Differential Forms and their Applications in Electromagnetism

Qian-Rui Li (李謙睿)
Physics Department, National Tsing Hua Univsersity, Hsinchu 30043, Taiwan, Republic of China
(Dated: July 14, 2023)

以往在學習電磁學時往往會被各種複雜的向量關係式與向量微積分所苦，然而事實上許多複雜的公式背後的道理其實是一樣的且有更基本的表達，例如斯托克斯定理和格林定理 (散度定理) 其實是同一個定理且都只是三維中的特例而已。微分形式 (Differential Forms) 是一套適用於任意維度、任意座標和任意流形結構上的代數系統，透過學習微分形式我們將對以往學過的向量關係式、向量微積分等有更深刻的了解，並且微分形式在近代的理論物理學中也被廣泛的應用。總而言之，學習微分形式對於了解深刻的物理有莫大的好處。本文將會對微分形式做一個入門的整理與介紹，並用電磁學中的實際例子來體現微分形式的應用。

I. DIFFERENTIAL FORMS

Differential forms 是一類特別的 tensor，當我們記做 $p-form$ 時，其代表的是一個 $(0,p)$ 型的 tensor 且同時該 tensor 是全反對稱的。令該 $(0,p)$ 型的 tensor 為 T，而 V、W 為 $(1,0)$ 型的 tensor，其滿足

$$T(\cdots,V,W,\cdots)=-T(\cdots,W,V,\cdots) \tag{1}$$

也可以表達為 tensor components 的兩個標號互換差一個負號，例如

$$T_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p}=-T_{\mu_2,\mu_1,\cdots,\mu_p} \tag{2}$$

一個純量的函數 $f(x)$ 可以被視為 $0-form$，令 ω 為一個 $1-form$、F 為一個 $2-form$，可以將 f,ω,F 表達為

$$\begin{aligned}
&0-form: f=f(x)\\
&1-form: \omega=\omega_\mu dx^\mu\\
&2-form: F_{\mu\nu}dx^\mu\otimes dx^\nu
\end{aligned} \tag{3}$$

在以上的例子中，我們特別關注 F 的表達方式，運用反對稱的特性可以將 F 改寫成

$$\begin{aligned}
F&=F_{\mu\nu}dx^\mu\otimes dx^\nu=\frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu}-F_{\nu\mu}\right)dx^\mu\otimes dx^\nu\\
&=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu\otimes dx^\nu-\frac{1}{2}F_{\nu\mu}dx^\mu\otimes dx^\nu\\
&=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(dx^\mu\otimes dx^\nu-dx^\nu\otimes dx^\mu)\\
&=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(dx^\mu\wedge dx^\nu)
\end{aligned} \tag{4}$$

在此定義楔積 $\wedge$(wedge product) 的運算規則為

$$\begin{aligned}
&dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}\\
&\equiv\tilde{\epsilon}_{\mu_1,\mu_2\cdots,\mu_n}dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_n}
\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\tilde{\epsilon}_{\mu_1,\mu_2\cdots,\mu_n}$ 是 Levi-Civita symbol，其定義根據 $(\mu_1,\mu_2\cdots,\mu_n)$ 的排列順序為

$$\begin{aligned}
&\tilde{\epsilon}_{\mu_1,\mu_2\cdots,\mu_n}\\
&=\begin{cases}1 & if\ \mu_{1\sim n}\ is\ even\ permutation\ of\ (1,2,\cdots,n)\\ -1 & if\ \mu_{1\sim n}\ is\ odd\ permutation\ of\ (1,2,\cdots,n)\\ 0 & otherwise\end{cases}
\end{aligned} \tag{6}$$

可以看到在式 (6) 中我幫 ϵ 加了一個帽子變成 $\tilde{\epsilon}$，這是因為要區分在之後會遇到的 Levi-Civita tensor，所以在之後若是沒有帽子的 ϵ 代表的是 Levi-Civita tensor 而不是 Levi-Civita symbol，這點要特別注意。以下舉一些實際的例子來展示 wedge product 的操作，以下將省略 $\otimes$ 的書寫，把 $dx^{\mu_1}\otimes dx^{\mu_2}$ 簡化為 $dx^{\mu_1}dx^{\mu_2}$ 來表達

$$\begin{aligned}
&dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge dx^{\mu_3}=\tilde{\epsilon}_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}dx^{\mu_1}dx^{\mu_2}dx^{\mu_3}\\
&=dx^{\mu_1}dx^{\mu_2}dx^{\mu_3}+dx^{\mu_3}dx^{\mu_1}dx^{\mu_2}+dx^{\mu_2}dx^{\mu_3}dx^{\mu_1}\\
&-dx^{\mu_3}dx^{\mu_2}dx^{\mu_1}-dx^{\mu_1}dx^{\mu_3}dx^{\mu_2}-dx^{\mu_2}dx^{\mu_1}dx^{\mu_3}
\end{aligned} \tag{7}$$

所以例如當 $\mu_1=1$、$\mu_2=2$ 和 $\mu_3=3$ 時

$$\begin{aligned}
&dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\\
&=dx^1dx^2dx^3+dx^3dx^1dx^2+dx^2dx^3dx^1\\
&-dx^3dx^2dx^1-dx^1dx^3dx^2-dx^2dx^1dx^3
\end{aligned} \tag{8}$$

從式 (5) 中的定義我們不難發現 wedge product 有以下兩個重要的關係式

$$\begin{cases}dx^i\wedge dx^j=-dx^j\wedge dx^i & if\quad i\neq j\\ dx^i\wedge dx^j=0 & if\quad i=j\end{cases} \tag{9}$$

在了解 wedge product 的操作後，現在來看看 $p-form$ 的正式定義，當我們說 ω 是一個 $p-form$ 時代表

$$\omega\equiv\frac{1}{p!}\omega_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} \tag{10}$$

假設現在有一個 $p-form$ 的 ω 和一個 $q-form$ 的 η，現在看看將 ω 和 η 給它 wedge 在一起後為何

$$
\begin{aligned}
&\omega \wedge \eta \\
&= (\frac{1}{p!}\omega_{\mu_1,\cdots,\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}) \\
&\quad \wedge (\frac{1}{q!}\eta_{\nu_1,\cdots,\nu_q} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}) \\
&= \frac{1}{p!q!}\omega_{\mu_1,\cdots,\mu_p}\eta_{\nu_1,\cdots,\nu_q} dx^{\mu_1} \wedge \cdots dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \cdots dx^{\nu_q}
\end{aligned} \tag{11}
$$

現在我們定義一個在物理學中常用的反對稱 $(0, p+q)$ 型的 tensor components 表達方式

$$
\begin{aligned}
&\omega_{[\mu_1,\cdots,\mu_p}\eta_{\nu_1,\cdots,\nu_q]} \\
&\equiv \frac{1}{(p+q)!}\tilde{\epsilon}_{\mu_1,\cdots,\mu_p,\nu_1,\cdots,\nu_q}\omega_{\mu_1,\cdots,\mu_p}\eta_{\nu_1,\cdots,\nu_q}
\end{aligned} \tag{12}
$$

