

Grundlagen
σ-Algebren \mathfrak{A} ist σ -Algebra, gdw.: $\Omega \in \mathfrak{A}, A^c \in \mathfrak{A}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$
Mengengrenzwerte unendlich viele: $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ alle bis auf endlich viele: $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$

Wahrscheinlichkeitsmaß
$0 \leq P(\omega) \leq 1$ $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ $P(\sum A_i) = \sum P(A_i)$ $P(A^c) = 1 - P(A)$ $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Siebformel
$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$
Also: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten
$P(A B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ B_i seien eine Partition: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A B_i)$ <i>Satz v. Bayes:</i> $P(B_k A) = \frac{P(A B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A B_i) \cdot P(B_i)}$

Diskrete Verteilungen
Gleichverteilung $P(X = x_i) = p_X(x_i) = \frac{1}{n} \ (i = 1, \dots, n)$ $EX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)$
Binomialverteilung $X \sim B(n, p)$ $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $F_X(x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $EX = np, \text{Var}(X) = np(1-p)$ $g_X(s) = (1-p+sp)^n$
neg. Binomialverteilung $X \sim \text{Neg}B(n, p)$ $p_X(k) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$ $F_X(x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$EX = \frac{n}{p}, \text{Var}(X) = n \frac{(1-p)}{p^2}$

Hypergeometrische Verteilung
W'keit, bei m Versuchen ohne Zurücklegen von n s/w-Kugeln k der r weißen zu ziehen. $X \sim \text{Hypergeom}(n, r, m)$
$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$ $EX = \frac{rm}{n}$ $\text{Var}(X) = \frac{rm}{n} \left(1 - \frac{r}{n}\right) \left(\frac{n-m}{n-1}\right)$

Geometrische Verteilung
W'keit beim k -ten Versuch den 1. Treffer zu bekommen, p Trefferw'keit. $p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$ $EX = \frac{1}{p}, \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Poisson-Verteilung
$X \sim \text{Po}(\lambda)$ Approximation der Binomialvert. mit $\lambda = np$ $p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \ (k = 0, \dots)$ $EX = \text{Var}(X) = \lambda$ $g_X(s) = e^{\lambda(s-1)} \ X \sim \text{Po}(\lambda_0), Y \sim \text{Po}(\lambda_1) \Rightarrow X + Y \sim \text{Po}(\lambda_0 + \lambda_1)$

Stetige Verteilungen
Gleichverteilung $X \sim U(a, b)$ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ auf (a, b) $EX = \frac{a+b}{2}, \text{Var}(X) = \frac{1}{12} (b-a)^2$
Exponentialverteilung $X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$ $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $EX = \frac{1}{\lambda}, \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ <i>Gedächtnislosigkeit:</i> $P(X \geq t X \geq s) = P(X \geq t-s) \ (0 < s < t)$
Normalverteilung $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ $EX = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2$ $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$ $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ $\Phi^{-1}(x) = -\Phi^{-1}(1-x)$ $EX = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2$ Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. $\Rightarrow Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ <i>Standardnormalverteilung:</i> $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ <i>Faltungsstabil:</i> $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ $X \sim N(0, 1) :$ $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ $\varphi_X'(t) = -t\varphi_X(t)$
Gammaverteilung $X \sim G(\alpha, \lambda)$ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ wobei $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ $EX = \frac{\alpha}{\lambda}, \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$ $X \sim G(\alpha, \lambda_1), Y \sim G(\alpha, \lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim G(\alpha, \lambda_1 + \lambda_2)$ für $\alpha = 1$ erhält man die Exponentialverteilung.

Formeln
Erwartungswert (Existenz falls mit $ \cdot $ noch $< \infty$) <i>diskret:</i> $EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_X(k)$ $Eg(X) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) P_X(k)$ <i>stetig:</i> $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$ $Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$ $E(aX + bY) = aEX + bEY$ Falls X_i unkorreliert: $E(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$ <i>Erwartungsvektor:</i> $X = (X_1, \dots, X_n)$ ZV, $EX_i^2 < \infty :$ $EX := (EX_1, \dots, EX_n)$ <i>Cauchy-Schwarze Ungleichung:</i> $\text{Var}(X_i), \text{Var}(Y) ex.$ $\Rightarrow (EXY)^2 \leq EX^2 EY^2$
Varianz $\text{Var}(X) := E((X - EX)^2) = EX^2 - (EX)^2 \geq 0$ Daher auch: $EX^2 = \text{Var}(X) + (EX)^2$ $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ Falls X_i nicht unkorreliert: $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$ Falls X_i unkorreliert: $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$ <i>Standardabweichung:</i> $\sigma(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}$
Urnenmodell Mit Zurückl., mit Reihenflg. (k unterscheidbare Objekte mit Mehrfachbel. auf n Fächer): n^k Mit Zurückl., ohne Reihenflg. (nicht untersch. O., mit Mehrfachbel.) : $\binom{n+k-1}{k}$ Ohne Zurückl., mit Reihenflg. (untersch. O., ohne Mehfachbel.): $\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$ Ohne Zurückl., ohne Reihenflg. (nicht untersch. O., ohne Mehrfachbel.): $\binom{n}{k}$
Tschebyscheff Ungleichung $P(X - EX \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X)$

