3 Reihen

Ziel. Untersuche „unendliche Summen“ $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\geq 0}$.

3.1 Konvergenzkriterien

Definition 3.1. Sei $(a_j)_{j\geq 0}$ gegeben und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$$

n-te Partialsumme und die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ heißt *Reihe*. Man schreibt statt (s_n) $\sum_{j\geq 0} a_j$ (oder $\sum_j a_j$ oder $\sum a_j$).

Die Reihe *konvergiert* (bzw. *divergiert*), wenn $(s_n)_{n\geq 0}$ konvergiert (bzw. divergiert). Wenn Konvergenz vorliegt, dann bezeichnet man den Grenzwert von (s_n) mit $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ („Reihenwert“).

Beispiel 3.2. a) Sei $a_j = \dfrac{1}{j!}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$.

$$\Longrightarrow\ s_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!} \longrightarrow \mathrm{e}\ (n \to \infty), \text{ nach Bsp. 2.16.}$$

$$\Longrightarrow\ \exists \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \mathrm{e}.$$

b) Geometrische Reihe: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, $a_j = z^j$.

(Also $s_n = \sum\limits_{j=0}^{n} z^j$, $(s_n) = 1, 1+z, 1+z+z^2 \cdots$)

Bsp. 0.2: $\sum\limits_{j=0}^{n} z^j = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} = \dfrac{1}{1-z} - \dfrac{z^{n+1}}{1-z}$, Übung: $z^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$.

$$\Longrightarrow\ \exists \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z},\ |z| < 1.$$

Anderer Beweis: Sei $|z| < 1$. Setze $b_n = |z^{n+1}| = |z|^{n+1}$.
Dann: $0 \leq b_{n+1} = |z| \cdot b_n \leq b_n$.
Thm 2.14: $\exists b = \lim\limits_{n \to \infty} b_n \geq 0$. Ferner folgt mit $n \to \infty$:

$$0 \leq b = |z| \cdot b \overset{|z|<1}{\Longrightarrow} b = 0.$$

c) Sei $a_j = \dfrac{1}{j(j+1)} = \dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$.

$$\Longrightarrow s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}}_{k=j} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}}_{k=j+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \ (n \to \infty) \implies \exists \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1.$$

d) Harmonische Reihe: Sei $a_j = \dfrac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$.

$$\Longrightarrow s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Behauptung: $s_{2^j} \geq 1 + \dfrac{j}{2}$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow (s_n)$ unbeschränkt.

$\Rightarrow (s_n)$ divergiert, also $\sum \dfrac{1}{j}$ divergiert.

Beweis. (IA) $j = 1$.

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$$

(IS): Es gelte: $s_{2^j} \geq 1 + \dfrac{j}{2}$ für ein $j \in \mathbb{N}$ (IV).

$$\text{Dann: } s_{2^{j+1}} = \sum_{k=1}^{2^j} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{k} \overset{\text{(IV)}}{\geq} 1 + \frac{j}{2} + \frac{2^j}{2^{j+1}} = 1 + \frac{j+1}{2}$$

(da in zweiter Summe $k \leq 2^{j+1}$). $\square$

e) Sei $a_j = (-1)^j$, $j \in \mathbb{N}_0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j = \begin{cases} 1 - 1 + 1 - \cdots + 1 - 1, & n \text{ ungerade} \\ 1 - 1 + 1 - \cdots + 1 - 1 + 1, & n \text{ gerade} \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $(s_n)_n$ hat 2 verschiedene HP, 0 und 1.

Kor. 2.24 $\Longrightarrow$ (s_n) divergiert, d.h. Reihe divergiert.

Bemerkung. Man definiert und behandelt Reihen, die bei $k_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen (statt $k_0 = 0$ in Def. 3.1) genauso.

Satz 3.3. *Seien $\sum a_k$, $\sum b_k$ konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann:*

$$\exists \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Beweis. $\sum_{j=0}^{n} (\alpha a_j + \beta b_j) = \alpha \sum_{j=0}^{n} a_j + \beta \sum_{j=0}^{n} b_j \longrightarrow \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \beta \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ $(n \to \infty)$
(nach Voraussetzung und Satz 2.7). □

Satz 3.4. *Sei $a_j \geq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und die Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ seien beschränkt. Dann:*

$$\exists \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sup s_n.$$

Beweis. Es gilt $s_{n+1} - s_n = \sum_{j=0}^{n+1} a_j - \sum_{j=0}^{n} a_j = a_{n+1} \geq 0 \Longrightarrow (s_n)$ wächst.
Da (s_n) beschränkt, folgt *Beh.* aus Thm. 2.14. □

Satz 3.5 (Cauchy-Kriterium)**.** *Sei $(a_j)_{j \geq 0}$ gegeben.*
Die Reihe $\sum_j a_j$ konvergiert genau dann, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > m \geq N_\varepsilon : \left| \sum_{j=n+1}^{n} a_j \right|. \tag{3.1}$$

Beweis. $\sum a_j$ konvergiert $\overset{\text{Thm. 2.26}}{\Longleftrightarrow}$ $(s_n)_n = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \right)_n$ ist CF.

