

## § 20.

# Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

In diesem §en seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle,  $f \in C(I)$ ,  $g \in C(J)$ ,  $x_0 \in I$  und  $y_0 \in J$ .

### Definition

Die Differentialgleichung:

$$y' = f(x)g(y) \quad (\text{i})$$

heißt **Dgl. mit getrennten Veränderlichen**.

Wir betrachten auch noch das AwP:

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{ii})$$

### Satz 20.1 (Lösungen)

Sei  $y_0 \in J^0$  (also ein innerer Punkt von  $J$ ) **und**  $g(y) \neq 0 \forall y \in J$ . Dann existiert ein Intervall  $I_{x_0}$  mit  $x_0 \in I_{x_0} \subseteq I$  und:

- (1) Das AwP (ii) hat eine Lösung  $y : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (2) Die Lösung aus (1) erhält man durch Auflösen der folgenden Gleichung nach  $y(x)$ .

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(t)} dt = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (*)$$

- (3) Sei  $U \subseteq I$  ein Intervall und  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des AwPs (ii), so ist  $U \subseteq I_{x_0}$  und  $u = y$  auf  $U$  (wobei  $y$  die Lösung aus (1) ist).  
Insbesondere ist das AwP (ii) eindeutig lösbar.

### Beweis

Definiere  $G \in C^1(J)$  und  $F \in C^1(I)$  durch:

$$G(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt \qquad F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Dann ist  $G' = \frac{1}{g}$ ,  $F' = f$  und  $F(x_0) = 0 = G(y_0)$ .

Da für alle  $y \in J$  gilt:

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$$

ist entweder  $G' > 0$  auf  $J$  oder  $G' < 0$  auf  $J$ .

Also existiert die Umkehrabbildung  $G^{-1} : G(J) \rightarrow J$ ,  $K := G(J)$  ist ein Intervall und es gilt:

$$\begin{aligned} y_0 \in J^0 &\implies 0 = G(y_0) \in K^0 \\ &\implies \exists \varepsilon > 0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq K \end{aligned}$$

Da  $F$  stetig in  $x_0$  ist, existiert ein  $\delta > 0$  mit:

$$|F(x)| = |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap I =: M_0$$

$M_0$  ist ein Intervall,  $x_0 \in M_0 \subseteq I$  und  $F(M_0) \subseteq K$ . Sei

$$\mathfrak{M} := \{M \subseteq I \mid M \text{ ist Intervall, } x_0 \in M, F(M) \subseteq K\}$$

Da  $M_0 \in \mathfrak{M}$  ist, ist  $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ . Sei

$$I_{x_0} := \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$$

dann ist  $I_{x_0} \in \mathfrak{M}$ . Definiere nun  $y : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  durch:

$$y(x) := G^{-1}(F(x))$$

so ist  $y$  auf  $I_{x_0}$  differenzierbar und es gilt:

$$y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0$$

Weiter gilt:

$$\forall x \in I : G(y(x)) = F(x) \tag{+}$$

also gilt (\*). Differenzierung von (+) liefert:

$$\begin{aligned} \forall x \in I_{x_0} : G'(y(x))y'(x) &= F'(x) \\ \implies \forall x \in I_{x_0} : \frac{1}{g(y(x))}y'(x) &= f(x) \\ \implies \forall x \in I_{x_0} : y'(x) &= f(x)g(y(x)) \end{aligned}$$

(3) Es ist  $u'(t) = f(t)g(u(t))$  für alle  $t \in U$  **und**  $u(U) \subseteq J$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{u'(t)}{g(u(t))} \\ \implies F(x) &= \int_{x_0}^x f(t) \, dt = \int_{x_0}^x \frac{u'(t)}{g(u(t))} \, dt \\ &\stackrel{\text{Subst.}}{=} \begin{cases} s = u(t) \\ ds = u'(t) \, dt \\ t = x_0 \implies s = u(x_0) = y_0 \end{cases} = \int_{y_0}^{u(x)} \frac{1}{g(s)} \, ds = G(u(x)) \end{aligned}$$

Also:  $\forall x \in U : F(x) = G(u(x))$ . Somit gilt:

$$F(U) = G(u(U)) \subseteq G(J) = K$$

D.h.  $U \in \mathfrak{M}$  und daher ist:  $U \subseteq I_{x_0}$ .

Weiter gilt:

$$\forall x \in U : u(x) = G^{-1}(F(x)) = y(x) \quad \blacksquare$$

### Für die Praxis: Trennung der Veränderlichen (TDV):

$$\begin{aligned}y' &= f(x)g(y) \\ \rightarrow \frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \\ \rightarrow \frac{dy}{g(y)} &= f(x) dx \\ \rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x) dx + c\end{aligned}\tag{iii}$$

Die allgemeine Lösung von (i) erhält man durch Auflösen der Gleichung (iii) nach  $y$ .  
Zur Lösung von (ii) passt man die Konstante  $c$  der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  an.

#### Beispiele:

(1) Sei  $y' = 2xe^{-y}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2xe^{-y} \\ \rightarrow e^y dy &= 2x dx \\ \rightarrow \int e^y dy &= \int 2x dx + c \\ \rightarrow e^y &= x^2 + c \\ \rightarrow y &= \log(x^2 + c)\end{aligned}$$

Ist z.B.  $c = 0$ , so ist  $y(x) := \log(x^2)$  eine Lösung auf  $(0, \infty)$ , oder  $y(x) = \log(x^2)$  ist eine auf  $(-\infty, 0)$ .

$c = 2$  :  $y(x) = \log(x^2 + 2)$  ist eine Lösung auf  $\mathbb{R}$ .

$c = -1$  :  $y(x) = \log(x^2 - 1)$  ist eine Lösung auf  $(1, \infty)$ .

Löse das AwP:

$$\begin{cases} y' = 2xe^{-y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Allg. Lösung der Dgl:

$$\begin{aligned}y(x) &= \log(x^2 + c) \\ \Rightarrow 1 &= y(1) = \log(1 + c) \\ \Rightarrow e &= 1 + c \iff c = e - 1\end{aligned}$$

$y(x) = \log(x^2 + e - 1)$  ist Lösung des AwPs auf  $\mathbb{R}$ .

(2)  $y' = \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1+y}{y^2}$ . Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1+y}{y^2} \\ \rightarrow \frac{y^2}{y+1} dy &= \frac{x^2}{x-1} dx \\ \rightarrow \frac{y^2}{2} - y + \log(1+y) &= \frac{x^2}{2} + x + \log(x-1) + c\end{aligned}$$

(Lösungen in impliziter Form)

