(1)

$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=0$ 的特征方程为:

$\lambda^2+\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-1$ (重解)

$\therefore$ 此方程的一般解为 $x=Ce^{-x}+Dxe^{-x}$ (C、D为常数)

令 $x=A\sin(t)+B\cos(t)$ (A、B为常数), 代入原方程, 得:

$$\begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=0 \end{cases} \Rightarrow x \text{ 存在特殊解 } x=\frac{1}{2}\sin(t)$$

綜上, 原方程的一般解为:

$x=Ce^{-x}+Dxe^{-x}+\frac{1}{2}\sin(t)$ (C、D为常数)

$t\to\infty$ 的有界解为

$x=\frac{1}{2}\sin(t)$

(2)

令 $z = x + y$ ，$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} = \cos(t)$ ，

参照 (1)，解得一般解

$$z = Ae^{-2t} + B + \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{1}{5}\cos(t)$$ （A、B 为常数）

令 $w = x - y$ ，$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2\frac{dw}{dt} + 2w = \cos(t)$

参照 (1)，解得一般解

$$w = Ce^{-t}\sin(t) + De^{-t}\cos(t) + \frac{2}{5}\sin(t) + \frac{1}{5}\cos(t)$$ （C、D 为常数）

综上，原方程的一般解为：

$$x = \frac{z+w}{2} = Ae^{-2t} + B + Ce^{-t}\sin(t) + De^{-t}\cos(t) + \frac{2}{5}\sin(t)$$

$$y = \frac{z-w}{2} = Ae^{-2t} + B - Ce^{-t}\sin(t) - De^{-t}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t)$$

（A、B、C、D 为常数）

$t \to \infty$ 的有界解为：

$$x = B + \frac{2}{5}\sin(t)$$

$$y = B - \frac{1}{5}\cos(t)$$

（B 为任意常数）

(3)

令 $y = \frac{1}{x}$，则 $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{1}{2}(e^{-t}x^2 + x)$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-t} + \frac{1}{x})$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-t} + y)$$

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dt} + y = -e^{-t}$$

代入 $y = f(t)e^{-t/2}$ 整理得：

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} + C \quad (C\text{为常数})$$

一般解为：

$$y(t) = (e^{-\frac{1}{2}t} + C)e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$= e^{-t} + Ce^{-\frac{1}{2}t} \quad (C\text{为常数})$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{e^{-t} + Ce^{-\frac{1}{2}t}}$$

$$= \frac{e^t}{1 + Ce^{\frac{1}{2}t}} \quad (C\text{为常数})$$

代入 $x(0) = \frac{1}{2}$，解得 $C = 1$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{e^t}{1 + e^{\frac{1}{2}t}}$$