

## 3 Isolierte Singularitäten

### 3.1 Klassifikation und Laurentreihe

**Definition 3.1.**

**Beispiel 3.2.**

**Theorem 3.3.**

**Beispiel 3.4.**

**Theorem 3.5.**

**Bemerkung.** (a) Man kann in Theorem 3.5 auf die Voraussetzung des Zusammenhangs verzichten.

(b) todo

Zusatz zu Theorem 3.5: Wenn  $f: D \rightarrow f(D)$  biholomorph, dann gilt nach Satz 1.8(a):

$$f'(z) \neq 0 \quad (\forall z \in D), \quad (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad (w \in f(D)).$$

Seien  $a_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) und  $z_0 \in \mathbb{C}$  gegeben. Wir sagen, dass die *Laurentreihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für ein  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert, wenn ihr *regulärer Anteil*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

und ihr *singulärer Anteil*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

konvergiert. Die Laurentreihe ist dann die Summe der beiden Anteile. Entsprechend definiert man absolute beziehungsweise gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta.

**Theorem 3.6** (Laurent). *Seien  $f \in H(D)$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$  mit  $D_0 = B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ . Für  $\rho \in (0, R)$ , setze  $K_\rho = \partial B(z_0, \rho)$  und*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

### 3 Isolierte Singularitäten

Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ für } z \in D_0 \quad (3.2)$$

mit absoluter und gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta in  $D_0$ . Die Koeffizienten  $a_n$  sind dabei eindeutig bestimmt, insbesondere sind sie unabhängig von  $\rho$ .

*Beweis.* 1) *Existenz:* Sei  $K \subseteq D_0$  kompakt. Dann existieren

$$0 < s < s + \delta < r - \delta < r < R \text{ mit } s + \delta \leq |z - z_0| \leq r - \delta, \quad \forall z \in K$$

(vgl. den Beweis von Theorem 2.25). Wähle ein  $z \in K$ . Setze

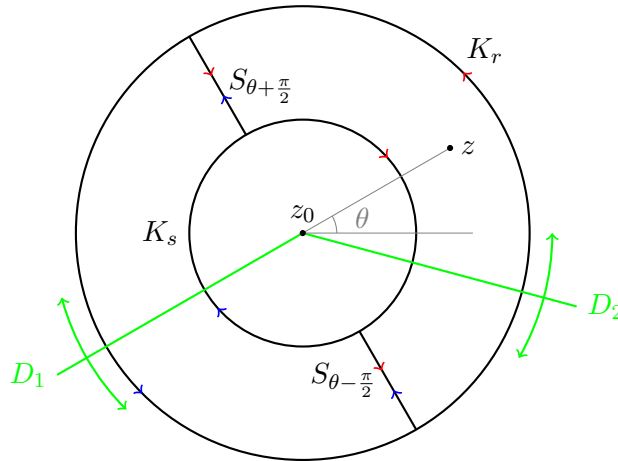
$$\theta = \arg(z - z_0), \quad S_\varphi = \{z_0 + te^{i\varphi}, s \leq t \leq r\}$$

für  $\varphi \in \mathbb{R}$  und

$$K_\sigma^1 = \left\{ z = z_0 + \sigma e^{i\alpha} : \theta - \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \theta + \frac{\pi}{2} \right\}, \quad K_\sigma^2 = K_\sigma \setminus K_\sigma^1, \quad \sigma = s, r.$$

Setze weiter

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= K_r^1 + (-S_{\theta+\frac{\pi}{2}}) + (-K_s^1) + S_{\theta-\frac{\pi}{2}}, \\ \Gamma_2 &= K_r^2 + (-S_{\theta-\frac{\pi}{2}}) + (-K_s^2) + S_{\theta+\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (*)$$



Beachte: Es gilt:  $n(\Gamma_1, z) = 1$ ,  $n(\Gamma_2, z) = 0$ , sowie

$$\Gamma_1 \subseteq D_1 := D_0 \setminus S_{\theta+\pi}, \quad \Gamma_2 \subseteq D_2 := D_0 \setminus S_{\theta-\frac{\pi}{4}}$$

und  $D_1$  und  $D_2$  sind sternförmig.

Die (CIF) auf  $D_1$  beziehungsweise  $D_2$  liefert:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw}_{=0} \stackrel{(*)}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(w)}{w - z} dw}_{=: f_1(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_s} \frac{f(w)}{w - z} dw}_{=: f_2(z)}.$$

Der obige Ausdruck für  $f_1$  (beziehungsweise für  $f_2$ ) ist für alle  $z \in B(z_0, r)$  (beziehungsweise  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0, s)}$ ) definiert und nach Satz 2.7 dort holomorph.

Nach Theorem 2.25 existieren  $a_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) mit

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad (+)$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für  $z$  mit  $|z - z_0| \leq r - \delta$ . Für  $|z - z_0| \geq s + \delta$  und  $|w - z_0| \leq s$  gilt:

$$\frac{|w - z_0|}{|z - z_0|} \leq \frac{s}{s + \delta} =: q < 1.$$

Somit:

$$\begin{aligned} f_2(z) &= + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_s} \frac{f(w)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} dw \stackrel{q < 1}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_s} \frac{f(w)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^k}{(z - z_0)^k} dw \\ &\stackrel{\text{Satz 2.7}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_s} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-k}} dw}_{=: a_n} (z - z_0)^{-k-1} \end{aligned} \quad (++)$$

mit  $n = -k - 1 \in \{-1, -2, \dots\}$ . Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für  $z$  mit  $|z - z_0| \geq s + \delta$ . Damit konvergieren auch (+) und (++) absolut und gleichmäßig auf  $K$ . Somit ist die Existenz einer Laurentreihe gezeigt.

2) *Eindeutigkeit und* (3.1): Seien  $\rho \in (0, R)$  und  $b_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) mit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \text{ für } z \in D_0$$

mit absoluter und gleichmäßiger Konvergenz auf  $K_\rho$  (z.B.  $b_n = a_n$  aus Teil 1 mit  $0 < s < \rho < r < R$ ). Sei  $m \in \mathbb{Z}$ . Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \stackrel{\text{Satz 2.7}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} (w - z_0)^{n-m-1} dw = b_m, \quad (**)$$

wobei nach Beispiel 2.6 gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} (w - z_0)^{n-m-1} dw = \begin{cases} 0, & n - m - 1 \neq -1, \\ 1, & n - m - 1 = -1. \end{cases}$$

Speziell kann man also in Teil 1 die Radien  $s, r$  für  $a_n$  durch jedes  $\rho \in (s, r)$  ersetzen. Da in Teil 1  $s$  beliebig nahe an 0 und  $r$  beliebig nahe an  $R$  gewählt werden kann, folgt (3.1) für jedes  $\rho \in (0, R)$ . Schließlich liefert (\*\*) auch die Eindeutigkeit der Koeffizienten in (3.2).  $\square$

**Korollar 3.7.** Seien  $f \in H(D)$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$  mit  $D_0 = B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subseteq D$  und  $a_n$  die Koeffizienten der Laurentreihe ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Dann:

- (a)  $z_0$  hebbar  $\iff a_n = 0, \forall n < 0$ .
- (b)  $z_0$  ist Pol  $m$ -ter Ordnung  $\iff a_n = 0, \forall n < -m$  und  $a_{-m} \neq 0$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ .
- (c)  $z_0$  ist wesentlich  $\iff \exists n_j \rightarrow -\infty$  mit  $a_{n_j} \neq 0$  ( $\forall j \in \mathbb{N}$ ).

