

4 Das starke Gesetz der großen Zahlen

Satz 4.1 (Borel-Cantelli Lemma) Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge von Ereignissen.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

ist das Ereignis, dass unendlich viele der A_n 's eintreten.

a) Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0.$$

b) Sind die Ereignisse A_n , $n \in \mathbb{N}$ stochastisch unabhängig, so gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \implies P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1.$$

Beweis

a) Sei $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
Da $B_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ folgt:

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 0.$$

b) Sei $P_n := P(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$. (A_n) stoch. unabh $\Rightarrow (A_n^c)$ stoch. unabh. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) &\stackrel{\text{stetig von oben}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=1}^N A_n^c\right) \\ &\stackrel{\text{unabh.}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N (1 - P_k) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(-\sum_{k=1}^N P_k\right) \stackrel{\text{nach Vor.}}{=} 0 \end{aligned}$$

Somit:

$$0 \leq P((\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0$$

■

Definition Es seien X, X_1, X_2, \dots ZV auf einem W-Raum (Ω, \mathcal{A}, P) .

X_n konvergiert P -fast sicher gegen X , $(X_n \xrightarrow{f.s.} X)$ wenn gilt:

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Bemerkung $\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \in \mathcal{A}$, denn:

(i) $\sup_{n \geq 1} X_n$ ist \mathcal{A} -messbar, da $\{\sup_{n \geq 1} X_n \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{X_n \leq a\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$.

$\inf_{n \geq 1} X_n = -\sup_{n \geq 1} (-X_n)$ ist \mathcal{A} -mb. $\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} X_k, \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$ \mathcal{A} -messbar.

(ii) $\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\} = (\liminf_{n \rightarrow \infty} (X_n - X))^{-1}(\{0\}) \cap (\limsup_{n \rightarrow \infty} (X_n - X))^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{A}$

Im Folgenden sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von ZV auf einem W-Raum (Ω, \mathcal{A}, P) . Starke Gesetz der großen Zahlen sind Resultate der Form

$$\frac{1}{a_n} \left(\sum_{i=1}^n X_i - b_n \right) \xrightarrow{f.s.} 0$$

wobei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Der wichtigste Satz ist hier:

Satz 4.2 (Starkes Gesetz der großen Zahlen) Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. ZV mit $E|X_1| < \infty$, so gilt:

$$\frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i}_{=s_n} \xrightarrow{f.s.} EX_1.$$

Beweis Sei zunächst $X_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$ und $Y_k := X_k \cdot \mathbf{1}_{[X_k \leq k]}$ (Y_k entsteht aus X_k durch Abschneiden bei k). Sei $S_n^* := \sum_{k=1}^n Y_k$ $EY_k = E[X_k \cdot \mathbf{1}_{[X_k \leq k]}] = E[X_1 \cdot \mathbf{1}_{[X_1 \leq k]}] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} EX_1$ mit S.2.1 (Monotone Konvergenz).
Aus der Analysis: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = a.$$

Damit folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} ES_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n EY_k = EX_1.$$

Die Y_n 's sind wieder unabhängig und es gilt:

$$\text{Var}(S_n^*) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(Y_k) \leq \sum_{k=1}^n EY_k^2 \leq \sum_{k=1}^n E[X_k^2 \cdot \mathbf{1}_{[X_k \leq n]}] = n \cdot E[X_1^2 \cdot \mathbf{1}_{[0, n]}(X_1)] \quad (*)$$

Sei $\alpha > 1$ und $m_n := \lfloor \alpha^n \rfloor \forall n \in \mathbb{N}$. Für $x > 0$ sei $\Psi(x) := \sum_{n=N(x)}^{\infty} \frac{1}{m_n}$ mit $N(x) := \min\{n \mid m_n \geq x\}$

Für beliebige $z \geq 1$ gilt: $\lfloor z \rfloor \geq \frac{z}{2}$ und somit $\frac{1}{m_n} = \frac{1}{\lfloor \alpha^n \rfloor} \leq \frac{2}{\alpha^n}$ und $\alpha^{N(x)} \geq \lfloor \alpha^{N(x)} \rfloor = m_{N(x)} \geq x$. Mit $k := \frac{2\alpha}{\alpha-1}$ gilt:

$$\Psi(x) = \sum_{n=N(x)}^{\infty} \frac{1}{m_n} \leq 2 \cdot \sum_{n=N(x)}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} = 2 \cdot \alpha^{-N(x)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} \leq \frac{k}{x} \quad (**)$$