式 (12) 乍看之下十分的複雜，以下舉一個簡單的例子

$$
\begin{aligned}
&\omega_{[\mu_1,\mu_2}\eta_{\nu_1]} \\
&= \frac{1}{3!}(\omega_{\mu_1,\mu_2}\eta_{\nu_1} + \omega_{\nu_1,\mu_1}\eta_{\mu_2} + \omega_{\mu_2,\nu_1}\eta_{\mu_1} \\
&\qquad - \omega_{\nu_1,\mu_2}\eta_{\mu_1} - \omega_{\mu_1,\nu_1}\eta_{\mu_2} - \omega_{\mu_2,\mu_1}\eta_{\nu_1})
\end{aligned} \tag{13}
$$

有了式 (12) 這種表達方式後，這樣一來對所謂反對稱會有更加明確的了解，所以現在可以把式 (11) 寫成

$$
\begin{aligned}
&\omega \wedge \eta \\
&= \frac{1}{p!q!}\omega_{[\mu_1,\cdots,\mu_p}\eta_{\nu_1,\cdots,\nu_q]} dx^{\mu_1} \wedge \cdots dx^{\mu_p} \wedge \cdots dx^{\nu_q} \\
&= \frac{1}{(p+q)!}(\omega \wedge \eta)_{\mu_1,\cdots,\mu_p,\nu_1,\cdots,\nu_q} dx^{\mu_1} \wedge \cdots dx^{\mu_p} \wedge \cdots dx^{\nu_q}
\end{aligned} \tag{14}
$$

從式 (14) 中可以知道 $p-form$ 的 ω 在 wedge 一個 $q-form$ 的 η 後變成一個 $(p+q)-form$，且藉由式 (14) 中的關係，我們得到 wedge product 的另一種表達方式

$$
(\omega \wedge \eta)_{\mu_1,\cdots,\mu_p,\nu_1,\cdots,\nu_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!}\omega_{[\mu_1,\cdots,\mu_p}\eta_{\nu_1,\cdots,\nu_q]} \tag{15}
$$

以上就是 wedge product 的一些性質，特別注意有時候會把式 (10) 中 $p-form$ 的 $1/p!$ 系數吸收到 wedge product 的定義中，也就是式 (5) 中的定義多一個 $1/p!$ 的系數，兩種方法都有人使用因此在此特別強調。現在為了能更了解 wedge product 的含意，可以見圖 (1) 和圖 (2) 中 wedge product 的幾何意涵

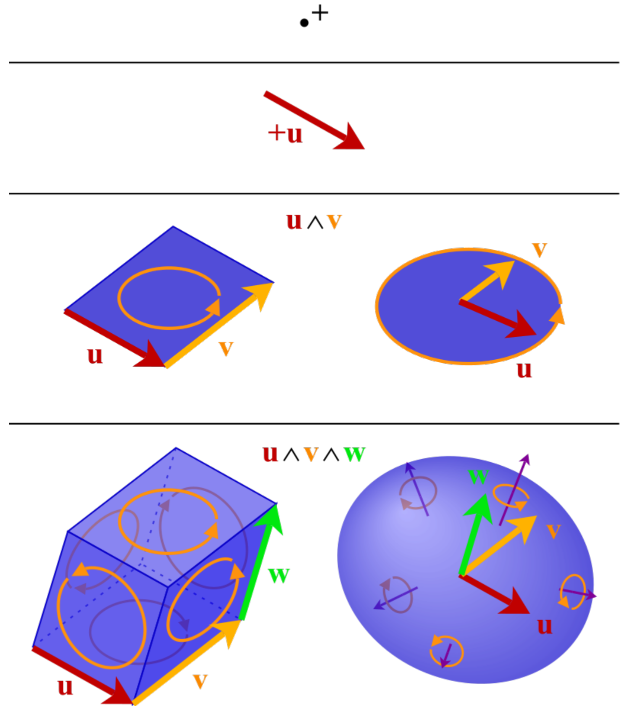

FIG. 1. wedge product 的本質可以視作不同向量或是說 $p-form$ 間的旋轉，與外積的不同之處在於當我們伸出右手比出外積時，大拇指是外積的方向但四根手指的方向才是 wedge product 的方向。[1]

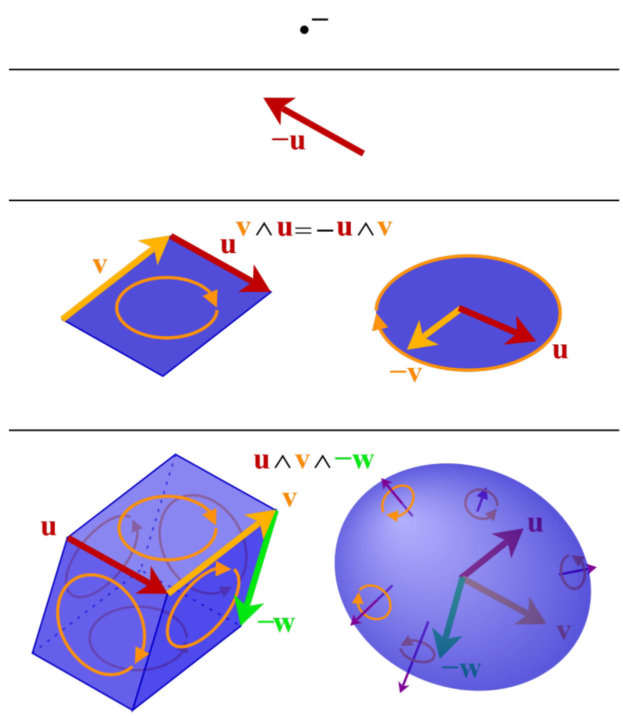

FIG. 2. [1]

II. RIEMANNIAN VOLUME FORM

在我們對體積做積分的時候常常會寫到 $dxdydz$ 或是簡寫成 d^3x，其代表的意思是一個微小的體積單元，而 $dxdydz$ 的順序互換並不影響積分結果，也就是在這樣的表達下體積是沒有方向性的，然而體積真的是沒有方向性的嗎？我們不妨回顧一下在高中時學習的體積表達方式，在三維空間中一個由 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 向量構成的平行六面體體積可以用行列式 (Determinant) 計算，並表達為

