2 Eigenschaften des Maß-Integrals

2.1 Konvergenzsätze

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen.

Satz 2.1 (Satz von Beppo Levi, Satz von der monotonen Konvergenz)
Sind $f, f_1, f_2, \ldots \geq 0$ mit $f_n \uparrow f$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Beweis $\forall f_n \; \exists (u_{nm})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ mit $u_{nm} \uparrow f_n$ für $m \to \infty$. Sei $h_m := \max\{u_{1m}, \ldots, u_{mm}\} \implies h_m \uparrow$ und $(h_m) \subset \mathcal{E}$. Außerdem: $u_{nm} \leq h_m$ für $n \leq m$.
Also: $f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} u_{nm} = \sup_{m\geq n} u_{nm} \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} h_m$ und $h_m \leq f_m \leq f$. Insgesamt: $h_m \uparrow f$ und $\lim_{m\to\infty} \int h_m \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$. Mit $\int h_m \mathrm{d}\mu \leq \int f_m \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\mu$ folgt die Behauptung. ■

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_1, f_2, f_3, \ldots : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen.

Satz 2.2 (Lemma von Fatou)
Gilt $f_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

Beweis Sei $g_n := \inf_{m\geq n} f_m, f := \liminf_{n\to\infty} f_n$, so gilt $g_n \uparrow f$ und mit Satz 2.1 $\int \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int g_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu$ ■

Satz 2.3 (Satz von Lebesgue oder Satz von der majorisierten Konvergenz)

Es gelte $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \; \forall \omega \in \Omega$. Existert eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|f_n(\omega)| \leq g(\omega) \; \forall \omega \in \Omega, \; \forall n \in \mathbb{N}$, so folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Beweis Sei $g_n := |f_n - f|, h := |f| + g$. Wegen $|h| \leq 2g$ ist h μ-integrierbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} h - g_n &= |f| + g - |f_n - f| \geq |f| + g - |f_n| - |f| \\ &= g - |f_n| \geq 0 \end{aligned}$$

wegen $g_n \to 0$ gilt $h - g_n \to h$, also folgt mit Satz 2.2

$$\begin{aligned}\int h\mathrm{d}\mu &= \int \liminf_{n\to\infty}(h-g_n)\mathrm{d}\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\int (h-g_n)\mathrm{d}\mu \\ &= \underbrace{\int h\mathrm{d}\mu}_{<\infty} - \limsup_{n\to\infty}\int g_n\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$ ■

$\Longrightarrow$ $\limsup_{n\to\infty}\int g_n\mathrm{d}\mu \leq 0$ Wegen $g_n \geq 0$ bedeutet dies:

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f|\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n\mathrm{d}\mu = 0$$

und damit

$$|\int f_n\mathrm{d}\mu - \int f\mathrm{d}\mu| = |\int (f_n - f)\mathrm{d}\mu| \leq \int |f_n - f|\mathrm{d}\mu \to 0$$

Bemerkung 2.1 Für Wahrscheinlichkeitsmaße lautet Satz 2.3:
Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, so dass $X_n \overset{f.s.}{\to} X$ (X ist dann automatisch wieder eine Zufallsvariable) und es gibt eine Zufallsvariable Y mit $|X_n| \leq Y\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $EY < \infty$, so gilt $\lim_{n\to\infty} EX_n = EX$.
Oft kommt man mit einer Majorante der Form $Y \equiv c, c \in \mathbb{R}$ zum Ziel.

2.2 Verhalten bei Transformationen

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum und $T : \Omega \to \Omega'$ eine $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbare Abbildung. Aus Stochastik 1 ist bekannt (vgl. §5.2, Verteilung), dass durch

$$\mu^T : \mathcal{A}' \to [0,\infty], \mu^T(A') := \mu(\underbrace{T^{-1}(A')}_{\in\mathcal{A}}) = \mu(\{\omega \in \Omega | T(\omega) \in A'\})$$

ein Maß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ definiert wird (Maßtransport). μ^T heißt **Bildmaß** von μ unter der Tranformation T.
Ist $X = T$ eine Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $(\Omega', \mathcal{A}')$, so nennt man $\mu^T = P^X$ die Verteilung von X. Sei nun weiter $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ messbar.

