4 Ergänzungen

4.1 Die homotope Version des Cauchyschen Integralsatzes

Definition 4.1. Seien X ein normierter Vektorraum, $D \subseteq X$ offen und $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq D$ stetige geschlossene Wege mit Parametrisierungen $\gamma_0, \gamma_1 \in C([a,b], X)$. Die Wege Γ_0 und Γ_1 heißen homotop über D, wenn es eine Funktion $h \in C([0,1] \times [a,b], X)$ gibt, so dass

$$h(s,t) \in D, \quad h(0,t) = \gamma_0(t), \quad h(1,t) = \gamma_1(t)$$
$$\text{und } h(s,a) = h(s,b) \quad \forall (s,t) \in [0,1] \times [a,b].$$

Die Funktion h heißt dann Homotopie und man schreibt

$$\Gamma_0 \underset{D}{\sim} \Gamma_1 \text{ oder } \gamma_0 \underset{D}{\sim} \gamma_1.$$

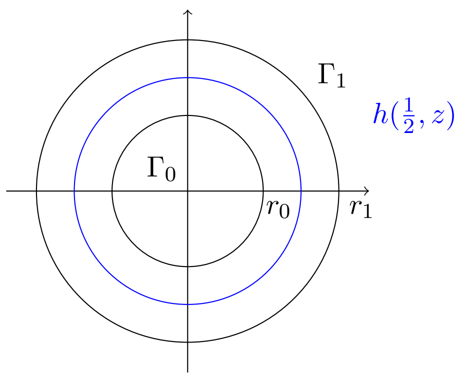
Falls dabei $\Gamma_1 = \{x_0\}$, also $\gamma_1(t) = x_0$ für alle $t \in [a,b]$ und ein $x_0 \in D$, so heißt Γ_0 nullhomotop, und man schreibt $\Gamma_0 \sim 0$. Wenn alle geschlossenen Wege nullhomotop sind, dann heißt D einfach zusammenhängend.

Beispiel 4.2. (a) Seien $\Gamma_j = \partial B(0, r_j)$ mit

$$\gamma_j(t) = r_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad j = 0, 1, \quad 0 < r_0 < r_1, \quad D = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dann sind die Kreislinien Γ_0 und Γ_1 über D homotop mit

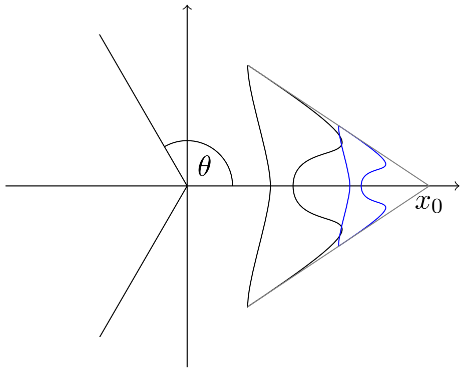
$$h(s,t) = \big(sr_1 + (1-s)r_0\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \text{ für } s \in [0,1], \quad t \in [0, 2\pi].$$



(b) Jedes sternförmige Gebiet D mit Zentrum x_0 ist einfach zusammenhängend. Eine geschlossene Kurve Γ kann dabei mittels der Homotopie

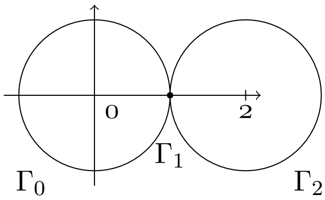
$$h(s,t) = (1-s)\gamma(t) + sx_0 \in \overrightarrow{\gamma(t)x_0} \subseteq D$$

auf dem konstanten Weg $\{x_0\}$ zusammengezogen werden.

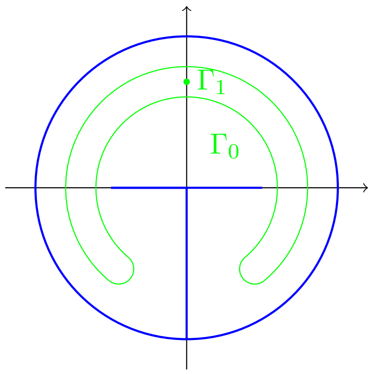


$D = \Sigma_\theta$,
$\Gamma \sim 0$

(c) Das Gebiet $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend. Dabei ist der Weg $\Gamma_0 = \partial\mathbb{D}$ über D weder zu $\Gamma_1 = \{1\}$ noch zu $\Gamma_2 = \partial B(2,1)$ homotop. Es gilt aber $\Gamma_1 \underset{D}{\sim} \Gamma_2$.