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{16}$$

仔細一看這不是有方向性嗎？因為只要 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 互換順序明顯就會多一個負號，也就是這塊體積照個鏡子就會差一個負號，有時候會把這種看似是純量但後來發現不是純量的東西叫做偽純量 (Pseudoscalar)，類似的東西還有外積後的向量被叫做偽向量 (Pseudovector) 甚至是偽張量 (Pseudotensor)(例如 $\tilde{\epsilon}$)，但大可不必在這邊拐彎抹角偽來偽去的，阿偽純量就不是純量，何不給一個新的定義？所以 wedge product 就登場了。仔細觀察式 (8) 中的結果，可以發現這與行列式的算法十分類似，事實上若是將式 (16) 改寫一下就可以發現以下關係，其中 α、β 和 γ 皆可以從 1 跑到 3，並使用愛因斯坦求和約定

$$a_\alpha dx^\alpha \wedge b_\beta dx^\beta \wedge c_\gamma dx^\gamma = \begin{vmatrix} a_1dx^1 & a_2dx^2 & a_3dx^3 \\ b_1dx^1 & b_2dx^2 & b_3dx^3 \\ c_1dx^1 & c_2dx^2 & c_3dx^3 \end{vmatrix} \tag{17}$$

所以一個 $dxdydz$ 圍起來的，保有方向性的小體積其實就可以寫成

$$dx\wedge dy\wedge dz \tag{18}$$

藉此也我們也發現行列式的計算可以使用 Levi-Civita symbol ($\tilde{\epsilon}$)，假設一個 $(1,1)$ 型的 tensor M，其 component 記做 $M^\mu{}_\nu$，μ 和 ν 可以從 1 跑到 n

$$det(M) = \tilde{\epsilon}_{\nu_1,\cdots,\nu_n} M^1{}_{\nu_1}\cdots M^n{}_{\nu_n} \tag{19}$$

運用一些已知的規則可將上式進行改寫

$$\begin{aligned} & det(M) = det(M^T) = \tilde{\epsilon}_{\nu_1,\cdots,\nu_n} M^{\nu_1}{}_1\cdots M^{\nu_n}{}_n \\ \Rightarrow & 1\cdot det(M) = \tilde{\epsilon}_{\nu_1,\cdots,\nu_n} M^{\nu_1}{}_1\cdots M^{\nu_n}{}_n \\ \Rightarrow & \tilde{\epsilon}_{1,\cdots,n} det(M) = \tilde{\epsilon}_{\nu_1,\cdots,\nu_n} M^{\nu_1}{}_1\cdots M^{\nu_n}{}_n \\ \Rightarrow & \tilde{\epsilon}_{\mu_1,\cdots,\mu_n} det(M) = \tilde{\epsilon}_{\nu_1,\cdots,\nu_n} M^{\nu_1}{}_{\mu_1}\cdots M^{\nu_n}{}_{\mu_n} \\ \Rightarrow & \tilde{\epsilon}_{\nu_1,\cdots,\nu_n} det(M) = \tilde{\epsilon}_{\mu_1,\cdots,\mu_n} M^{\mu_1}{}_{\nu_1}\cdots M^{\mu_n}{}_{\nu_n} \end{aligned} \tag{20}$$

現在我們特別令這個 $(1,1)$ 型的 tensor M 為一個座標轉換的 tensor，其 component 為

$$M^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \tag{21}$$

將式 (21) 帶入式 (20) 中後可以得到

$$\begin{aligned} & \tilde{\epsilon}_{\nu_1,\cdots,\nu_n} det(M) = \tilde{\epsilon}_{\mu_1,\cdots,\mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x'^{\nu_n}} \\ \Leftrightarrow & \\ & \tilde{\epsilon}'_{\nu_1,\cdots,\nu_n}\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = \tilde{\epsilon}_{\mu_1,\cdots,\mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x'^{\nu_n}} \\ \Leftrightarrow & \\ & \tilde{\epsilon}'_{\nu_1,\cdots,\nu_n} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^{-1} \tilde{\epsilon}_{\mu_1,\cdots,\mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x'^{\nu_n}} \end{aligned} \tag{22}$$

可以發現式 (22) 就是 Levi-Civita symbol ($\tilde{\epsilon}$) 的座標變換規則，而 $det(M)$ 就是座標變換的 Jacobian 的行列式值，其中因為 $\tilde{\epsilon}$ 的值只能是 1、-1、0，所以其實 $\tilde{\epsilon}'$ 與 $\tilde{\epsilon}$ 表達上並沒有差別。而現在可以從式 (22) 中多出的 Jacobian 行列式倒數明確的知道 Levi-Civita symbol ($\tilde{\epsilon}$) 並不符合 tensor components 的變換規則，因此 Levi-Civita symbol ($\tilde{\epsilon}$) 不是張量，在座標變換下無法保持不變性。當然你可以叫它偽張量，但它有另一個名子叫 tensor density。現在讓我們暫時將目光轉移到黎曼幾何中十分重要的概念，也就是度規張量 $g_{\mu\nu}$(metric tensor)，metric tensor 告訴我們在對應的黎曼流形上該如何進行內積，也就是透過 metric tensor 定義了在黎曼流形上的長度 s

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{23}$$

現在定義 metric tensor 的行列式記做 g

$$det(g_{\mu\nu}) \equiv g \tag{24}$$

由於 metric tensor 符合張量的座標變換規則，因此在座標變換前後的 g 可以寫成

$$\begin{aligned} g' = det\left(g'_{\mu\nu}\right) &= det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}\right) \\ &= det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)det\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\right)det\left(g_{\alpha\beta}\right) \\ &= \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^2 g \end{aligned} \tag{25}$$

由於物理學家關心的是能夠在座標變換下不變的表達方式，而現在我們發現把式 (22) 和式 (25)，適當的湊在一起可以抵消掉座標變換後多出的 Jacobian 行列式，而我們定義把兩者組合後滿足座標轉換下不變的 tensor 為 Levi-Civita tensor (ϵ)

$$\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_n} = \sqrt{|g|}\tilde{\epsilon}_{\mu_1\cdots\mu_n} \tag{26}$$

注意在式 (26) 中幫 g 加上絕對值的原因是因為在描述時空的 metric tensor 時，時間和空間會差一個負號，這導致時空的 metric tensor 非正定，也就是時空的 metric tensor 的行列式會是負號，像這樣非正定的 metric tensor 所描述的黎曼流形又稱作偽黎曼流形 (Pseudo-Riemannian manifold)，而偽黎曼流形也正是廣義相對論的數學基礎。

現在知道 Levi-Civita tensor 的定義後可以很容易發現其滿足 $n-form$ 反對稱的要求，因此 Levi-Civita tensor 可以寫成 $n-form$ 的形式

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{n!}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}\\ &= \frac{1}{n!}\sqrt{|g|}\tilde{\epsilon}_{\mu_1\cdots\mu_n}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}\end{aligned} \tag{27}$$

