Kapitel 13

Grenzwertsätze

13.1 Schwache Gesetze der großen Zahlen

Satz 13.1 (Tschebyscheffs schwaches Gesetz der großen Zahlen)
Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $EX_i = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_i) < \infty$. Dann gilt:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

Beweis
Mit der Ungleichung von Tschebyscheff (Satz 7.4) folgt:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \overset{Satz 9.6}{=} \frac{\frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n)}{\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n \cdot \varepsilon^2} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Behauptung

Die Bedingung $\mathrm{Var}(X_i) < \infty$ soll weg. Zur Vorbereitung brauchen wir einige Ergebnisse aus der Analysis.

Lemma 13.2 *Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\left|e^{it} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(it)^k}{k!}\right| \leq \frac{|t|^m}{m!}$$

Beweis
Es genügt $t \geq 0$ zu betrachten, da $|z| = |\overline{z}|$
Für e^{it} gilt die folgende Taylorentwicklung mit Integraldarstellung des Restgliedes (Beweis durch Induktion nach m):

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(it)^k}{k!} + i^m \int_0^t \frac{(t-u)^{m-1}}{(m-1)!} e^{iu}\, du$$

$$\Rightarrow \left| e^{it} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(it)^k}{k!} \right| = \left| \underbrace{i^m}_{|\cdot|=1} \int_0^t \frac{(t-u)^{m-1}}{(m-1)!} \underbrace{e^{iu}}_{|\cdot|=1} du \right| \leq \int_0^t \frac{(t-u)^{m-1}}{(m-1)!} du =$$

$$= -\frac{(t-u)^m}{m!}\Big|_0^t = \frac{t^m}{m!}$$

Lemma 13.3
Sei X eine Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert $EX = \mu$ und $\varphi_X(t)$ die zugehörige charakteristische Funktion. Dann gilt $\forall\, t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_X\left(\frac{t}{n}\right) = 1 + i\mu\left(\frac{t}{n}\right) + o_t\left(\frac{1}{n}\right)$$

Beweis

$$\text{Zu zeigen:} \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \,\text{gilt:} \left[\varphi_X\left(\frac{t}{n}\right) - \left(1 + i\mu\frac{t}{n}\right)\right] \cdot n \to 0 \quad \text{für}\, n \to \infty$$

$$n \cdot \left[\varphi_X\left(\frac{t}{n}\right) - \left(1 + i\mu\frac{t}{n}\right)\right] = E\underbrace{\left[n \cdot \left(e^{i\frac{t}{n}X} - 1 - \frac{itX}{n}\right)\right]}_{=:Y_n}$$

Lemma 13.2 mit $m = 2$:

$$|Y_n| \leq n \cdot \frac{|\frac{t}{n}X|^2}{2!} = \frac{t^2X^2}{2!n} \overset{f.s.}{\to} 0 \quad \text{für}\, n \to \infty$$

Limes und E kann man hier vertauschen ($\to$ majorisierte Konvergenz)
$\Rightarrow$ Behauptung

Lemma 13.4
Sei $z \in \mathbb{C}$ fest $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad \eta_n \in \mathbb{C}$ und $\eta_n \to 0$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{\eta_n}{n}\right)^n = e^z$$

Beweis

1.Fall: $z = 0$

Zu zeigen: $(1 + \frac{\eta_n}{n})^n \to 1 \quad$ für $n \to \infty$

$$\left|(1 + \frac{\eta_n}{n})^n - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(\frac{\eta_n}{n})^k\right| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}\left(\frac{|\eta_n|}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{|\eta_n|}{n}\right)^n - 1$$

$$\underset{f(x)=(1+x)^n}{\overset{\text{MWS}}{\leq}} \frac{|\eta_n|}{n} n(1+\vartheta)^{n-1} \leq |\eta_n|\left(1 + \frac{|\eta_n|}{n}\right)^n \leq |\eta_n|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \underbrace{|\eta_n| \cdot e}_{\to 0 \text{für}\, n\to\infty}$$

2.Fall: $z \neq 0$

$$\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{\eta_n}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\left(\frac{1 + \frac{z}{n} + \frac{\eta_n}{n}}{1 + \frac{z}{n}}\right)^n = \underbrace{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n}_{\to e^z \text{ für } n\to\infty} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n}_{\substack{\to 1 \text{ für } n\to\infty \\ \text{(Fall 1)}}}$$

mit $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$

Satz 13.5 (Khinchins schwaches Gesetz der großen Zahlen, 1929)
Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E|X_i| < \infty$, $EX_i = \mu$. Dann gilt:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

