§ 6.

Differenzierbarkeitseigenschaften reellwertiger Funktionen

Definition

(1) Seien $a, b \in \mathbb{R}^n; S[a, b] := \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$ heißt **Verbindungsstrecke** von a und b

(2) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex** $:\Longleftrightarrow$ aus $a, b \in M$ folgt stets: $S[a, b] \subseteq M$

(3) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $x^{(0)}, \ldots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$. $S[x^{(0)}, \ldots, x^{(k)}] := \bigcup_{j=1}^k S[x^{(j-1)}, x^{(j)}]$ heißt **Streckenzug** durch $x^{(0)}, \ldots, x^{(k)}$ (in dieser Reihenfolge!)

(4) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$. G heißt **Gebiet**: $\Longleftrightarrow$ G ist offen und aus $a, b \in G$ folgt: $\exists x^{(0)}, \ldots, x^{(k)} \in G : x^{(0)} = a, x^{(k)} = b$ und $S[x^{(0)}, \ldots, x^{(k)}] \subseteq G$.

Vereinbarung: Ab jetzt in diesem Paragraphen: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Satz 6.1 (Der Mittelwertsatz)
$f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf D, es seien $a, b \in D$ und $S[a, b] \subseteq D$. Dann:

$$\exists\ \xi \in S[a, b] : f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

Beweis
Sei $g(t) := a + t \cdot (b - a)$ für $t \in [0, 1]$. $g([0, 1]) = S[a, b] \subseteq D$. $\Phi(t) := f(g(t))(t \in [0, 1])$ 5.4 $\Longrightarrow$ Φ ist differenzierbar auf $[0, 1]$ und $\Phi'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = f'(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$. $f(b) - f(a) = \Phi(1) - \Phi(0) \xRightarrow{\text{MWS, AI}} \Phi'(\eta) = f'(\underbrace{a + \eta(b - a)}_{=:\xi \in S}) \cdot (b - a), \eta \in [0, 1]$ ∎

Folgerungen 6.2
Sei D ein **Gebiet** und $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf D.

(1) Ist $f'(x) = 0\ \forall x \in D \implies f$ ist auf D konstant.

(2) Ist $f'(x) = g'(x) \forall x \in D \implies \exists c \in \mathbb{R} : f = g + c$ auf D.

Beweis
(2) folgt aus (1). (1) Seien $a, b \in D$. Z.z.: $f(a) = f(b)$. $\exists x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \in D, x^{(0)} = a, x^{(k)} = b$: $S[x^{(0)}, \dots, x^{(k)}] \subseteq D$ $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ ex. nach 6.1 ein $\xi_j \in S[x^{(j-1)}, x^{(j)}] : f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) = \underbrace{f'(\xi_j)}_{0} \cdot (x^{(j)} - x^{(j-1)}) = 0 \implies f(x^{(j)}) = f(x^{(j-1)}) \implies f(a) = f(x^{(0)}) = f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = \dots = f(x^{(k)}) = f(b)$. ■

Satz 6.3 (Bedingung für Lipschitzstetigkeit)
D sei konvex und $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf D. Weiter sei f' auf D beschränkt. Dann ist f auf D Lipschitzstetig.

Beweis
$\exists L \geq 0 : \|f'(x)\| \leq L \forall x \in D$. Seien $u, v \in D$. D konvex $\implies S[u, v] \subseteq D$. 6.1 $\implies \exists \xi \in S[u, v]$: $f(u) - f(v) = f'(\xi) \cdot (u - v) \implies |f(u) - f(v)| = |f'(\xi) \cdot (u - v)| \overset{CSU}{\leq} \|f'(\xi)\| \|u - v\| \leq L \|u - v\|$. ■

Satz 6.4 (Linearität)
Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

Φ ist linear $\iff$ $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $\Phi(\alpha x) = \alpha \Phi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis
“ $\implies$ ”: “ $\impliedby$ ”: O.B.d.A.: $m = 1$. Z.z.: $\exists a \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = a \cdot x \forall x \in \mathbb{R}^n$. $a := \Phi'(0) \Phi(0) = \Phi(2 \cdot 0) = 2 \cdot \Phi(0) \implies \Phi(0) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R} : \Phi(\alpha x) = \alpha \Phi(x) \overset{5.4}{\implies} \alpha \Phi'(\alpha x) = \alpha \Phi'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \Phi'(x) = \Phi'(\alpha x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall \alpha \neq 0$. $\xrightarrow{\alpha \to 0,\, f \in C^1} \Phi'(x) = \Phi'(0) = a$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. $g(x) := (\Phi(x) - ax)^2$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, $g(0) = (\Phi(0) - a \cdot 0)^2 = 0$. 5.4 $\implies g$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ und $g'(x) = 2(\Phi(x) - ax)(\Phi'(x) - a) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. 6.2(1) $\implies g(x) = g(0) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \implies \Phi(x) = a \cdot x$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. ■