又由於 wedge product 的定義中也有一個 $\tilde{\epsilon}$，所以在 Levi-Civita tensor 的 $n-form$ 表達式中的 $\tilde{\epsilon}$ 與 wedge product 中蘊含的 $\tilde{\epsilon}$ 相互抵銷，因此 Levi-Civita tensor 又可以寫成

$$\epsilon = \sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \tag{28}$$

在式 (28) 的表達方式下，我們又把 Levi-Civita tensor 稱為 Riemannian volume form，這個 volume form 由於不隨座標改變而改變因此大有用處。為了體現其用處，讓我們回到一開始對體積積分的話題上，在有了體積是有方向性與 volume form 的概念後，現在如果我們要對一個 n 維的體積積分，且要求適用於任意坐標系時可以表達成

$$\int\sqrt{|g|}d^nx = \int\sqrt{|g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n = \int\epsilon \tag{29}$$

可以看到想要積分一個任意維度的體積在 volume form 的表達之下是如此的簡單，這也是 ϵ 被稱作"volume" form 的原因，除此之外這也給了我們一個啟示，也就是任意的 $p-form$ 都可以直接搭配積分符號進行積分，也就是當我說 ω 是一個 $p-form$ 時，一個 p 維的積分即可表達成

$$\int\omega \tag{30}$$

更嚴謹點的描述，我們假設在一個 n 維流形中存在 n 個描述空間變化的連續純量參數 λ，所以在第 j 個方向上的第 i 個位置上都可以用 λ_j 來描述 j 方向位置 i 的向量 $V(j,i)$，則該向量可以寫成

$$V(j,i) = \frac{dx_i^{\mu}}{d\lambda_j}d\lambda_j\partial_\mu \tag{31}$$

所以現在對一個 $n-form$ 的 ω 積分可以寫成

$$\int\omega = \lim_{N\to\infty}\sum_{N}^{i=1}\omega(V(1,i),\cdots V(n,i))d\lambda_1\cdots d\lambda_n \tag{32}$$

現在來看一些實際的例子，當 ω 是一個三維空間中的 $1-form$ 時，對 ω 在一維的某個區域 M 的積分為

$$\int_M\omega = \int_M\omega_\mu dx^\mu = \int_M\omega_1dx^1+\omega_2dx^2+\omega_3dx^3 \tag{33}$$

從式 (33) 中可以看到對一個 $1-form$ 的 ω 積分就相當於對向量 $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ 沿著路徑 M 進行線積分。現在改成當 ω 是一個三維空間中的 $2-form$ 時，對 ω 在二維的某個區域 M 的積分為

$$\begin{aligned}\int_M\omega &= \int_M\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu\\ &= \int_M\omega_{12}dx^1\wedge dx^2+\omega_{31}dx^3\wedge dx^1+\omega_{23}dx^2\wedge dx^3\\ &= \int_M\omega_{12}(dx^1dx^2-dx^2dx^1)+\omega_{31}(dx^3dx^1-dx^1dx^3)\\ &\quad+\omega_{23}(dx^2dx^3-dx^3dx^2)\\ &= \int_M\left(\omega_{12}(\frac{dx^1}{d\lambda_1}\frac{dx^2}{d\lambda_2}-\frac{dx^2}{d\lambda_2}\frac{dx^1}{d\lambda_1})+\omega_{31}(\frac{dx^3}{d\lambda_1}\frac{dx^1}{d\lambda_2}-\frac{dx^1}{d\lambda_2}\frac{dx^3}{d\lambda_1})\right.\\ &\quad\left.+\omega_{23}(\frac{dx^2}{d\lambda_1}\frac{dx^3}{d\lambda_2}-\frac{dx^3}{d\lambda_2}\frac{dx^2}{d\lambda_1})\right)d\lambda_1d\lambda_2\end{aligned} \tag{34}$$

現在我們把 $\vec{U}$ 和 $\vec{V}$ 向量分量視為

$$\vec{U} = \left(\frac{dx^1}{d\lambda_1},\frac{dx^2}{d\lambda_1},\frac{dx^3}{d\lambda_1}\right) \tag{35}$$

$$\vec{V} = \left(\frac{dx^1}{d\lambda_2},\frac{dx^2}{d\lambda_2},\frac{dx^3}{d\lambda_2}\right) \tag{36}$$

所以現在微小的面積 $d\vec{a}$ 可寫成

$$d\vec{a} = (\vec{U}\times\vec{V})d\lambda_1d\lambda_2 = (da_x,da_y,da_z) \tag{37}$$

所以式 (34) 可以重新寫成

$$\begin{aligned}\int_M\omega &= \int_M\omega_{12}dx^1\wedge dx^2+\omega_{31}dx^3\wedge dx^1+\omega_{23}dx^2\wedge dx^3\\ &= \int_M\omega_{12}da_z+\omega_{31}da_y+\omega_{23}da_x\end{aligned} \tag{38}$$

現在若將 $\vec{\omega}$ 視為 $(\omega_{23},\omega_{31},\omega_{12})$，則對一個 $2-form$ 的 ω 在 M 積分就相當於對向量 $\vec{\omega}$ 對 M 面上進行面積分，也就是

$$\int_M\omega = \int_M\vec{\omega}\cdot d\vec{a} \tag{39}$$

以此類推，我們可以對任意維度的 $p-form$ 在流形上進行積分，若是要求在任何座標下積分都保持不變的話，則只需要多乘上流形在特定座標下對應的 $\sqrt{g}$ 再進行積分即可，結果將會是一個座標變換中不變的純量。現在我們已經知道 $p-form$ 的積分了，那麼 $p-form$ 的微分又是如何呢？不過在此之前還必須先講講一個重要的算符，該算符對於我們了解 wedge product 所存在的空間起到重要的作用。

III. HODGE STAR OPERATOR

現在假設我們存在在零維中，那麼我們能夠描述這個空間的基底就是一個沒有任何方向性的純量 1，若是在一維中則可以有純量和一個方向的基底來描述空間，也就是 1 和 dx^1，那麼以此類推，在二維中我們的基底有 1、dx^1、dx^2，三維中則有 1、dx^1、dx^2、dx^3，$\cdots$，現在來看看這些基底 wedge product 的所有可能組合

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 \;\; , \;\; dx^1 \\ 1 \;,\; dx^1 \; or \; dx^2 \;,\; dx^1 \wedge dx^2 \\ \cdots \end{matrix}$$

若是我們改成把每一種組合的可能個數寫下來的話又會長怎麼樣呢？

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 \;,\; 1 \\ 1 \;,\; 2 \;,\; 1 \\ 1 \;,\; 3 \;,\; 3 \;,\; 1 \\ \cdots \end{matrix} \tag{40}$$