*Beweis.* c) folgt per Negation aus a) und b).

- a) und b): Bezeichne (nur hier) eine hebbare Singularität als „Pol 0-ter Ordnung“ (setze dann  $m = 0$ ). Nach Definition ( $m = 0$ ) beziehungsweise nach Theorem 3.3 ( $m > 0$ ) ist  $z_0$  genau dann ein Pol  $m$ -ter Ordnung von  $f$ , wenn

$$g(z) := (z - z_0)^m f(z)$$

bei  $z_0$  holomorph fortgesetzt werden kann, wobei  $g(z_0) \neq 0$ , wenn  $m > 0$ . Nach Theorem 2.25 ist dies genau dann der Fall, wenn  $g$  auf einem Kreis  $B(z_0, r)$ ,  $r \leq R$ , eine Potenzreihe mit Koeffizienten  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , besitzt, wobei  $b_0 \neq 0$  falls  $m > 0$ . Also genau dann, wenn

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{k-m} \text{ für alle } z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}.$$

Dies ist eine Laurentreihe mit Koeffizienten  $a_{-m} = b_0 \neq 0$ , wenn  $m > 0$ .

Also liefert die Eindeutigkeit in Theorem 3.6 die Behauptungen a) und b).  $\square$

**Beispiel 3.8.** (a)  $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k \stackrel{(n=-k)}{=} \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n$ , ( $z \neq 0$ ), also ist  $z = 0$  wesentlich.

$$\begin{aligned} \text{(b) } z^{-6}(\cos(z) - 1) &= z^{-6} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} - 1 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-6} \stackrel{j=k-3}{=} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+6)!} z^{2j} \\ &= \underbrace{-\frac{z^{-4}}{2} + \frac{z^{-2}}{4!}}_{\text{sing. Teil}} - \underbrace{\frac{1}{6!} + \frac{z^2}{8!} - \dots}_{\text{reg. Teil}} \end{aligned}$$

für ( $z \neq 0$ ). Also ist 0 Pol mit  $m = 4$ .

- (c) Sei  $z \in B(0, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ . Dann:

$$f(z) = \frac{1+z}{z-z^2} = \frac{1+z}{z} \frac{1}{1-z} = \left(1 + \frac{1}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Also ist 0 Pol 1. Ordnung.

## 3.2 Der Residuensatz und reelle Integrale

**Definition 3.9.** Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f \in H(D)$ . Der Koeffizient  $a_{-1}$  der Laurentreihe von  $f$  bei  $z_0$  heißt *Residuum*  $\text{Res}(f, z_0)$  von  $f$  bei  $z_0$ . Es gilt also

$$\text{Res}(f, z_0) \stackrel{(3.1)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} f(w) dw$$

(wobei  $\overline{B}(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ ).

**Bemerkung.**  $f \mapsto \text{Res}(f, z_0)$  ist linear auf  $H(D)$ .

**Theorem 3.10** (Residuensatz). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  sternförmig,  $A = \{z_1, \dots, z_l\} \subseteq U$ ,  $D = A \setminus U$ ,  $f \in H(D)$  und  $\Gamma \subseteq D$  eine geschlossene Kurve. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^l n(\Gamma, z_j) \operatorname{Res}(f, z_j). \quad (3.3)$$

**Bemerkung.** Wenn alle  $z_j$  hebbar sind, dann ist  $\operatorname{Res}(f, z_j) = 0$  für alle  $j = 1, \dots, l$  und somit hat  $f$  eine Fortsetzung in  $H(U)$ . Also ist der Cauchy-Integralsatz ein Spezialfall von (3.3).

*Beweis.* Sei  $r_j > 0$  mit  $D_j := B(z_j, r_j) \setminus \{z_j\} \subseteq D$  für  $j = 1, \dots, l$ . Sei weiter

$$g_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z_j)(z - z_j)^{-n} \quad (\forall z \in D_j) \quad (*)$$

der singuläre Anteil der Laurentreihe von  $f$  bei  $z_j$  mit Koeffizienten  $a_{-n}(z_j)$  für  $j = 1, \dots, l$ . Nach dem Beweis von Theorem 3.6 kann man  $g_j$  holomorph auf  $H(\mathbb{C} \setminus \{z_j\})$  fortsetzen (siehe  $f_2$  im dortigen Beweis für beliebig kleine  $s > 0$ ). Wir bezeichnen diese Fortsetzung auch mit  $g_j$ . Setze  $h_0 = f - g_1 - \dots - g_l$  auf  $D$ . Da  $f - g_j$  nach (\*) eine Potenzreihe auf  $D_j$  ist, hat  $f - g_j$  eine holomorphe Fortsetzung in  $z_j$  und damit hat  $h_0$  eine holomorphe Fortsetzung  $h \in H(U)$ .

Mit Theorem 2.21 (Integralsatz) folgt  $\int_{\Gamma} h \, dz = 0$  (da  $U$  sternförmig). Da alle Funktionen auf  $\Gamma$  stetig sind, folgt

$$\int_{\Gamma} f \, dz = \sum_{j=1}^l \int_{\Gamma} g_j \, dz \stackrel{(*), (2.7)}{=} \sum_{j=1}^l \left( a_{-1}(z_j) \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_j}}_{=2\pi i \cdot n(\Gamma, z_j)} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{-n}(z_j) \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z - z_j)^n}}_{=0 \text{ (Bsp. 2.6)}} \right). \quad \square$$

**Lemma 3.11.** Sei  $z_0$  ein Pol  $m$ -ter Ordnung von  $f \in H(D)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) und  $g$  die holomorphe Fortsetzung der Funktion  $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$  auf eine Kugel  $B(z_0, r) \subseteq D$  (vgl. Theorem ??). Dann gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z).$$

Speziell für  $m = 1$ :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Insbesondere gilt  $\operatorname{Res}(f, z_0) = h(z_0)$ , wenn  $f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$  für ein  $h \in H(B(z_0, r))$  mit  $B(z_0, r) \subseteq D$ . Somit ist (CIF) ein Spezialfall von (3.3) für solche  $f$  und  $l = 1$ .

