筆答専門試験科目（午前）　2023 大修
情報通信（必答科目）

時間　９：３０〜１１：００

注　意　事　項

1. 次の２題すべてに解答せよ.
2. 解答は１題ごとに１枚の答案用紙に記入せよ．必要であれば，答案用紙の裏面にも記入してよいが，答案用紙の表面にその旨を明記すること.
3. １枚の答案用紙に２題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある．また，１題の解答を２枚以上の答案用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある.
4. すべての答案用紙の試験科目名欄に「情報通信」，および，解答する問題番号を記入せよ.
5. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ.
6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない.
7. 導出過程も答案用紙に記入すること.

この空白ページは落丁および印刷ミスではありません

H1. n を 1 以上の整数とする．さらに ξ を正の実数とし，$\Gamma(\xi)$ を

$$\Gamma(\xi) \equiv \int_0^\infty t^{\xi-1} e^{-t} dt \tag{H1.1}$$

と定める．以下の問に答えよ．

1) $\Gamma(1)$ を計算せよ．

2) 次の式 (H1.2) を導出せよ．

$$\Gamma(\xi+1) = \xi\Gamma(\xi) \tag{H1.2}$$

3) $\Gamma(n+1)$ を求めよ．

4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ について，次の式 (H1.3) が成り立つことを示せ．

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \tag{H1.3}$$

5) $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$ について，次の式 (H1.4) が成り立つ．

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\infty e^{-r^2} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\right] d\theta \tag{H1.4}$$

ただし，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ $(r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ と変数変換しており，$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ は

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}\right| \tag{H1.5}$$

と定めるヤコビアンである．なお，$\det\mathbf{A}$ は行列 $\mathbf{A}$ の行列式を表す．式 (H1.5) を計算せよ．

6) 式 (H1.4) の積分を計算して，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を導出せよ．

7) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ を求めよ．

8) $\Gamma(\xi)$ について，次の式 (H1.6) が成り立つ．

$$\Gamma(\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{\xi-1} e^{-t} dt = \lim_{n\to\infty} a_n \tag{H1.6}$$

$$a_n \equiv \int_0^n t^{\xi-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = n^\xi \int_0^1 u^{\xi-1}(1-u)^n du \tag{H1.7}$$

ただし，a_n は式 (H1.7) で定める数列であり，$c_n(\xi) \equiv \int_0^1 u^{\xi-1}(1-u)^n du$ と定める．この $c_n(\xi)$ を用いて，次の式 (H1.8) を導出せよ．

$$a_n = \frac{n^\xi n!}{\xi(\xi+1)\cdots(\xi+n)} \tag{H1.8}$$

9) 式 (H1.6) で $\xi = \frac{1}{2}$ とし，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を用いて，次の式 (H1.9) を証明せよ．

$$\prod_{k=1}^\infty \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2} \tag{H1.9}$$

H2.

m個のn次元の列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_m$ があるとき，$n \times n$行列$\boldsymbol{A}$と$m \times m$行列$\boldsymbol{B}$ を以下の式(H2.1)および式(H2.2)と定義する．m, nはともに 1 以上の整数であり，ベクトルの要素は実数とする．

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\alpha=1}^{m} \boldsymbol{p}_\alpha \, {}^t\boldsymbol{p}_\alpha \qquad \text{(H2.1)}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1) & (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) & \cdots & (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_m) \\ (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1) & (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_2) & \cdots & (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{p}_m, \boldsymbol{p}_1) & (\boldsymbol{p}_m, \boldsymbol{p}_2) & \cdots & (\boldsymbol{p}_m, \boldsymbol{p}_m) \end{bmatrix} \qquad \text{(H2.2)}$$

ここで，${}^t\boldsymbol{p}_\alpha$はベクトル$\boldsymbol{p}_\alpha$を転置したものであり，$(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j)$はベクトル$\boldsymbol{p}_i$と$\boldsymbol{p}_j$の標準内積（${}^t\boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_j = {}^t\boldsymbol{p}_j \boldsymbol{p}_i$）である．また，ベクトルのノルム$\sqrt{(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_i)}$ は，$\|\boldsymbol{p}_i\|$と表記せよ．
列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_m$を列とする$n \times m$ 行列$\boldsymbol{P}$を

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_m] \qquad \text{(H2.3)}$$

とするとき，以下の問に答えよ．

1) 式(H2.4)の 2 つの関係が成り立つことを$m = 2$, $n = 3$ の場合について示せ．ただし，必要があれば，列ベクトル$\boldsymbol{p}_k$ $(k = 1,2, \dots, m)$ の要素を $p_{lk}(l = 1,2, \dots, n)$ としてよい．ここで，${}^t\boldsymbol{P}$は行列$\boldsymbol{P}$を転置したものである．

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \, {}^t\boldsymbol{P}, \ \ \boldsymbol{B} = {}^t\boldsymbol{P}\boldsymbol{P} \qquad \text{(H2.4)}$$

2) 行列$\boldsymbol{A}$と行列$\boldsymbol{B}$がともに対称行列であることを式(H2.4)を用いて示し，さらに半正定値対称行列であることを示せ．ただし，ある実対称行列$\boldsymbol{C}$が半正定値である必要十分条件は，$\boldsymbol{C}$と次元が等しい任意のベクトル$\boldsymbol{x}$（但し，要素は実数）に対して$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}) \geq 0$となることである．

3) 行列$\boldsymbol{A}$の 0 でない固有値であるための必要十分条件は，行列$\boldsymbol{B}$の 0 でない固有値であることを示せ．これは，「行列$\boldsymbol{A}$の非零固有値 λ は，行列$\boldsymbol{B}$の非零固有値であることを示す」を意味する．

4) 行列$\boldsymbol{A}$が全て異なる正の固有値を持ち，問 3)より行列$\boldsymbol{A}$と行列$\boldsymbol{B}$の一致する固有値を λ とする．このとき，固有値λ，それに対する行列$\boldsymbol{A}$の単位固有ベクトル$\boldsymbol{u}$，および行列$\boldsymbol{B}$の単位固有ベクトル$\boldsymbol{v}$にそれぞれ式(H2.5)の関係が成り立つことを示せ．

$$\boldsymbol{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}, \ \ \boldsymbol{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}} {}^t\boldsymbol{P}\boldsymbol{u} \qquad \text{(H2.5)}$$

5) 行列$\boldsymbol{P}$を式(H2.6)で与えたとき，行列$\boldsymbol{B}$の正の固有値とそれに対する単位固有ベクトル$\boldsymbol{v}$を求めよ．

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(H2.6)}$$