可以發現這就是一個巴斯卡三角形，巴斯卡三角形的一大特徵就是左右對稱，而由 wedge product 組合構成的這個巴斯卡三角形左右對稱的部分互相形成對偶空間，我們稱之為霍奇對偶 (Hodge duality)，可以看到在 3 維的例子中總共有 4 個不同的 wedge 基底構成了 4 維實數空間，分別為純量 (維度 0，1 種)、0 個 wedge(維度 1，3 種)、1 個 wedge(維度 2，3 種)、兩個 wedge(維度 3，1 種)，所以我們將 n 維實數空間中第 m 維度記做 $\wedge^m(\mathbb{R}^n)$，而霍奇星算符 $\star$ (Hodge star operator) 就是把 wedge 基底構成的巴斯卡三角形中的一側映射到對稱的另一側，數學上記做

$$\star : \wedge^m(\mathbb{R}^n) \longmapsto \wedge^{n-m}(\mathbb{R}^n) \tag{41}$$

一個簡單的例子，事實上式 (28) 中的 n 維 volume form ϵ 在 metric tensor 為對角矩陣且 $\sqrt{|g|} = 1$ 時可以用霍奇算符改寫為

$$\epsilon = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \star 1 \tag{42}$$

我們也可以透過內積來定義霍奇算符，但首先要先對 $p - form$ 的內積進行定義，現在規定只有相同大小的 $form$ 才能進行內積，首先令 dx^I 為某個 $n - form$ 的基底，$I = (i_1, \cdots, i_n)$，dx^J 為另一個 $n - form$ 的基底，$J = (j_1, \cdots, j_n)$，g 為 metric tensor，則兩組基底的內積為

$$\left\langle dx^I, dx^J \right\rangle \equiv \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) g_{i_1 j_{\sigma(1)}} g_{i_2 j_{\sigma(2)}} \cdots g_{i_n j_{\sigma(n)}} \tag{43}$$

為了要搞懂這一內積定義在說什麼，這邊給一個實際的例子，假設在三維空間中 metric tensor g 為

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

則 $\left\langle dx^1 \wedge dx^2, dx^2 \wedge dx^3 \right\rangle$ 的運算方式為

$$\begin{aligned} &\left\langle dx^1 \wedge dx^2, dx^2 \wedge dx^3 \right\rangle \\ &= \sum_{\sigma \in S_2} sgn(\sigma) g_{i_1 j_{\sigma(1)}} g_{i_2 j_{\sigma(2)}} \\ &= sgn(12) g_{i_1 j_{\sigma(1)}} g_{i_2 j_{\sigma(2)}} + sgn(21) g_{i_1 j_{\sigma(1)}} g_{i_2 j_{\sigma(2)}} \\ &= sgn(12) g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} + sgn(21) g_{i_1 j_2} g_{i_2 j_1} \\ &= g_{12} g_{23} - g_{13} g_{22} = 3 * 0 - (-2) * 2 = -4 \end{aligned} \tag{45}$$

所以一個 $n - form$ 的 α 之霍奇對偶 $\star\alpha$ 可以利用這樣的內積規則定義為

$$\begin{aligned} &\forall \beta \in \wedge^m(\mathbb{R}^n) \\ &\beta \wedge (\star\alpha) \equiv \langle \alpha, \beta \rangle \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned} \tag{46}$$

現在讓我們再看一些例子，就拿在電磁學中會使用到的 metric tensor 來看，也就是包含時間與空間的敏考斯基度規，這裡選用的敏考斯基度規為負號在時間項

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

從 metric tensor 本身就能了解 $1 - form$ 的內積為何，也就是可以把 metric tensor 視為

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \langle dt, dt \rangle & \langle dt, dx \rangle & \langle dt, dy \rangle & \langle dt, dz \rangle \\ \langle dx, dt \rangle & \langle dx, dx \rangle & \langle dx, dy \rangle & \langle dx, dz \rangle \\ \langle dy, dt \rangle & \langle dy, dx \rangle & \langle dy, dy \rangle & \langle dy, dz \rangle \\ \langle dz, dt \rangle & \langle dz, dx \rangle & \langle dz, dy \rangle & \langle dz, dz \rangle \end{pmatrix} \tag{48}$$

所以時空 $1 - form$ 的霍奇對偶為

$$\begin{aligned} \star dt &= \langle dt, dt \rangle \, dx \wedge dy \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz \\ \star dx &= \langle dx, dx \rangle \, (-1) dt \wedge dy \wedge dz = -dt \wedge dy \wedge dz \\ \star dy &= \langle dy, dy \rangle \, dt \wedge dx \wedge dz = dt \wedge dx \wedge dz \\ \star dz &= \langle dz, dz \rangle \, (-1) dt \wedge dx \wedge dy = -dt \wedge dx \wedge dy \end{aligned} \tag{49}$$

而 $2 - form$ 的霍奇對偶為

$$\begin{aligned}\star(dt\wedge dx) &= \langle dt\wedge dx, dt\wedge dx\rangle\, dy\wedge dz = -dy\wedge dz\\ \star(dt\wedge dy) &= \langle dt\wedge dy, dt\wedge dy\rangle\,(-1)dx\wedge dz = dx\wedge dz\\ \star(dt\wedge dz) &= \langle dt\wedge dz, dt\wedge dz\rangle\, dx\wedge dy = -dx\wedge dy\\ \star(dx\wedge dy) &= \langle dx\wedge dy, dx\wedge dy\rangle\, dt\wedge dz = dt\wedge dz\\ \star(dx\wedge dz) &= \langle dx\wedge dz, dx\wedge dz\rangle\,(-1)dt\wedge dy = -dt\wedge dy\\ \star(dy\wedge dz) &= \langle dy\wedge dz, dy\wedge dz\rangle\, dt\wedge dx = dt\wedge dx\end{aligned} \tag{50}$$

在 x、y、z 的三維中，霍奇算符能夠把 wedge product 和外積聯繫在一起，在式 (II) 中我們已經示範了 wedge product 能夠達到類似外積的效果，但畢竟方向的不同所以並不是完全一樣，但現在有了霍奇算符就可以在兩者之間進行轉換。設三維中的兩個 $1-form$ U 和 V，則能有以下的性質

$$\star(U\wedge V) = U\times V \tag{51}$$
$$\star(U\times V) = U\wedge V \tag{52}$$

注意這裡需要將一般計算外積時使用的向量改成 $1-form$ 的形式才會成立，以下給一個實際的例子，假設三維中兩個向量分別為 $U=(u_x,u_y)$ 和 $V=(v_x,v_y)$，將向量包括基底完整的寫出來為

$$\begin{aligned}U &= u_x\hat{x}+u_y\hat{y} = U^1\partial_x + U^2\partial_y = u_x\partial_x + u_y\partial_y\\ V &= v_x\hat{x}+v_y\hat{y} = V^1\partial_x + V^2\partial_y = v_x\partial_x + v_y\partial_y\end{aligned} \tag{53}$$