*Beweis.* Nach Theorem 3.6 gibt es ein  $r > 0$  mit  $D_0 = B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ ,  $h \in H(B(z_0, r))$  und  $a_{-1}, \dots, a_{-m} \in \mathbb{C}$  mit  $a_{-m} \neq 0$  und

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z), \quad z \in D_0.$$

Daraus erhält man  $g(z) = a_{-m} + \dots + (z - z_0)^{m-1} a_{-1} + (z - z_0)^m h(z)$ ,  $z \in D_0$ , und weiter  $g^{(m-1)}(z) = 0 + a_{-1}(m-1)! + (z - z_0)\varphi(z)$  für ein  $\varphi \in H(B(z_0, r))$ .

$$\implies \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(m-1)}(z) = (m-1)! a_{-1}.$$

Damit ist die erste Behauptung gezeigt. Sei nun  $f$  wie in der letzten Behauptung. Wenn  $h(z_0) \neq 0$ , dann ist  $z_0$  ein Pol erster Ordnung von  $f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$ . Mit der ersten Behauptung mit  $m = 1$  folgt  $\operatorname{Res}(f, z_0) = h(z_0)$ . Falls  $h(z_0) = 0$ , dann hat  $h$  eine Nullstelle  $n$ -ter Ordnung ( $n \in \mathbb{N}$ ) bei  $z_0$ , also ist  $z_0$  eine hebbare Singularität von  $f$  und damit  $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0 = h(z_0)$ .  $\square$

**Beispiel 3.12.** (a) Sei  $U$  offen,  $z_1, z_2 \in U$ ,  $z_1 \neq z_2$ ,  $g \in H(U)$ . Betrachte  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_1)(z-z_2)^2}$  für  $z \in D = U \setminus \{z_1, z_2\}$ . Es sei  $g(z_j) \neq 0$  ( $j = 1, 2$ ). Dann existiert der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^j f(z) \neq 0$ , also ist  $z_j$  ein Pol  $j$ -ter Ordnung ( $j = 1, 2$ ). Mit Lemma 3.11 folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{g(z)}{(z - z_2)^2} = \frac{g(z_1)}{(z_1 - z_2)^2} \neq 0, \\ \operatorname{Res}(f, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} \left( \frac{d}{dz} (z - z_2)^2 f(z) \right) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d}{dz} \frac{g(z)}{z - z_1} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \left( \frac{g'(z)}{z - z_1} - \frac{g(z)}{(z - z_1)^2} \right) = \frac{g'(z_2)}{z_2 - z_1} - \frac{g(z_2)}{(z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}$$

(b) Sei  $f(z) = (\cot z)^2 = \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}$  für  $z \in B(0, \pi) \setminus \{0\} =: D$ . Wie in Bsp. 3.4 sieht man: 0 ist Pol zweiter Ordnung, denn  $z^2 \cot^2 z = \left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 \cos^2 z \rightarrow 1$ ,  $z \rightarrow 0$ . Setze  $g(z) = z^2 \cot^2 z$  für  $z \in D$ . Mit Lemma 3.11 folgt:

$$\operatorname{Res}(\cot^2, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left( 2z \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} + 2z^2 \cot z \cot' z \right)$$

(Beachte:  $\cot' = \frac{1}{\sin^2}$ )

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( \underbrace{2 \frac{z}{\sin z} \cos z}_{\rightarrow 2} \frac{\sin z \cos z - z}{\sin^2 z} \right) \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow 0} \underbrace{\frac{z^2}{\sin^2 z}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\frac{1}{2} \sin 2z - z}{z^2}}_{=: Q}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$Q = \frac{1}{z^2} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} (2z)^{2n+1} - z \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2z)^{2n-1}$$

eine Potenzreihe um 0 mit dem Wert 0 an der Stelle 0. Damit folgt  $\lim_{z \rightarrow 0} Q = 0$  und  $\operatorname{Res}(\cot^2, 0) = 0$ .

## Reelle Integrale

**Beispiel 3.13.** Sei  $a > 1$ . Dann ist

$$J := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} J &\stackrel{(1.14)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a + \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})} = \frac{2}{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{ix}}{2ae^{ix} + (e^{ix})^2 + 1} dx \\ &\stackrel{z=e^{ix}}{=} \frac{2}{i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{4\pi}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\frac{1}{z-z_2}}{z-z_1} dz, \end{aligned}$$

wobei  $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \in \mathbb{R}$ ,  $z_1 \in (-1, 1)$ ,  $z_2 < -1$ . Damit und mit (CIF) folgt

$$J = 4\pi \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad \square$$

**Beispiel 3.14.** Sei  $t \in \mathbb{R}$ . Dann  $J = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi e^{-|t|}$ .

*Beweis.* Sei  $t > 0$  (falls  $t < 0$ : substituiere  $y = -x$ , setze  $s = -t > 0$  in  $J$ ). Das Integral existiert, da

$$\left| \frac{e^{itx}}{1+x^2} \right| = \frac{1}{1+x^2},$$

was integrierbar ist. Setze  $f(z) = \frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)}$ . Dann ist  $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{\pm i\})$  und  $\pm i$  sind einfache Pole. Es gilt

$$J = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\int_{\Gamma_r} f dz}_{=: J_1} - \underbrace{\int_{K_r} f dz}_{=: J_2} \right).$$

$$\Gamma_r = [-r, r] + K_r, \quad K_r : z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi, r > 1$$

$$\text{Es gilt} \quad J_1 \stackrel{\text{Thm. 3.10}}{=} 2\pi i \text{Res}(f, i) \stackrel{\text{Lem. 3.11}}{=} 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = 2\pi i \frac{e^{i^2 t}}{i+i} = \pi e^{-t}$$

$$\text{und} \quad |J_2| \leq \pi r \max_{z \in K_r} \left| \frac{e^{izt}}{1+z^2} \right| \leq \pi r \max_{z \in K_r} \frac{e^{t \operatorname{Re} iz}}{|z|^2 - 1} \stackrel{\substack{iz = \\ r(i \cos \theta - \sin \theta)}}{=} \pi r \max_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{e^{-tr \sin \theta}}{r^2 - 1} \leq \frac{\pi r}{r^2 - 1} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad \square$$

**Beispiel 3.15.**

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

*Beweis. Existenz:* für

$$|x| \geq 1 : x^2 + x^4 \leq 2 + 2x^4 \iff \frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{2}{1+x^2},$$

was integrierbar ist.