Skizze:
$$\begin{tikzcd} (\Omega, \mathcal{A}) \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f\circ T"'] & (\Omega', \mathcal{A}') \arrow[d, "f"] \\ & (\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \end{tikzcd}$$

Satz 2.4 (Integration bezüglich des Bildmaßes, Transformationssatz)
Mit den obigen Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt: f ist genau dann μ^T-integrierbar, wenn $f \circ T$ μ-integrierbar ist.
Dann gilt:

$$\int f\,d\mu^T = \int (f \circ T)\,d\mu$$

Beweis

(i) Falls $f = \mathbf{1}_A, (A \in \mathcal{A})$ gilt

$$\begin{aligned}\int f \mathrm{d}\mu^T &= \mu^T(A) \\ &= \mu(T^{-1}(A)) \\ &= \int \mathbf{1}_{T^{-1}(A)} \mathrm{d}\mu \\ &= \int \mathbf{1}_A \circ T \mathrm{d}\mu \\ &= \int f \circ T \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

wegen Satz 1.2(a) folgt damit die Aussage für $f \in \mathcal{E}$

(ii) Sei jetzt $f \geq 0 \implies \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ mit $u_n \uparrow f$ und $\int f \mathrm{d}\mu^T = \lim_{n\to\infty} \int u_n \mathrm{d}\mu^T$.
Offenbar gilt $u_n \circ T \in \mathcal{E}, (u_n \circ T) \uparrow (f \circ T)$
Also folgt:

$$\begin{aligned}\int f \mathrm{d}\mu^T &= \lim_{n\to\infty} \int u_n \mathrm{d}\mu^T \\ &\overset{(i)}{=} \lim_{n\to\infty} \int (u_n \circ T) \mathrm{d}\mu \\ &= \int (f \circ T) \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

(iii) Ist $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ eine beliebige $(\mathcal{A}', \mathfrak{B})$-messbare Abbildung so gilt

$$\begin{aligned}\int f^+ \mathrm{d}\mu^T < \infty &\iff \int f^+ \circ T \mathrm{d}\mu < \infty \\ \int f^- \mathrm{d}\mu^T < \infty &\iff \int f^- \circ T \mathrm{d}\mu < \infty\end{aligned}$$

Da $(f \circ T)^+ = f^+ \circ T, (f \circ T)^- = f^- \circ T$, folgt f μ^T-integrierbar $\iff$ $f \circ T$

μ-integrierbar

$$\begin{aligned}\int f\mathrm{d}\mu^T &= \int f^+\mathrm{d}\mu^T - \int f^-\mathrm{d}\mu^T\\ &\overset{(ii)}{=} \int f^+\circ T\mathrm{d}\mu - \int f^-\circ T\mathrm{d}\mu\\ &= \int (f\circ T)^+\mathrm{d}\mu - \int (f\circ T)^-\mathrm{d}\mu\\ &= \int f\circ T\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

■

Bemerkung 2.2 Das Beweisverfahren (zuerst für $f \in \mathcal{E}$ (bzw. $f = \mathbf{1}_A$), dann für $f \in \mathcal{E}^+$, dann für f beliebig) heißt **algebraische Induktion** und wird häufig verwendet.

2.3 Nullmengen und Maße mit Dichten

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 2.1 *$N \in \mathcal{A}$ heißt μ-Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$.*

Definition 2.2 *Ist (A) eine Aussage, die von $\omega \in \Omega$ abhängt, so sagen wir, dass (A) μ-**fast überall** (μ-f.ü.) gilt, wenn (A) wahr ist $\forall\omega$ außerhalb einer μ-Nullmenge. Ist $\mu = P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so sagt man P-fast-überall oder P-fast sicher (P-f.s.)*

Satz 2.5
$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ seien $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ messbar.

a) Sei $f \geq 0$. Dann gilt: $\int f d\mu = 0 \iff f = 0, \mu$-f.ü.