透過 metric tensor 可以把向量變成 $1-form$ 的形式

$$U^\nu g_{\nu\mu} = U_\mu \tag{54}$$

但由於三維中的卡氏座標的 metric tensor 其實就是單位矩陣，所以轉換前後 components 完全一樣！在 $1-form$ 的形式下的 U、V 為

$$\begin{aligned}U &= U_\mu dx^\mu = U_1 dx + U_2 dy = u_x dx + u_y dy\\ V &= V_\nu dx^\nu = V_1 dx + V_2 dy = v_x dx + v_y dy\end{aligned} \tag{55}$$

所以現在來驗證式 (52)

$$\begin{aligned}\star(U\wedge V) &= \star\left(\frac{1}{1!1!}U_{[\mu}V_{\nu]}dx^\mu\wedge dx^\nu\right)\\ &= \star\left(\frac{1}{2!}(U_\mu V_\nu - U_\nu V_\mu)dx^\mu\wedge dx^\nu\right)\\ &= \star\Big((\frac{1}{2}(U_1V_2-U_2V_1)dx^1\wedge dx^2)\\ &\quad + (\frac{1}{2}(U_2V_1-U_1V_2)dx^2\wedge dx^1)\Big)\\ &= \star\left((U_1V_2-U_2V_1)dx^1\wedge dx^2\right)\\ &= (U_1V_2-U_2V_1)\star(dx^1\wedge dx^2)\\ &= (U_1V_2-U_2V_1)dx^3\\ &= (u_xv_y-u_yv_x)dz = U\times V\end{aligned} \tag{56}$$

可以看到透過霍奇算符確實將 wedge 與外積聯繫在一起，事實上 wedge product 是更廣義的外積並適用於所有維度，而一般我們熟悉的外積只不過是三維中的特例罷了。在介紹完如何對 $p-form$ 進行微分後我們將會看到霍奇算符的更多功用。

IV. EXTERIOR DERIVATIVE

由於我們真正關心的是座標變換中不變的 tensor，因為這樣用 tensor 寫下的公式才能適用於各種坐標系，所以同樣的，對一個 tensor 微分後我們希望它還能保持 tensor 的身分，但若是直接對 tensor 微分會破壞 tensor 的特性，使之無法符合 tensor 元素的轉換規則。以下給一個簡單的例子，假設 V 為 $(1,0)$ 型的 tensor 並對其進行微分，讓我們來看看 V 被微分後的座標變換的規則為何

$$\begin{aligned}\partial_{\nu'}V'^\mu &= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}V^\beta\right)\\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\partial_\alpha V^\beta + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}V^\beta\end{aligned} \tag{57}$$

可以很清楚的發現式 (57) 中的第一項就是 $(1,1)$ 型的 tensor 轉換規則，但由於有第二項的存在導致了 $\partial_\alpha V^\beta$ 並不是 $(1,1)$ 型的 tensor。這可麻煩了，現代數學的許多基礎都建立在微分上，這一套 tensor 的系統如果不能微分的話就太糟糕了，所以有三種辦法能夠解決此問題，使 tensor 微分後還能是 tensor，以下給出三種方法的名子與其對應的限制

- Lie derivative: 需要一個已存在的向量場。
- Exterior derivative: 只能適用於 $p-form$ 。
- Covariant derivative: 適用於任意 tensor

可以看到 Covariant derivative 似乎是最成功的方法，而確實 Covariant derivative 就是廣義相對論的基礎之一，但我們現在關注的是 $p-form$ 形式的 tensor，所以這裡只會介紹 Exterior derivative，也就是外微分。外微分的符號記做 d，d 能夠將 $p-form$ 映射到 $(p+1)-form$

$$d: p-form \longmapsto (p+1)-form \tag{58}$$

假設 ω 是一個 $p-form$ 則對 ω 進行外微分可藉由式 (15) 定義為

$$\begin{aligned}d\omega &\equiv \frac{1}{p!}\partial_\nu\omega_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p}dx^\nu\wedge dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\\ &= \frac{1}{p!}\partial_{[\nu}\omega_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p]}dx^\nu\wedge dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\\ &= \frac{1}{p!}\left(\frac{1!p!}{(1+p)!}(d\omega)_{\nu\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p}\right)dx^\nu\wedge dx^{\mu_1}\wedge\cdots dx^{\mu_p}\\ &= \frac{1}{(1+p)!}(d\omega)_{\nu\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p}dx^\nu\wedge dx^{\mu_1}\wedge\cdots dx^{\mu_p}\end{aligned} \tag{59}$$

讓我們看一下實際的例子，我們令 f 是一個 $0-form$(其實就是一個普通的純量函數)，則對其進行外微分

$$df = (\partial_\nu f)dx^\nu = (df)_\nu dx^\nu \tag{60}$$

可以看到 df 變成了一個 $1-form$，現在若是再外微分一次會得到什麼呢？

$$\begin{aligned} d(df) &= \partial_\mu(\partial_\nu f)dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= -\partial_\nu(\partial_\mu f)dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= -\partial_\mu(\partial_\nu f)dx^\nu \wedge dx^\mu = -d(df) = 0 \end{aligned} \tag{61}$$

由於對連續的函數或是流形上的微分順序是可互換的，但 wedge product 卻具有交換一次順序多一個負號的特性，因此我們有以下重要的性質

$$d^2 = 0 \tag{62}$$

這種 θ_i 不是零但 θ_i^2 是零的性質乍看之下很奇怪，但這在格拉斯曼代數的系統中其實是十分平常的事並被運用在對費米子的路徑積分中，而這裡我們看到的外微分 d 的二次方是零適用於任何情況，包括任意維度和任意的 metric tensor。現在讓我們繼續看一些在三維空間中的例子並跟以往熟悉的向量微積分進行比較，一樣先假設一個純量函數 $f(x,y,z)$，一次外微分後的 $1-form$ 結果為

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz \tag{63}$$

可以發現這就跟梯度是類似的，藉由式 (54) 中的方法用 metric tensor 將一般向量 ((1, 0) 型 tensor) 的 components 轉換成 $1-form$ 的 components，由於三維卡氏座標中 metric tensor 就是單位矩陣，因此兩者的 components 便會完全一樣，但必須將座標基底改成 $1-form$ 的 dx^μ 形式，也就是要變成把向量基底視為該方向的小位移才行，如此一來即可寫下

$$df = \nabla f \tag{64}$$

但式 (64) 並不侷限於三維卡氏座標，從這裡也可以看出梯度在不同坐標系下的變換，例如用三維中球座標描述空間時微小長度平方的計算方法為

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2 \tag{65}$$

所以 metric tensor 為

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{pmatrix} \tag{66}$$

所以對純量函數 $f(r,\theta,\phi)$ 進行外微分得

$$df = \frac{df}{dr}dr + \frac{df}{d\theta}d\theta + \frac{df}{d\phi}d\phi \tag{67}$$