Die Richtungsableitung Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Ist $a \in \mathbb{R}^n$ und $\|a\| = 1$, so heißt a eine **Richtung** (oder ein **Richtungsvektor**).

Sei $a \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung. D offen $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$. Gerade durch x_0 mit Richtung $a : \{x_0 + ta : t \in \mathbb{R}\}$. $\|x_0 + ta - x_0\| = \|ta\| = |t|$. Also: $x_0 + ta \in D$ für $t \in (-\delta, \delta)$, $g(t) := f(x_0 + ta)$ $(t \in (-\delta, \delta))$.

f heißt **in x_0 in Richtung a db**, gdw. der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$$

existiert und $\in \mathbb{R}$ ist. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t}$$

die **Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung a**.

Beispiele:

(1) f ist in x_0 partiell db nach $x_j \iff f$ ist in x_0 db in Richtung e_j. In diesem Fall gilt: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0)$.

(2)
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$x_0 = (0,0)$. Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung, also $a_1^2 + a_2^2 = 1$; $\frac{f(ta)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\frac{t^2 a_1 a_2}{t^2 a_1^2 + t^2 a_2^2} = \frac{a_1 a_2}{t}$. D.h.: $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)$ ex. $\iff a_1 a_2 = 0 \iff a \in \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$. In diesem Fall: $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = 0$.

(3)
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$x_0 = (0,0)$. Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}$ eine Richtung. $\frac{f(ta)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\frac{t^3 a_1 a_2^2}{t^2 a_1^2 + t^4 a_2^4} = \frac{a_1 a_2^2}{a_1^2 + t^2 a_2^4} \overset{t\to 0}{\to} \begin{cases} 0 & \text{, falls } a_1 = 0 \\ \frac{a_2^2}{a_1} & \text{, falls } a_1 \neq 0 \end{cases}$

D.h. $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)$ existiert für *jede* Richtung $a \in \mathbb{R}^2$. Z.B.: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) : \frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$f(x, \sqrt{x}) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}\ \forall x > 0 \implies f$ ist in $(0,0)$ *nicht* stetig.

Satz 6.5 (Richtungsableitungen)
Sei $x_0 \in D,\ a \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung, $f : D \to \mathbb{R}$.

(1) $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ existiert $\iff \frac{\partial f}{\partial(-a)}(x_0)$ existiert. In diesem Fall ist:
$$\frac{\partial f}{\partial(-a)}(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$$

(2) f sei in x_0 db. Dann:

(i) $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ existiert und
$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = a \cdot \operatorname{grad} f(x_0).$$

(ii) Sei $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$ und $a_0 := \|\operatorname{grad} f(x_0)\|^{-1} \cdot \operatorname{grad} f(x_0)$. Dann:
$$\frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|.$$

Weiter gilt: $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) < \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0)$, falls $a \neq a_0$; $\frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) < \frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$, falls $a \neq -a_0$.

Beweis

(1) $\frac{(f(x_0+t(-a))-f(x_0))}{t} = -\frac{(f(x_0+(-t)a)-f(x_0))}{-t} \implies$ Beh.

(2) (i) $g(t) := f(x_0+ta)$ ($|t|$ hinreichend klein). Aus Satz 5.4 folgt: g ist db in $t=0$ und $g'(0) = f'(x_0)\cdot a \implies \frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ existiert und ist $= g'(0) = \operatorname{grad} f(x_0)\cdot a$

(ii) $\left|\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)\right| \overset{(i)}{=} |a\cdot \operatorname{grad} f(x_0)| \overset{\text{CSU}}{\leq} \|a\|\cdot\|\operatorname{grad} f(x_0)\| = \|\operatorname{grad} f(x_0)\| = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}\operatorname{grad} f(x_0)\cdot$ $\operatorname{grad} f(x_0) = a_0\cdot \operatorname{grad} f(x_0) \overset{(i)}{=} \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0)$

