假设检验*

X. Ling

2022 年 6 月 16 日

第一部分　知识点

基本概念: 原假设, 备择假设, 显著性水平, 参数检验和非参数检验, 两类错误;

假设检验的步骤:

1. 建立原假设和备择假设;
2. 选取检验统计量;
3. 根据显著性水平确定拒绝域;
4. 根据样本确定检验统计量的取值, 并作出判断.

检验统计量的构造 (课本上的表).

第二部分　习题

注: 本部分习题均采用拒绝域形式完成, 如无特别说明,$\alpha = 0.05$.

1. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是来自 $N(\mu, 1)$ 的样本, 考虑假设检验问题

$$H_0 : \mu = 2, \quad H_1 : \mu = 3,$$

若检验的拒绝域为 $W = \{\bar{x} \geq 2.6\}$ 确定,

(1) 当 $n = 20$ 时, 求检验犯两类错误的概率;

(2) 如果要使检验犯第二类错误的概率 $\beta \leq 0.01$, 问样本量最小应该取多少;

(3) 证明: 当 $n \to \infty$, 有 $\alpha \to 0, \beta \to 0$.

解:

---

*Reference:

《概率论与数理统计教程（第三版）》，茆诗松，程依明，濮晓龙，高等教育出版社;

《概率论与数理统计教程（第三版）习题与解答》，茆诗松，程依明，濮晓龙，高等教育出版社;

《统计推断（翻译版 · 原书第二版）》，（美）George Casella, Roger L. Berger，张忠占、傅莺莺译，机械工业出版社.

(1): 犯第一类错误的概率是

$$\alpha = P(\bar{x} \geq 2.6|H_0) = P\left(\frac{\bar{x}-2}{\sqrt{1/20}} \geq \frac{2.6-2}{\sqrt{1/20}}\right) = 1 - \Phi(2.68) = 0.0037.$$

这是因为在 H_0 成立下,$\bar{x}\sim N(2, 1/20)$.

犯第二类错误的概率为

$$\beta = P(\bar{x} < 2.6|H_1) = P\left(\frac{\bar{x}-3}{\sqrt{1/20}} \geq \frac{2.6-3}{\sqrt{1/20}}\right) = \Phi(-1.79) = 1 - \Phi(1.79) = 0.0367.$$

(2) 要使犯第二类错误的概率满足

$$\beta = P(\bar{x} < 2.6|H_1) = P\left(\frac{\bar{x}-3}{\sqrt{1/n}} \geq \frac{2.6-3}{\sqrt{1/n}}\right) \leq 0.01,$$

即

$$1 - \Phi\left(\frac{0.4}{\sqrt{1/n}}\right) \leq 0.01$$

查表得 $0.4\sqrt{n} \geq 2.33$, 解得 $n \geq 33.93$, 因此样本量最小取 34.

(3) 样本量为 n 时, 检验犯第一类错误的概率是

$$\alpha = P(\bar{x} \geq 2.6|H_0) = P\left(\frac{\bar{x}-2}{\sqrt{1/n}} \geq \frac{2.6-2}{\sqrt{1/n}}\right) = 1 - \Phi(0.6\sqrt{n})$$

当 $n \to \infty$ 时,$\Phi(0.6\sqrt{n}) \to 1$, 因此 $\alpha \to 0$.

由 (2) 可知, 检验犯第二类错误的概率为 $1 - \Phi(0.4\sqrt{n})$,$n \to \infty$ 时,$\Phi(0.4\sqrt{n}) \to 1$, 因此 $\beta \to 0$.

2. 已知某炼铁厂铁水含碳量服从正态分布 $N(4.55, 0.108^2)$. 现测定了 9 炉铁水, 平均含碳量为 4.484. 如果认为铁水含碳量的方差没有变化, 是否认为现在生产的铁水平均含碳量仍为 4.55?

解: 正态总体均值双边假设检验,$H_0: \mu = 4.55, H_1: \mu \neq 4.55$, 方差已知,u 检验:$U = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$, 拒绝域 $\{|u| \geq 1.96\}$, 观测值 $u = -1.83$, 接受原假设.

3. 假定考生的考试成绩服从正态分布, 抽取 36 名考生的成绩, 平均分为 66.5, 标准差为 15, 问是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?

