                           link
12
```

A függvény használata

```
tree_ptr root = NULL;
root = insert(root, 2);
root = insert(root, 8);
...
```

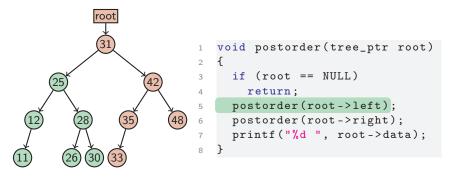


```
root
```

```
void postorder(tree_ptr
                         root)
  if (root == NULL)
    return;
  postorder(root->left);
  postorder(root->right);
  printf("%d ", root->data);
```

8

Bejárás – posztorder



11 12 26 30 28 25

Bejárás – posztorder

```
root
                 void postorder(tree_ptr root)
                   if (root == NULL)
                     return:
                   postorder(root->left);
                   postorder(root->right);
                   printf("%d ", root->data);
              8
```

11 12 26 30 28 25 33 35 48 42

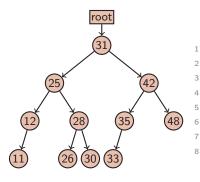
Bejárás – posztorder



```
root
                 void postorder(tree_ptr
                                           root)
                   if (root == NULL)
                      return:
                   postorder(root->left);
                   postorder(root->right);
                   printf("%d ", root->data);
               8
```

11 12 26 30 28 25 33 35 48 42 31

Bejárás – posztorder

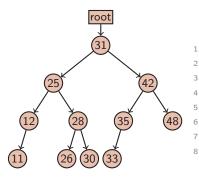


```
void postorder(tree_ptr root)
{
   if (root == NULL)
     return;
   postorder(root->left);
   postorder(root->right);
   printf("%d ", root->data);
}
```

11 12 26 30 28 25 33 35 48 42 31

- posztorder bejárás
 - bal részfa
 - 2 jobb részfa
 - 3 gyökérelem

Bejárás – posztorder



```
void postorder(tree_ptr root)
{
   if (root == NULL)
     return;
   postorder(root->left);
   postorder(root->right);
   printf("%d ", root->data);
}
```

11 12 26 30 28 25 33 35 48 42 31

- posztorder bejárás
 - bal részfa
 - 2 jobb részfa
 - 3 gyökérelem

Ebben a sorrendben először a levélelemeket dolgozzuk fel $\,
ightarrow$ alkalmazás: pl. fa lebontása

Fa lebontása posztorder bejárással

```
void delete(tree_ptr root)

{
    if (root == NULL) /* üres fa leállási feltétel */
        return;
    delete(root->left); /* postorder bejárás */
    delete(root->right);
    free(root);
}
```

Fa lebontása posztorder bejárással

```
void delete(tree_ptr root)
2
    if (root == NULL) /* üres fa leállási feltétel */
      return;
4
  delete(root->left); /* postorder bejárás */
    delete(root->right);
    free(root);
7
8
                                                        link
```

Egy teljes programrész (memóriaszivárgás nélkül)

