

10 Grundbegriffe der Testtheorie

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ statistischer Raum, $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$ Zufallsvariable, $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1$ mit $\Theta_0, \Theta_1 \neq \emptyset$.
 $(\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset)$

10.1 Definition

Die Aussage $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ heißt (Null-)Hypothese, $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ heißt Alternativhypothese oder Alternative.

$|\Theta_j| = 1 \Rightarrow \Theta_j$ heißt einfach, sonst zusammengesetzt

10.2 Definition

Ein **randomisierter Test** zur Prüfung von H_0 gegen H_1 ist eine messbare Abbildung $\varphi : \mathfrak{X} \rightarrow [0, 1]$ mit der Interpretation

$$\varphi(x) = P(H_0 \text{ ablehnen} | X = x)$$

Gilt $\varphi(\mathfrak{X}) = \{0, 1\}$, so heißt φ **nicht randomisiert**. Mit $\mathcal{K} := \{x \in \mathfrak{X} : \varphi(x) = 1\}$ gilt dann $\varphi = \mathbf{1}_{\mathcal{K}}$ und die Testvorschrift lautet:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{K} &\Rightarrow H_0 \text{ ablehnen} \\ x \in \mathfrak{X} \setminus \mathcal{K} &\Rightarrow H_0 \text{ nicht ablehnen} \end{aligned}$$

\mathcal{K} heißt kritischer Bereich (Ablehnbereich), $\mathfrak{X} \setminus \mathcal{K}$ heißt Annahmebereich.

10.3 Bemerkung

Falls $0 < \varphi(x) < 1$, so muss „externes“ Bernoulli-Experiment durchgeführt werden; man erhält also Realisierung y einer Zufallsvariablen Y mit $Y \sim \text{Bin}(1, \varphi(x))$.

In praktischen Anwendungen ist „Randomisierung“ unerwünscht.

10.4 Definition

Es sei $T : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung. Häufig besitzt ein nicht randomisierter Test die Gestalt

$$(*) \quad \begin{aligned} T(x) \geq c &\Rightarrow H_0 \text{ ablehnen} \\ T(x) < c &\Rightarrow \text{kein Widerspruch zu } H_0 \end{aligned}$$

$$(\text{d.h. } \mathcal{K} = \{x \in \mathfrak{X} : T(x) \geq c\} = T^{-1}([c, \infty)))$$

Dann heißt T Testgröße (Prüfgröße) und $c \in \mathbb{R}$ heißt kritischer Wert.

(*) liefert Test mit **oberem Ablehnbereich**.

In (*) \geq durch \leq und $<$ durch $>$ ersetzen \leftrightarrow Test mit unterem Ablehnbereich

10.5 Beispiel

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^{m+n}, \mathcal{B}^{n+m}), X = (\underbrace{X_1, \dots, X_m}_{\text{uiv}_F}, \underbrace{Y_1, \dots, Y_n}_{\text{uiv}_G}), X_1, \dots, Y_n$$

unabhängig, $\vartheta = (F, G)$, $\Theta = \{(F, G) : F, G \text{ stetig}\}$, $\Theta_0 = \{(F, G) \in \Theta : F = G\}$

$$H_0 : F = G$$

$$H_1 : F \neq G$$

(nichtparametrisches 2-Stichproben-Problem mit allgemeiner Alternative)

Sei

$$\hat{F}_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}\{X_i \leq x\}, \quad \hat{G}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{Y_j \leq x\}$$

Mögliche Prüfgröße (mit oberem Ablehnbereich):

$$T(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_m(x) - \hat{G}_n(x)|$$

(Kolmogorov-Smirnov-Testgröße)

10.6 Definition und Bemerkung

Ein Fehler 1. Art ist das Verwerfen von H_0 , obwohl H_0 richtig ist.

Ein Fehler 2. Art ist das Nichtverwerfen von H_0 , obwohl H_0 falsch ist.

Entscheidung	H_0 richtig	H_0 falsch
H_0 nicht verwerfen	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art
H_0 verwerfen	Fehler 1. Art	richtige Entscheidung

Die Funktion

$$G_\varphi : \Theta \rightarrow [0, 1] \\ \vartheta \mapsto G_\varphi(\vartheta) := E_\vartheta[\varphi] = \int_{\mathfrak{X}} \varphi(x) P_\vartheta(dx)$$

heißt **Gütefunktion** des Tests φ .

$$(\varphi = \mathbf{1}_K \Rightarrow G_\varphi(\vartheta) = P_\vartheta(K), \varphi = \mathbf{1}\{T(x) \geq c\} \Rightarrow G_\varphi(\vartheta) = P_\vartheta(T \geq c))$$

Ideale Gütefunktion wäre

$$G_\varphi(\vartheta) = \begin{cases} 1, & \vartheta \in \Theta_1 \\ 0, & \vartheta \in \Theta_0 \end{cases}$$

Sei $\alpha \in (0, 1)$. φ heißt Test zum **Niveau** $\alpha : \Leftrightarrow G_\varphi(\vartheta) \leq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_0$ ²⁶

In Praxis übliche Werte: $\alpha = 0,05; 0,01; 0,001$

Kleines α dient „Sicherung von H_1 “.²⁷

Die Zahl $\sup_{\vartheta \in \Theta_0} G_\varphi(\vartheta)$ heißt **Umfang** (size) von φ .

10.7 Definition

Sei

$$\Phi_\alpha = \{\varphi : \mathfrak{X} \rightarrow [0, 1] \mid \sup_{\vartheta \in \Theta_0} G_\varphi(\vartheta) \leq \alpha\}$$

die Menge aller Niveau α -Tests.

$\Phi_\alpha \neq \emptyset$, da $\varphi \equiv \alpha \in \Phi_\alpha$.

Sei $\tilde{\Phi}_\alpha \subset \Phi_\alpha$

$\varphi_1 \in \tilde{\Phi}_\alpha$ heißt **gleichmäßig besser** als $\varphi_2 \in \tilde{\Phi}_\alpha : \Leftrightarrow$

$$G_{\varphi_1}(\vartheta) \geq G_{\varphi_2}(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta_1$$

$\varphi^* \in \tilde{\Phi}_\alpha$ heißt (gleichmäßig) **bester Test** in $\tilde{\Phi}_\alpha : \Leftrightarrow$

$$G_{\varphi^*}(\vartheta) \geq G_\varphi(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta_1 \quad \forall \varphi \in \tilde{\Phi}_\alpha$$

Bezeichnung: UMP-Test („uniformly most powerfully“)

²⁶Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ist $\leq \alpha$

²⁷vgl. „Wahl der Nullhypothese“; das Verwerfen von H_0 ist „fast nie“ falsch, also in diesem Fall umgekehrt H_1 auch „fast immer“ richtig (...)