

6 Primzahltests

Ein Primzahltest ist ein Algorithmus $\text{Prim}(m)$, der zu $m \in \mathbb{N}_+$ entscheidet, ob $m \in \mathbb{P} \vee m \notin \mathbb{P}$.

Einteilung der Tests (\neg -disjunkt):

- a) + Allgemeiner Test ($\forall m \in \mathbb{N}$)
 - Spezieller Test (nur gewisse $m \in \mathbb{N}$)
- b) + Voll bewiesener Test
 - Test abhängig von einer Vermutung (zB Riemann-Vermutung)
- c) + Sicherer Test
 - Propabilistischer Test (Monte-Carlo-Methode)
- d) + Praktikabler Test (geht für „große“ m)
 - Unpraktischer Test

Beispiel

- a) Pepins Test: nur für $F_n = 2^{2^n} + 1$
- d) Naiver Test: Probiere $a \mid m, \forall a \in \mathbb{N}, 1 < a \leq \sqrt{m}$
- d) Wilsons Test: $m \in \mathbb{P} \Leftrightarrow (m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$, es sind mindestens m „Aktionen“ nötig

Beweis (Wilsons Test)

„ \Rightarrow “: $m = p \in \mathbb{P}$. In \mathbb{F}_p :

$(m-1)! = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_p^\times} \alpha = \bar{1} \cdot (\overline{-1})$. Paare $\alpha\alpha^{-1}$ heben sich weg. Wenn $\alpha \neq \alpha^{-1}$ verbleibt $\alpha^2 = 1$, da $\alpha = \pm 1 \Rightarrow (m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$

„ \Leftarrow “: $m \notin \mathbb{P} \Rightarrow \text{ggT}((m-1)!, m) = d > 1 \Rightarrow (m-1)! \not\equiv -1 \pmod{m}$ (sonst $d \mid -1$) ■

Prinzip moderner PZTests:

Meist ohne Einschränkung $m > 2, 2 \nmid m$. (Rechnung für große m aufwändig, daher gewöhnlich erst $p \mid m$ probiert für die $p \in \mathbb{P}$, etwa $p \leq 100000 \vee p \leq 1000000$). Man konstruiert Gruppe G_m derart, dass die Struktur von G_m für $m \in \mathbb{P} \wedge m \notin \mathbb{P}$ verschieden ausfällt. Die Strukturverschiedenheit soll mit möglichst wenig und schnellen Rechnungen festgestellt werden.

EZT: Meist $G_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$

Höhere ZT: Etwa $G_m = (\sigma_k / \sigma_k \cdot m)^\times$, wobei σ_k ein Ring „ganzer algebraischer Zahlen“, im algebraischen Zahlkörper K ist.

Beispiel

$K = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i, \sigma_k = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ (Ring der ganzen Gaußschen Zahlen)

Algebraische Geometrie: G_r konstruiert aus „elliptischer Krume“, die über \mathbb{Z} definiert ist. Vorzug:

Es gibt ∞ viele elliptische Kurven und Zahlkörper. Man kann versuchen, möglichst „geeignete“ zu finden. Hier $G_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

- (A) Ein \neg -ganz geklückter Versuch
 Strukturaussage für G_p ($p \in \mathbb{P}$):
 Satz von Euler-Fermat: $\bar{a}^{p-1} = 1$.

Definition

Sei ohne Einschränkung $m > 2, 2 \nmid m$. $a \in \mathbb{Z}$ heiße Carmichael-Zeuge (für die Zerlegbarkeit von m), wenn gilt:

- (i) $\text{ggT}(a, m) = 1$
- (ii) $a^{m-1} \not\equiv 1 \pmod{m}$

Klar: Wenn Zeuge gefunden: $m \notin \mathbb{P}$.

Leider: $\exists m \in \mathbb{N}$ mit $m \notin \mathbb{P}$, aber kein Zeuge vorhanden!