b) Ist f μ-integrierbar und gilt $f = g$ μ-f.ü., so ist auch g μ-integrierbar mit $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Beweis

a) Sei $N := \{\omega \in \Omega | f(\omega) \neq 0\}$. $N \in \mathcal{A}$, da f messbar.
   (i) Annahme: $\int f\mathrm{d}\mu = 0$.
   Sei $A_n := \{\omega \in \Omega | f(\omega) \geq \frac{1}{n}\} \implies A_n \uparrow N$ und $\mu(N) = \lim_{n\to\infty}(\mu(A_n))$.
   Außerdem gilt $0 = \int f\mathrm{d}\mu \geq \int \frac{1}{n}\cdot \mathbf{1}_{A_n}\mathrm{d}\mu = \frac{1}{n}\cdot\mu(A_n) \geq 0$
   $\implies \mu(A_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \mu(N) = 0$, also $f = 0$ μ-f.ü.
   (ii) Annahme: N ist μ-Nullmenge.
   Sei $g \in \mathcal{E}$, $g(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $g \leq f$.
   $\implies g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \circ \mathbf{1}_{A_j}$.
   Falls $\alpha_j > 0 \implies A_j \subset N \implies \int g\mathrm{d}\mu = 0 \overset{\text{L.1.3}}{\implies} \int f\mathrm{d}\mu = 0.$

b) Seien zunächst $f, g \geq 0$, $N := \{f \neq g\} \overset{\text{a)}}{\Rightarrow}$

$$\begin{aligned}\int f \mathrm{d}\mu &= \int_N f \mathrm{d}\mu + \int_{N^C} f \mathrm{d}\mu \\ &= 0 + \int_{N^C} g \mathrm{d}\mu \\ &= \int_N g \mathrm{d}\mu + \int_{N^C} g \mathrm{d}\mu \\ &= \int g \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Insbesondere: $\int f \mathrm{d}\mu < \infty \iff \int g \mathrm{d}\mu < \infty$.
Seien nun f, g beliebig. Wegen $\{f^+ = g^+\} \supset \{f = g\} \subset \{f^- = g^-\}$ gilt auch $f^+ = g^+$ und $f^- = g^-$ μ-f.ü. und mit dem vorigen Teil folgt die Behauptung.
■

Bemerkung 2.3 Im Folgenden sei $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f$ ist messbar und μ-integrierbar$\}$ (ist ein Vektorraum) und wir definieren
$f \sim_\mu g :\iff f = g$ μ-f.ü. und $\sim_\mu$ ist Äquivalenzrelation auf $\{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f$ ist messbar$\}$. Sei $f^{[\mu]}$ die Äquivalenzklasse zu f.
Mit Satz 2.5: Entweder alle oder keines der Elemente in $f^{[\mu]}$ ist μ-integrierbar und die Integrale sind ggfs. gleich. Außerdem gilt:
$f_1 \in f^{[\mu]}$, $g_1 \in g^{[\mu]} \implies f_1 + g_1 \in (f+g)^{[\mu]}$.
$\implies$ Man kann zum Raum der Äquivalenzklassen übergehen: $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)/\sim_\mu$
Mit $||f^{[\mu]}||_1 := \int |f| \mathrm{d}\mu$ ist eine Norm definiert; sie ist wohldefiniert, da $\int f_1 \mathrm{d}\mu = \int f_2 \mathrm{d}\mu \; \forall f_1, f_2 \in f^{[\mu]}$.
Wichtig: $f \mapsto \int |f| \mathrm{d}\mu =: ||f||$ ist auf $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ keine Norm, da $||f|| = 0 \implies f \equiv 0$ im Allgemeinen falsch ist!