Die Ungleichung von Tschebyscheff liefert $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{m_n} |S_{m_n}^* - ES_{m_n}^*| > \varepsilon\right) &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 m_n} E[X_1^2 \cdot \mathbf{1}_{[0, m_n]}(X_1)] \\ &\stackrel{\text{S.2.1}}{=} \frac{1}{\varepsilon^2} E[X_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n} \cdot \mathbf{1}_{[0, m_n]}(X_1)] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} E[X_1^2 \Psi(X_1)] \stackrel{(**)}{\leq} \frac{k}{\varepsilon^2} EX_1 \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Üb}}{\implies} \frac{1}{m_n} (S_{m_n}^* - ES_{m_n}^*) \xrightarrow{f.s.} 0 \stackrel{\text{Üb}}{\implies} \frac{1}{m_n} S_{m_n}^* \xrightarrow{f.s.} EX_1.$$

Nächstes Ziel: * weg bekommen.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 > n) \\ &\leq \int_{[0, \infty]} P(X_1 > x) \mathbf{1}(x) \stackrel{\text{Bsp 3.1}}{=} EX_1 < \infty. \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{S.4.1a)}}{\implies} P(\underbrace{\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \neq Y_n(\omega) \text{ für unendlich viele } n\}}_{=: N_0}) = 0$$

$\forall \omega \notin N_0 \exists k(\omega) \in \mathbb{N}$ mit $X_n(\omega) = Y_n(\omega) \forall n \geq k(\omega)$.

Auf N_0^C gilt also:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (S_n(\omega) - S_n^*(\omega)) &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{k(\omega)} X_i(\omega) - Y_i(\omega) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \implies \frac{1}{n} (S_n - S_n^*) &\xrightarrow{f.s.} 0 \implies \frac{1}{m_n} S_{m_n} \xrightarrow{f.s.} EX_1 \quad (\Delta) \end{aligned}$$

Jetzt muss die Einschränkung auf die Teilfolge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ weg.

Da $S_n \geq 0$, gilt für $m_n \leq k \leq m_{n+1}$:

$$\frac{m_n}{m_{n+1}} \cdot \frac{S_{m_n}}{m_n} \leq \frac{S_k}{k} \leq \frac{m_{n+1}}{m_n} \cdot \frac{S_{m_{n+1}}}{m_{n+1}}$$

Da $\frac{m_{n+1}}{m_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$ folgt mit (Δ) :

$$\frac{1}{\alpha} EX_1 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{S_k}{k} \right) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{S_k}{k} \right) \leq \alpha EX_1 \quad P\text{-f.s.}$$

Sei N_α die Ausnahmемenge zu α in der Konvergenz (Δ) . Da $\alpha > 1$ beliebig, gilt auf

$$\underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_{1+\frac{1}{j}}\right)^C}_{P\text{-Nullmenge}}$$

$$EX_1 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{S_k}{k}\right) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{S_k}{k}\right) \leq EX_1$$

$$\implies \overline{X_n} := \frac{1}{n} S_n \xrightarrow{f.s.} EX_1$$

Jetzt muss noch die Bedingung $X_k \geq 0$ weg. Es folgt:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^+ - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^- \xrightarrow{f.s.} EX_1^+ - EX_1^- = EX_1.$$

■

Beispiel 4.1 (Wiederholte Spiele)

Gegeben 2 Spieler. Spieler A erzielt in Runde n X_n Punkte und Spieler B Y_n Punkte. Die Zufallsvariablen seien alle unabhängig und identisch verteilt. Es sei $D_n := X_n - Y_n$. Spieler A gewinnt Runde n , falls $D_n > 0$.

Sei $p_n = P(\sum_{k=1}^n D_k > 0)$ die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A nach n Runden mehr Punkte hat. Es gilt nach S.4.2:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[D_k > 0]} \xrightarrow{f.s.} E[\mathbf{1}_{[D_1 > 0]}] = p_1.$$

Ist $p_1 > \frac{1}{2}$, so gewinnt Spieler A langfristig mehr Runden als B. Dies gilt jedoch nicht, wenn die Punkte addiert werden! Beispiel dazu:

$$X_k := \begin{cases} n+1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_1 \\ 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p_1 \end{cases}, \quad Y_k \equiv n \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1$$

$$\text{Sei } p_1 = 0,999, \quad n = 1000. \implies p_{1000} = (0,999)^{1000} \approx 0,37$$