(d) Das Gebiet $D = \mathbb{D} \setminus (\mathrm{i}(-1,0) \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ ist einfach zusammenhängend, aber nicht sternförmig.



Theorem 4.3 (Homotope Version des Cauchyschen Integralsatzes)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(D)$ und $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq D$ geschlossene Kurven mit $\Gamma_0 \underset{D}{\sim} \Gamma_1$. Dann gilt:*

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Insbesondere gilt

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jede nullhomotope Kurve $\Gamma_0 \subseteq D$. Wenn D einfach zusammenhängend ist, folgt also

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jede geschlossene Kurve Γ.

Bemerkung 4.4. (a) Theorem 2.23, 3.10, 3.16 und Korollar 3.17 gelten für alle nullhomotopen Kurven Γ in beliebigen Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}$.

(b) Beispiel 4.2(c) folgt aus Theorem 4.3 für $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Denn

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = 2\pi \neq 0 = \int_{\{1\}} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = \int_{\partial B(2,1)} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z.$$

Beweis von 4.3. Seien $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to D$ Parametrisierungen von Γ_0 und Γ_1 (OBdA $a = 0$ und $b = 1$), $h \in C([0,1]^2, \mathbb{C})$ mit

$$h(s,t) \in D, \quad h(j,t) = \gamma_j(t), \quad h(s,0) = h(s,1) \quad \forall 0 \leq s,t \leq 1, \quad j = 0,1.$$

Da $[0,1]^2$ kompakt ist, ist $h([0,1]^2 \subset D$ kompakt und h gleichmäßig stetig. Somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(z,\varepsilon) \subseteq D$ für alle $z \in h([0,1]^2)$ und es exisitert $\delta > 0$ mit

$$\left| h(s,t) - h(s',t') \right| < \varepsilon,$$

falls (t,s), $(t',s') \in [0,1]^2$ mit

$$\left| t - t' \right|^2 + \left| s - s' \right|^2 < \delta^2. \tag{$*$}$$

Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$ und setze

$$z_{jk} = h\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right) \in D, \qquad j,k = 0,1,\ldots,n.$$

Beachte: $z_{jn} = h(\frac{j}{n},1) = h(\frac{j}{n},0) = z_{j0}$, $z_{0k} = h(0,\frac{k}{n}) = \gamma_0(\frac{k}{n})$ und $z_{nk} = h(1,\frac{k}{n}) = \gamma_1(\frac{k}{n})$. Weiter setzen wir

$$I_{jk} := \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \qquad j,k = 0,\ldots,n-1.$$

Mit $(*)$ folgt $h(I_{jk}) \subseteq B(z_{jk},\varepsilon) \subseteq D$, da der Durchmesser von I_{jk} $\frac{\sqrt{2}}{n}$ ist. Ferner, da jede Kugel konvex ist, liegt das Viereck V_{jk} mit den Ecken

$$z_{jk}, z_{jk+1}, z_{j+1k+1}, z_{j+1k} \in h(I_{jk})$$

in $B(z_{jk},\varepsilon)$. Der Integralsatz liefert für $D = B(z_{jk},\varepsilon)$

$$\int_{\partial V_{jk}} f(z) \,\mathrm{d}z. \tag{$**$}$$

Betrachte Polygonzüge P_j mit den Ecken

$$z_{j0} = z_{jn}, z_{j1}, z_{j2}, \ldots, z_{jn-1}, \quad j = 0,\ldots,n.$$

Behauptung 1: Für $j = 0,1,\ldots,n-1$ gilt $\displaystyle\int_{P_j} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{P_{j+1}} f(z) \,\mathrm{d}z.$

Behauptung 2: $\displaystyle\int_{\Gamma_0} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{P_0} f(z) \,\mathrm{d}z, \int_{\Gamma_1} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{P_n} f(z) \,\mathrm{d}z.$

Aus den Behauptungen 1 und 2 folgt das Theorem. □

4.2 Laplace Transformationen

Sei $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *lokal integrierbar*, das heißt f ist messbar und $|f|$ ist integrierbar auf allen Intervallen $[0,b]$, $b>0$. Weiter sei f auf einem Intervall $[t_0,\infty)$ *exponentiell beschränkt*, das heißt es gibt $M \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, $t_0 \geq 0$, so dass

$$|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\omega t} \qquad (\forall t \geq t_0).$$

Es sei $\omega(f)$ das Infimum der obigen ω; $\omega(f)$ heißt exponentielle Wachstumsschranke.