Definition

Solche $m \notin \mathbb{P}$ (also die mit $\forall a \in \mathbb{Z}, 1 < a < m, \text{ggT}(a, m) = 1$ ist $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$) heißen Carmichael Zahlen.

Satz 6.1 (Carmichael, ~ 1920)

Sei $m \in \mathbb{N}_+, m > 2, \mathbb{P}_m := \{p \in \mathbb{P} \mid p \mid m\}$. Dann: m ist Carmichael Zahl \Leftrightarrow Es gelten:

- (i) $2 \nmid m$
- (ii) m ist qf (???) ($\forall p \in \mathbb{P} : v_p(m) \leq 1$)
- (iii) $\forall p \in \mathbb{P}_m : p-1 \mid m-1$
- (iv) m hat mindestens 3 verschiedene Primteiler ($\#\mathbb{P}_m \geq 3$)

Beispiel

Kleinste Carmichael-Zahl: $m = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17 - 2, 10, 16 \mid 560$

Beweis

„ \Leftarrow “: $\left. \begin{array}{l} \text{Zeige (i) - (iv)} \\ \text{ggT}(a, m) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$.

$\forall p \in \mathbb{P}_m : \text{in } \mathbb{F}_p^\times : \text{ord } \bar{a} \mid p-1 \stackrel{(iii)}{\mid} m-1 \Rightarrow \bar{a}^{m-1} = 1 \text{ in } \mathbb{F}_p \Leftrightarrow a^{m-1} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow p \mid a^{m-1} - 1 \stackrel{(ii)qf}{\Rightarrow} m = \prod_{p \in \mathbb{P}_m} p \mid a^{m-1} - 1 \Rightarrow a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$

„ \Rightarrow “: (-1) kein Zeuge $\Rightarrow (-1)^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$. Falls $2 \mid m \Rightarrow -1 \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow m = 1, 2$ (Widerspruch!). Also $2 \nmid m \leadsto (i)$.

Zu (ii), (iii):

Für $p \in \mathbb{P}_m$ ist $t := v_p(m) \geq 1$. $\exists \text{PW } a \pmod{p}$ mit $\text{ggT}(a, m) = 1$ (Sei $w \text{ PW } \pmod{p}$, löse das System $a \equiv w \pmod{p(ChRS)}, a \equiv 1 \pmod{q(q \in \mathbb{P}, q \neq p)} \Rightarrow q \nmid a, p \nmid a \Rightarrow \text{ggT}(a, m) = 1$)

In $(\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z})^\times$ ist $\bar{a}^{m-1} = 1$ (wegen $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow a^{m-1} \equiv 1 \pmod{p^t} \Rightarrow \text{ord } \bar{a} = \phi(p^t) = p^{t-1}(p-1) \mid m-1 \Rightarrow p-1 \mid m-1 \leadsto (iii)$)

Wäre $t > 1 \Rightarrow p \mid m - 1$ (Widerspruch zu $p \nmid m$).

Also $v_p(m) = 1 \leadsto$ (ii)

Noch zu widerlegen: $\mathbb{P}_m = \{p, q\}, p \neq q$, etwa $2 < p < q(\star)$

$m = pq$ laut (ii), $q - 1 \mid m - 1 = pq - 1 = p(q - 1) + p - 1 \Rightarrow q - 1 \mid q - 1 \Rightarrow q \leq p$
(Widerspruch (\star)) ■

(B) Ein geglückter Versuch

$m \in \mathbb{N}, m > 2, 2 \nmid m$. Schreibe $m - 1 = 2^t \cdot u$ mit $t = v_2(m - 1)$ also $2 \nmid u, t > 0$.

