

4. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

11. März 2017

Aufgabe 2

a) $\mathbb{R}, (a, b), [a, b], (a, b]$

- \mathbb{R} und (a, b) sind homöomorph, denn :

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1); x \mapsto \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2} \text{ ist homöomorph}$$

$$f_2 : (0, 1) \rightarrow (a, b), x \mapsto (b - a)x + a \text{ ist homöomorph}$$

$$\Rightarrow f_2 \circ f_1 : \mathbb{R} \rightarrow (a, b) \text{ ist Homöomorphismus.}$$

- (a, b) und $[a, b]$ sind nicht homöomorph, denn (a, b) ist nicht kompakt, $[a, b]$ aber schon. Da stetige Abbildungen Kompakta auf Kompakta abbilden und Homöom. insbes. stetig sind, kann es keinen Homöomorphismus $(a, b) \rightarrow [a, b]$ geben.
- $[a, b] \rightarrow (a, b]$ sind nicht homöomorph, wäre $f : [a, b] \rightarrow (a, b]$ ein Homöomorphismus, so wäre f nach Zwischenwertsatz streng monoton, d.h. $f([a, b]) = [f(a), f(b)] \neq (a, b]$.
- analog: (a, b) und $(a, b]$ sind nicht homöom.
 $\Rightarrow \mathbb{R}$ und (a, b) bzw. $(a, b]$ sind nicht homöom.

b) S^1 und \mathbb{R}/\mathbb{Z} sind homöom.

Definiere Homöomorphismus $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1, [x] \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$

h ist wohldefiniert, denn seien x, y mit $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + k$

$$\Leftrightarrow h([x]) = (\cos(2\pi y + 2\pi k), \sin(2\pi y + 2\pi k)) = (\cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) = h([y])$$

Die zeigt auch: h ist injektiv.

Klar: h ist surjektiv.

h ist stetig, da $h \circ \pi$ stetig ist, (+ Aufgabe 4, Blatt 5)

h ist offen, denn $h \circ \pi$ ist offen.

Das reicht, denn $\forall O \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z} : h(O) = h \circ \pi(\pi^{-1}(O))$, da π surjektiv ist.)

Das überlegt man sich für Intervalle $\subseteq \mathbb{R}$.

- c) $W^n := \partial([0, 1]^{n+1})$, $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ sind homöomorph.
Definiere

$$f : S^n \rightarrow W^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{\max(|x_1|, \dots, |x_{n+1}|)} (x_1, \dots, x_{n+1})$$

$$g : S^n \rightarrow W^n, (y_1, \dots, y_{n+1}) \mapsto \frac{1}{\max(|y_1|, \dots, |y_{n+1}|)} (y_1, \dots, y_{n+1})$$

f und g sind stetig zueinander.

Aufgabe 1

- a) \mathbb{Q} ist abzählbar $\stackrel{\text{b)}}{\Rightarrow} \{\{x\} \mid x \in \mathbb{Q}\}$ ist die Menge der Zusammenhangskomponenten von \mathbb{Q} .
- b) Beh: (X, d) abzählbar \Rightarrow die Zusammenhangskomponenten von X sind einelementig.
Bew: Seien $x \neq y \in X \Rightarrow l := d(x, y) > 0$
 X abzählbar $\Rightarrow l \in M$, wobei M abzählbare Teilmenge von \mathbb{R}
 $\Rightarrow \exists r \in [0, l] : \{z \in X \mid d(x, z) = r\} = \emptyset$
Setze $V_1 = \{z \in X \mid d(x, z) \leq r\}$, $V_2 = \{z \in X \mid d(x, z) \geq r\}$
Gäbe es eine zusammenhängende Teilmenge A von X mit $x, y \in A$, so wäre
 $A = \underbrace{(V_1 \cap A)}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(V_2 \cap A)}_{\neq \emptyset} \not\hookrightarrow$ zu A zusammenhängend.

Aufgabe 3

Seien jetzt aber $A \subseteq B \subseteq A$ mit A zusammenhängend und U, V disjunkte offene Teilmengen mit $B = U \cup V$
 $\Rightarrow \underbrace{(U \cap A)}_{=: \tilde{U}} \cup \underbrace{(V \cap A)}_{=: \tilde{V}} = (U \cup V) \cap A = A$
 \tilde{U}, \tilde{V} sind disjunkt (wegen $\tilde{U} \cap \tilde{V} \subseteq U \cap V = \emptyset$)
 A zusammenhängend $\Rightarrow \tilde{U} = \emptyset$ oder $\tilde{V} = \emptyset$. O.B.d.A $\tilde{U} = \emptyset \Rightarrow A \subseteq V$
 $\Rightarrow U \subseteq B \subseteq \bar{A} \subseteq \bar{V} \Rightarrow U = U \cap \bar{V} = \emptyset \Rightarrow B$ ist zusammenhängend.

Aufgabe 4

Beh. X top., $A \subseteq X, Y$ Hausdorffraum, $f : A \rightarrow Y$ stetige Abbildung.
 \Rightarrow kann man f fortsetzen zu einer stetigen Abb. $g : \bar{A} \rightarrow Y$, so ist g eindeutig.
Bew: Seien $g_1 : \bar{A} \rightarrow Y, g_2 : \bar{A} \rightarrow Y$ stetige Fortsetzungen von f .
Ann: $g_1 \neq g_2 \Rightarrow x \in \bar{A} : g_1(x) \neq g_2(x)$. Es muss gelten: $x \notin A$. da $\forall x \in A : g_1(x) = f(x) = g_2(x)$.
Also: $x \in \bar{A} \setminus A$.
 Y Hausdorffraum, $g_1(x) \neq g_2(x) \Rightarrow \exists$ offene disj. Teilmengen $V_1, V_2 \subseteq Y$ mit $g_1(x) \in V_1, g_2(x) \in V_2$.
 g_1 ist stetig $\Rightarrow \exists$ offene Umg. U_1 von x mit $g_1(U_1) \subseteq V_1$
 g_2 ist stetig $\Rightarrow \exists$ offene Umg. U_2 von x mit $g_2(U_2) \subseteq V_2$
 U_1, U_2 sind offene Umgebungen von $x \Rightarrow U_1 \cap U_2$ ist offene Umg. von $x \Rightarrow x \in U_1 \cap U_2$
 $x \in \partial A \Rightarrow \exists y \in (U_1 \cap U_2) \cap A$ mit $x \neq y$ (nach Aufg. 2, Blatt 3)

$\Rightarrow y \in U_1 \Rightarrow g_1(y) \in V_1, y \in U_2 \Rightarrow g_2(y) \in V_2$
 Da aber $y \in A$ gilt: $g_1(y) = f(y) = g_2(y)$
 $\Rightarrow f(y) \in V_1 \cap V_2 \quad \nrightarrow$ zu $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.