解: 方差未知,t 检验,$H_0: \mu = 70, H_1: \mu \neq 70$, 拒绝域 $\{|t| \geq t_{0.975}(35) = 2.0301\}$, 观测值 $t = -1.4$, 接受原假设.(也可以用标准正态分布近似 $t(35)$).

4. 设在一批木材中抽取 100 根, 测其小头直径,$\bar{x} = 11.2cm$, 标准差 $s = 2.6cm$, 问能否认为该批木材小头的平均直径不小于 12cm?

解: 单侧 U 检验,$H_0: \mu \geq 12, H_1: \mu < 12$, 拒绝域 $\{u \leq -1.645\}$, 观测值 $u = -3.0769$ 落在拒绝域内, 拒绝原假设.

5. 有两种型号的电池充电以后的使用时间观测值:

A	5.5	5.6	6.3	4.6	5.3	5.0	6.2	5.8	5.1	5.2	5.9
B	3.8	4.3	4.2	4.0	4.9	4.5	5.2	4.8	4.5	3.9	3.7	4.6

设两样本独立且所属两正态总体的密度函数至多差一个平移量, 问是否能认为 A 电池的使用时间显著地长于 B 电池?

解: 两总体均值, 注意, 题干中" 所属两正态总体的密度函数至多差一个平移量" 意味着" 方差相等".$H_0:\mu_1=\mu_2, H_1:\mu_1>\mu_2$. 计算得 $\bar{x}=5.5, \bar{y}=4.3667, s_w=0.4951$, 方差未知, 采用 t 检验, 拒绝域 $\{t\geq t_{0.95}(21)=1.7207\}$, 观测值 $t=5.4837$ 落在拒绝域内, 拒绝原假设, 认为 A 电池使用寿命长于 B 电池.

6. 工厂的化验室每天从冷却水中取样测水中的含气量, 记录 7 天数据如下:

甲:	1.15	1.86	0.75	1.82	1.14	1.65	1.90
乙:	1.00	1.90	0.90	1.80	1.20	1.70	1.95

问两化验室测定结果之间有无显著差异?

解: 成对数据比较: 算差值:$0.15, -0.04, -0.15, 0.02, -0.06, -0.05, -0.05, \bar{d}=-0.0257, s_d=0.0922$ 方差未知,t 检验 $H_0:\mu_1=\mu_2, H_1, \mu_1\neq\mu_2$, 拒绝域 $\{|t|>t_{0.95}(6)=1.9432\}$, 观测值 $t=-0.7375$, 不认为有显著差异.

7. 为比较不同季节出生的女婴体重的方差, 从某年 12 月和 6 月出生的女婴中分别抽取 6 名和 10 名, 测的结果如下:

Dec:	3520	2960	2560	2960	3260	3960				
Jun:	3220	3220	3760	3000	2920	3740	3060	3080	2940	3060

假定新生女婴体重服从正态分布, 问是否可以认为新生女婴的体重的方差冬季比夏季小?

解: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2, F=s_1^2/s_2^2 \sim F(n_1-1, n_2-1)$, 代入体重数据,$s_1^2=241666.667, s_2^2=93955.556, F_{0.05}(5,9)=1/F_{0.95}(9,5)=0.2096$, 即拒绝域 $\{f\leq 0.2096\}$, 观测值 $f=2.572>0,2096$, 接受原假设.

8. 已知某工厂生产的维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布, 标准差为 0.048, 从某批次的产品中抽取 5 根, 纤度为 1.32,1.55,1.36,1.40,1.44, 问: 这一批次的纤度标准差是否正常.

解: 原假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=0048^2; H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$, 本题中 $n=1, \alpha=0.05$, 查表知 $\chi^2_{0.025}(4)=0.4844, \chi^2_{0.975}=11.1433$, 故拒绝域为 $W=\{\chi^2\leq 0.4844\cup\chi^2\geq 11.1433\}$, 观测值 $\chi^2=(n-1)s^2/\sigma^2=13.5068\in W$, 拒绝原假设, 认为纤度不正常.

9. 某导线的质量标准要求电阻的标准差不超过 0.005 欧姆, 现抽取一批样品 9 根, 测得样本标准差为 0.007 欧姆, 问, 是否可以认为这批样品的电阻标准差显著地偏大?

解: 单侧检验,$H_0:\sigma\leq 0.005$, 拒绝域 $\{\chi^2\geq 15.5073\}$, 检验统计量的观测值 $\chi^2=15.68$, 拒绝原假

设, 认为显著偏大.

