

## § 3.

# Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit

**Vereinbarung:** Stets in dem Paragraphen: Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine (**vektorwertige**) Funktion. Für Punkte  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  schreiben wir auch  $(x, y)$ . Für Punkte  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  schreiben wir auch  $(x, y, z)$ . Mit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$  hat  $f$  die Form  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ , wobei  $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Kurz:  $f = (f_1, \dots, f_m)$ .

### Beispiele:

(1)  $n = 2, m = 3$ .  $f(x, y) = (x + y, xy, xe^y)$ ;  $f_1(x, y) = x + y$ ,  $f_2(x, y) = xy$ ,  $f_3(x, y) = xe^y$ .

(2)  $n = 3, m = 1$ .  $f(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$

### Definition

Sei  $x_0 \in \mathcal{H}(D)$ .

(1) Sei  $y_0 \in \mathbb{R}^m$ .  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 : \iff$  für **jede** Folge  $(x^{(k)})$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x^{(k)} \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x^{(k)}) \rightarrow y_0$ . In diesem Fall schreibt man:  $f(x) \rightarrow y_0 (x \rightarrow x_0)$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert :  $\iff \exists y_0 \in \mathbb{R}^m : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ .

### Beispiele:

(1)  $f(x, y) = (x + y, xy, xe^y)$ ;  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = (2, 1, e)$ , denn: ist  $((x_k, y_k))$  eine Folge mit

$$(x_k, y_k) \rightarrow (1, 1) \xrightarrow{2.1} x_k \rightarrow 1, y_k \rightarrow 1 \implies x_k + y_k \rightarrow 2, x_k y_k \rightarrow 1, x_k e^{y_k} \rightarrow e \xrightarrow{2.1} (x_k, y_k) \rightarrow (2, 1, e).$$

(2)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$f(\frac{1}{k}, 0) = 0 \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ),  $(\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0)$ ,  $f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$  ( $k \rightarrow \infty$ ),  $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$ , d.h.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existiert nicht! **Aber:**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 0 = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ .

### Satz 3.1 (Grenzwerte vektorwertiger Funktionen)

(1) Ist  $f = (f_1, \dots, f_m)$  und  $y_0 = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ , so gilt:  $f(x) \rightarrow y_0 (x \rightarrow x_0) \iff f_j(x) \rightarrow y_j (x \rightarrow x_0) (j = 1, \dots, m)$

(2) Die Aussagen des Satzes Ana I, 16.1 und die Aussagen (1) und (2) des Satzes Ana I, 16.2 gelten sinngemäß für Funktionen von mehreren Variablen.

**Beweis**

(1) folgt aus 2.1

(2) wie in Ana I ■

**Definition (Stetigkeit vektorwertiger Funktionen)**

(1) Sei  $x_0 \in D$ .  $f$  heißt **stetig** in  $x_0$  gdw. für jede Folge  $(x^{(k)})$  in  $D$  mit  $(x^{(k)}) \rightarrow x_0$  gilt:  
 $f(x^{(k)}) \rightarrow f(x_0)$ . Wie in Ana I: Ist  $x_0 \in D \cap \mathcal{H}(D)$ , so gilt:  $f$  ist stetig in  $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

(2)  $f$  heißt auf  $D$  stetig gdw.  $f$  in jedem  $x \in D$  stetig ist. In diesem Fall schreibt man:  
 $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$  ( $C(D) = C(D, \mathbb{R})$ ).

(3)  $f$  heißt auf  $D$  **gleichmäßig** (glm) stetig gdw. gilt:  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \forall x, y \in D : \|x - y\| < \delta$

(4)  $f$  heißt auf  $D$  **Lipschitzstetig** gdw. gilt:  
 $\exists L \geq 0 : \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \forall x, y \in D$ .

**Satz 3.2 (Stetigkeit vektorwertiger Funktionen)**

- (1) Sei  $x_0 \in D$  und  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Dann ist  $f$  stetig in  $x_0$  gdw. alle  $f_j$  stetig in  $x_0$  sind. Entsprechendes gilt für „stetig auf  $D$ “, „glm stetig auf  $D$ “, „Lipschitzstetig auf  $D$ “.
- (2) Die Aussagen des Satzes Ana I, 17.1 gelten sinngemäß für Funktionen von mehreren Variablen.
- (3) Sei  $x_0 \in D$ .  $f$  ist stetig in  $x_0$  gdw. zu jeder Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$  eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  existiert mit  $f(U \cap D) \subseteq V$ .
- (4) Sei  $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $f(D) \subseteq E$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine Funktion,  $f$  stetig in  $x_0 \in D$  und  $g$  stetig in  $f(x_0)$ . Dann ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig in  $x_0$ .

**Beweis**

(1) folgt aus 2.1

(2) wie in Ana 1

(3) Übung

(4) wie in Ana 1 ■

**Beispiele:**

$$(1) f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (D = \mathbb{R}^2)$$

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0) \implies f \text{ ist in } (0, 0) \text{ nicht stetig.}$$

$$(2) f(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{y} \sin(xy), & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases}$$

Für  $y \neq 0$ :  $|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{1}{|y|} |\sin(xy)| \leq \frac{1}{|y|} |xy| = |x|$ .