$\overset{\text{Def. 2.25}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > m \geq N_\varepsilon : \varepsilon \geq |s_n - s_m| = \left| \sum_{j=m+1}^{n} a_j \right|.$ □

Korollar 3.6. *Wenn $\sum a_j$ konvergiert, dann gilt $a_j \longrightarrow 0$ für $(j \to \infty)$.*

Bemerkung. Umkehrung ist falsch! $\frac{1}{j} \longrightarrow 0$, aber $\sum \frac{1}{j}$ *divergiert.*

Beweis des Korollars. Wähle in (3.1) $n = m + 1 > N_\varepsilon$ und erhalte
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall m \geq N_\varepsilon : |a_{m+1}| \leq \varepsilon.$ □

Beispiel 3.7. Für $|z| \geq 1$ ist $\sum_{j \geq 0} z^j$ divergent, da dann $|z^j| = |z|^j \geq 1$ keine Nullfolge (NF). (Spezialfall: $z = -1$, schon im Bsp. 3.25 behandelt.)

Satz 3.8 (Leibniz-Kriterium). *Sei $b_k \geq b_{k+1} \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $b_k \longrightarrow 0$ für $(k \to \infty)$. Dann:*

$$\exists \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann:

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= \sum_{j=0}^{2n+2} (-1)^j b_j - \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j b_j \\ &= (-1)^{2n+2} b_{2n+2} + (-1)^{2n+1} b_{2n+1} \\ &= b_{2n+2} - b_{2n+1} \leq 0 \text{ n.V.} \\ \Longrightarrow & (s_n)_n \text{ fällt.} \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} s_{2n+3} - s_{2n+1} &= (-1)^{2n+3} b_{2n+3} + (-1)^{2n+2} b_{2n+2} \\ &= -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geq 0 \text{ n.V.} \\ \Longrightarrow & (s_{2n+1})_n \text{ wächst.} \end{aligned}$$

Damit: $s_1 \leq s_{2n+1} = \underbrace{(-1)^{2n+1} b_{2n+1}}_{\leq 0} + s_{2n} \leq s_{2n} \leq s_2$.

$\Longrightarrow$ $(s_{2n})_n$, $(s_{2n+1})_n$ sind beschränkt.

Thm. 2.14 $\Longrightarrow$ $\exists\, s = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$, $t = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$.

Ferner: $t - s = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = 0$ (weil

$$\left|(-1)^{2n+1} b_{2n+1}\right| = b_{2n+1} \longrightarrow 0$$

nach Voraus.).

Lemma 2.22 $\Longrightarrow$ $s = t$ ist einziger HP von $(s_n)_n$. Nach Kor. 2.24 konvergiert (s_n). □

Beispiel 3.9. $\exists \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ $[\overset{!}{=} -\ln 2]$. Denn: $b_k = \frac{1}{k}$ ist fallende NF („alternierende Reihe").

Beachte: $\sum_k |(-1)^k \frac{1}{k}| = \sum_k \frac{1}{k}$ divergiert nach Bsp. 3.2.

Definition 3.10. Eine Reihe $\sum a_k$ *konvergiert absolut*, wenn die Reihe $\sum_k |a_k|$ der Beträge konvergiert.

Bemerkung 3.11. a) Konv. $\not\Rightarrow$ absolute Konvergenz (siehe Bsp. 3.9).

b) $a_k \geq 0$: Konvergenz = absolute Konvergenz.

c) absolute Konvergenz $\Longrightarrow$ Konvergenz.