Setze

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} =: \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Dabei hat  $h(z) = 1+z^4$  die 4 Nullstellen

$$w_k = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{ik\frac{\pi}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Dann ist  $f$  holomorph auf

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -\frac{1}{2}, z \neq w_1, w_2\}.$$

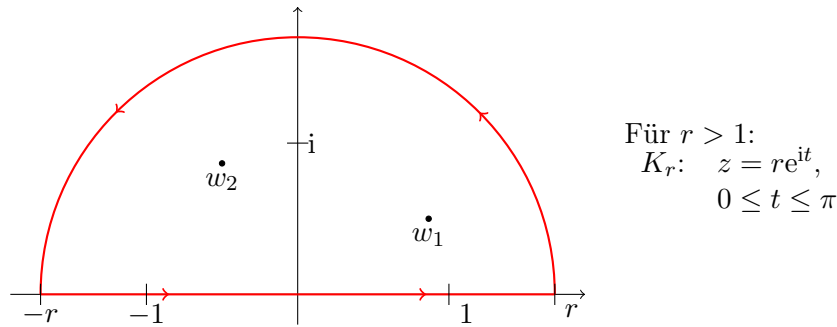
### 3 Isolierte Singularitäten

Weiterhin gilt nach Übungsaufgabe 22b (da  $g(w_k) \neq 0$ ,  $h'(w_k) \neq 0$ ):

$$\operatorname{Res}(f, w_1) = \frac{g(w_1)}{h'(w_1)} = \frac{w_1^2}{4w_1^3} = \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}.$$

Genauso:  $\operatorname{Res}(f, w_2) = \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} e^{i\frac{\pi}{2}}$ . Damit gilt:

$$\operatorname{Res}(f, w_1) = \frac{\sqrt{2}}{4(1+i)}, \quad \operatorname{Res}(f, w_2) = \frac{\sqrt{2}}{4(i-1)}$$



Setze  $\Gamma_r = [-r, r] + K_r$ . Damit:

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_{K_r} \frac{z^2}{1+z^4} dz &= \int_{\Gamma_r} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{\Gamma_r} \frac{z^2}{1+z^4} dz \stackrel{3.10}{=} 2\pi i (\operatorname{Res}(f, w_1) + \operatorname{Res}(f, w_2)) \\ &= \frac{i\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i-1} \right) = \frac{i\pi}{\sqrt{2}} \frac{i-1+i+1}{i^2-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ferner:

$$\left| \int_{K_r} f dz \right| \leq \pi r \max_{z \in K_r} \left| \frac{z^2}{1+z^4} \right| \leq \pi r \max_{|z|=r} \frac{|z|^2}{|z|^4-1} \leq \frac{\pi r^3}{r^4} \rightarrow 0$$

für  $r \rightarrow \infty$ . Damit folgt die Behauptung. □

**Beispiel.** Für  $t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} e^{itx} dx = \begin{cases} \pi, & t \in (-1, 1), \\ \frac{\pi}{2}, & t = \pm 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

*Beweis.* Sei  $t \in \mathbb{R}$  fest. Die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} e^{itz}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

ist ganz.

Betrachte  $S_R = [-R, -1] + \{e^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq 0\} + [1, R]$  (für  $R > 1$ ). Der Cauchy-Integralsatz (Theorem 2.21) liefert mit  $D = \mathbb{C}$ :

$$\int_{-S_R + [-R, R]} f dz = 0.$$



Setze:

$$I(R) = \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} e^{itx} dx \implies I(R) = \int_{S_R} f dz$$

Setze ferner

$$\varphi_R(s) = \frac{1}{2i} \int_{S_R} \frac{e^{isz}}{z} dz, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (+)$$

Mit  $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$  folgt  $I(R) = \varphi_R(t+1) - \varphi_R(t-1)$ . Sei

$$K_R^+ = \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}, \quad K_R^- = \{Re^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq 0\}, \\ \Gamma_R^+ = S_R + K_R^+, \quad \Gamma_R^- = S_R + (-K_R^-).$$

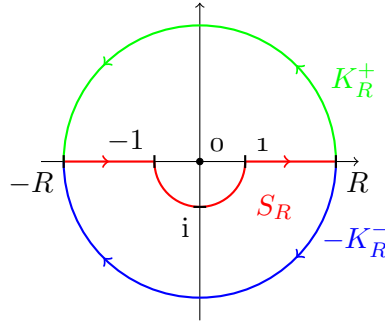
Die (CIF) mit  $D = \mathbb{C}$  liefert:

$$\pi = \pi e^{is0} = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{isz}}{z-0} dz, \quad (*)$$

$$0 = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{isz}}{z} dz, \quad \text{da } n(\Gamma_R^-, 0) = 0 \quad (**)$$

$$\implies \varphi_R(s) \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2i} \int_{K_R^-} \frac{e^{isz}}{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^0 \frac{Re^{i\theta} e^{isRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 \exp(isRe^{i\theta}) d\theta, \quad (++)$$

$$\varphi_R(s) \stackrel{(*)}{=} \pi - \frac{1}{2i} \int_{K_R^+} \frac{e^{isz}}{z} dz = \pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \underbrace{\exp(ise^{i\theta})}_{=: \alpha(R)} d\theta \quad (+++)$$



Beachte:  $|\alpha(R)| = \exp(sR \cdot \operatorname{Re}(i \cos \theta + i^2 \sin \theta)) = e^{-sR \sin \theta}$ .

Falls  $s \cdot \sin \theta > 0$ , ist  $|\alpha(R)| \leq 1$  und es gilt  $\alpha(R) \rightarrow 0$  für alle  $R > 1$  mit  $R \rightarrow \infty$ .

Majorisierte Konvergenz folgt aus  $(++)$ , da  $\varphi_R(s) \rightarrow 0$  ( $R \rightarrow \infty$ ), wenn  $s < 0$  und aus  $(+++)$ , also  $\varphi_R(s) \rightarrow \pi$ , wenn  $s > 0$ . Mit  $(**)$  folgt

$$\varphi_R(0) = \frac{\pi}{2}, \quad (\forall R > 1).$$

Setze in  $(+)$   $s = t + 1$ , bzw.  $s = t - 1$ . Dann:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = \begin{cases} \pi - \pi = 0, & t > 1, \\ \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, & t = 1, \\ \pi - 0 = \pi, & -1 < t < 1, \\ \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}, & t = -1, \\ 0 - 0 = 0, & t < -1, \end{cases}$$

wie gewünscht. □

### 3.3 Das Argumentprinzip

Für  $f \in H(D)$  sei  $N(f)$  die Menge der Nullstellen von  $f$  in  $D$  und  $m(z) = m_f(z)$  die Vielfachheit von  $z \in N(f)$ . Ziel: Bestimme  $N(f)$  und  $m(z)$  mit einem Kurvenintegral.

