

4. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

11. März 2017

Aufgabe 1

(X, \leq) , X Menge, \leq Ordnungsrelation auf X .

Beh.: $O := \{U \subseteq X \mid \forall u \in U, x \in X : u \leq x \Rightarrow x \in U\}$ ist Topologie auf X .

Bew.:

- \emptyset, X klar.

- Seien U_i Mengen aus O , $i \in I$ bel. Indexmenge. Dann gilt:

Sei $u \in \bigcup_{i \in I} U_i, x \in X$ mit $u \leq x \Rightarrow \exists i \in I : u \in U_i$

$\stackrel{U_i \in O}{\Rightarrow} x \in U_i \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} U_i$

$u \in \bigcap_{i \in I} U_i, x \in X$ mit $u \leq x \Rightarrow \forall i \in I : x \in U_i \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ Beh.:

Die Ordnungserhaltenden und die stetigen Abbildungen von X nach Y stimmen überein.

Bew.:

„ \supseteq “: Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \leq x_2$. Zu zeigen: $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Betrachte folgende offene Menge in Y :

$$V := \{u \in Y \mid f(x) \leq u\}$$

Das Urbild $f^{-1}(V) =: U$ ist eine offene Menge in X , da f stetig ist.

$\Rightarrow \forall u \in U \forall x \in X : u \leq x \stackrel{x_1 \in U}{\Rightarrow} x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_2) \in V$

$\Rightarrow \stackrel{\text{Def. } V}{\Rightarrow} f(x_1) \leq f(x_2)$. Also: f ist abstandserhaltend.

„ \subseteq “: Sei f ordnungserhaltend. Sei V eine offene Menge in Y . Zu zeigen: $U := f^{-1}(V)$ ist offen in X .

Seien also $u \in U, x \in X$ mit $u \leq x \stackrel{f \text{ ordnungserh.}}{\Rightarrow} f(u) \leq f(x)$

Da V offen in Y ist und $f(u) \in V$ ist, nach Definition von „offen“ ist auch $f(x) \in V \Rightarrow x \in U$.

Also: U ist offen in X .

■

Aufgabe 2

Beh.: $\text{SO}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) = 1 \text{ und } A^T A = E\}$ ist zusammenhängend.

Bew.: $\text{SO}(n)$ ist wegzusammenhängend, denn:

Lineare Algebra: Zu jedem $A \in \text{SO}(n)$ existiert $U \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ mit:

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & D_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_{\theta_m} \end{pmatrix} \cdot U^{-1}$$

und $D_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ Somit: Definiere Weg von E nach A durch $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{SO}(n)$

$$t \mapsto U \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & D_{\theta_1(t)} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_{\theta_m(t)} \end{pmatrix} \cdot U^{-1}$$

mit $\theta_i(t) := t \cdot \theta_i$

Das ist ein Weg von E nach A ! Also: $\text{SO}(n)$ ist zusammenhängend (da wegzusammenhängend).

Beh.: $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = E\}$ ist nicht zusammenhängend.

Bew.: es gilt: $\det : O(n) \rightarrow \{-1, 1\}$ ist stetig (Leibniz-Formel) und surjektiv.

$\Rightarrow O(n) = f^{-1}(-1) \cup f^{-1}(1) \Rightarrow O(n)$ ist nicht zusammenhängend

■

Aufgabe 3

(a) Beh.: Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen gilt: U zusammenhängend $\Leftrightarrow U$ wegzusammenhängend.

Bew.: „ \Leftarrow “ klar.

„ \Rightarrow “: Definiere Äquivalenzrelation \sim auf \mathbb{R}^n durch $x \sim y :\Leftrightarrow x$ kann mit y durch Weg verbunden werden.

Sei $U \neq \emptyset$ zusammenhängende offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Zu zeigen: U ist wegzusammenhängend.

Wähle $a \in U$ beliebig und setze $A := \{x \in U \mid x \sim a\}$. Zu zeigen: $A = U$.

Dazu zeige: A ist offen und abgeschlossen in U bzgl. der Teilraumtopologie. (Dann folgt $A = U$ oder $A = \emptyset$, weil U zsh. $\Rightarrow A = U$, da $a \in A$ ist.)