Beweis
Da $\mu \in \mathbb{R}$ konstant, genügt wegen Lemma 11.3 zu zeigen $\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow{d} \mu$

$$\text{Satz 12.5} \Rightarrow \text{zu zeigen ist:} \quad \varphi_{\frac{X_1+\dots+X_n}{n}}(t) \to \varphi_\mu(t) \overset{\text{Bsp. 12.1}}{=} e^{it\mu}$$

Also:

$$\varphi_{\frac{X_1+\dots+X_n}{n}}(t) \overset{\text{Satz 12.1c)}}{=} \varphi_{X_1+\dots+X_n}\left(\frac{t}{n}\right) \overset{\text{Satz 12.2}}{=} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(\frac{t}{n}) = \left(\varphi_{X_1}(\frac{t}{n})\right)^n$$

$$\overset{\text{Lem. 13.3}}{=} \left(1 + \frac{i\mu t}{n} + o_t(\frac{1}{n})\right)^n \overset{\text{Lem. 13.4}}{\longrightarrow} e^{it\mu}$$

13.2 Das starke Gesetz der großen Zahlen

Satz 13.6 (Kolmogorovs starkes Gesetz der großen Zahlen)
Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E|X_i| < \infty$, $EX_i = \mu$. Dann gilt:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{f.s.} \mu$$

ohne Beweis

Beispiel 13.1 (Monte-Carlo-Simulation)
Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion. $M := \max_{x\in[0,1]} f(x)$. Wir wollen $\int_0^1 f(x)\,dx$ numerisch (näherungsweise) berechnen.
Dazu $U_1, V_1, U_2, V_2 \dots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, wobei
die (U_i) identisch verteilt sind mit $U_i \sim U(0,1)$ und
die (V_i) identisch verteilt sind mit $V_i \sim U(0,M)$. Wir setzen

$$I_k = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } f(U_k) > V_k \\ 0 & , \text{ falls } f(U_k) \le V_k \end{cases}$$

Dann gilt: $I_1, I_2, \dots$ sind unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$EI_k = P(f(U_k) > V_k) = P\left((U_k, V_k) \in G\right) = \int_0^1 \int_0^{f(x)} \frac{1}{M} \cdot 1\, dy dx = \frac{1}{M} \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\text{Satz 13.6:} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_k \xrightarrow{f.s.} \frac{1}{M}\int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{für } n \to \infty$$

Beispiel 13.2 (Normale Zahlen)
Es sei $\Omega = [0,1)$ und $\omega \in \Omega$. Wir betrachten die Dualbruchzerlegung von ω: das heißt

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{2^k} \qquad a_k \in \{0,1\}$$

ω heißt normal, falls die Werte 0 und 1 asymptotisch gleich häufig auftreten.
Wie viele $\omega \in \Omega$ sind normal?

Sei $\mathcal{A} = \mathfrak{B}_{[0,1)}$ und definiere die Zufallsvariablen $X_1, X_2. \ \Omega \to \{0,1\}$ durch
$X_n(\omega) = a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ (Beachte X_n ist Zufallsvariable)
Weiter sei:
$A_n(x_1, \ldots, x_n) := \{\omega \in \Omega | X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_n(\omega) = x_n\}$
$= \{\omega \in \Omega | \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{2^n} \leq \omega < \frac{x_1}{2} + \cdots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\}$ für $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ fest.
Wir nehmen an, dass P=unif(0,1), das heißt $P([a,b)) = b - a$ für $0 \leq a < b < 1$.
Also $P(A_n(x_1, \ldots, x_n)) = \frac{1}{2^n}$
$\Rightarrow P(X_1 = 0) = P(A_1(0)) = \frac{1}{2} = P(X_1 = 1)$
$P(X_2 = 0) = P(X_2 = 0, X_1 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 1) =$
$= P(A_2(0,0)) + P(A_2(1,0)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
und $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$
$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{1}{4} = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)$ für $x_1, x_2 \in \{0,1\}$

Also sind die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit $P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$ und $EX_k = \frac{1}{2}$

Nach Satz 13.6 gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \stackrel{f.s.}{\to} \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

das heißt fast alle Zahlen des Intervalls $[0,1)$ bis auf eine Menge $A \subset [0,1)$ mit $P(A) = 0$ sind "normal"

13.3 Der zentrale Grenzwertsatz

Betrachte die Situation aus Satz 13.1:
Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen,
$EX_i = \mu, \mathrm{Var}(X_i) < \infty$
Dann gilt:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Setze $\varepsilon = \hat{\varepsilon} \cdot n^{-\frac{1}{2}+\delta}$ mit $\delta > 0$

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \frac{\hat{\varepsilon}}{n^{\frac{1}{2}-\delta}}\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n \cdot \hat{\varepsilon}^2 n^{-1+2\delta}} = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{\hat{\varepsilon}^2 n^{2\delta}}$$

$$\text{Also für} \quad \delta > 0 : n^{\frac{1}{2}-\delta}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right) \stackrel{P}{\to} 0$$

Was ist mit $\delta = 0$?