10. 测得两批电子器件的样品电阻 (Ω) 为:

A: 0.140 0.138 0.143 0.142 0.144 0.137;

B: 0.135 0.140 0.142 0.136 0.138 0.140;

设两批器材的电阻分别服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且样本独立,

(1) 试检验两个总体的方差是否相等;

(2) 试检验两个总体的均值是否相等.

解: (1)F 检验, 拒绝域 $\{F \le 0.1399 \cup F \ge 7.15\}$, 检验统计量观测值 $f = 1.0754$, 接受方差相等的假设.

(2) 双样本 t 检验, 拒绝域 $\{|t| \ge 2.2281\}$, 检验统计量的观测值 $t = 1.3856$, 接受两总体均值相等的假设.

11. 按遗传定律, 让开淡红花的豌豆自交, 子代红花, 淡红花, 白花的比例是 1:2:1, 现进行一次试验, 得到红, 淡红, 白分别 26,66,28 株, 问这些数据是否与遗传定律一致.

解: 分类数据的拟合优度检验, 总体分为三类, 记子代出现红花, 淡红花, 白花的概率分别是 p_1, p_2, p_3, 原假设 $H_0: p_{10} = 1/4, p_{20} = 1/2, p_{30} = 1/4$, 代入计算

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} = 1.2667$$

拒绝域 $W = \{\chi^2 \ge \chi^2_{0.95}(5) = 5.9915\}$, 因此接受原假设, 认为符合遗传定律.

12. 掷一颗骰子 60 次, 得:

点数	1	2	3	4	5	6
频数	7	8	12	22	9	13

问能否认为这颗骰子质地均匀.

解: 原假设 $H_0 : p_i = 1/6, i = 1, 2, \ldots, 6$, 拒绝域为 $\{\chi^2 \ge \chi^2_{0.95}(5) = 11.0705\}$ 检验统计量为 $\chi^2 = 2.8$, 接受原假设, 认为骰子均匀.

13. 检验一批产品 100 箱, 记录各箱中不合格品的数量如下:

不合格品的数量	0	1	2	3	4	5
箱数	35	40	19	3	2	1

问能否认为一箱的不合格品数量服从泊松分布.

解: 这是检验总体是否服从 poisson 分布的假设检验问题, 由于后四类的观测数偏少, 故将它们合并, 原假设为: 不合格品数服从 poisson 分布. 在原假设下, 每类出现的概率为

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, i = 0, 1, 2; p_3 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = 1 - (p_1 + p_2 + p_3)$$

未知参数 λ 用极大似然估计:

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{100}(40+38+9+8+5)=1$$

将 $\hat{\lambda}$ 代入可以计算 $\hat{p}_i$, 计算检验统计量 χ^2,

i	n_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$(n_i-n\hat{p}_i)^2/n\hat{p}_i$
0	35	0.3679	36.79	0.0871
1	40	0.3679	36.79	0.2801
2	19	0.1839	18.39	0.0202
3	6	0.0803	8.03	0.5132
合计				$\chi^2=0.9006$

查表得 $\chi^2_{0.95}(2)=5.9915$, 拒绝域 $W=\{\chi^2\geq 5.9915\}$, 因此接受原假设.

第三部分　补充内容

1　非正态分布的参数检验

1.1　指数分布

考虑来自指数分布 $Exp(1/\theta)$ 的样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$,θ 为其均值, 现在考虑关于 θ 的假设检验问题:

$$H_0:\theta\leq\theta_0;\quad H_1:\theta>\theta_0.$$

为寻找检验统计量, 考察 θ 的充分统计量 $\bar{x}$ 在 $\theta=\theta_0$ 时,$n\bar{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i \sim Ga(n,1/\theta_0)$, 由伽马分布的性质[1]可知,

$$\chi^2=\frac{2n\bar{x}}{\theta_0}\sim\chi^2(2n)$$

于是我们可用 χ^2 作为检验统计量并利用 $\chi^2(2n)$ 来确定检验的拒绝域. 对上述检验问题, 在 α 的显著性水平下, 拒绝域为 $W_1=\{\chi^2\geq\chi^2_{1-\alpha}(2n)\}$. 对于双侧检验或者右侧检验, 可以类似地构造拒绝域.

题目: 检验一种元件的平均寿命不小于 6000h, 元件寿命服从指数分布, 抽取五个元件, 测得失效时间为 (单位:h)395,4094,119,11572,6133.