Beweis. Nach Satz 3.5 und der absoluten Konvergenz gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$.

$$\forall n > m \geq N_\varepsilon : \varepsilon \geq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \xRightarrow{3.5} \text{Beh.}$$

□

Satz 3.12 (Majorantenkriterium)**.** *Gegeben seien a_k, b_k für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann:*

a) Wenn $0 \leq |a_k| \leq |b_k|\ \forall k \in \mathbb{N}_0$ und $\sum_k b_k$ konvergiert, dann konvergiert $\sum a_k$ absolut und

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

b) Wenn $a_k \geq b_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0$ und $\sum b_k$ divergiert, dann divergiert $\sum a_k$.

Beweis. a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} |a_j| \overset{\text{n.V.}}{\leq} \sum_{j=0}^{n} b_j \overset{\text{n.V.}}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} b_j.$

Satz 3.4 $\displaystyle\implies \exists \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \leq \sum_{j=0}^{\infty} b_j.$

b) *Annahme*: $\sum a_k$ konvergiere $\xRightarrow{1}$ $\sum b_k$ konvergiert ↯ Voraussetzung in 2.

$\implies$ Beh. 2.

□

Beispiel 3.13. *Beh.* Sei $p \in \mathbb{Q}$. Dann konvergiert $\sum_{k \geq 1} k^{-p}$ für $p \geq 2$ und divergiert für $p \leq 1$.

Beweis. $p = 2$: Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann $k(k+1) \leq 2k^2 \implies \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{2}{k(k+1)} = b_k$

Bsp. 3.2, Satz 3.4 $\displaystyle\implies \exists \sum_{k=1}^{\infty} b_k = 2$. Satz 3.121 $\displaystyle\implies \exists \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2.$

Sei $p > 2$: $\displaystyle k^p = \underbrace{k^{p-2}}_{\geq 1^{p-2}=1} k^2 \geq k^2. \implies \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2} \xRightarrow{3.121} \exists \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

Sei $p \leq 1$: Dann: $\displaystyle k^p = \underbrace{k^{p-1}}_{\leq 1} k \leq k \implies \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^p}$. Bsp. 3.2: $\sum \frac{1}{k}$ div. $\xRightarrow{3.121}$ $\sum \frac{1}{k^p}$ div. □

Satz 3.14 (Quotientenkriterium)**.** *Sei $(a_k)_{k \geq 0}$, sodass es ein $k_0 \geq 0$ gibt mit $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$ und sodass $\left(\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\right)_{k \geq k_0}$ beschränkt sei. Dann gelten:*

a) $\displaystyle\varlimsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \implies \sum_k a_k$ *konvergiert absolut.*

b) $\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \implies \sum_k a_k$ *divergiert.*

Beweis. a) Wähle $\varepsilon > 0$, sodass $q = \varepsilon + \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$.

Nach Lemma 2.27 $\implies \exists K \in \mathbb{N} : \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$ für alle $k \geq K$, wobei $K \geq k_0$.

Sei $k \geq K$. Dann:

$$|a_{k+1}| \leq q \cdot |a_k| \leq q^2 |a_{k-1}| \leq \ldots \leq q^{k-K+1} |a_K| .$$

Bsp 3.2: $\exists \sum_{k=K}^{\infty} q^{k-K+1} \overset{3.121}{\implies} \exists \sum_{k=K}^{\infty} |a_{k+1}| \implies \exists \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ (da $q < 1$).

b) Ähnlich: $\exists K \geq k_0$ mit $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$ für alle $k \geq K$.

$\implies |a_j| \geq |a_k| \neq 0 \ \forall j \geq K$

$\implies (a_k)_k$ ist keine Nullfolge $\overset{3.6}{\implies} \sum a_k$ divergiert.

$\square$

Beispiel 3.15. a) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $a_k = \frac{z^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Damit:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{z^k}{k!}\right|} = \frac{z^{k+1}k!}{(k+1)!|z|^k} = \frac{|z|}{k+1} \longrightarrow 0 \ (k \to \infty) \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

$\overset{3.141}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$.

b) Wenn $\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq 1 \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, $(*)$ dann ist in 3.14 keine allgemeine Aussage möglich, denn (vgl. Bsp. 3.13):

a) $a_k = \frac{1}{k}$. Dann $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \longrightarrow 1 \ (k \to \infty) \implies (*)$ gilt, also $\sum \frac{1}{k}$ *divergiert.*

b) $a_k = \frac{1}{k^2}$. Dann $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \longrightarrow 1 \ (k \to \infty) \implies (*)$ gilt, aber $\sum \frac{1}{k^2}$ *konvergiert.*

Satz 3.16 (Wurzelkriterium)**.** *Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge, sodass $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\geq 0}$ beschränkt ist. Dann:*

a) $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \implies \sum a_k$ *konvergiert absolut.*

b) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \implies \sum a_k$ *divergiert.*

Beweis. a) Wähle $q \in \left(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}, 1\right)$.