**Theorem 3.16** (Argumentprinzip). Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein sternförmiges Gebiet,  $f \in H(D)$  und  $\Gamma \subseteq D$  geschlossene Kurve mit  $\Gamma \cap N(f) = \emptyset$ . Dann:

$$\sum_{z_j \in N(f)} m(z_j) n(\Gamma, z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n(\Gamma_f, 0), \quad (3.4)$$

wobei  $\Gamma_f$  die Parametrisierung  $f \circ \gamma$  hat und  $\gamma$  die Parametrisierung von  $\Gamma$  ist. Die Summe in (3.4) hat nur endlich viele Summanden, die nicht 0 sind.

*Beweis.* Zur letzten Behauptung: Sei  $z \notin D$ . Dann ist

$$w \mapsto \frac{1}{w - z}$$

auf  $D$  holomorph und somit nach Theorem 2.21

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw = 0, \quad (*)$$

da  $D$  sternförmig ist.

ANNAHME: Es gibt  $z_n \in N(f)$  mit  $z_n \neq z_m$  und  $n(\Gamma, z_n) \neq 0$  für alle  $n \neq m$  in  $\mathbb{N}$ . Da  $n(\Gamma, z_n) = 0$  in unbeschränkten Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  (nach Satz 2.16), ist  $(z_n)$  beschränkt. Also gibt es Teilfolgen  $z_{n_j} \rightarrow z(j \rightarrow \infty)$ .

Da  $f \neq 0$  (da  $N(f) \cap \Gamma = \emptyset$ ), liefert der Nullstellensatz (Korollar 2.36), dass

$$z \in \partial D \xrightarrow{(*)} n(\Gamma, z) = 0,$$

aber

$$n(\Gamma, z) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}} n(\Gamma, z_n) \neq 0 \quad \text{WIDERSPRUCH.}$$

Sei  $z_0 \in N(f)$  und  $m = m(z)$ . Nach Korollar 2.36 existieren  $r > 0$  und  $g \in H(B(z_0, r))$ , mit  $B(z_0, r) \subseteq D$ ,  $g(z) \neq 0$  und

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad (\forall z \in B(z_0, r)).$$

Damit:

$$\begin{aligned} f'(z) &= m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z) \\ \implies \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (\forall z \in B(z_0, r)). \end{aligned}$$

Da  $\frac{g'}{g}$  holomorph auf  $B(z_0, r)$  ist, folgt

$$\text{Res} \left( \frac{f'}{f}, z_0 \right) = m.$$

Theorem 3.10 liefert also die erste Gleichung. Weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{(f \circ \gamma)(t)} (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_f} \frac{1}{w} dw = n(\Gamma_f, 0). \end{aligned} \quad \square$$

**Korollar 3.17** (Rouché). Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein sternförmiges Gebiet,  $f, g \in H(D)$ ,  $\Gamma \subseteq D$  eine geschlossene Kurve. Es gelte zusätzlich

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \quad \forall z \in \Gamma. \quad (3.5)$$

Dann gilt:

$$\sum_{z_j \in N(f)} n(\Gamma, z_j) m_f(z_j) = \sum_{w_k \in N(g)} n(\Gamma, w_k) m_g(w_k).$$

*Beweis.* Da  $f, g$  stetig sind und  $\Gamma$  kompakt ist, gibt es ein offenes  $U \subseteq D$  mit  $\Gamma \subseteq U$ , so dass (3.5) für  $U$  gilt. Damit:  $f(z) \neq 0$ ,  $g(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$  und

$$\left| 1 - \frac{f(z)}{g(z)} \right| < 1 + \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|, \quad \forall z \in U. \quad (*)$$

ANNAHME:  $\frac{f(z)}{g(z)} =: t \in \mathbb{R}_-$  für ein  $z \in U$ . Dann folgt:

$$1 + |t| = 1 - t \leq |1 - t| \stackrel{(*)}{<} 1 + |t| \quad \text{WIDERSPRUCH}$$

$$\text{Also gilt: } \frac{f(z)}{g(z)} \in \Sigma_{\pi} \quad (\forall z \in U) \implies h := \log \frac{f}{g} \in H(U) \implies h' = \frac{1}{\frac{f}{g}} \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Da  $h'$  eine Stammfunktion hat, gilt

$$0 = \int_{\Gamma} h' dz = \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz - \int_{\Gamma} \frac{g'}{g} dz.$$

Die Behauptung folgt dann aus (3.4).  $\square$

**Beispiel 3.18.** Für festes  $\lambda > 1$  hat die Gleichung  $\lambda = z + e^{-z}$  genau eine Lösung  $z \in \mathbb{C}_+$ .

*Beweis.* Betrachte  $f(z) = \lambda - z - e^{-z}$ ,  $g(z) = \lambda - z$  für  $z \in D := \mathbb{C}_+$ . Dann ist  $N(g) = \{\lambda\}$ ,  $m_g(\lambda) = 1$ . Wähle  $r > \lambda$  und  $\varepsilon \in (0, \lambda - 1)$ . Setze  $\Gamma = \partial B(r, r - \varepsilon) \subseteq D$ . Dann  $\lambda \in B(r, r - \varepsilon)$ . Damit folgt:

$$|f(z) - g(z)| = |e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} \stackrel{z \in \mathbb{C}_+}{<} \lambda - \varepsilon \leq |\lambda - z| = |g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)| \quad (\forall z \in \Gamma).$$

Rouché (Theorem 3.17) liefert dann

$$m_g(\lambda) n(\Gamma, \lambda) = 1 = \sum_{z_j \in N(f)} \underbrace{m_f(z_j)}_{\geq 1} n(\Gamma, z_j)$$

und  $n(\Gamma, z_j)$  ist 1, wenn  $z_j \in B(r, r - \varepsilon)$ , und 0 sonst. Also existiert genau eine einfache Nullstelle von  $f$  in  $B(r, r - \varepsilon)$ . Das gilt für alle  $r > \lambda$ ,  $\varepsilon \in (0, \lambda - 1)$ . Mit  $r \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 3.19.** Sei  $D$  sternförmig mit  $\overline{\mathbb{D}} \subseteq D$ . Weiter sei  $f \in H(D)$  mit  $|f(z)| < 1$  für alle  $z \in \partial\mathbb{D}$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es genau  $n$  (eventuell mehrfach gezählte) Lösungen von  $f(z) = z^n$  mit  $z \in D$ .