```
tree_ptr root = NULL;
root = insert(root, 2);
root = insert(root, 8);
delete(root);
root = NULL;
```

- ... senki nem ellenőrzi 🙂
 - Írj max. 10 soros rekurzív függvényt, amely

- ... senki nem ellenőrzi 🙂
 - Írj max. 10 soros rekurzív függvényt, amely
 - megállapítja, hogy milyen mély a fa

- ... senki nem ellenőrzi 🙂
 - Írj max. 10 soros rekurzív függvényt, amely
 - megállapítja, hogy milyen mély a fa
 - kiszámolja a faelemek összegét / szorzatát / átlagát



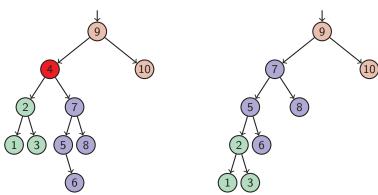
- ... senki nem ellenőrzi 🙂
 - Irj max. 10 soros rekurzív függvényt, amely
 - - megállapítja, hogy milyen mély a fa
 - kiszámolja a faelemek összegét / szorzatát / átlagát
 - Írj max. 10 soros iteratív függvényt, amely

- ... senki nem ellenőrzi 🙂
 - Irj max. 10 soros rekurzív függvényt, amely
 - megállapítja, hogy milyen mély a fa
 - kiszámolja a faelemek összegét / szorzatát / átlagát
 - Írj max. 10 soros iteratív függvényt, amely
 - kiszámolja a faelemek minimumát / maximumát



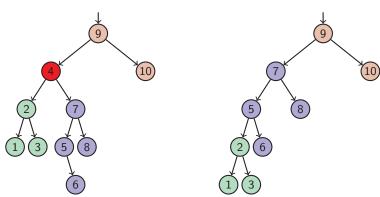
- ... senki nem ellenőrzi 🙂
 - Irj max. 10 soros rekurzív függvényt, amely
 - megállapítja, hogy milyen mély a fa
 - kiszámolja a faelemek összegét / szorzatát / átlagát
 - Írj max. 10 soros iteratív függvényt, amely
 - kiszámolja a faelemek minimumát / maximumát
 - visszaadja a legkisebb / legnagyobb adatot tartalmazó faelem címét

Elem törlése bináris rendezőfából – bután



- Jobb részfát felvisszük a törlendő elem helyére
- Bal részfát beillesztjük a jobb részfa legkisebb eleme alá

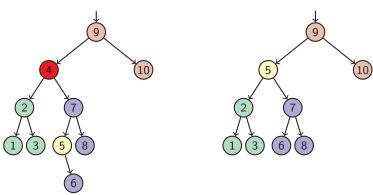




- Jobb részfát felvisszük a törlendő elem helyére
- Bal részfát beillesztjük a jobb részfa legkisebb eleme alá
- Kiegyensúlyozottság romlik!

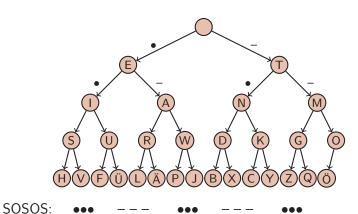
Elem törlése bináris rendezőfából – okosan





- Jobb részfa legkisebb elemét felvisszük a törlendő helyére
- A felvitt elemnek csak jobb oldali részfája lehetett, ezt gond nélkül feljebbvisszük.

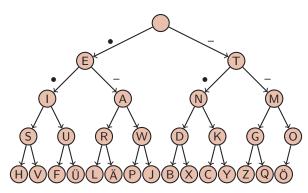




© Farkas B., Fiala P., Vitéz A., Zsóka Z

Morse dekódoló fa

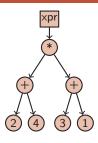




SOSOS:

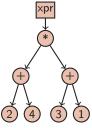
A válasz:

Matematikai kifejezések kiértékelése



- Matematikai kifejezések tárolása fában
- Levél → konstans
- Elágazás → kétoperandusú operátor
- Példában (2 + 4) * (3 + 1)





- Matematikai kifejezések tárolása fában
- Levél → konstans
- Elágazás → kétoperandusú operátor
- Példában (2 + 4) * (3 + 1)

```
int eval(tree_ptr xpr)
    char c = xpr->data;
3
    if (isdigit(c)) /* leállási feltétel */
      return c - '0';
5
    if (c == '+')
      return eval(xpr->left) + eval(xpr->right);
    if (c == '*')
      return eval(xpr->left) * eval(xpr->right);
9
                                                        link
```

Függvény kiértékelése

Vezessük be az x változót is levélelemként:

```
double feval(tree_ptr xpr, double x)
2
     char c = xpr->data;
3
     if (isdigit(c))
       return c - '0';
5
     if (c == 'x')
6
       return x;
     if (c == '+')
8
       return feval(xpr->left, x) + feval(xpr->right, x);
9
     if (c == '*')
10
       return feval(xpr->left, x) * feval(xpr->right, x);
11
   }
                                                           link
12
```

Függvény deriváltjának kiértékelése

Deriváljuk a függvényt:

c' = 0

```
x' = 1
     (f+g)'=f'+g'
      (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' 
   double deval(tree_ptr xpr, double x)
2
3
     char c = xpr->data;
     if (isdigit(c)) /* leállási feltétel */
       return 0.0;
5
     if (c == 'x') /* leállási feltétel */
6
       return 1.0:
7
     if (c == '+')
8
       return deval(xpr->left, x) + deval(xpr->right, x);
9
     if (c == '*')
10
       return deval(xpr->left, x) * feval(xpr->right, x) +
11
         feval(xpr->left, x) * deval(xpr->right, x);
12
                                                          link
13
```

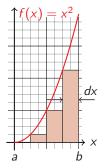
2. fejezet

Függvénymutatók



Bemelegítő feladat

Írjunk függvényt, amely az $f(x) = x^2$ függvény görbéje alatti területet közelíti az [a, b] intervallumon, n darab téglalappal



Bemelegítő feladat

Írjunk függvényt, amely az $f(x) = x^2$ függvény görbéje alatti területet közelíti az [a, b] intervallumon, n darab téglalappal