Lemma 2.27 $\implies \exists K \in \mathbb{N} : |a_k|^{\frac{1}{K}} \leq q,\ \forall k \geq K \implies |a_k| \leq q^k\ (\forall k \geq K)$.

$$q < 1 : \text{ Bsp. } 3.2 \implies \exists \sum_{k=0}^{\infty} q^k \xRightarrow{3.141} \exists \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

b) Nach Voraussetzung $\exists$ TF mit $|a_{k_j}|^{\frac{1}{k_j}} \geq 1\ (\forall j)$.

$\implies |a_{k_j}| \geq 1\ (\forall j \in \mathbb{N}) \implies (a_k)_k$ ist keine NF. $\xRightarrow{3.6} \sum a_k$ divergiert.

□

Beispiel 3.17. a) Sei $a_k = 2^k z^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und ein festes $z \in \mathbb{C}$. Dann:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = (2^k |z|^k)^{\frac{1}{k}} = 2|z| \begin{cases} < 1, & |z| < \frac{1}{2} \\ > 1, & |z| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Satz 3.16 $\implies \sum_{k\geq 0} 2^k z^k$ konvergiert absolut wenn $|z| < \frac{1}{2}$ und divergiert, wenn $|z| > \frac{1}{2}$.

b) Es ist keine allgemeine Aussage in 3.16 möglich, wenn $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$. (Gleiches Beispiel wie in Bsp. 3.152).

3.2 Einige Vertiefungen/Vermischtes

Beispiel 3.18 (Dezimaldarstellung)**.** Sei $r \in \mathbb{R}$. Setze $m := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq r\} =: [r]$ („Gaußklammer“). $\implies x := r - m \in [0,1) \implies \exists!\ x_1 \in \{0,\dots,9\}$ mit $x_1 \cdot 10^{-1} \leq x < (x_1+1)\cdot 10^{-1}$. Induktiv findet man für jedes n eine „Ziffer“ $x_n \in \{0,\dots,9\}$ mit

$$x_n \cdot 10^{-n} \leq x - x_1 \cdot 10{-}1 - \cdots - x_{n-1} \cdot 10^{-(n-1)} \leq (x_n + 1)\cdot 10^{-n}$$

$$\implies 0 \leq x - \sum_{j=1}^{n} x_j 10^{-j} < 10^n$$

$$\xRightarrow{n\to\infty} \exists x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 10^{-j} \text{ und } r = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(m + \sum_{j=1}^{n} x_j 10^{-j}\right)}_{\in\mathbb{Q}} = m + \sum_{j=0}^{\infty} x_j 10^{-j}.$$

Schreibweise: $r = m{,}x_1 x_2 x_3 \dots$.
Frage: Hat r genau eine solche Darstellung?
Problem: Sei $x_k = 9$ für alle $k \geq l+1$ und $x_l < 9$ für ein $l \in \mathbb{N}$, also

$$r = m{,}x_1 \dots x_l 9999 \dots \tag{$*$}$$

Beachte

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 9\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k - \sum_{k=0}^{l}\left(\frac{1}{10}\right)^k\right)$$

$$\overset{0.2,3.2}{=} 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - \frac{1-10^{-(l+1)}}{1-\frac{1}{10}}\right) = 9\frac{10^{-l-1}}{\frac{9}{10}} = 10^{-l}$$

r hat also zwei verschiedene Darstellungen, nämlich $(*)$ und

$$r = m + \sum_{k=1}^{l-1} x_k 10^{-k} + (x_k+1)10^{-l} = m{,}x_1 \dots x_{l-1}(x_l+1) \tag{$**$}$$

Man verwendet $(**)$ statt $(*)$. Also setzt man

$$\widetilde{x_k} = \begin{cases} x_k & , k = 1, \dots, l-1 \\ x_l + 1 & , k = l \\ 0 & , k > l \end{cases}$$

und verwendet $\widetilde{x_k}$ statt x_k. Entsprechend schreibt man statt $r = m{,}999\dots$ nun $r = m+1$.
Behauptung. Mit dieser Vereinbarung hat jedes $r \in \mathbb{R}$ genau eine Dezimaldarstellung $r = m{,}x_1x_2\dots$. Umgekehrt definiert jede Folge $(x_k)_{k\geq 1}$ mit $x_k \in \{0, \dots, 9\}$ ein $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 10^{-k} \in [0,1]$.