解: 原假设 $H_0:\theta>6000$, 备择假设 $H_1:\theta<6000$, 计算得,$\bar{x}=4462.6$, 检验统计量的观测值为 $\chi^2=\frac{10\bar{x}}{\theta_0}=7.4377$, 取 $\alpha=0.05$ 时, 查表得检验的拒绝域为 $W=\{\chi^2\leq\chi^2_{0.05}(10)=3.9403\}$, 因此接受原假设, 认为平均寿命不低于 6000h.

[1] $Ga(n/2,1/2)=\chi^2(n)$

1.2 比率 p 的检验

比率 p 可以看做某事件发生的概率, 可以看做是两点分布 $b(1,p)$ 中的 p, 作 n 次独立试验, 记试验成功的次数为 x, 则有 $x\sim b(n,p)$. 可以根据 x 检验一些 p 的假设. 考虑单边检验问题:

$$H_0: p \le p_0 \qquad H_1: p > p_0.$$

直观上看来, 一个比较显然的检验方法是构造拒绝域 $W=\{x\ge c\}$, 由于 x 只取整数值, 甚至还能把 c 限定在非负整数里. 然而对一般情况下给的 α, 不一定能正好取到一个 c 满足

$$\sum_{i=c_0}^{n}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i} > \alpha > \sum_{i=c_0+1}^{n}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}$$

于是把 c 取成 c_0+1, 此时把显著性水平从 α 降低到了 $\sum\limits_{i=c_0+1}^{n}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}$, 相当于是把检验的条件变得更强了.

一般情况下, 在离散场合用 p 值法进行检验更为方便, 这时只需要根据观测值 $x=x_0$ 计算检验的 p 值

$$p = P(x \ge x_0)$$

并与显著性水平作比较.

另外两种检验问题的推导过程类似, 右侧检验的 p 值为 $P(x\le x_0)$, 而双侧检验的 p 值为 $2\min\{P(x\le x_0), P(x\ge x_0)\}$.

题目: 某工厂生产一批产品的优品率保持在 40%, 现抽取 20 件, 其中优质产品 7 件, 在 $\alpha=0.05$ 的显著性水平下, 能否认为优品率仍保持在 40%.

解: 用 p 表示优品率,T 表示 20 件产品中优品的数量, 有 $T\sim b(20,p)$, 于是待检验的假设为

$$H_0: p = 0.4 \qquad H_1: p \ne 0.4$$

这是一个双侧检验问题,$n=20, t_0=7$, 计算检验的 p 值为

$$p = 2\min\{P(T\le 7), P(T\ge 7)\} = 2\min\{0.4159, 0.7500\} = 0.8318,$$

于是 $p>\alpha$, 故不能拒绝原假设, 可以认为优品率是 40%

1.3 大样本检验

实际问题中, 如果样本量较大, 通常采用渐近正态分布构造正态统计量, 进行大样本检验. 一般的思路如下: 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是来自某总体分布 $F(x;\theta)$ 的样本又设该总体均值为 θ, 方差为 θ 的函数, 记为 $\sigma^2(\theta)$. 比如, 对两点分布 $b(1,\theta)$, 方差为 $\sigma^2(\theta)=\theta(1-\theta)$ 就是 θ 的函数.

考虑经典的三类检验问题:

$$\begin{array}{lll} I & H_0: \theta \le \theta_0, & H_1: \theta > \theta_0. \\ II & H_0: \theta \ge \theta_0, & H_1: \theta < \theta_0. \\ III & H_0: \theta = \theta_0, & H_1: \theta \ne \theta_0. \end{array}$$

在样本容量 n 充分大时, 利用中心极限定理,$\bar{x} \overset{A}{\sim} N(\theta, \sigma^2(\theta)/n)$, 当 $\theta = \theta_0$ 时, 采用检验统计量

$$u = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{\sqrt{\sigma^2(\hat{\theta})}} \overset{A}{\sim} N(0,1),$$

其中 $\hat{\theta}$ 是 θ 的 MLE, 并可由此确定近似的拒绝域. 对应上述三个问题, 拒绝域分别为

$$W_1 = \{u \geq u_{1-\alpha}\}$$

$$W_2 = \{u \leq u_{\alpha}\}$$

$$W_3 = \{|u| \geq u_{1-\alpha/2}\}$$

题目: 某工厂生产的产品不合格率不高于 10%, 在一次抽查中,80 件样品中有 11 件不合格. 在 $\alpha = 0.05$ 的水平下能否认为不合格品率仍为 10%?

