(1)

题中不等式可如下变形：

$$xy < z < xy+1 \qquad \cdots ①$$

$$x^2+y^2+2xy < z < x^2+y^2+xy \qquad \cdots ②$$

对于任意 x、y，均存在 z 满足①

满足不等式②的 z 存在的条件为 $xy<0$

联立①、②可得：

$$xy < x^2+y^2+xy \qquad \cdots ③$$

$$x^2+y^2+2xy < xy+1 \qquad \cdots ④$$

由③可得 $(x,y) \neq (0,0)$

由④可得 $x^2+y^2+xy<1$

综上，$xy<0$，$x^2+y^2+xy<1$

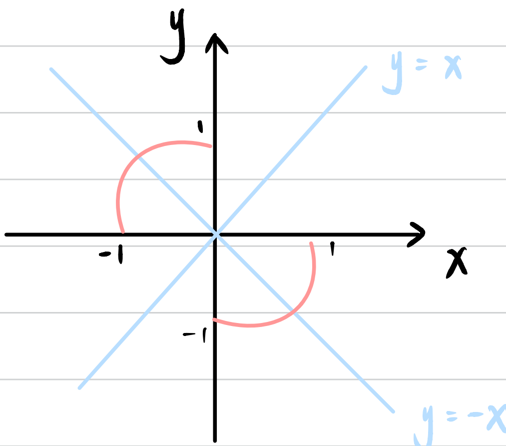
(2).

$xy<0 \Rightarrow$ 第2、第4象限

設 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

則 $x^2+y^2+xy = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 = \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow$ 以原点为中心，長軸位于 $y=-x$，短軸位于 $y=x$，
長径 $\sqrt{2}$，短径 $\sqrt{2/3}$ 的楕円.



边界：x軸 $(-1,0)\to(1,0)$

y軸 $(0,-1)\to(0,1)$

(3)

在(2)中 (x,y), (x',y') 基础上,

令 $\begin{cases} x' = \sqrt{2}\, x'' \\ y' = \sqrt{\frac{2}{3}}\, y'' \end{cases}$

则 $x^2+y^2+xy = \dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{\frac{2}{3}}$

$= x''^2 + y''^2$

通过此变换, 可将椭円 $x^2+y^2+xy=1$ 上曲率最高的点(之一) $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 与单位円 $x''^2+y''^2=1$ 上的点 $(x'',y'')=(1,0)$ 产生关联

⇒ 可設線形变换 X 为:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(4)

$$\det X = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(5)

$$S_\Omega = \pi \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$