Beweis. siehe Amann/Escher, Thm. II 7.11 □

Bemerkung. Hier kann man 10 durch jedes $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ ersetzen. Dann gilt $x_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$.

Beachte. Wir haben gezeigt: $\forall r \in \mathbb{R}\, \exists q_n \in \mathbb{Q} : q_n \to r\ (n \to \infty)$.

Definition 3.19 (Cantor)**.** Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. M heißt *überabzählbar*, wenn M weder abzählbar unendlich noch endlich ist.

Bemerkung. Wenn M abzählbar unendlich ist, dann setze $x_n = \varphi^{-1}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, wenn φ bijektive Abbildung $m \to \mathbb{N}$ ist, und schreibe $M = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ als Folge.

Beispiel 3.20. a) *Behauptung.* $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis. Betrachte

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & , n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

zeige: φ ist bijektiv
TODO hier scheint in meinen Mitschrieb was zu fehlen... □

b) *Behauptung.* $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beweis. Schreibe $\mathbb{Q}$ in einem Schema (streiche ungekürzte Brüche).

TODO

$\rightsquigarrow$ Bild für Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$
$\implies \mathbb{Q}$ ist abzählbar, d.h. mit $q_n = \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{Q} = (q_n)_{n\geq 1} = (0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2, \dots)$.
Nach Bsp. 3.17 ist $\mathbb{R}$ die Menge aller Häufungspunkte von $\mathbb{Q}$. $\square$

c) *Behauptung.* (Cantor) $M = (0,1)$ ist überabzählbar. (Damit ist auch $\mathbb{R}$ überabzählbar, da es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to (0,1)$ gibt, z.B. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{1+2|x|}$.

Beweis. Annahme: $(0,1)$ sei abzählbar. Also existiert bijektives $\varphi : \mathbb{N} \to (0,1)$ mit $(0,1) = (x_n)_{n\geq 1}$, wobei $x_n = \varphi(n)$. Sei ξ_n die n-te Dezimalstelle von x_n, $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$\eta_n = \begin{Bmatrix} 0, & \xi_n = 0 \\ 1, & \xi_n \neq 0 \end{Bmatrix} \neq \xi_n$$

$$\text{Bsp. 3.17} \implies \begin{cases} y = 0{,}\eta_1\eta_2\eta_3\dots & \in (0,1) \\ \text{Da } \eta_k \neq \xi_k\ \forall k \in \mathbb{N}, \text{ist} y \neq x_n\ \forall n \in \mathbb{N} \implies y & \notin (0,1) \end{cases} \quad ↯$$

$\square$

Umordnung von Reihen

Beispiel 3.21. Nach Bsp. 3.9 konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\cdots$. Definiere rekursiv eine „Umordnung" $(b_k)_{k\geq 1}$ von $a_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Setze: $m = 1$: $b_1 := 1$, $b_2 := -\frac{1}{2} \implies b_1 + b_2 \geq \frac{1}{4}$
$m = 2$: $b_3 := \frac{1}{3}$, $b_4 := \frac{1}{5}$, $b_5 := -\frac{1}{4} \implies b_3 + b_4 + b_5 \geq \frac{1}{2}$

Definiert seien $b_{n_m} = -\frac{1}{2m}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$, sowie

$$b_{n_{m-1}+1} = \frac{1}{2l_{m+1}+1}, \dots, b_{n_m - 1} = \frac{1}{2l_m - 1}$$

für ein $l_m \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{k\geq l_m}\frac{1}{2k+1}$ divergiert (Übung) finden wir ein $j \in \mathbb{N}$

$$b_{n_m+1} = \frac{1}{2l_m+1}, \dots, b_{n_m+j} = \frac{1}{2l+j},$$

sodass: $b_{n_m+1} + \cdots + b_{n_m+j} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2m+2}$.

Setze $n_{m+1} = n_m + j + 1$ und $b_{n_{m+1}} = -\frac{1}{2m+2} \implies$ erhalten rekursiv $(b_k)_{k\geq 1}$ mit

$$\sum_{k=1}^{n_m+1} b_n \geq (m+1)\frac{1}{4} \to \infty, \quad (m \to \infty)$$

Fazit. $\sum_{k\geq 0} a_k$ divergiert, *obwohl* die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit den gleichen Summanden konvergiert! Also: Hier gilt kein „unendliches Kommutativgesetz".