Beh.: A ist offen in U .

Bew.: U offen in \mathbb{R}^n , $A \subseteq U \Rightarrow \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \subseteq U$

$B_\varepsilon(x)$ ist konvex \Rightarrow jedes $y \in B_\varepsilon(x)$ ist durch einen Weg mit x verbindbar.

$\forall y \in B_\varepsilon(x) : x \sim y$.

$x \in A \Rightarrow x \sim a \stackrel{\text{transitiv}}{\Rightarrow} y \sim a \Rightarrow y \in A$. Also: $B_\varepsilon(x) \subseteq A \Rightarrow A$ ist offen.

Beh.: A ist abgeschlossen un U .

bew.: Sei $x \in \bar{A}$, dem Abschluss von A bzgl. der Teilraumtopologie.

$x \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U \Rightarrow x \in \bar{A} \stackrel{\text{Blatt 3}}{\Rightarrow} \emptyset \neq (B_\varepsilon(x) \cap U) \cap A = B_\varepsilon(x) \cap A$.

Wie eben gilt für $y \in B_\varepsilon(x) \cap A : y \sim x$.

Wegen $y \in A$ gilt auch $y \sim a \stackrel{\text{transitiv}}{\Rightarrow} x \sim a \rightarrow x \in A \Rightarrow \bar{A} = A \Rightarrow A$ abgeschlossen.

■

- (b) $U := \{(x, \sin(\frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$
 $U \setminus \{(0, 0)\}$ ist zsh., da $U \setminus \{(0, 0)\}$ Bild von $(0, 1]$ unter der stetigen Abbildung

$$(0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto (x, \sin(\frac{1}{x}))$$

$(0, 0)$ liegt im Abschluss von $U \setminus \{(0, 0)\}$, da jede Umgebung von $(0, 0)$ einen Punkt aus $U \setminus \{(0, 0)\}$ enthält.

$\stackrel{\text{Blatt 3}}{\Rightarrow} U$ ist zusammenhängend.

Ann.: U ist wegzsh. \Rightarrow es ex. ein stetiger Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow U, \gamma(0) = (0, 0), \gamma(1) = (1, 0)$.

Sei $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \Rightarrow \gamma_1$ ist ebenfalls stetig.

Zwischenwertsatz $\Rightarrow \forall y \in (0, 1) \exists t \in (0, 1) : \gamma(t) = y$

Sei insbes. $y = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists t_n \in (0, 1) : \gamma_1(t_n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \gamma(t_n) = (\gamma_1(t_n), \gamma_2(t_n)) = (\frac{1}{n}, \sin(n))$

γ ist stetig $\Rightarrow \gamma(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0) \nmid$

Aufgabe 4

X Top. Raum, \sim Äquivalenzrel. auf X .

- (a) $Y := X / \sim$ sei versehen mit der Quotiententopologie.

Beh.: Ist Z weiterer top. Raum und $f : Y \rightarrow Z$, dann ist f stetig $\Leftrightarrow f \circ \pi$ stetig. „ \Rightarrow “ Sei $f : X / \sim \rightarrow Z$ stetig. Dann ist $f \circ \pi$ Verkettung stetiger Abbildungen, also stetig.

„ \Leftarrow “ Sei $f \circ \pi$ stetig und $U \subseteq Z$ offen.

$\Rightarrow \pi^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \pi)^{-1}(U)$ offen in $X \Rightarrow f^{-1}$ ist offen in $X / \sim \Rightarrow f$ ist stetig.

- (b) Beh.: Durch (a) ist die Quotiententopologie eindeutig bestimmt.

Bew.: Seien J_1, J_2 zwei Topologien auf X / \sim , die obige Eigenschaften erfüllen.

Z.z. $J_1 = J_2$.

Betrachte $\text{id}_{X/\sim} : (X / \sim, J_1) \rightarrow (X / \sim, J_2)$. Nach obiger Eigenschaft ist id stetig \Rightarrow alle $U \in J_2$ sind in J_1 enthalten.

$J_1 \subseteq J_2$.

Analog umgekehrt,