Bemerkung. Für $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ gilt $\omega(f) = -\infty$; für $g(t) = t$ ist $\omega(g) = 0$ und das Infimum wird nicht angenommen; für $h(t) = \mathrm{e}^{t^2}$ gilt $\omega(h) = \infty$ (stets $\forall t \geq 0$).

Beweis. Es gilt:

$$\mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{\frac{\omega^2}{4}}\mathrm{e}^{\omega t} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R},\ t \geq 0) \implies \omega(f) = -\infty.$$

Ferner:

$$t \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{\omega}} \quad (\forall \omega > 0,\ t \geq 0) \implies \omega(g) \leq 0.$$

Aber es gibt kein $M > 0$ mit $t \leq M$, für alle $t \geq 0$. Folglich ist $\omega(g) = 0$.

Die letzte Behauptung beweist man ähnlich. □

Nach Beispiel 2.28 existiert die *Laplacetransformation*

$$\big(\mathcal{L}f\big)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega(f)$ und $\hat{f}$ ist auf

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega(f)\}$$

holomorph. Weiter gilt:

$$\hat{f}^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \mathcal{L}\big(q_n f\big)(\lambda) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}), \tag{4.1}$$

wobei $q_n(t) = t^n$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega(f)$. Sei ferner $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ lokal integrierbar mit $\omega(g) < \infty$. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\omega(\alpha f + \beta g) \leq \max\{\omega(f), \omega(g)\} < \infty$$

und

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g) \tag{4.2}$$

auf $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \max\{\omega(f), \omega(g)\}\}$. Sei nun $f \in C^k(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ mit

$$w := \max_{0 \leq j \leq k} \omega\left(f^{(j)}\right) \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}\big(f^{(k)}\big)(\lambda) = \lambda^k \hat{f}(\lambda) - \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j f^{(k-j-1)}(0), \qquad \forall \operatorname{Re}\lambda > \omega. \tag{4.3}$$

Beweis. Für $k=1$: Sei $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Dann ist

$$\lambda\hat{f}(\lambda) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \underbrace{\lambda e^{-\lambda t}}_{=-\frac{d}{dt}e^{-\lambda t}} f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\left(+\int_0^b e^{-\lambda t}f'(t)\,dt + f(0) - e^{-\lambda b}f(b)\right) \overset{\operatorname{Re}\lambda>\omega}{=} \mathcal{L}\big(f'\big)(\lambda)+f(0),$$

wobei die partielle Integration mit (2.1) wie in Ana 1 gerechtfertigt werden kann. Der Rest der Behauptung folgt per Induktion. □

Betrachte nun das Polynom $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + 1_0$ mit $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ und die Differentialgleichung

$$\begin{cases} p\left(\frac{d}{dt}\right)(u) = a_n u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = f,\ t \geq 0, \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \ldots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Dabei sind $u_0,\ldots,u_{n-1} \in \mathbb{R}$ und ein stetiges $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $\omega(f) < \infty$ gegeben.

Aus Analysis II wissen wir es gibt eine Lösung $u \in C^n(\mathbb{R}_+)$. Setze weiterhin

$$v(t) = \big(u(t),\ldots,u^{(n-1)}(t)\big), \quad v_0 = \big(u_0,\ldots,u_{n-1}\big), \quad g = \big(0,\ldots,0,f\big).$$

Dann exisitert eine Hauptfundamentallösung e^{tA} mit

$$v(t) = e^{tA}v_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)\,ds, \qquad (t \geq 0).$$

Ferner existieren $M_1, M_2 \geq 0$ und $\omega_1,\omega_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\|e^{tA}\| \leq M_1 e^{\omega_1 t}, \quad |g(t)|_2 \leq M_2 e^{\omega_2 t}, \quad t \geq 0.$$