*Beweis.* Betrachte  $g(z) = f(z) - z^n$ ,  $h(z) = -z^n$  für  $z \in D$ . Dann sind  $g, h \in H(D)$ . Ferner ist  $N(h) = \{0\}$  und  $m_h(0) = n$ . Wähle  $\Gamma = \partial\mathbb{D}$ . Dann gilt  $|g(z) - h(z)| = |f(z)| < 1 = |h(z)| \leq |g(z)| + |h(z)|$  für alle  $z \in \partial\mathbb{D}$ . Rouché liefert dann

$$n = \sum_{z_j \in N(g)} m_g(z_j) n(\partial\mathbb{D}, z_j) = \sum_{z_j \in N(g) \cap \mathbb{D}} m_g(z_j),$$

da  $n(\partial\mathbb{D}, z_j) = 1$  für  $z_j \in \mathbb{D}$  und 0 sonst.  $\square$

Sei  $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  für  $\lambda \in \mathbb{C}$  und gegebene  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Frage: Haben alle Nullstellen von  $p$  strikt negativen Realteil? (Dann heißt  $p$  *stabil*.) Setze  $a_j = 0$  für  $j > n$ ,  $a_0 = 1$  und

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix},$$

und allgemein  $\Delta_n$  die Determinante der  $n \times n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & \dots & \dots & a_{2n-2} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}.$$

**Theorem 3.20** (Routh-Hurwitz). Seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  und  $\Delta_1, \dots, \Delta_n \neq 0$ . Genau dann haben alle Nullstellen von  $p$  strikt negativen Realteil, wenn

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0. \quad (3.6)$$

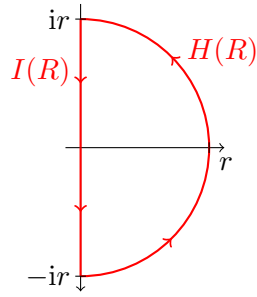
(Gantmacher: *Matrix Theory II*, AMS, 2000, §XV.6)

**Beispiel.** (a)  $n = 2$ :  $p$  stabil  $\iff a_1 > 0, a_2 > 0$

(b)  $n = 3$ :  $p$  stabil  $\iff a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$

(c)  $n = 4$ :  $p$  stabil  $\iff a_1 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 > a_3, a_1 a_2 a_3 > a_1^2 a_4 + a_3^2$

*Beweisskizze* (nur „ $\Leftarrow$ “). Behauptung 1:  $p$  hat keine Nullstelle auf  $i\mathbb{R}$ . Sei  $N$  die Anzahl der Nullstellen von  $p$  in  $\mathbb{C}_+$  (mit Vielfachheit gezählt). Sei  $r > r_0 := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in N(p)\}$ ,  $I(r) = i[-r, r]$ ,  $H(r) = \{re^{i\theta} \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ ,  $\Gamma(r) = H(r) - I(r)$ .



Also

$$n(\lambda, \Gamma(r)) = 1, \quad \forall \lambda \in N(p) \cap \mathbb{C}_+.$$

Nach Theorem 3.16 gilt:

$$2\pi N = \frac{1}{i} \int_{\Gamma(r)} \frac{p'(\lambda)}{p(\lambda)} d\lambda = \underbrace{\frac{1}{i} \int_{H(r)} \frac{p'}{p} d\lambda}_{=: J_1(r)} - \underbrace{\frac{1}{i} \int_{-ir}^{ir} \frac{p'}{p} d\lambda}_{=: J_2(r)}. \quad (*)$$

Zu  $J_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{p'(\lambda)}{p(\lambda)} &= \frac{n\lambda^{n-1} + a_1(n-1)\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}}{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n} \\ &= \frac{n}{\lambda} \frac{\lambda^{n-1} + a_1(1 - \frac{1}{n})\lambda^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}}{\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \dots + \frac{a_n}{\lambda}} \\ &= \frac{n}{\lambda} \left( 1 - \underbrace{\frac{\frac{a_1}{n}\lambda^{n-2} + \dots + \frac{a_n}{\lambda}}{\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \dots + \frac{a_n}{\lambda}}}_{=: q(\lambda)} \right). \end{aligned}$$

Weiterhin gibt es  $r_1 \geq r_0$ ,  $\mu > 0$  mit

$$|q(\lambda)| \leq \frac{\mu}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \text{ mit } |\lambda| \geq r_1.$$

Sei  $r > r_1$ . Dann:

$$J_1(r) = \frac{n}{i} \int_{H(r)} \frac{d\lambda}{\lambda} - \underbrace{\frac{n}{i} \int_{H(r)} \frac{q(\lambda)}{\lambda} d\lambda}_{=: J_3(r)} = \underbrace{\frac{n}{i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta}_{=n\pi} - J_3(r).$$

Dabei:

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq n\pi r \max_{|\lambda|=r} \frac{|p(\lambda)|}{|\lambda|} \leq \frac{n\pi\mu r}{r^2} \longrightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \\ \implies J_1(r) &\longrightarrow n\pi \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} J_2(r) = n\pi,$$

da dann aus (\*)  $N = 0$  folgt.

### 3 Isolierte Singularitäten

Zu  $J_2$ : Sei  $\varphi(t) = p(it)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Setze

$$K(r) = \varphi([-r, r]) = p([-ir, ir]).$$

Dann ist  $K(r)$  eine  $C^1$ -Kurve von  $p(-ir)$  nach  $p(ir)$  (wobei  $r \geq r_1$ ). Wie im Beweis von 3.10 ist

$$J_2(r) = \frac{1}{i} \int_{K(r)} \frac{dw}{w}.$$

Nach Behauptung 1 ist  $p(ix) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , also  $0 \notin K(r)$ , also ist das Integral wohldefiniert.

Sei nun  $n$  gerade (anderer Fall analog).

*Behauptung 2:*  $K(r)$  schneidet  $i\mathbb{R}$  genau  $n$  mal, und zwar entweder vom ersten Quadranten in den zweiten oder vom dritten in den vierten.

Seien  $iy_j = p(ix_j)$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) die  $n$  Schnittstellen aus Behauptung 2,  $K_j(r)$  die Teilkurve von  $K(r)$  von  $iy_{j-1}$  nach  $iy_j$ , für  $j = 2, \dots, n$ ,  $K_1(r)$  die Teilkurve von  $p(-ir)$  nach  $iy_1$ ,  $K_{n+1}(r)$  von  $iy_n$  nach  $p(ir)$ .

Auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  betrachte

$$\text{Log}(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi, \quad (+)$$

wobei  $r > 0$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ . Dann:

$$\exp \text{Log}(w) = w \quad (w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+), \quad \text{Log} \exp(z) = z \quad (\text{Im } z \in (0, 2\pi)).$$

Mit Satz 1.8 sieht man wie für  $\log$ , dass

$$\text{Log}'(w) = \frac{1}{w}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+.$$

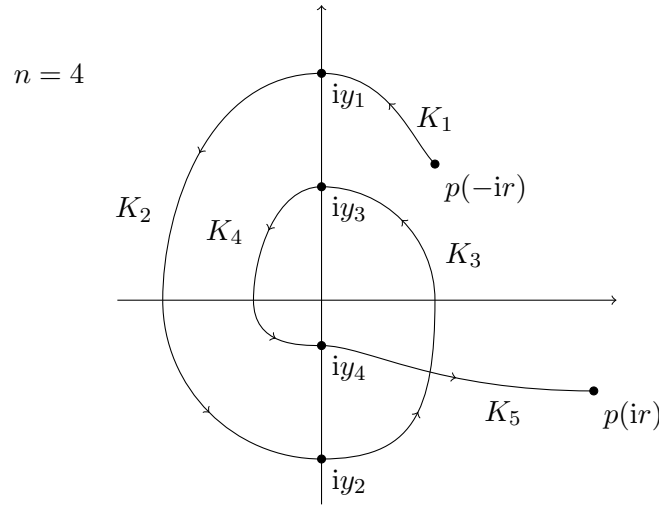
Da  $n$  gerade ist, gilt

$$p(\pm ir) = ((\pm i)^2)^{\frac{n}{2}} r^n + c_{\pm} r^{n-1} + \dots + a_n = (-1)^{\frac{n}{2}} + c_{\pm} r^{n-1} + \dots + a_n$$

für gewisse  $c_{\pm} \in \mathbb{C}$ . Für  $r \rightarrow \infty$  folgen

$$\begin{aligned} \frac{p(\pm ir)}{r^n} &\longrightarrow (-1)^{\frac{n}{2}}, & \frac{|p(\pm ir)|}{|p(-ir)|} &= \frac{\frac{|p(ir)|}{|r^n|}}{\frac{|p(-ir)|}{|r^n|}} \longrightarrow 1 \quad (r \rightarrow \infty), \\ \arg(p(\pm ir)) &= \arg \frac{p(\pm ir)}{r^n} \longrightarrow \begin{cases} 0, & \frac{n}{2} \text{ gerade,} \\ \pi, & \frac{n}{2} \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned} \quad (**)$$

Also gibt es  $r_2 \geq r_1$ , so dass für alle  $r > r_2$   $p(\pm i)$  beide entweder in  $\mathbb{C}_+$  (wenn  $\frac{n}{2}$  gerade) oder in  $\mathbb{C}_-$  (wenn  $\frac{n}{2}$  ungerade) liegen. Sei im folgenden  $\frac{n}{2}$  gerade.



Sei nun  $r$  so groß, dass  $p(\pm ir) \in \mathbb{C}_+$ . Wegen Behauptungen 1 und 2 gilt:  $K_1(r)$  geht von  $p(-ir)$  nach  $iy_1 \in i(0, \infty)$  durch  $\mathbb{C}_+$ .  $K_{n+1}(r)$  geht von  $iy_n \in -i(0, \infty)$  nach  $p(ir)$  durch  $\mathbb{C}_+$ ,  $K_j(r)$  ( $j = 2, \dots, n$ ) läuft von  $iy_{j-1}$  nach  $iy_j$  entweder von  $i(0, \infty)$  durch  $\mathbb{C}_-$  nach  $-i(0, \infty)$  oder von  $-i(0, \infty)$  durch  $\mathbb{C}_+$  nach  $i(0, \infty)$ . Damit:

$$J_2(r) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{i} \int_{K_j(r)} \frac{dw}{w}.$$

Es gilt: Stammfunktion von  $f(w) = \frac{1}{w}$  ist

$$\text{in } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- : \log(w) = \ln(w) + i \arg(w) \quad (\text{nach (1.11)})$$

$$\text{in } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ : \text{Log}(w) = \ln(w) + i\phi, \quad \text{wobei } w = |w| e^{i\phi}, \quad |w| > 0, \quad \phi \in (0, 2\pi) \quad (\text{nach (+)})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J_2(r) &= \frac{1}{i} (\log(iy_1) - \log p(-ir)) + \frac{1}{i} \sum_{\substack{j=2, \dots, n \\ K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_+}}} (\log(iy_j) - \log(iy_{j-1})) \\ &\quad + \frac{1}{i} \sum_{\substack{j=2, \dots, n \\ K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_-}}} (\text{Log}(iy_j) - \text{Log}(iy_{j-1})) + \frac{1}{i} (\log p(ir) - \log(iy_n)) \\ &\stackrel{(\text{1.11})}{=} \frac{1}{i} \ln |y_1| + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{i} \ln |p(-ir)| - \arg(p(-ir)) + \frac{1}{i} \ln |p(ir)| - \frac{1}{i} \ln |y_n| + \frac{\pi}{2} \\ &\quad + \sum_{K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_+}} \left( \frac{1}{i} \ln |y_j| + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{i} \ln |y_{j-1}| + \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad + \sum_{K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_-}} \left( \frac{1}{i} \ln |y_j| + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{i} \ln |y_{j-1}| - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= n\pi + \sum_{j=1}^n \frac{1}{i} \ln |y_j| - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{i} \ln |y_{j-1}| + \frac{1}{i} \ln \frac{|p(ir)|}{|p(-ir)|} + \arg(p(ir)) - \arg(p(-ir)) \\ &\longrightarrow n\pi \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Wegen (\*\*) sind wir fertig.

Zum Beweis von Behauptungen 1 und 2: Sei  $n$  gerade,  $x \in \mathbb{R}$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} p(ix) &= (i^2)^{\frac{n}{2}} x^n + a_1 i (i^2)^{\frac{n-2}{2}} x^{n-1} + a_2 (i^2)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-2} + \cdots + i a_{n-1} x + a_n \\ &= \underbrace{(-1)^{\frac{n}{2}} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n}_{=: f_1(x) = \operatorname{Re}(p(ix))} + i \underbrace{((-1)^{\frac{n}{2}-1} a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x)}_{=: f_2(x) = \operatorname{Im}(p(ix))}. \end{aligned}$$

Gantmacher §XV.6 (33) und §XV.3 besagt, dass aus (3.6) folgt: Im euklidischen Algorithmus

$$f_{k-1} = q_k f_k - f_{k+1} \quad (***)$$

treten Polynome  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, n+1$  mit Grad  $n+1-k$ , also  $f_{n+1} \neq 0$  ist konstant, auf.