$\implies \frac{\partial f}{\partial(-a_0)}(x_0) \overset{(1)}{=} -\frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a}(x_0) \leq \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|$

Sei $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial a_0}(x_0) \overset{(i),(ii)}{\Longrightarrow} a\cdot\operatorname{grad} f(x_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0)\| \implies a\cdot a_0 = 1 \implies$ $\|a-a_0\|^2 = (a-a_0)(a-a_0) = a\cdot a - 2a\cdot a_0 + a_0\cdot a_0 = 1-2+1 = 0 \implies a = a_0$. ■

Der Satz von Taylor Im Folgenden sei $f: D\to\mathbb{R}$ zunächst „genügend oft partiell db", $x_0\in D$ und $h = (h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$. Wir führen folgenden Formalismus ein.

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \text{ („Nabla“)};\ \nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \operatorname{grad} f;\ \nabla f(x_0) := \operatorname{grad} f(x_0)$$

$$(h\cdot\nabla) := h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n};\ (h\cdot\nabla)f := h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+h_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = h\operatorname{grad} f;\ (h\cdot\nabla)f(x_0) := h\cdot\operatorname{grad} f(x_0)$$

$(h\cdot\nabla)^{(0)}f(x_0) := f(x_0)$. Für $k\in\mathbb{N}: (h\cdot\nabla)^{(k)} := \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k$

$(h\cdot\nabla)^{(2)}f(x_0) = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n h_jh_k\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(x_0)$

$(h\cdot\nabla)^{(3)}f(x_0) = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n h_jh_kh_l\frac{\partial^3 f}{\partial x_j\partial x_k\partial x_l}(x_0)$

Beispiel

$(n=2): h = (h_1,h_2)$.

$(h\cdot\nabla)^{(0)}f(x_0) = f(x_0)$, $(h\cdot\nabla)^{(1)}f(x_0) = h\cdot\operatorname{grad} f(x_0) = h_1f_x(x_0)+h_2f_y(x_0)$.

$(h\cdot\nabla)^{(2)}f(x_0) = \left(h_1\frac{\partial f}{\partial x}+h_2\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(x_0) = h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0)+h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0)+h_2h_1\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0)+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0)$.

Satz 6.6 (Der Satz von Taylor)
Sei $k\in\mathbb{N}, f\in C^{k+1}(D,\mathbb{R}), x_0\in D, h\in\mathbb{R}^n$ und $S[x_0,x_0+h]\subseteq D$. Dann:

$$f(x_0+h) = \sum_{j=0}^k\frac{(h\cdot\nabla)^{(j)}f(x_0)}{j!}+\frac{(h\cdot\nabla)^{(k+1)}f(\xi)}{(k+1)!}$$

wobei $\xi\in S[x_0,x_0+h]$

Beweis
$\Phi(t) := f(x_0+th)$ für $t \in [0,1]$. 5.4 $\Longrightarrow$ $\Phi \in C^{k+1}[0,1]$, $\Phi'(t) = f'(x_0+th)\cdot h = (h\cdot\nabla)f(x_0+th)$
Induktiv: $\Phi^{(j)}(t) = (h\cdot\nabla)^{(j)}f(x_0+th)$ $(j = 0,\dots,k+1, t \in [0,1])$. $\Phi(0) = f(x_0), \Phi(1) = f(x_0+h)$; $\Phi^{(j)}(0) = (h\cdot\nabla)^{(j)}f(x_0)$. Analysis 1 (22.2) $\Longrightarrow$ $\Phi(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\Phi^{(j)}(0)f(x_0)}{j!} + \frac{\Phi^{(k+1)}f(\eta)}{(k+1)!}$, wobei $\eta \in [0,1]$ $\Longrightarrow$ $f(x_0+h) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(h\cdot\nabla)^{(j)}f(x_0)}{j!} + \frac{(h\cdot\nabla)^{(k+1)}f(x_0+\eta h)}{(k+1)!}$, $\xi := x_0+\eta h$ ■

Spezialfall 6.7 Sei $f \in C^2(D,\mathbb{R}), x_0 \in D, h \in \mathbb{R}^n, S[x_0, x_0+h] \subseteq D$. Dann:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0)\cdot h + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0+\eta h)$$