Also gilt:  $|f(x, y) - f(0, 0)| \leq |x| \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \implies f(x, y) \rightarrow f(0, 0) ((x, y) \rightarrow (0, 0)) \implies f$  ist stetig in  $(0, 0)$ .

(3) Sei  $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi'(0) = 2$  und  $a \in \mathbb{R}$ .

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\Phi(a(x^2+y^2))}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2}, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist  $f$  stetig in  $(0, 0)$ ?

Fall 1:  $a = 0$

$f(x, y) = 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \implies f$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig.

Fall 2:  $a \neq 0$

$r := x^2 + y^2$ .  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff \|(x, y)\| \rightarrow 0 \iff r \rightarrow 0$ , Sei  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Dann gilt:

$$f(x, y) = \frac{\Phi(ar)}{r} = \frac{\Phi(ar) - \Phi(0)}{r - 0} = a \frac{\Phi(ar) - \Phi(0)}{ar - 0} \xrightarrow{r \rightarrow 0} a\Phi'(0) = 2a. \text{ Das heißt: } f(x, y) \rightarrow 2a ((x, y) \rightarrow (0, 0)).$$

Daher gilt:  $f$  ist stetig in  $(0, 0) \iff 2a = \frac{1}{2} \iff a = \frac{1}{4}$ .

### Definition (Beschränktheit einer Funktion)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **beschränkt** (auf  $D$ ) gdw.  $f(D)$  beschränkt ist ( $\iff \exists c \geq 0 : \|f(x)\| \leq c \forall x \in D$ ).

### Satz 3.3 (Funktionen auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen)

$D$  sei beschränkt und abgeschlossen und es sei  $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$ .

- (1)  $f(D)$  ist beschränkt und abgeschlossen.
- (2)  $f$  ist auf  $D$  gleichmäßig stetig.
- (3) Ist  $f$  injektiv auf  $D$ , so gilt:  $f^{-1} \in C(f(D), \mathbb{R}^n)$ .
- (4) Ist  $m = 1$ , so gilt:  $\exists a, b \in D : f(a) \leq f(x) \leq f(b) \forall x \in D$ .

### Beweis

wie in Ana I. ■

### Satz 3.4 (Fortsetzungssatz von Tietze)

Sei  $D$  abgeschlossen und  $f \in C(D, \mathbb{R}^m) \implies \exists F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : F = f$  auf  $D$ .

**Satz 3.5 (Lineare Funktionen und Untervektorräume von  $\mathbb{R}^n$ )**

- (1) Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und *linear*, so gilt:  $f$  ist Lipschitzstetig auf  $\mathbb{R}^n$ , insbesondere gilt:  $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .
- (2) Ist  $U$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$ , so ist  $U$  abgeschlossen.

**Beweis**

- (1) Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Es gibt eine  $(m \times n)$ -Matrix  $A$  mit  $f(x) = Ax$ . Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt:  $\|f(x) - f(y)\| = \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\|$
- (2) Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Es gibt einen UVR  $V$  von  $\mathbb{R}^n$  mit:  $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ . Definiere  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie folgt: zu  $x \in \mathbb{R}^n$  existieren eindeutig bestimmte  $u \in U$ ,  $v \in V$  mit:  $x = u + v$ ;  $P(x) := u$ .

Nachrechnen:  $P$  ist linear.

$P(\mathbb{R}^n) = U$  (Kern  $P = V$ ,  $P^2 = P$ ). Sei  $(u^{(k)})$  eine konvergente Folge in  $U$  und  $x_0 := \lim u^{(k)}$ , z.z.:  $x_0 \in U$ .

Aus (1) folgt:  $P$  ist stetig  $\implies P(u^{(k)}) \rightarrow P(x_0) \implies x_0 = \lim u^{(k)} = \lim P(u^{(k)}) = P(x_0) \in P(\mathbb{R}^n) = U$ . ■

**Definition (Abstand eines Vektor zu einer Menge)**

Sei  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $d(x, A) := \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$  heißt der **Abstand** von  $x$  und  $A$ .

Klar:  $d(a, A) = 0 \forall a \in A$ .

**Satz 3.6 (Eigenschaften des Abstands zwischen Vektor und Menge)**

- (1)  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ .
- (2)  $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$ .

**Beweis**

- (1) Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Sei  $a \in A$ .  $d(x, A) \leq \|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$   
 $\implies d(x, A) - \|x - y\| \leq \|y - a\| \forall a \in A$   
 $\implies d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A)$   
 $\implies d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$

Genauso:  $d(y, A) - d(x, A) \leq \|y - x\| = \|x - y\| \implies$  Beh.

- (2) Der Beweis erfolgt durch Implikation in beiden Richtungen:

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $x \in \overline{A} \xrightarrow{2.2} \exists$  Folge  $(a^{(k)})$  in  $A : a^{(k)} \rightarrow x \xrightarrow{(1)} d(a^{(k)}, A) \rightarrow d(x, A) \implies d(x, A) = 0$ .

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $d(x, A) = 0$ .  $\forall k \in \mathbb{N} \exists a^{(k)} \in A : \|a^{(k)} - x\| < \frac{1}{k} \implies a^{(k)} \rightarrow x \xrightarrow{2.2} x \in \overline{A}$ . ■