Definition 3.22. Sei $\sum_{k\geq 0} a_k$ eine Reihe und $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Bijektion. Setze $b_k = a_{\varphi(k)}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Die Reihe $\sum_k b_k$ heißt Umordnung von $\sum_k a_k$.

Satz 3.23. *Sei $\sum_k a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert* jede *Umordnung von $\sum_k a_k$ gegen den Wert $\sum_k^{\infty} a_k$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\sum |a_k|$ konvergiert, gilt:

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : \sum_{J=N_\varepsilon+1}^{n} |a_j| \leq \varepsilon \quad \text{nach Satz 3.5} \tag{$*$}$$

Sei $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ bijektiv. Sei $M_\varepsilon = \max\{\varphi^{-1}(0), \ldots, \varphi^{-1}(N_\varepsilon)\} \implies \{0, \ldots, N_\varepsilon\} \subseteq \{\varphi(0), \ldots, \varphi(M_\varepsilon)\}$.

Seien $n \geq N_\varepsilon$, $m \geq M_\varepsilon$. Setze

$$D_{m,n} = \sum_{j=0}^{m} a_{\varphi(j)} + \sum_{j=0}^{n} (-a_j).$$

Als Summanden treten in $D_{m,n}$ nur $\pm a_k$ auf mit $k > N_\varepsilon$. (alle a_k mit $k \leq N_\varepsilon$ treten doppelt auf und kürzen sich).

$$\implies |D_{m,n}| \leq \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| \overset{(*)}{\leq} \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon, m \geq M_\varepsilon$$

Da $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ existiert, folgt mit $n \to \infty$ und Satz 2.9, dass:

$$\exists \lim_{n\to\infty} |D_{m,n}| = \left| \sum_{j=0}^{m} a_{\varphi(j)} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j \right| \leq \varepsilon, \forall m \geq M_\varepsilon$$

Das ist die Behauptung. □

Cauchyprodukte

Frage: Wie multipliziert man Reihen?

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)}_{=:A_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)}_{=:B_n} \tag{3.2}$$

$$\overset{2.7}{=} \lim_{n\to\infty} A_n B_n = \lim_{n\to\infty} (a_0 + \cdots + a_n)(b_0 + \cdots + b_n)$$

Schema für Summanden $a_j b_k$:

TODO

Setze $Q_n = \{0, \dots, n\}^n$, $D_n = \{(j,k) \in Q_n, k + j \leq n\}$. Summiere $A_n B_n$ „diagonal“, das heißt bilde zuerst

$$c_n = \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}, n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

$c_n =$ Summe über $a_j b_k$ mit $j + k = n$.

Satz 3.24. *Seien $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ absolut konvergente Reihen. Seien c_n $(n \in \mathbb{N})$ in (3.3) definiert. Dann konvergiert $\sum_{n \geq 0} c_n$ absolut und es gilt:*

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \tag{3.4}$$

Bemerkung. Satz ist (im Allgemeinen) falsch für konvergente, nicht absolut konvergente Reihen (siehe Übung).

Beweis. Seien A_n, B_n aus (3.2), $A_n^* = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$, $B_n^* = \sum_{k=0}^{n} |b_k|$, $C_n = \sum_{j=0}^{n} c_j$. Nach Vorraussetzung $\exists A^* = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|\,, B^* = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$. Dann:

$$\begin{aligned}
|A_n B_n - C_n| = \left| \sum_{(j,k) \in Q_n \setminus D_n} a_j b_k \right| &\leq \sum_{(j,k) \in Q_n \setminus Q_{(\frac{n}{2})}} |a_j|\,|b_k| \\
&= \sum_{(j,k) \in Q_n} |a_j|\,|b_k| - \sum_{(j,k) \in Q_{(\frac{n}{2})}} |a_j|\,|b_k| \\
&= \underbrace{A_n^* B_n^*}_{\to A^* B^* \text{ nach Satz 2.7}} - \underbrace{A^*_{(\frac{n}{2})} B^*_{(\frac{n}{2})}}_{\to A^* B^* \text{ (da TF) } (n \to \infty)}
\end{aligned}$$

$$\implies \exists \lim_{n \to \infty} |A_n B_n - C_n| = 0$$

Da $A_n B_n \to AB (n \to \infty)$, folgt $\exists \sum_{n=0}^{\infty} C_n - AB \implies$ (3.4). Ferner:

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \overset{(3.3)}{\leq} \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{n} |a_j|\,|b_{n-j}| \leq A_N^* B_N^* \leq A^* B^*$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Nach Satz 3.4 folgt die absolute Konvergenz von $\sum c_n$. $\square$