Faltungsformel (X, Y) abs stetige ZV, mit gem Dichte $f_{X,Y} \Rightarrow Z := X + Y$ ist abs stetige ZV mit Dichte: $f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, x-t) dt$ X, Y unabh \Rightarrow Faltungsformel: $f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$
Unabhängigkeit von ZV <i>Def.:</i> $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod F_{X_i}(x_i)$

gdw. bis auf eine Nullmenge: $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod f_{X_i}(x_i)$
Sätze: X, Y unabh. $\Rightarrow EXY = EXEY$ X_1, \dots, X_n unabh $\Rightarrow \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$
Kovarianz $\text{Cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = EXY - EXEY$ $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ $\text{Cov}(aX + bY, Z)$ $= a \text{Cov}(X, Z) + b \text{Cov}(Y, Z)$ $= \text{Cov}(Z, aX + bY)$ X, Y <i>unkorreliert:</i> gdw. $\text{Cov}(X, Y) = 0$ X, Y unabh. $\Rightarrow X, Y$ uncorr. <i>Kovarianzmatrix:</i> $X = (X_1, \dots, X_n) \Rightarrow \text{Cov}(X) := (\text{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1, \dots, n}$ <i>Korrelationskoeffizient:</i> Ist $\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y) > 0$ so gilt: $\left \rho(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} \right \leq 1$
Erzeugende Fkt (diskret) $g_X : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) s^k = E s^X$ $g_X(1) = 1, p_X(k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!}$ $EX = g_X'(1^-), \text{Var}(X) = g_X''(1^-) + g_X'(1^-) - (g_X'(1^-))^2$ X, Y unabh, diskret $\Rightarrow g_{X+Y}(s) = g_X(s) g_Y(s)$

Konvergenzbegriff für ZV
P-fast sicher $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ wenn: $P(\{\omega \in \Omega \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$
in Wahrs'keit, stochastisch $X_n \xrightarrow{P} X$ wenn, $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega X_n(\omega) - X(\omega) \geq \varepsilon\}) = 0$
in Verteilung $X_n \xrightarrow{d} X$ wenn $\forall x$ mit F_X stetig: $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$
Implikationen f.s. \Rightarrow in Wahrs'keit in Wahrs'keit \Rightarrow in Verteilung in Verteilung gegen eine Konstante $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ in Wahrs'keit

Grenzwertsätze
Kolmogorov (Starkes Gesetz der großen Zahlen) X_i unabh. und identisch vert, $E X_1 < \infty: \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{f.s.} EX_1$
Zentraler Grenzwertsatz X_i u.i.v., $E X_1 < \infty,$ $0 < \text{Var}(X_1) < \infty:$ für $n \rightarrow \infty$ gilt: $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot EX_1}{\sqrt{n \cdot \text{Var}(X_1)}} \xrightarrow{d} X \sim \mathcal{N}(0, 1)$
also $P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nEX_1}{\sqrt{n \cdot \text{Var}(X_1)}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x)$
Zweiseitiger Grenzwertsatz Gleiche Voraussetzungen wie oben: $P\left(a \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot EX_1}{\sqrt{n \cdot \text{Var}(X_1)}} \leq b\right) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a)$