Sei $\omega = \max\{\omega_1,\omega_2\}$. Dann:

$$\begin{aligned} \left|u^{(k)}(t)\right| \leq |v(t)|_2 \leq M_1 e^{\omega_1 t}|v_0|_2 + \int_0^t M_2 e^{\omega_2(t-s)}M_1 e^{\omega_1 s}\,ds \\ \leq M_1|v_0|_2 e^{\omega t} + M_1 M_2 t e^{\omega t} \quad (k \in \{0,\ldots,n-1\},\ t \geq 0). \end{aligned}$$

Mit (4.4) folgt die entsprechende Abschätzung für $u^{(n)}$. Also ist $\omega(u^{(k)}) \leq \omega$ für alle $k = 0,\ldots,n$, also sind alle Ableitungen exponentiell beschränkt.

Wende nun $\mathcal{L}$ auf (4.4) für $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ an. Dann gilt:

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{L}\left(p\left(\frac{d}{dt}\right)(u)\right)(\lambda) \overset{(4.2)}{=} \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{L}\big(u^{(k)}\big)(\lambda) \overset{(4.3)}{=} \sum_{k=0}^n a_k\lambda^k\hat{u}(\lambda) - \underbrace{\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{k-1} a_k\lambda^j \underbrace{u^{(k-j-1)}(0)}_{\overset{(4.4)}{=} u_{k-j-1}}}_{=:q(\lambda)}$$

. Also gilt $\hat{f} = p\hat{u} - q$ und somit

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{p(\lambda)}\hat{f}(\lambda) + \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)} \tag{4.5}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, $p(\lambda) \neq 0$. Hierbei sind f, p und q gegeben! Es stellen sich noch folgende Fragen:

1) Wie kann man $\hat{f}$ berechnen?
2) Existiert $\mathcal{L}^{-1}$? Gibt es eine Formel?

Beispiel 4.5. (a) $f = \mathbb{1}_{[a,b)}$ wobei $0 \leq a < b \leq \infty$. Für $b = \infty$ gilt

$$|f(t)| \leq 1 \leq \mathrm{e}^{\omega t}, \quad \forall \omega > 0,\ t \geq 0$$

und

$$\nexists\, \omega \leq 0,\ M \geq 0 \text{ mit } |f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Folglich ist $\omega(f) = 0$. Für $b < \infty$ gilt

$$|f(t)| \leq \left\{\begin{matrix} 1,\ t < b \\ 0,\ t \leq b \end{matrix}\right\} \leq \mathrm{e}^{\omega b}\mathrm{e}^{-\omega t} \quad (\forall t \geq 0,\ \omega \in \mathbb{R}).$$

Folglich ist $\omega(f) = -\infty$. Sei $\operatorname{Re}\lambda > \omega(f)$. Dann:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t = \begin{cases} b - a, & \text{falls } b < \infty, \\ \frac{1}{\lambda}(\mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}), & b < \infty,\ \lambda \neq 0, \\ \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda a}, & b = \infty. \end{cases}$$

Für $b = \infty$ hat $\hat{f}$ also eine eindeutige holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) $f(t) = t^m$ für festes $n \in \mathbb{N}$. Wie oben gilt $\omega(f) = 0$. Sei $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dann:

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{L}(q_n \mathbb{1}) \overset{(4.1)}{=} (-1)^n \hat{\mathbb{1}}(\lambda)^{(n)} \overset{(a)}{=} (-1)^n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)^n \frac{1}{\lambda} = n!\ \lambda^{-(n+1)}$$

Folglich existiert keine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Pol $(n+1)$ter Ordnung in 0.

