广岛大学 2020

任意の2辺を辺の端点以外で交差させることなく平面に描画できるようなグラフを平面的であるという．頂点数 v，辺数 e の連結な平面的グラフ G を平面描画したときの面の数を f とすると $v-e+f=2$ となることが知られており，この等式はオイラーの公式と呼ばれている (ただし一番外側の領域も一つの面とみなす)．

(1) 図1に示すグラフ G_1 の平面描画を示し，その描画がオイラーの公式を満たしていることを説明せよ．

(2) 単純グラフ $G=(V,E)$ の補グラフ $\bar{G}$ は，G と同じ頂点集合をもち，辺集合 $\bar{E}=\{(u,v)\in V\times V:(u,v)\notin E\}$ を持つグラフである．グラフ G_1 の補グラフの平面描画を示せ．

(3) 平面性を維持したままでグラフに追加できる辺の数には限界がある．オイラーの公式を利用して，頂点数 v，辺数 e の単純グラフ G が平面的であるための必要条件が $e\leq 3(v-2)$ となることを示せ．

(4) 不等式 $e\leq 3(v-2)$ を利用して，頂点数11以上の任意の単純グラフ G について，G か $\bar{G}$ の少なくとも一方は平面的ではないことを示せ．

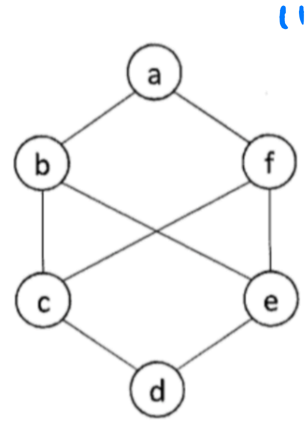
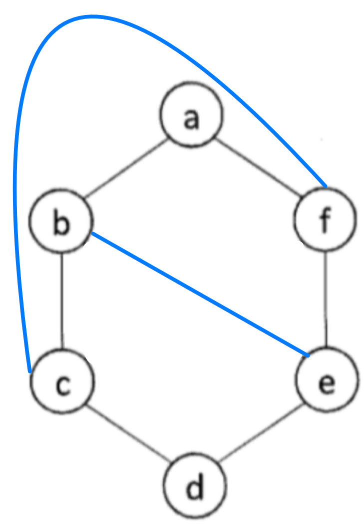


図1 グラフ G_1. Figure 1 Grap

(1)



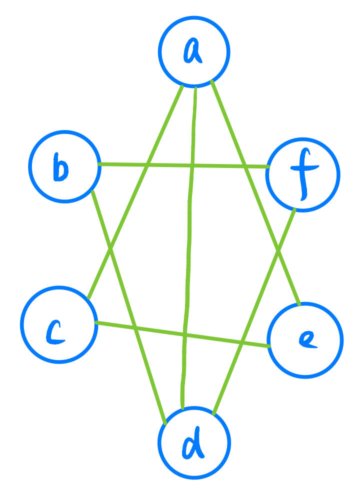
$v:6$

$e:8$

$f:4$

$v-e+f=2$

(2)



(3)

単純グラフでは、

各辺は2つの面の境界であり、

各面は3つ以上の辺に囲まれている。

上記より

$2e=\sum_{F_0\in F} e(F_0) \geq \sum_{F_0\in F} 3 = 3f$ が成立する。

ただし、Fは面全体の集合，$e(F_0)$はF_0に隣接する辺の数

これにオイラー公式 $f=e-v+2$ を用いて f を消去すると：

$2e\geq 3(e-v+2)$

よって，$e\leq 3(v-2)$ を得る。

(4)

GもG'も平面的とすると

$\frac{v(v-1)}{2}=e+e'\leq 6v-12$ となり，

これは $v\geq 11$ に反する。

$x\in(2.22,\ 10.77)$