```
dx
```

```
double xsquare(double x)
     return x*x;
   double integral_x2(double a, double b,
                       unsigned n)
3
     double dx = (b-a)/n, sum=0.0, x;
4
     unsigned i;
5
     for (x=a, i=0; i < n; x+=dx, i++)
       sum += xsquare(x) * dx;
8
     return sum;
11
```

Bemelegítő feladat

Írjunk függvényt, amely az $f(x) = x^3$ függvény görbéje alatti területet közelíti az [a, b] intervallumon, n darab téglalappal

```
dx
```

```
double xcube(double x)
     return x*x*x;
   double integral_x3(double a, double b,
                       unsigned n)
3
     double dx = (b-a)/n, sum=0.0, x;
     unsigned i;
5
   for (x=a, i=0; i<n; x+=dx, i++)
       sum += xcube(x) * dx:
8
     return sum;
11
```

BMB

Motiváció

Határ a csillagos ég. . .

```
double integral_x2(double a, double b, unsigned n);
double integral_x3(double a, double b, unsigned n);
double integral_sin(double a, double b, unsigned n);
double integral_sqrt(double a, double b, unsigned n);
```

 ha módosítjuk a számítást, minden ilyen függvényt át kell írnunk

Motiváció



Határ a csillagos ég. . .

```
double integral_x2(double a, double b, unsigned n);
double integral_x3(double a, double b, unsigned n);
double integral_sin(double a, double b, unsigned n);
double integral_sqrt(double a, double b, unsigned n);
```

- ha módosítjuk a számítást, minden ilyen függvényt át kell írnunk
- Helyette jó lenne a görbét megadó függvényt is átadnunk a számolónak



Függvénymutató

lacktriangle a függvény is a memóriában van, ezért címe is képezhető ightarrowfüggvényre mutató pointernek is van értelme

```
double (*fx)(double);
fx = sqrt;
printf("%f\n", fx(5.0)); /* sqrt(5.0) */
                     /* <math.h> */
fx = sin;
printf("f\n", fx(1.57)); /* sin(1.57) */
```

Függvénymutató

- lacktriangle a függvény is a memóriában van, ezért címe is képezhető ightarrow függvényre mutató pointernek is van értelme
- értékadásnál egy megfelelő típusú függvény azonosítóját kell megadnunk

típus: paraméterek típusai + visszatérési érték típusa

```
double (*fx)(double);
fx = sqrt;
printf("%f\n", fx(5.0)); /* sqrt(5.0) */
fx = sin; /* <math.h> */
printf("%f\n", fx(1.57)); /* sin(1.57) */
```

Függvénymutató

- lacktriangle a függvény is a memóriában van, ezért címe is képezhető ightarrow függvényre mutató pointernek is van értelme
- értékadásnál egy megfelelő típusú függvény azonosítóját kell megadnunk
 típus: paraméterek típusai + visszatérési érték típusa
- a mutatott függvényt a mutatón keresztül meghívhatjuk

```
double (*fx)(double);
fx = sqrt;
printf("%f\n", fx(5.0)); /* sqrt(5.0) */
fx = sin; /* <math.h> */
printf("%f\n", fx(1.57)); /* sin(1.57) */
```

Függvénymutató

- lacktriangle a függvény is a memóriában van, ezért címe is képezhető ightarrow függvényre mutató pointernek is van értelme
- értékadásnál egy megfelelő típusú függvény azonosítóját kell megadnunk
 típus: paraméterek típusai + visszatérési érték típusa
- a mutatott függvényt a mutatón keresztül meghívhatjuk

```
1 double (*fx)(double);
2 fx = sqrt;
3 printf("%f\n", fx(5.0)); /* sqrt(5.0) */
4 fx = sin; /* <math.h> */
5 printf("%f\n", fx(1.57)); /* sin(1.57) */
```

Görbe alatti - bármire