(c) $f(t) = \mathrm{e}^{at} =: \mathrm{e}_a(t)$ für festes $a \in \mathbb{C}$. Es gilt $\omega(f) = \operatorname{Re} a$. Für $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re} a$ gilt:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{at}\ \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{(a-\lambda)t}\ \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{\mathrm{e}^{(a-\lambda)t}}{a-\lambda}\right|_0^b = \frac{1}{\lambda - a}.$$

Also gibt es keine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Veralgemeinerung: Verschiebungsregel: Sei $a \in \mathbb{C}$, f mit $\omega(f) < \infty$, f lokal integrierbar. Sei $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re} a + \operatorname{Re}\omega(f)$. Dann gilt:

$$\mathcal{L}\big(e_a f\big)(\lambda) = \int_0^\infty \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{at}}_{\mathrm{e}^{-(\lambda-a)t}} f(t)\ \mathrm{d}t = \hat{f}(\lambda - a). \tag{4.6}$$

(d) $f(t) = \cos(\alpha t)$ für festes $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$f = \frac{1}{2}(\mathrm{e}_{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}_{-\mathrm{i}\alpha})$$

und damit

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2}(\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{i}\alpha} + \hat{\mathrm{e}}_{-\mathrm{i}\alpha}) \overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda - \mathrm{i}\alpha} + \frac{1}{\lambda + \mathrm{i}\alpha}\right) = \frac{1}{\lambda^2 + \alpha^2}.$$

Hierbei ist $\omega(f) = 0$ und $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Weiter hat $\hat{f}$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}\setminus\{\pm\mathrm{i}\alpha\}$.

(e) $f(t) = t^{\alpha-1}$, $t > 0$, $f(0) = 0$, wobei $\alpha > 0$ fest. Dann ist f integrierbar auf $[0, b]$ für alle $b > 0$ und

$$|f(t)| \leq 1, \quad \forall t \geq 1 \implies \omega(f) \leq 0.$$

Es gilt ferner: $\omega(f) = 0$. Sei $\lambda > 0$. Dann gilt:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} t^{\alpha-1} \,\mathrm{d}t \overset{s=\lambda t}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\lambda} \,\mathrm{d}s = \lambda^{-\alpha}\Gamma(\alpha)$$

nach Beispiel 2.39. Die Formel gilt auf $\mathbb{C}_+$ (mit $\lambda^{-\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha \log \lambda}$). Weiter hat $\hat{f}$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\Sigma_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(f) Sei $f(t) = n$ für $t \in [n^2, (n+1)^2)$. Dann ist $\omega(f) = 0$. Sei $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Dann:

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \int_{n^2}^{(n+1)^2} n\mathrm{e}^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{n=1}^\infty n\mathrm{e}^{-n^2\lambda} - \sum_{n=0}^\infty n\mathrm{e}^{-(n+1)^2\lambda} \right) \overset{j=n+1}{=} \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^\infty \mathrm{e}^{-j^2\lambda}.$$

Remmert II, §11.2.4 liefert: Es gibt kein $\mathrm{i}z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, so dass $\hat{f}$ eine holomorphe Fortsetzung auf eine Umgebung von $\mathrm{i}z$ hat (Kronecker).

Seien $f, g \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ messbar mit

$$|f(t)| \leq M_1 \mathrm{e}^{\omega_1 t}, \quad |g(t)| \leq M_2 \mathrm{e}^{\omega_2 t}$$

für alle $t \geq 0$ und Konstanten $M_1, M_2 \geq 0$ und $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir die Faltung $f * g$ durch:

$$\big(f * g\big)(t) = \int_0^t f(t-s) g(s) \,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0.$$

Diese ist integrierbar.

Beweis. Sei $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\}$, $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. Setze $D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t\}$. Dann:

$$\left| \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbb{1}_D(s,t) f(t-s) g(s) \right| \leq \mathrm{e}^{-\operatorname{Re} \lambda t} \mathbb{1}_D(s,t) M_1 \mathrm{e}^{\omega(t-s)} M_2 \mathrm{e}^{\omega s} = \mathrm{e}^{-t \operatorname{Re} \lambda} \mathbb{1}_D(s,t) M_1 M_2 \mathrm{e}^{\omega t} =: \varphi(s,t).$$

Damit:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(s,t) \mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t M_1 M_2 \mathrm{e}^{(\omega - \operatorname{Re} \lambda)t} \,\mathrm{d}t < \infty \qquad (\operatorname{Re} \lambda > \omega).$$

Also ist φ integrierbar auf $\mathbb{R}^2$ und somit auch die Faltung. □

Für die Laplacetransformation der Faltung gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(f * g\big)(t) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t f(t-s) g(s) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \\
&\overset{\substack{\text{Fubini} \\ 0 \leq s \leq t < \infty}}{=} \int_0^\infty \int_s^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} f(t-s) \mathrm{e}^{-\lambda s} g(s) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s \\
&\overset{\substack{t=r+s \\ r=t-s}}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda r} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda r} f(r) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s = \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

für alle λ mit $\operatorname{Re} \lambda > \max\{\omega_1, \omega_2\}$.