解: 本题中的假设为

$$H_0 : \theta \leq 0.1 \qquad H_1 : \theta > 0.1,$$

采用大样本检验方法,$\theta_0 = 0.1$,$\sigma^2(\hat{\theta})$=$\hat{\theta}(1-\hat{\theta}) = 11/80 \times 69/80 = 0.1186$, 检验统计量为

$$u_0 = \frac{\sqrt{80}\left(\frac{11}{80} - 0.1\right)}{\sqrt{0.1186}} = 0.9739$$

取 $\alpha = 0.05$, 可得检验的拒绝域为 $W = \{u \geq 1.645\}$. 有 $u \notin W$, 因此接受原假设, 认为不合格品率仍为 10%

2 似然比检验

2.1 概念

定义 1. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是来自密度函数为 $p(x,\theta), \theta \in \Theta$ 的样本, 考虑检验问题

$$H_0 : \theta \in \Theta_0, \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0 \tag{1}$$

称统计量

$$\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta} p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)} \tag{2}$$

为假设 *(1)* 的似然比.

似然比也可以写成如下形式:

$$\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \hat{\theta})}{p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \hat{\theta}_0)} \tag{3}$$

其中 $\hat{\theta}$ 表示在整个参数空间 Θ 上 θ 的极大似然估计, 而 $\hat{\theta}_0$ 表示参数在自参数空间上的极大似然估计, 也就是说,Λ 的分子表示在没有任何假设的条件约束时, 似然函数的极大值, 分母表示在原假设成立的条件下, 似然函数的极大值. 直观上看, 如果这个比值很大, 那么参数落在 Θ_0 的概率小, 有理由拒绝原假设; 相应的, 如果这个比值小 (在上方离 1 很近), 就可以认为参数落在 Θ_0 的概率比较大, 可以接受原假设.

定义 2. 当采用 *(3)* 式的似然比统计量 Λ 作为检验问题 *(1)* 的检验统计量时，拒绝域的形式为 $W = \{\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq c\}$, 其中，临界值 c 满足

$$P_\theta(\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq c) \leq \alpha, \forall \theta \in \Theta_0.$$

称这个检验为显著性水平为 α 的似然比检验 *(likelihood ratio test, LRT)*.

2.2 题目

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本,μ, σ^2 均未知, 试求检验问题

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

的显著性水平为 α 的似然比检验.

解: 记 $\theta = (\mu, \sigma^2)$, 样本的联合密度函数为

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu^2)\},$$

两个参数空间分别为

$$\Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma^2)\}, \quad \Theta = \{(\mu, \sigma^2) | \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$$

容易求得 (取对数, 求导, 解方程找驻点, 参考前面的极大似然估计的求法) 在 Θ 上,$\hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ 分别是 μ 和 σ^2 的 MLE, 而在 Θ_0 上,σ^2 的 MLE 是 $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2$, 代回各自的似然函数后, 可得

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \left[2\pi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2\right]^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}},$$

$$\sup_{\theta \in \Theta} p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \left[2\pi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right]^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}},$$

于是, 似然比统计量为

$$\begin{aligned}
\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta} p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)} &= \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

这里的 t 就是方差未知正态总体均值参数检验时的检验统计量.

从上述可知, 此时的似然比统计量为 t 统计量的平方的严格递增函数, 于是两个检验的拒绝域有这样的关系:

$$\{\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq c\} = \{|t| \geq d\},$$

且可以由 t 的分位数确定 Λ 的分位数.

当 H_0 成立时,$t\sim t(n-1)$, 当我们取 $d=t_{1-\alpha/2}(n-1)$ 时, 就可以控制用 Λ 犯第一类的错误的概率不超过 α. 由此可见, 此时的似然比检验与前述的 t 检验完全等价

注: 虽然上述的例子并不能表明, 似然比检验比之前的一般检验方法有显著的优势, 甚至还麻烦很多. 需要指出的是, 似然比检验有一个**统一的统计量**, 但该统计量在一般场合至今尚没有统一的精确分布形式, 但在一般的大样本场合有一个统一的渐近分布[2](对数似然比检验统计量的 2 倍近似地服从 χ^2 分布, 自由度为独立参数个数), 这给似然比检验的广泛使用打下基础.

[2]陈希孺, 数理统计引论. 北京, 科学出版社.