Beispiel 3.25 (Exponentialreihe)**.** Sei z, $w \in \mathbb{C}$, $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Die Reihe konvergiert absolut nach Bsp. 3.15 ($\forall z \in \mathbb{C}$). Beachte: $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = \mathrm{e}$ (Bsp. 3.17)

Behauptung:

a) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

b) $\exp(z) \neq 0, \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

c) Sei $p \in \mathbb{Q}$: $\exp(p) = \mathrm{e}^p$

Beweis. a)

$$\exp(z)\exp(w) \overset{\text{Satz 3.24}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\frac{w^{n-j}}{(n-j)!}\frac{n!}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} z^j w^{n-j}}_{=\text{ Bsp. 0.3: } (z+w)^n} = \exp(z+w)$$

b) $1 = \exp(0) = \exp(z-z) \overset{\text{a)}}{=} \exp(z)\exp(-z) \implies$ b)

c) Sei $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$. $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $m > 0$

$$\exp(p)^n = \underbrace{\exp(p)\cdots\exp(p)}_{n\text{-mal}} \overset{\text{a)}}{=} \exp(\underbrace{np}_{m}) = \exp(\underbrace{1+\cdots+1}_{m\text{-mal}}) = \exp(1)^m = \mathrm{e}^m$$

$\implies \exp(p) = \mathrm{e}^{\frac{m}{n}}$. Fall $m < 0$ mit b).

□

3.3 Potenzreihen

Definition 3.26. Es sei $(a_k)_{k\geq 0}$ gegeben. Für $z \in \mathbb{C}$ heißt $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ *Potenzreihe.*

Bemerkung. Sei D die Menge der $z \in \mathbb{C}$, sodass die Potenzreihe konvergiert, dann ist $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Funktion. Es gilt stets $0 \in D$, $f(0) = a_0$. (Man setzt $0^0 := 1$)

Definition 3.27. Der *Konvergenzradius* ϱ von $\sum a_k z^k$ ist gegeben durch:

$$\varrho = \begin{cases} \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}, & \text{wenn } \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right) \text{ beschränkt und keine NF,} \\ 0, & \text{wenn } \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right) \text{ unbeschränkt,} \\ \infty, & \text{wenn } \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right) \text{ NF.} \end{cases}$$

Theorem 3.28. *Sei ϱ der Konvergenzradius von $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$. Dann gelten:*

a) $0 < \varrho < \infty$, dann konvergiert $\sum a_k z^k$ absolut für $|z| < \varrho$ und divergiert für $|z| > \varrho$, wobei $z \in \mathbb{C}$.

b) Wenn $\varrho = 0$, dann divergiert $\sum a_k z^k$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c) Wenn $\varrho = \infty$, dann konvergiert $\sum a_k z^k$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$

Also: $\varrho = \sup\left\{r \geq 0 \colon \sum a_k z^k \text{ konvergiert } \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \leq r\right\}$ *(dabei ist* $\sup \mathbb{R}_+ := \infty$*).*

Beweis. Es gilt $\sqrt[k]{|a_k z^k|} = \left(|a_k|\,|z|^k\right)^{\frac{1}{k}} = |z|\,\sqrt[k]{|a_k|} =: b_k$

a) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, b_k \overset{5}{=} |z|\, \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \sqrt[k]{|a_k|}$. Nach Wurzelkriterium:

$$\implies \begin{cases} |z| < \varrho \iff \overline{\lim}\, b_k < 1 \implies \sum a_k z^k \text{ konvergiert absolut} \\ |z| > \varrho \iff \overline{\lim}\, b_k > 1 \implies \sum a_k z^k \text{ divergiert} \end{cases}$$

c) $\overline{\lim}_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0 \implies \sum a_k z^k$ konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$ nach Wurzelkriterium

b) Falls $|z| \neq 0$, dann ist (b_k) unbeschränkt $\implies \left(b_k^k\right)$ ist unbeschränkt $\implies (a_k z^k)$ ist keine NF. Nach Kor. 3.6 $\implies \sum a_k z^k$ divergiert