Definition

$a \in \mathbb{N}$ heiße Miller-Zeuge (für die Zerlegbarkeit von m), wenn gilt:

(i) $\text{ggT}(a, m) = 1$

(ii) $a^u \not\equiv 1 \pmod{m}$

(iii) $\forall s \in \{0, \dots, t - 1\} : a^{u2^s} \not\equiv -1 \pmod{m}$

Satz 6.2

Miller-Rabin-PZTest Sei $m \in \mathbb{N}, m > 2, 2 \nmid m$. Dann: $m \notin \mathbb{P} \Leftrightarrow \exists$ Miller-Zeuge a .
($0 < a < m$)

Zusatz (Rabin): Es gibt dann höchstens $\frac{3}{4}\phi(m) \leq \frac{3}{4}(m - 1)$ \neg -Zeugen

\leadsto Liefert voll bewiesenen Test:

Test, ob $\frac{1}{4}(m - 1) + 1$ as Zeugen sind.

Sobald Zeugen gefunden $\Rightarrow m \notin \mathbb{P}$.

Kein Zeuge gefunden $\Rightarrow m \in \mathbb{P}$.

Aber immer noch unpraktisch (ca $\frac{1}{4}m$ Aktionen). Es gibt einen sehr praktischen propabilistischen Test:

Teste, ob k zufällig ausgewählte Restklassen \bar{a} ($1 < a < m$) Zeuge sind (falls $\text{ggT}(a, m) = d > 1$, so $m \notin \mathbb{P}$, sonst $\text{ggT}(a, m) = 1$). Falls Zeuge gefunden $\Rightarrow m \notin \mathbb{P}$. Falls kein Zeuge gefunden: Die WK (???), dass man sich mit der Annahme „ m ist prim“ irrt, ist $< \frac{1}{4^k}$.

Für große m scheint die WK sogar viel kleiner als $\frac{1}{4^k}$. [experiment. Faktoren]

| | |
|------------|------------------------------------|
| $m <$ | Zeuge, falls $m \notin \mathbb{P}$ |
| 2047 | 2 |
| 1373653 | $2 \vee 3$ |
| 3215031753 | $2, 3 \vee 5$ |

Beweis

„ \Leftarrow “: $m = p \in \mathbb{P}, \bar{a} \in \mathbb{F}_p^\times$
 $\text{ord } \bar{a} \mid \phi(p) = p - 1 = 2^t \cdot u$
 $\text{ord } \bar{a} = 2^s \cdot v, 2 \nmid v, s \leq t, v \mid u$

1. Fall: $s = 0 \Rightarrow \bar{a}^v = 1 \Rightarrow \bar{a}^u = 1 \Rightarrow a^u \equiv 1 \pmod{p}$, kein Zeuge

2. Fall: $s > 0 \Rightarrow \bar{a}^{2^{s-1}v} = 1, \bar{a}^{2^{s-1}v} \equiv -1 \pmod{m}, s \in \{0, \dots, t - 1\} \Rightarrow$ kein Zeuge ■

Weiter bei der letzten Vorlesung:

$$m-1 = 2^t u, 2 \nmid u$$

$$\text{Millerzeuge } a: \text{ggT}(a, m) = 1, a^u \not\equiv 1 \pmod{m}$$

$$\forall s = 0, \dots, t-1 : a^{u2^s} \not\equiv 1 \pmod{m}$$

Rest:

$$m \notin \mathbb{P} \Rightarrow \exists \text{ Millerzeuge}$$

Fall I: $\#\mathbb{P}_m \geq 2, \mathbb{P}_m = \{p_1, \dots, p_t\}$

$$a \equiv -1 \pmod{p_1}$$

$$a \equiv 1 \pmod{p_j (j > 1)}$$

(mit Chinesischem Restsatz lösen)

$$a^u \equiv (-1)^u \equiv -1 \pmod{p_1}, \text{ also ist } a^u \equiv 1 \pmod{m} \text{ falsch (sonst } -1 \equiv 1 \pmod{p_2} \Rightarrow p_1 = 2 \text{ [Widerspruch!])}, \text{ also } a^u \not\equiv 1 \pmod{m}$$

$$a^{u2^s} \equiv 1^{u2^s} \equiv 1 \pmod{p_j (j > 1)} \Rightarrow a^{u2^s} \equiv -1 \pmod{m} \text{ ist falsch, also } a^{u2^s} \not\equiv 1 \pmod{m}$$