但此時若要讓 $1-form$ 與梯度進行連結，必須要把向量基底視為該方向的小位移才行，此時根據式 (65) 各方向的小位移為

$$ds_r = \sqrt{g_{rr}}dr \tag{68}$$
$$ds_\theta = \sqrt{g_{\theta\theta}}d\theta \tag{69}$$
$$ds_\phi = \sqrt{g_{\phi\phi}}d\phi \tag{70}$$

因此在三維球座標中的梯度應該為

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\frac{df}{dr}\sqrt{g_{rr}}dr + \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}\frac{df}{d\theta}\sqrt{g_{\theta\theta}}d\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\frac{df}{d\phi}\sqrt{g_{\phi\phi}}d\phi \\ &= \frac{df}{dr}\ ds_r + \frac{1}{r}\frac{df}{d\theta}\ ds_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{df}{d\phi}\ ds_\phi \end{aligned} \tag{71}$$

從以上的例子可以發現將梯度視作是 $1-form$ 是比較自然的，事實上若是把所有向量微積分都視作是在 $p-form$ 形式下的操作的話，許多複雜的結構都將消失變成漂亮而簡潔的形式，讓我們接著看下去。現在對一個 $1-form$ ω 做一次外微分並作用一個霍奇算符

$$\begin{aligned} \star d\omega &= \star\, d(\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz) \\ &= \star\,(\partial_y\omega_x dy \wedge dx + \partial_z\omega_x dz \wedge dx \\ &\quad + \partial_x\omega_y dx \wedge dy + \partial_z\omega_y dz \wedge dy \\ &\quad + \partial_x\omega_z dx \wedge dz + \partial_y\omega_z dy \wedge dz) \\ &= (\partial_y\omega_x(-dz) + \partial_z\omega_x dy \\ &\quad + \partial_x\omega_y dz + \partial_z\omega_y(-dx) \\ &\quad + \partial_x\omega_z(-dy) + \partial_y\omega_z dx) \\ &= (\frac{\partial\omega_z}{\partial y} - \frac{\partial\omega_y}{\partial z})dx \\ &\quad + (\frac{\partial\omega_x}{\partial z} - \frac{\partial\omega_z}{\partial x})dy \\ &\quad + (\frac{\partial\omega_y}{\partial x} - \frac{\partial\omega_x}{\partial y})dz = \nabla \times \omega \end{aligned} \tag{72}$$

可以發現這就是旋度，因此可以簡單的統整為

$$\nabla \times (1-form) = \star d(1-form) \tag{73}$$

但 $\star d$ 不一定是取旋度，旋度不過是 $\star d$ 在三維空間中作用在 $1-form$ 上時的情況，是一個特例而已。現在回頭再看一次 $d^2 = 0$ 將變得十分的直觀

$$\nabla \times (\nabla f) = \star d(df) = \star d^2 f = 0 \tag{74}$$

同樣這不過是 $d^2 = 0$ 的一個特例罷了，例如我們將 $1-form$ 取霍奇對偶後再作用 $\star d$ 看看

$$\begin{aligned}\star d(\star\omega) &= \star\, d(\star(\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz)) \\ &= \star\, d(\omega_x dy\wedge dz + \omega_y dz\wedge dx + \omega_z dx\wedge dy) \\ &= \star\,(\frac{\partial\omega_x}{\partial x} dx\wedge dy\wedge dz \\ &\quad + \frac{\partial\omega_y}{\partial y} dy\wedge dz\wedge dx \\ &\quad + \frac{\partial\omega_z}{\partial z} dz\wedge dx\wedge dy) \\ &= \frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega_z}{\partial z} = \nabla\cdot\omega \end{aligned} \tag{75}$$

這就是散度，事實上從式 (46) 中霍奇星算符的定義中便可察覺霍奇星算符本身就包含內積的概念，所以我們又有一個結論

$$\nabla\cdot(1-form) = \star d\star(1-form) \tag{76}$$

同樣這只是 $\star d\star$ 在三維空間中的特例，不過我們仍能由這個特例再次回顧 $d^2=0$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\omega) = \star d\star(\star d\omega) = \star d^2\omega = 0 \tag{77}$$

以此類推，經常使用的拉普拉斯算符為先梯度再散度，所以可以寫成

$$\nabla^2 f = \star d\star df \tag{78}$$

現在我們終於可以體會到微分形式 Differential Forms 這套系統的強大，因為它適用於任何維度任何座標和任意的流形結構。現在我們令 ω 為流形上任意的 $p-form$，並定義以下名稱

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow \omega\ \ is\ \ closed \tag{79}$$

$$\omega = d\eta \Leftrightarrow \omega\ \ is\ \ exact \tag{80}$$

因此藉由 $d^2=0$，可知 ω 只要是 exact 則一定是 closed，但反之卻不盡然，對此存在著一個十分有名的引理，也就是龐加萊引理 (Poincare lemma)，其闡述為

> for a neighborhood U of a manifold M is contractible to a point $P\in M$, then any closed $p-form$ ω on U is also an exact form.

基本上龐加萊引理就是在說一個 closed 的 $p-form$ 如果是在沒有破缺的空間中時則一定也是 exact。所以我們以往在電磁學中熟悉的

$$\nabla\cdot B = 0 \Rightarrow B = \nabla\times A \tag{81}$$

其實並不是理所當然的事，要特別注意。現在再來看向量微積分中一定會遇到的斯托克斯定理和格林定理 (散度定理)

$$\int(\nabla\times\omega)\cdot d\vec{a} = \oint\omega\cdot d\vec{l} \tag{82}$$

$$\int(\nabla\cdot\omega)dv = \oint\omega\cdot d\vec{a} \tag{83}$$

記得在前面我們曾提到對 $p-form$ 積分就相當於進行 p 維的積分，現在觀察斯托克斯定理和格林定理可以發現兩條公式都是在說一個向量場微分後在 p 維上的區塊積分會等於向量場在 $p-1$ 維的區塊邊界上進行積分，並且我們知道當 ω 是一個 $1-form$ 時旋度和散度分別為

$$\begin{aligned}&\nabla\times(1-form) = \star d(1-form)\\ &\nabla\cdot(1-form) = \star d\star(1-form) = \star d(2-form)\end{aligned} \tag{84}$$

