筆答専門試験科目（午前）　2022 大修
情報通信（必答科目）

時間　９：３０～１１：００

注　意　事　項

1. 次の２題すべてに解答せよ．
2. 解答は１題ごとに１枚の答案用紙に記入せよ．必要であれば，答案用紙の裏面にも記入してよいが，答案用紙の表面にその旨を明記すること．
3. １枚の答案用紙に２題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある．また，１題の解答を２枚以上の答案用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある．
4. すべての答案用紙の試験科目名欄に「情報通信」，および，解答する問題番号を記入せよ．
5. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．
6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．
7. 導出過程も答案用紙に記入すること．

この空白ページは落丁および印刷ミスではありません

H1. 以下の設問1)，2)に答えよ．計算過程も示すこと．

1) 3次元空間中の曲面 A ： $16x^2+4y^2+z^2=16$ 上における1点 (x,y,z) （$x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$）と原点 $O(0,0,0)$ を結ぶ線分を1本の対角線とし，xy 平面，xz 平面，yz 平面と，それらにそれぞれ平行な3つの平面に囲まれる直方体の体積を V_1 とする．ここで V_1 を最大にする点の座標を求めることを考える．

a) 体積 V_1 を x,y,z を用いて示せ．

b) 曲面 A と xy 平面の交線の形状を図示せよ． x 軸，y 軸との交点の座標も示せ．

c) 任意の微分可能な関数 $g(x,y,z)$, $f(x,y,z)$に対して，それらの x,y,z による1次偏導関数をそれぞれ g_x, g_y, g_z および f_x, f_y, f_zとする．このとき，一般に次のことが成り立つ．条件 $g(x,y,z)=0$ のもとで関数 $f(x,y,z)$ が $g_x \neq 0$ または $g_y \neq 0$ または $g_z \neq 0$ となる点$P(a,b,c)$で極値をとるならば，以下の関係を満たす定数 λ が存在する．

$$\begin{cases} f_x(a,b,c) = \lambda\, g_x(a,b,c) \\ f_y(a,b,c) = \lambda\, g_y(a,b,c) \\ f_z(a,b,c) = \lambda\, g_z(a,b,c) \\ \quad g(a,b,c) = 0 \end{cases} \qquad \text{(H1. 1)}$$

このとき，式(H1. 1)は，点$P(a,b,c)$において，$g(x,y,z)=0$ と $f(x,y,z)=f(a,b,c)$ が表す2つの曲面が，幾何学的にどのような関係にあることを示すか 簡潔に説明せよ．

d) 式(H1. 1)の関係を曲面 A と体積 $V_1(x,y,z)$ に適用し，$V_1(x,y,z)$が極値となる点$P(a,b,c)$と λの間に成り立つ，a,b,c,λ を用いた4つの関係式を記せ．

e) 上の d)で求めた関係式により，極値となる必要条件を満たす a,b,c,λ の値をそれぞれ求めよ． ここで，その時の体積 V_1 を最大値とみなし，その値を求めよ．ただし $a>0, b>0, c>0$とする．

2) 3次元空間中の曲面 B ： $z=\log_e\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ $(z \geqq 0)$と xy 平面に囲まれる部分の体積 V_2 を求めることを考える．

a) 曲面 Bと xy 平面，xz 平面との交線の形状をそれぞれ図示せよ．各座標軸との交点があれば，その座標も示せ．

b) 直交座標(x,y)を極座標$(r,\ \theta)$に変換し，曲面Bと xy平面に囲まれ $x^2+y^2 \geqq d^2$ を満たす領域の体積 $V_2{}'$ を rと θに対する定積分の式として示せ．ただし，d は $0<d<1$ を満たす定数とする．

c) 上で求めた $V_2{}'$ の式を用いて体積 V_2を求めよ．

H2.

以下の設問 1)，2) に答えよ．なお，計算過程も答案用紙に記載すること．

1) 線形写像 $f:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を次のように定義する．以下の問に答えよ．

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -15 & 0 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

a) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数を求めよ．

b) 線形写像 f の核 $\mathrm{Ker} f$ の基底を一組求めよ．ただし，求める基底の組は正規化したものとし，$\dfrac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を含む組とする．

2) 実対称行列に関して，以下の問に答えよ．

a) 実対称行列 $\boldsymbol{B}$ を $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする．行列式 $\det(\boldsymbol{B})$ を求めよ．

b) 行列 $\boldsymbol{B}$ の固有値 λ を求めよ．

c) 行列 $\boldsymbol{B}$ を対角化するための直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ．

d) 自然数 n において，$\boldsymbol{B}^n$ を求めよ．

e) 任意の実対称行列 $\boldsymbol{C}$ に対して，$\boldsymbol{C}^k = \boldsymbol{O}$ となる自然数 k $(k \geqq 1)$ が存在する場合 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$ であることを証明せよ．なお，$\boldsymbol{O}$ は零行列とする．