Gesehen: a ist Millerzeuge

Fall II: $m = p^t, p \in \mathbb{P}, t > 1$: ist a Primitivwurzel $\pmod{m = p^t}$, so ist a Millerzeuge.

$$\text{ord}(\bar{a}) = \phi(p^t) = (p-1)p^{t-1}$$

$$- \Rightarrow \bar{a}^u \neq 1, \text{ weil sonst } \text{ord}(\bar{a}) \mid u \Rightarrow p \mid u \mid m-1 \text{ (Widerspruch zu } p \mid m)$$

$$- \Rightarrow \bar{a}^{u2^s} = -1 \Rightarrow \bar{a}^{u2^{s+1}} = 1 \Rightarrow \text{ord}(\bar{a}) = (p-1)p^{t-1} \mid u2^{s+1} \Rightarrow p \mid u \mid m-1 \text{ (Widerspruch!)} \Rightarrow a^{u2^s} \equiv -1 \pmod{m}$$

Stand der Technik:

- 1.) Primzahlen $< 10^{130}$ mit guter Sicherheit „leicht“ auffindbar, z.B. mit Miller Rabin
- 2.) Zahlen der Größe $> 10^{130}$, erstreckt $m = pq, p, q \geq 10^{130}$ können nicht faktorisiert werden.

Praktischer Test von Rumely, fast in Polynomial-Zeit, vorhanden (Zeit $\approx \log(m)^{c \log \log \log m}$). Falls die verallgemeinerte Riemann-Vermutung gilt, so ist dieser Test sogar in Polynomial-Zeit.

Kayal, Saxena, Aal 2002: Voll bewiesener Primzahltest in Polynomial-Zeit. Fraglich ob dies ein praktischer Test ist.

Faktorisierung großer Nichtprimzahlen scheint ein viel härteres Problem zu sein.

Idee von Fermat:

$$\mathbb{N}_+ \ni m = x^2 - y^2, x, y \in \mathbb{N}, m = (x-y)(x+y), x \geq y \text{ ist Faktorisierung, wenn } x-y \neq 1, m, x-y=1 \text{ und } x+y \neq m. 1, x+y=m \Rightarrow x = \frac{m+1}{2}, y = \frac{m-1}{2} \text{ also echte Teiler, wenn } x, y \neq \frac{m \pm 1}{2}$$

Viele moderne Tests arbeiten so: Suche $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x^2 \equiv y^2 \pmod{m}, x \not\equiv \pm y \pmod{m}$

Gute Chance, dass $\text{ggT}(m, x-y)$ oder $\text{ggT}(m, x+y)$ echter Teiler von m ist. Sehr viel Test, um die Suche nach solchen x, y zu beschleunigen: Siehe z.B. Förster, Algorithmic number theory

6.1 Anwendung der EZT in der Kryptographie

Rivests öffentliches Chiffrier System. m große Zahl.

Nachricht ist hier $N \in \text{Versys}_m^\times = \{a \in \mathbb{N} \mid 0 < a < m, \geq (a, m) = 1\}$ (Falls $m = p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_l^{n_l}$, $p_1 < \dots < p_l \in \mathbb{P}$, $n_j \in \mathbb{N}_+$, so sind alle $N \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq N < p_1$ im Versys_m . N kodiert Textabschnitt mit k Zeichen, z.B. Leerstelle = 000, Jedes Zeichen erhält Ziffern < 1000 .