```
double integral (double (*fx)(double),
13
                     double a, double b, unsigned n)
14
15
     double dx=(b-a)/n, sum=0.0, x;
16
     unsigned i;
17
18
     for (x=a, i=0; i < n; x+=dx, i++)
19
       sum += fx(x) * dx;
20
21
     return sum;
22
23
24
   int main(void)
25
26
     printf("\frac{n}{n}, integral(xsquare, 1.0, 5.0, 100));
27
     printf("f\n", integral(xcube, 1.0, 5.0, 100));
28
     return 0;
29
                                                             link
30
```

- A függvényt mutatóval adjuk át
 Egyszerűsítés: a függvény fejlécét is írhatjuk
- A mutatót a függvényhívás operátorral () használjuk
- Aktuális paraméterként csak a függvény azonosítóját kell megadnunk, hasonló formában, mint a tömb átadásánál

- A függvényt mutatóval adjuk át
 Egyszerűsítés: a függvény fejlécét is írhatjuk
- A mutatót a függvényhívás operátorral () használjuk
- Aktuális paraméterként csak a függvény azonosítóját kell megadnunk, hasonló formában, mint a tömb átadásánál

- A függvényt mutatóval adjuk át
 Egyszerűsítés: a függvény fejlécét is írhatjuk
- A mutatót a függvényhívás operátorral () használjuk
- Aktuális paraméterként csak a függvény azonosítóját kell megadnunk, hasonló formában, mint a tömb átadásánál

- A függvényt mutatóval adjuk át
 Egyszerűsítés: a függvény fejlécét is írhatjuk
- A mutatót a függvényhívás operátorral () használjuk
- Aktuális paraméterként csak a függvény azonosítóját kell megadnunk, hasonló formában, mint a tömb átadásánál

- A függvényt mutatóval adjuk át
 Egyszerűsítés: a függvény fejlécét is írhatjuk
- A mutatót a függvényhívás operátorral () használjuk
- Aktuális paraméterként csak a függvény azonosítóját kell megadnunk, hasonló formában, mint a tömb átadásánál

- A függvényt mutatóval adjuk át
 Egyszerűsítés: a függvény fejlécét is írhatjuk
- A mutatót a függvényhívás operátorral () használjuk
- Aktuális paraméterként csak a függvény azonosítóját kell megadnunk, hasonló formában, mint a tömb átadásánál



Függvénypointerekből álló tömböt is képezhetünk

```
double (*(ftrig[2]))(double) ={sin, cos};
for (i = 0; i < 2; ++i)
  printf("%f\n", ftrig[i](3.14));
```



■ Függvénypointerekből álló tömböt is képezhetünk

```
double (*(ftrig[2]))(double) ={sin, cos};

for (i = 0; i < 2; ++i)
  printf("%f\n", ftrig[i](3.14));</pre>
```

■ Könnyebben érthető a típus, ha typedef-et használunk

```
typedef double (*fvptr)(double);
fvptr fhyp[]={sinh, cosh};
```

■ Függvénypointerekből álló tömböt is képezhetünk

```
double (*(ftrig[2]))(double) ={sin, cos};

for (i = 0; i < 2; ++i)
  printf("%f\n", ftrig[i](3.14));</pre>
```

■ Könnyebben érthető a típus, ha typedef-et használunk

```
typedef double (*fvptr)(double);
fvptr fhyp[]={sinh, cosh};
```

Megjegyzések



Függvénypointerekből álló tömböt is képezhetünk

```
double (*(ftrig[2]))(double) ={sin, cos};
for (i = 0; i < 2; ++i)
  printf("%f\n", ftrig[i](3.14));
```

Könnyebben érthető a típus, ha typedef-et használunk

```
typedef double (*fvptr)(double);
fvptr fhyp[]={sinh, cosh};
```

- Megjegyzések
 - A függvénymutatókkal nem végezhetünk mutatóaritmetikai műveleteket

Függvénypointerekből álló tömböt is képezhetünk

```
double (*(ftrig[2]))(double) ={sin, cos};
for (i = 0; i < 2; ++i)
  printf("%f\n", ftrig[i](3.14));
```

Könnyebben érthető a típus, ha typedef-et használunk

```
typedef double (*fvptr)(double);
fvptr fhyp[]={sinh, cosh};
```

- Megjegyzések
 - A függvénymutatókkal nem végezhetünk mutatóaritmetikai műveleteket
 - A függvénymutatók read-only területre mutatnak, a függvények nem írhatók felül

Köszönöm a figyelmet.