Charakteristische Funktion X ZV, $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $\varphi_X(t) := E e^{itX} = E \cos(tX) + i E \sin(tX)$ X diskret $\Rightarrow \varphi_X(t) = g_X(e^{it})$ X abs stetig $\Rightarrow \varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx$ $\varphi_X(0) = 1 \ \varphi_X(t) \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ $a, b \in \mathbb{R}$: $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$ $\varphi_X(t)$ ist glm stetig auf \mathbb{R} X, Y unabh ZV $\Rightarrow \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t)$ $E X ^n < \infty, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi_X$ n -mal db und: $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n EX^n$ X, Y ZV mit gleicher char Fkt, so auch gleiche Verteilung. (X_n) Folge von ZV mit $F_{X_n}(x)$ und $\varphi_{X_n}(t)$ so ist äquivalent:

$X_n \xrightarrow{d} X$ $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ und φ stetig in 0

Parameterschätzung
Definitionen <i>Stichprobenmittel:</i> $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ <i>Stichprobenvarianz:</i> $S^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
Maximum-Likelihood-Methode <i>Likelihood-Funktion:</i> $L_x(\theta) = f_\theta(x_1) \cdot \dots \cdot f_\theta(x_n)$ bzw. $L_x(\theta) = p_\theta(x_1) \cdot \dots \cdot p_\theta(x_n)$ <i>Maximum-Likelihood-Schätzer</i> <i>MLS:</i> bei welchen θ ist L_x maximal. Oft einfacher: $\ln L_x(\theta)$ maximieren. $(\ln a \cdot b = \ln a + \ln b, \ln \prod = \sum \ln)$
Momentenmethode Pro zu schätzenden Parameter ein empirisches Moment mit dem der Verteilung gleichsetzen. Also: $\mu_k(\theta) = E_\theta X^k \stackrel{!}{=} \bar{x}_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$
Eigenschaften <i>Erwartungstreu:</i> $E_\theta T(X) = \theta$ <i>ET</i> hat i.A. nix mit EX zu tun! <i>Bias:</i> $b_T(\theta) := E_\theta T(X) - \theta$ <i>Mittlerer Quadratischer Fehler:</i> $\text{MSE}(T) := E_\theta (T(x) - \theta)^2$ unbiast: $\text{MSE}(T) = \text{Var}_\theta(T)$
Fisher-Info. $I(\theta) := E_\theta \left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log L_X(\theta) \right)^2 \right)$
Ungleichung von Cramér-Rao $\text{Var}_\theta(T(X)) \geq \frac{(1 + \frac{\partial}{\partial \theta} b_T(\theta))^2}{I(\theta)}$

Konfidenzintervalle
Gesucht sind ZV L und U mit $L(x) \leq U(x)$ und $P_\theta(L(x) \leq \theta \leq U(x)) = 1 - \alpha$

Testtheorie Überprüfen, ob ein Parameter θ einer Verteilung in Θ_0 oder Θ_1 ($\Theta_0 + \Theta_1 = \Theta$) ist. <i>Einseitiger Test:</i> $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$ <i>Zweiseitiger Test:</i> $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0$
Test, Fehler und Güte Sei $x \in \mathcal{X}^n$ eine Stichprobe. $\varphi : \mathcal{X}^n \rightarrow \{1, 0\}$ heißt <i>Test</i> : Mit $\varphi(x) = 1$ lehnen wir H_0 für x ab <i>Güte</i> ft: β gibt W'keit an, mit der H_0 wir ablehnen $\beta(\theta) = P_\theta(\varphi(x) = 1)$ <i>F. 1. Art:</i> Test: „ H_1 “ aber H_0 wahr. <i>F. 2. Art:</i> Test: „ H_0 “ aber H_1 wahr. <i>Niveau:</i> $\alpha \hat{=}$ W'keit für Fehler 1. Art $\leq \alpha$. Also: $\beta(\theta) \leq \alpha$ Man legt α fest. Also muss der Fehler 1. Art der schlimmere sein (z.B. unwirksames Medikament als wirksam bedacht oder Ham als Spam eingeordnet). Danach erst minimiert man den Fehler 2. Art. Eselsbrücke: H ypothese $H_0 \hat{=}$ H am.