Beispiel

$N =$

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| K | O | M | M | | N | I | C | H | T |
| 011 | 015 | 013 | 013 | 000 | 014 | 009 | 003 | 008 | 020 |

$< 10^{3k}$

Definition

- (i) Eine Chiffre ist (für uns) eine bijektive Abbildung $P : \text{Versys}_m^\times \rightarrow \text{Versys}_m^\times$, $N' = P(N)$ ist die „chiffrierte“ Nachricht.
- (ii) ein „öffentliches Chiffresystem“ ist eine Liste („öffentliches Adressbuch“):
 (T, P_T) , $T \in \tau =$ Menge von Teilnehmern. P_T Chiffre, derart, dass $T \neq T' \Rightarrow P_T \neq P_{T'}$
 - (a) Jeder Teilnehmer $T \in \tau$ erhält das Adressbuch $(T, P_T)_{T \in \tau}$
 - (b) T und nur T erhält P_T^{-1} (Umkehrabbildung von P_T)
Praktisch: T muss P_T^{-1} besonders gut sichern, gegen Diebstahl, Ausspähen, Hacker, usw.

Technische Anforderungen:

- 1.) $P_T(N)$, $P_T^{-1}(N)$ müssen in vernünftiger Realzeit berechenbar sein
- 2.) Nicht einmal ein Supercomputer kann P_T^{-1} aus P_T ermitteln (P_T Trapdoor-Funktion)
- 3.) Nur T hat P_T^{-1} . Der Systemadministrator hat am Anfang die P_T 's und die P_T^{-1} 's. Nach Absenden von P_T^{-1} an T vernichtet er P_T^{-1}

Anwendungen:

- I) Geheime Nachricht über öffentlich zugängliche Kanäle (etwa Internet) übermitteln T von A zu B , $A, B \in \tau$ ohne das Unbefugte N gewinnen können.

Methode: A berechnet $P(N) = N'$ und sendet N' an B . Nur B kann aus N' wieder $N = P_B^{-1}(N')$ ermitteln.

Beispiel:

- A Spion des Geheimdienstes, $B =$ Geheimdienstzentrale, C, D die gegnerischen Geheimdienste
- A ist Bank, B ist Kunde, N = Kontostand

- II) Geheimnachricht mit elektronischer Unterschrift

Methode: A sendet an B : „ $N = P_B P_A^{-1}(N)$, Gruß A “. Nur A kann N' herstellen, nur B kann daraus $N = P_A P_B^{-1}(N')$ gewinnen.

Beispiel:

$A = \text{Kunde}$, $B = \text{Bank}$, $N = \text{„Überweisen Sie 200'000.- von meinem Konto an } C\text{“}$

III) Sichere Speicherung von Nachrichten

Methode: Speichere $N' = P_{A_t}^{-1}(N) \dots P_{A_1}^{-1}(N)$. Benötigt werden $A_1, \dots, A_t \in \tau(t = 1)$. Nur mit Willen von allen Mitwirkenden A_1, \dots, A_t kann N aus N' wieder rekonstruiert werden.

EZT kann z.B. zum Erfüllen der technischen Voraussetzungen verwendet werden.

Rivests Vorschlag \subseteq RSA-Code (Rinest, Shamir, Adleman 1978)

Adressbuch: Liste(T, m_T, s_T), $m_T, s_T \in \mathbb{N}$, $m_T = p_1^{n_1} \dots p_l^{n_l}$, p_i zu Anfang dem Administrator bekannt, öffentlich nur m_T 's, s_T 's ziemlich groß.

Chiffre $P_T(N) := (N^{s_T} \bmod m_i)$. Dann theoretisch $P_T^{-1}(N') = N^{t_T}$, wobei $t_T s_T \equiv 1 \bmod \phi(N)$ (Euler Funktion). Hiermit erhält T auch noch t_T . t_T ist nur berechenbar, wenn $\phi(m) = m \prod_{p|m} (1 - \frac{1}{p})$ bekannt, dass geht nur (nach heutigem Wissen), wenn Primzerlegung, also die p_i bekannt sind.