□

Beispiel 3.29. a) Polynome $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ $(z \in \mathbb{C})$, wobei $a_1, \ldots, a_n$ gegeben. Setze $a_j = 0$ für $j > n \implies \varrho = \infty \implies$ konvergiert $\forall z \in \mathbb{C}$

b) $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert $\forall z \in \mathbb{C}$ nach Bsp. 3.15. Nach Thm. 3.28 gilt:

$$0 = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \tag{3.5}$$

da $\varrho = \infty$ und $a_k = \frac{1}{k!}$

c) Geometrische Reihe $\sum_{k\geq 0} z^k$. Hier ist $a_k = 1 \implies \varrho = 1$. Genauer: Bsp. 3.2 liefert $\exists \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$. Bsp. 3.7 $\implies$ Divergenz wenn $|z| \geq 1$.

d) Sei $a_k = k!$. Nach (3.5) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists K_n \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \leq \frac{1}{n}$ $(\forall k \geq K_n) \implies n \leq \sqrt[k]{k!}$ $(\forall k \geq K_n) \implies (\sqrt[k]{k!})_k$ ist unbeschränkt. Thm. 3.28 $\implies \sum_k k! z^k$ konvergiert *nur* für $z = 0$, da $\varrho = 0$.

e) Betrachte $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}(2z)^k$, d. h. $a_k = \frac{2^k}{k}$. Damit $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2}{\sqrt[k]{k}} \to 2$ $(k \to \infty$, Üb.$)$ $\implies \varrho = \frac{1}{2}$. Also absolute Konvergenz für $|z| < \frac{1}{2}$, Divergenz für $|z| > \frac{1}{2}$. Hier gilt Konvergenz für $z = -\frac{1}{2}$, Divergenz für $z = \frac{1}{2}$ (nach Bsp. 3.9 und 3.2)

Bemerkung. Im Fall $|z| = \varrho \in (0, \infty)$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Satz 3.30. *Es seien* $\sum a_k z^k, \sum b_k z^k$ *Potenzreihen mit Konvergenzradius* $\varrho_a, \varrho_b > 0$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*. Dann gelten für* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$ *(wobei* $\min\{x, \infty\} = x$ *für* $x \in \mathbb{R}$*)*

a) $\exists \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) z^k = \alpha \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \beta \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$

b) $\exists \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) z^n = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)$

Beweis. a) Thm. 3.28 und Satz 3.3

b) Thm. 3.28 und Satz 3.24, wobei in (3.3) gilt:

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j b_{n-j} z^{n-j} = z^n \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

□

Beispiel 3.31 (Sinus und Cosinus)**.** Für $z \in \mathbb{C}$ konvergieren absolut:

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Das sind Potenzreihen mit Koeffizienten

$$\sin\colon a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n = 2k+1 \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}, \quad \cos\colon a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^k}{(2k)!}, & n = 2k \text{ gerade} \end{cases}$$

Beweis. Zeige $\varrho = \infty$.

$$\sin : \sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \xrightarrow{(3.5)} 0, \quad n \to \infty$$

cos genauso. □

Aus Reihen folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \cos x, \sin x \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}\colon \cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z \tag{3.7}$$

Satz 3.32. *Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gelten:*

$$\textit{Euler:}\ \exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z), \quad (\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) \tag{3.8}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ folgt mit (3.6) $\operatorname{Re}\exp(ix) = \cos x$, $\operatorname{Im}\exp(iz) = \sin x$, $|\exp(iz)| = 1$, $|\cos x|$, $|\sin x| \leq 1$.

Beweis. Es gilt: $\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i(i^2)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \overset{i^2=-1}{=} \cos z + i \sin z$. Ferner $1 = \exp(iz - iz) \overset{(3.25)}{=} exp(iz) \cdot exp(i(z-z)) \overset{(3.7),\text{ Euler}}{=} (\cos z + i\sin z)(\cos z - i\sin z) = (\cos z)^2 + (\sin z)^2$. (3.8) folgt ähnlich aus Euler, (3.7) □

Korollar 3.33. *Seien z, $w \in \mathbb{C}$. Dann:*

$$
\begin{aligned}
&-2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \overset{3.8}{=} \\
&\frac{-2}{(2i)^2}\left(\exp\left(\frac{i}{2}(z+w)\right) - \exp\left(-\frac{i}{2}(z+w)\right)\right)\cdot\left(\exp\left(\frac{i}{2}(z+w)\right)\right) - \exp\left(-\frac{i}{2}(z-w)\right) \\
&\overset{(3.25)}{=} \frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{i}{2}2z\right) - \exp\left(\frac{i}{2}2w\right) - \exp\left(\frac{i}{2}(-2w)\right) + \exp\left(\frac{i}{2}(-2z)\right)\right) \\
&\overset{(3.8)}{=} \cos z - \cos w
\end{aligned}
$$