Satz 13.7 (Zentraler Grenzwertsatz)
Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $EX_i = \mu$ und $0 < \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Dann gilt:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} X \sim N(0,1)\,, \text{also}$$

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right) \to \Phi(x) \quad \text{für}\, n \to \infty \quad , \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Beweis
Betrachte zunächst den Fall $\mu = 0, \sigma = 1$

$$\text{zu zeigen:} \quad \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X \sim N(0,1)$$

$$\varphi_{\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}}(t) \overset{\text{Satz 12.1c)}}{=} \varphi_{X_1+\cdots+X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \overset{\text{Satz 12.2}}{=} \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n =$$

$$\overset{\text{vgl.L.13.3}}{=} \left(1 + \underbrace{\frac{it\mu}{\sqrt{n}}}_{=0} + \frac{(it)^2}{2n}\underbrace{EX^2}_{=1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{\text{nach Lem. 13.4}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Allgemeiner Fall:
Setze $Y_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$
Also $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängig und identisch verteilt mit $EY_1 = 0, \mathrm{Var}(Y_n) = 1$
Wende jetzt Spezialfall an:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X \sim N(0,1)$$

Korollar 13.8
Unter den Voraussetzungen des ZGWS gilt für feste $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$:

$$P\left(\alpha \leq \underbrace{\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}}_{=:T_n} \leq \beta\right) \to \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$.

$$\underbrace{F_{T_n}(\beta) - F_{T_n}(\alpha)}_{\overset{n\to\infty}{\to} \Phi(\beta)-\Phi(\alpha)} \leq P(\alpha \leq T_n \leq \beta) \leq \underbrace{F_{T_n}(\beta) - F_{T_n}(\alpha - \varepsilon)}_{\overset{n\to\infty}{\to} \Phi(\beta)-\Phi(\alpha-\varepsilon)}$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt daraus die Behauptung. ∎

Satz 13.9 *Sind die Zufallsvariablen X_1, X_2 unabhängig und identisch verteilt mit $EX_1 = \mu$ sowie $|\mu|_3 = E|X_1 - \mu|^3$, so gilt:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{|\mu|_3}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

Beispiel 13.3
Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_n \sim B(1,p)$. Also $EX_n = p, \mathrm{Var}(X_n) = p(1-p)$, $0 < p < 1$
Sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, dann gilt nach dem ZGWS:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

Umgeformt ergibt das:

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \leq np + x\sqrt{np(1-p)}) = \Phi(x)$$

Da $S_n \sim B(n,p)$ heißt das:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\leq np+x\sqrt{np(1-p)}} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \Phi(x)$$

Diese Version nennt man auch **Grenzwertsatz von DeMoivre Laplace**.

Beispiel 13.4 (Wahlumfrage)
Wir wollen den Anteil p der Anhänger der Partei A unter den Wahlberechtigten ermitteln. Dazu nehmen wir eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$, wobei:

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ falls Person } i \text{ Partei A wählt} \\ 0 & , \text{ falls Person } i \text{ Partei A nicht wählt} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Sei $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Wir schätzen $\hat{p} = \frac{S_n}{n}$
Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens gewählt werden, damit der Schätzfehler $|\hat{p} - p|$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 nicht größer als 0.02 ist?
Also gesucht ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$P(|\frac{S_n}{n} - p| \leq 0.02) \geq 0.95 \Leftrightarrow P\left(|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}| \leq \frac{0.02\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geq 0.95$$

Wegen $p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} \quad \forall\, p \in [0,1]$ folgt:

$$P\left(|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}| \leq \frac{0.02\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geq P\left(|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}| \leq 0.04\sqrt{n}\right)$$

Für n groß ist etwa $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow P\left(|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}| \leq 0.04\sqrt{n}\right) \approx \Phi(0.04\sqrt{n}) - \Phi(-0.04\sqrt{n}) = 2\Phi(0.04\sqrt{n}) - 1 = 0.95$$

$$\Rightarrow n = (25\Phi^{-1}(0.975))^2 = 2401$$