Weiter haben die  $f_k$  führende Koeffizienten ungleich 0 mit wechselndem Vorzeichen. (++)

Damit:

$$f_{k-1}, f_k \ (k = 2, \dots, n+1) \text{ haben keine gemeinsamen Nullstellen,} \quad (+++)$$

da sonst  $f_{k+1}(x_0) = 0$  aus (\*\*\*) folgen würde. Iterativ folgt dann  $f_{n+1}(x_0) = 0$ : WIDERSPRUCH. Also haben  $f_1$  und  $f_2$  keine gemeinsame Nullstelle, das heißt

$$p(ix) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

womit Behauptung 1 gezeigt ist.

Sei  $V(x)$  die Anzahl der Vorzeichenwechsel in  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n+1}(x)$  (wobei  $f_k(x) = 0$  ignoriert wird). Dann folgt nach (++)

$$\exists \alpha < \beta : V(x) = 0 \quad \forall x \leq \alpha, \quad V(x) = n \quad \forall x \geq \beta. \quad (\times)$$

$V(x)$  kann sich nur beim Durchgang eines  $f_k$  durch eine Nullstelle ändern. Nach (+++) behalten dabei  $f_{k-1}, f_{k+1}$  ihr Vorzeichen. Falls  $f_k(x_0) = 0$  für ein  $k \geq 2$ , liefern (\*\*\*) und (+++), dass

$$f_{k-1}(x_0) - f_{k+1}(x_0) < 0.$$

Wegen Stetigkeit gilt dies auch für  $x \approx x_0$ , zum Beispiel haben  $f_{k-1}(x), f_k(x), f_{k+1}(x)$  die Vorzeichen  $+, +, -$  für  $x' < x_0$ ,  $+, 0, -$  für  $x' = x_0$ ,  $+, -, -$  für  $x' > x_0$ , also ist  $V(x) = V(x')$ . Das gilt auch für die anderen Fälle, das heißt  $V(x)$  ändert sich nicht bei Nullstellen von  $f_2, \dots, f_{n+1}$ . Wenn  $f_1$  das Vorzeichen wechselt, ändert sich  $V$  um  $\pm 1$  (da nach (+++) das Vorzeichen von  $f_2$  gleich bleibt). Nach ( $\times$ ) muss  $V(x)$  bei  $x = x_k$  um  $+1$  ansteigen. Dazu: Für  $x < x_k$ ,  $x \approx x_k$  gilt für die Vorzeichen von  $f_1(x), f_2(x)$ :  $++$ ,  $+-$ ,  $-+$ ,  $--$  und für  $x > x_k$ ,  $x \approx x_k$ :  $-+$ ,  $--$ ,  $++$ ,  $+-$ . Nur bei Übergängen von  $++$  zu  $-+$  und  $--$  zu  $+-$  steigt  $V(x)$  an, also können nur solche auftreten. Das entspricht Übergängen von dem 1. in den 2. Quadranten, beziehungsweise von dem 3. in den 4. Quadranten. Damit ist Behauptung 2 gezeigt.  $\square$

**Beispiel 3.21** (Grundmodell der Virendynamik, Nowak, May 2000). Sei

$$V(t) = \text{Anzahl der Viren zur Zeit } t \geq 0$$

$$Z(t) = \text{Anzahl der gesunden Zellen zur Zeit } t \geq 0$$

$$I(t) = \text{Anzahl der infizierten Zellen zur Zeit } t \geq 0$$

und es seien Konstanten  $\lambda, m, \mu, \nu, k, r > 0$  und Anfangswerte  $V_0, Z_0, I_0 \geq 0$  gegeben. Betrachte

$$\begin{cases} V'(t) = kI(t) - \nu V(t), & t \geq 0 \\ Z'(t) = \lambda - mZ(t) - rV(t)Z(t), & t \geq 0 \\ I'(t) = rV(t)Z(t) - \mu I(t), & t \geq 0 \\ V(0) = V_0, \ Z(0) = Z_0, \ I(0) = I_0. \end{cases}$$



Setze  $u = (V, Z, I)$ , rechte Seite  $=: f(u)$ . Klar:  $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ . Nach Picard-Lindelöf existiert genau eine Lösung. Weiter kann man zeigen, dass diese für alle  $t \geq 0$  existiert und positiv ist. Wir suchen eine positive stationäre Lösung  $u(t) = u_0 = (V_0, Z_0, I_0)$  für alle  $t \geq 0$ , d.h.  $u'(t) = 0$  für alle  $t \geq 0$ , also  $f(u_0) = 0$ . Dies gilt entweder für  $(\bar{V}, \bar{Z}, \bar{I}) = (0, \frac{\lambda}{m}, 0)$  („krankheitsfrei“) oder für

$$u_* = (V_*, Z_*, I_*) = \left( (R-1)\frac{m}{r}, \frac{\lambda}{mR}, (R-1)\frac{m\nu}{rk} \right)$$

(„endemisch“) mit Reproduktionsrate  $R = \frac{kr\lambda}{m\mu\nu} > 1$ .

Frage: Gilt  $u(t) \rightarrow u_*$  für  $t \rightarrow \infty$  ( $R > 1$ )?

Analysis 2: einfache Antwort: Theorem von Lyapunov: Sei  $R > 1$ ,  $A = f'(u_*)$ . Wenn  $S(A) = \max \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A \} < 0$ , dann existieren  $c, \delta, \varepsilon > 0$ , sodass für alle  $u_0 > 0$  mit  $|u_0 - u_*| \leq \delta$  gilt:  $|u(t) - u_*| \leq ce^{-\varepsilon t}$  ( $\forall t \geq 0$ ) (Aulbach: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Theorem 7.6.3 und Beweis). Hier ist

$$A = f'(V_*, Z_*, I_*) = \begin{pmatrix} -\nu & 0 & k \\ -rZ_* & -m - rV_* & 0 \\ rZ_* & rV_* & -\mu \end{pmatrix}$$

und das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + \underbrace{(\nu + m + rV_* + \mu)}_{=a_1} \lambda^2 + \underbrace{(\mu + \nu)(m + rV_*)}_{=a_2} \lambda + \underbrace{\mu\nu rV_*}_{=a_0}.$$

Da  $V_* > 0$ , gilt  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_1 a_2 > a_3$ . Nach Theorem 3.20 ist dann  $S(A) < 0$ . Also: wenn  $u_0 \approx u_*$ , dann  $u(t) \rightarrow u_*$  exponentiell. Mehr Infos: Prüss, Schnaubelt, Zacher: Mathematische Biologie, §13.