Erinnerung: Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *Nullmenge* $N \subseteq J$ ist eine Borelmenge mit

$$\int_N \mathrm{d}x = \int_J \mathbb{1}_N(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Man sagt, dass $f, g\colon J \to \mathbb{C}$ *fast überall* gleich sind, wenn es eine Nullmenge $N \subseteq J$ gibt mit $f(t) = g(t)$ für alle $t \in J \setminus N$. Eine Nullmenge kann kein Intervall mit Länge > 0 enthalten $(*)$. Wenn $\varphi \in C^1(J)$, dann ist auch $\varphi(N)$ eine Nullmenge (vgl. Analysis 3, Lem. 3.33 oder Übung 3.2).

Theorem 4.6 (Eindeutigkeitssatz für die Laplacetransformation)**.** *Seien $f, g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ messbar und es gebe Konstanten $M \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit $|f(t)|, |g(t)| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$. Weiter gebe es Zahlen $l > 0$ und $\lambda_0 \geq \omega + l$, sodass $\hat{f}(\lambda_n) = \hat{g}(\lambda_n)$ für alle $\lambda_n = \lambda_0 + nl$ gilt, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $f = g$ fast überall und $f(t) = g(t)$ für alle gemeinsamen Stetigkeitsstellen $t \geq 0$ von f und g.*

Beweis. Setze $h = f - g$ (das ist messbar). Es gilt $|h(t)| \leq 2M\mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$ und $\hat{h}(\lambda_n) = \hat{f}(\lambda_n) - \hat{g}(\lambda_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt

$$0 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nlt}\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nun machen wir eine Transformation $\tau = \mathrm{e}^{-lt} \iff t = -\frac{\ln\tau}{l}$, $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -l\mathrm{e}^{-lt} = -l\tau$:

$$0 = \int_0^1 \tau^n \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{\lambda_0}{l}\ln\tau}\, h\left(-\frac{\ln\tau}{l}\right)\frac{1}{l\tau}}_{=:\varphi(\tau),\ 0<\tau\leq 1}\,\mathrm{d}\tau.$$

Beachte: φ ist messbar, $\varphi \leq \frac{1}{l\tau}\mathrm{e}^{\frac{\lambda_0}{l}\ln\tau}2M\mathrm{e}^{-\omega\frac{\ln\tau}{l}} = \frac{M}{l}\tau^{\frac{\lambda_0}{l}-\frac{\omega}{l}-1} \leq \frac{M}{l}$, da $0 < \tau \leq 1$ und $\lambda_0 - \omega \geq l$. Lemma 4.7 zeigt dann, dass $\varphi = 0$ fast überall $\implies h = 0$ fast überall $\implies f = g$ fast überall.

Sei t eine gemeinsame Stetigkeitsstelle von f und g und $N \subseteq \mathbb{R}_+$ eine Nullmenge mit $f(s) = g(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}_+ \setminus N$. Nach $(*)$ existiert eine Folge $t_n \to t$ mit $t_n \in \mathbb{R}_+ \setminus N \implies f(t_n) = g(t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit $n \to \infty$folgt $f(t) = g(t)$. ☐

Lemma 4.7. *Sei $\varphi \in L^2\big((0,1)\big)$ mit $\int_0^1 t^n\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\varphi = 0$ fast überall.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Approximationssatz von Weierstrass (Analysis 3) existieren Polynome p_1, p_2 mit $\|\operatorname{Re}\varphi - p_1\|_\infty \leq \varepsilon \|\operatorname{Im}\varphi - p_2\|_\infty \leq \varepsilon$. Setze $p = p_1 + \mathrm{i}p_2$. Dann ist $\|\varphi - p\|_\infty = \|\operatorname{Re}\varphi - p_1 + \mathrm{i}(\operatorname{Im}\varphi - p_2)\|_\infty \leq 2\varepsilon$. Sei etwa $p(t) = \sum_{k=0}^m b_k t^k$. Dann: ☐