Likelihood-Quotient Test <i>Likelihood-Quotient:</i> $q(x) := \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L_X(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} L_X(\theta)}$ Test der Form: $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & q(x) > c_0 \\ \gamma, & q(x) = c_0 \\ 1 & q(x) < c_0 \end{cases}$
--

Spezialfall: Neyman-Pearson-T. $\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & L_X(\theta_1) > c^* L_X(\theta_0) \\ \gamma & L_X(\theta_1) = c^* L_X(\theta_0) \\ 0 & L_X(\theta_1) < c^* L_X(\theta_0) \end{cases}$
--

Hilfreiche Rechenregeln

Diskrete

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

Integrale

$$\int f \cdot g = [f \cdot G] - \int f' \cdot G$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

$(1-\alpha)$ -Konfidenzintervalle

Regenwurmaufgabe

Annahme: Länge d. Regenwurm auf $(0, \theta)$ gleichverteilt. Maximallänge von n Würmern liegt vor. Gebe ein $(1-\alpha)$ -KonfInt für θ an. **Lösung:** $P_\theta(\max\{X_1, \dots, X_n\} \geq x) = 1 - P_\theta(X_1 < x) \cdot \dots \cdot P_\theta(X_n < x) = 1 - \left(\frac{x}{\theta}\right)^n = 1 - \alpha \Rightarrow x = \theta \sqrt[n]{1-\alpha}$.
Somit: $\max\{X_1, \dots, X_n\} \geq \theta \sqrt[n]{1-\alpha} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{\sqrt[n]{1-\alpha}}$

Konfidenzintervall:

$$\left[\max\{X_1, \dots, X_n\}, \frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{\sqrt[n]{1-\alpha}} \right]$$

Scriptbeispiel 15.2

Schätzung der

Erfolgswahrscheinlichkeit.

$X \sim B(m, \theta)$, $\Theta = [0, 1]$ Dann gilt:

$$L(x) = \frac{1}{m + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}$$

$$\left(x + \frac{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}{2} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}{4}} \right) \beta_c(\mu) = 1 - \Phi\left(\sqrt{n} \frac{c-\mu}{\sigma_0}\right) \text{ Es genügt: } \beta_c(\mu_0) \leq \alpha$$

$$U(x) = \frac{1}{m + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}$$

$$\left(x + \frac{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}{2} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}{4}} \right) \beta_c(\mu_0) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\underbrace{\sqrt{n} \frac{c-\mu_0}{\sigma_0}}_{=z_{1-\alpha}}\right) \leq \alpha \Leftrightarrow c \geq \frac{z_{1-\alpha} \sigma_0}{\sqrt{n}} + \mu_0 =: c^*$$

wobei x Treffer der Stichprobe, $z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Hypothesentest

Test auf Mittelw, Var bekannt

$X = (X_1, \dots, X_n)$, $X_i \sim P_\mu =$

$N(\mu, \sigma_0^2)$, σ_0 bekannt, $\mu \in \Theta = R$.

Einseitiger Test

$H_0: \mu \leq \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$

mit $\mu_0 \in R$ geg.

Sinnvoller Test:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \bar{x} \leq c \\ 1 & , \bar{x} > c \end{cases}$$

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. $c \in R$ nun zu bestimmen, sodass Testniveau α eingehalten.

Betrachte $\sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_0}$

$$P_\mu \left(\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0} \leq x \right) = \Phi(x)$$

Test auf Mittelw, Var unbekannt (sog. t-Test)

$P_{\mu, \sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$,

$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = R \times R_+$. σ^2 ist

hier nicht bekannt!

Einseitiges Testproblem:

$H_0: \mu \leq \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$ für ein

festes $\mu_0 \in R$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ Zufallsstichprobe

zu P_{μ, σ^2} . Dann gilt:

$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S(X)} \sim t_{n-1}$, wir mussten also im Gegensatz zu oben σ durch $S(X)$ ersetzen.

Folgender Test hält α :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} \leq t_{n-1}(1-\alpha) \\ 1, & \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} > t_{n-1}(1-\alpha) \end{cases}$$

Zweiseitiger Test:

$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$

Der zugehörige Test ist:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} \right| \leq t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \\ 1, & \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} \right| > t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \end{cases}$$

Test auf die Varianz

$P_{\mu, \sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$,

$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = R \times R_+$. wie gehabt.

Einseitiger Test:

$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs. $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

Es gilt:

$$P_{\mu, \sigma^2} \left(\frac{(n-1)S(X)^2}{\sigma_0^2} \leq x \right) = F_{\chi_{n-1}^2}(x)$$

Folgender Test tut es:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{n-1}^2(1-\alpha) \\ 1, & \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1}^2(1-\alpha) \end{cases}$$

Zweiseitiger Test

$H_0: \sigma = \sigma_0$ vs. $H_1: \sigma \neq \sigma_0$

Hier gewinnt:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \frac{(n-1)S^2(x)}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 0, & \frac{(n-1)S^2(x)}{\sigma_0^2} < \chi_{n-1}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