注意因為在三維中 $1-form$ 的霍奇對偶為 $2-form$，又我們知道外微分會增加一階 $form$，所以

$$\nabla\times(1-form) = \star d(1-form) = \star(2-form) \tag{85}$$

$$\nabla\cdot(1-form) = \star d(2-form) = \star(3-form) \tag{86}$$

可以看到只要拿掉最後的霍奇算符並積分就能達到斯托克斯定理和格林定理等號左邊的效果，等號右側也是一樣的道理，所以可以把兩個定理分別寫成

$$\int d\omega = \oint\omega \tag{87}$$

$$\int d\star(\omega) = \oint\star(\omega) \tag{88}$$

現在我們將 ω 當作連續流形上任意的 $p-form$ 並對 p 維區塊 M 積分，並將 $p-1$ 維區塊邊界記做 ∂M，則廣義的斯托克斯定理和格林定理即

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega \tag{89}$$

可以看到斯托克斯定理和格林定理其實都是同一回事，且都只是式 (89) 的特例，我們又在次看到了微分形式的優美之處。

V. APPLICATIONS IN ELECTROMAGNETISM

如同在前面介紹霍奇算符時提到的，電磁學所處的空間是閔考斯基的四維時空，但由於微分形式適用於任何維度任何座標和任意的流形結構，所以要處理閔考斯基的四維時空中的電磁學那叫一個小菜一疊，首先將馬克士威四大方程寫下並把所有常數皆當做 1

$$\nabla\times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \tag{90}$$

$$\nabla\cdot B = 0 \tag{91}$$

$$\nabla\cdot E = \rho \tag{92}$$

$$\nabla\times B = J + \frac{\partial E}{\partial t} \tag{93}$$

其中 $E=(E_x,E_y,E_z)$，$B=(B_x,B_y,B_z)$ 和 $J=(J_x,J_y,J_z)$。現在我們定義一個 $2-form$ F、一個 $1-form$ A 和重新定義一個 $1-form$ J，首先 A 的定義為

$$A\equiv -Vdt+A_xdx+A_ydy+A_zdz=A_\nu dx^\nu \tag{94}$$

其中 V 為電位，A_x 、A_y 和 A_z 為磁位在各個方向上的分量，這裡使用的度規一樣是式 (47) 中的 $(-+++)$，通常習慣把時間項的標號設為 0，所以 $dt=dx^0$。現在定義 F 為

$$F\equiv dA \tag{95}$$

將上式 F 的定義展開可得

$$\begin{aligned}F&=\frac{1}{1!1!}\partial_{[\mu}A_{\nu]}dx^\mu\wedge dx^\nu\\&=\frac{1}{2!}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)dx^\mu\wedge dx^\nu\\&=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu\end{aligned} \tag{96}$$

所以得到

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{97}$$

又根據以下電位、磁位和電場、磁場的關係，其中 $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$

$$E=-\nabla V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{98}$$

$$B=\nabla\times\vec{A} \tag{99}$$

我們可以知道 F 可以寫成

$$\begin{aligned}F=&E_xdx\wedge dt+E_ydy\wedge dt+E_zdz\wedge dt\\&+B_xdy\wedge dz+B_ydz\wedge dx+B_zdx\wedge dy\end{aligned} \tag{100}$$

由於 $F=dA$，F 是 exact，而 exact 則一定 closed，所以

$$dF=0 \tag{101}$$

接著計算 $dF=0$ 所對應的馬克士威方程

$$\begin{aligned}dF=&\frac{\partial E_x}{\partial y}dy\wedge dx\wedge dt+\frac{\partial E_x}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dt\\&+\frac{\partial E_y}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dt+\frac{\partial E_y}{\partial z}dz\wedge dy\wedge dt\\&+\frac{\partial E_z}{\partial x}dx\wedge dz\wedge dt+\frac{\partial E_z}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dt\\&+\frac{\partial B_x}{\partial t}dt\wedge dy\wedge dz+\frac{\partial B_x}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz\\&+\frac{\partial B_y}{\partial t}dt\wedge dz\wedge dx+\frac{\partial B_y}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx\\&+\frac{\partial B_z}{\partial t}dt\wedge dx\wedge dy+\frac{\partial B_z}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy\\=&(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial t})dt\wedge dx\wedge dy\\&+(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial t})dt\wedge dz\wedge dx\\&+(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial t})dt\wedge dy\wedge dz\\&+(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z})dx\wedge dy\wedge dz=0\end{aligned} \tag{102}$$

很明顯 $dF=0$ 對應到了馬克士威方程中的式 (90) 和式 (91)，接下來計算 A 被拉普拉斯算符作用後的結果，用 F 寫就是 $\star d\star F$

$$
\begin{aligned}
\star d(\star F) &= \star d(E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy \\
&\quad + B_x dt \wedge dx + B_y dt \wedge dy + B_z dt \wedge dz) \\
&= \star\ (\frac{\partial E_x}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz \\
&\quad + \frac{\partial E_y}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx \\
&\quad + \frac{\partial E_z}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\
&\quad + \frac{\partial B_x}{\partial y} dy \wedge dt \wedge dx + \frac{\partial B_x}{\partial z} dz \wedge dt \wedge dx \\
&\quad + \frac{\partial B_y}{\partial x} dx \wedge dt \wedge dy + \frac{\partial B_y}{\partial z} dz \wedge dt \wedge dy \\
&\quad + \frac{\partial B_z}{\partial x} dx \wedge dt \wedge dz + \frac{\partial B_z}{\partial y} dy \wedge dt \wedge dz) \\
&= \star\ ((\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial t}) dt \wedge dy \wedge dx \\
&\quad + (\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial t}) dt \wedge dx \wedge dz \\
&\quad + (\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial t}) dt \wedge dz \wedge dy \\
&\quad + (\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}) dx \wedge dy \wedge dz) \\
&= \ (\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial t}) dz \\
&\quad + (\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial t}) dy \\
&\quad + (\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial t}) dx \\
&\quad + (\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}) dt
\end{aligned} \tag{103}
$$

現在重新定義的 J 為

$$J \equiv -\rho dt + J_x dx + J_y dy + J_z dz \tag{104}$$

所以當 $\star d \star F = J$ 對應到了馬克士威方程中的式 (92) 和式 (93)，所以現在馬克士威四大方程可以被簡化為兩條簡單的方程

$$dF = 0 \tag{105}$$

$$\star d \star F = J \tag{106}$$

若是用電磁勢 A 來表示的話可寫成

$$d^2 A = 0 \tag{107}$$

$$\star d \star dA = J \tag{108}$$

其餘在電磁學常用的公式也都可以用微分形式寫出，例如連續方程可寫成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \star d \star J = 0 \tag{109}$$

在微分形式的表達上許多原本複雜的向量關係式都能被簡潔且廣義的寫下，並能夠被更直觀的理解，又因為 $p - form$ 屬於一種特殊的張量，所以寫成微分形式的同時就具有適用於各種坐標系的優勢。總而言之微分形式是一種較為先進的代數系統，十分值得學習。

VI. 後記

其實微分形式的整套系統能夠被克里福代數 (Clifford algebra) 囊括，因此克里福代數其實是一套更加先進的系統。

[1] Wikipedia, Exterior algebra, Website, https://en.wikipedia.org/wiki/Exterior_algebra.

[2] 高涌泉, 台大相對論線上課程, Website (2011), http://ocw.aca.ntu.edu.tw/ntu-ocw/ocw/cou/099S134.