Satz 2.6 $(L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)/\sim_\mu, ||\cdot||_1)$ *ist ein Banachraum.*

Definition 2.3 *Es seien μ, ν Maße auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Gilt dann $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0 \; \forall A \in \mathcal{A}$, so heißt ν μ-**stetig**, in Zeichen $\nu \ll \mu$. Man sagt auch, dass μ das Maß ν dominiert.*

Satz 2.7 *und Definition*
*Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$-messbar. Dann wird durch $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $\nu(A) := \int_A f d\mu$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert. Man nennt ν das **Maß mit der Dichte** f bzgl. μ und f eine μ-**Dichte** von ν. Schreibweise: $f = \frac{d\nu}{d\mu}$*

Beweis Wir weisen nach, dass ν ein Maß ist:
$\nu \geq 0$ ist klar, da f nach $\mathbb{R}_+$ abbildet;

(i) $\mu(\emptyset) = \int f \cdot \mathbf{1}_\emptyset \mathrm{d}\mu = 0$.

(ii) Seien $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt und $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$.
Wegen $f \cdot \mathbf{1}_{\sum_{k=1}^{n} A_k} \uparrow f \cdot \mathbf{1}_A$ folgt mit Satz 2.1:

$$\begin{aligned}
\nu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) &= \int f \cdot \mathbf{1}_A \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} (\int f \cdot \underbrace{\mathbf{1}_{\sum_{k=1}^{n} A_k}}_{=\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}} \mathrm{d}\mu) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\int \sum_{k=1}^{n} f \cdot \mathbf{1}_{A_k} \mathrm{d}\mu) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} (\underbrace{\int f \cdot \mathbf{1}_{A_k} \mathrm{d}\mu}_{=\nu(A_k)})) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)
\end{aligned}$$

■

Satz 2.8 (Satz von Radon-Nikodym)
Seien μ, ν Maße auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, μ sei σ-endlich. Dann gilt:
ν ist genau dann μ-stetig, wenn ν eine Dichte bzgl. μ hat.

Beweis ν hat Dichte bzgl. $\mu \implies \nu(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu = \int f \cdot \mathbf{1}_A \mathrm{d}\mu \overset{\text{S.2.5a)}}{\implies} \nu \ll \mu$.
Die andere Richtung siehe z.B. Henze, Stochastik II. ■

Satz 2.9 *Seien μ und ν Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$, ν habe μ-Dichte f. Dann gilt für alle $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$-messbaren Abbildungen $g : \Omega \to \mathbb{R}$:*
g ist genau dann ν-integrierbar, wenn $g \cdot f$ μ-integrierbar ist und in diesem Fall ist $\int g d\nu = \int g \cdot f d\mu$.

Beweis Übung. ■

Bemerkung 2.4 Merkregel: $\int g \mathrm{d}\nu = \int g \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu$.

Beispiel 2.1 Sei $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Maß und $\nu = P^X$ die Verteilung einer Zufallsvariablen X. Ist X absolutstetig, so gilt (Stochastik I):

$$P^X(B) = \int_B f_X(x) \mathrm{d}x$$

mit $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ und

$$EX = \int_\Omega X \mathrm{d}P = \int_{\mathbb{R}} x P^X(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) \mathrm{d}x.$$

mit den Sätzen 2.4 und 2.9.

2.4 Ungleichungen und Räume integrierbarer Funktionen

Hier stellen wir einige Hilfsmittel für später zusammen. Der folgende Satz behandelt den Spezialfall von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Satz 2.10 *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $\gamma > 0$. Dann gilt:*

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a^\gamma} \cdot E|X|^\gamma \quad \forall a > 0.$$

Existiert die Varianz von X, so gilt:

$$P(|X - EX| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \cdot \mathrm{Var}(X) \quad \forall a > 0.$$

(Ungleichung von Tschebyschef, siehe Abschnitt 7.6, Stochastik I)

Beweis
Sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$Y(\omega) = \begin{cases} a, & \text{falls } |X(\omega)| \geq a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad |Y| \leq |X| \\ &\Longrightarrow \quad |Y|^\gamma \leq |X|^\gamma \quad \forall \gamma > 0 \\ &\Longrightarrow \quad a^\gamma P(|X| \geq a) = a^\gamma P(|Y| \geq a) = E|Y|^\gamma \leq E|X|^\gamma \end{aligned}$$

Für Teil 2 setze $\tilde{X} := X - EX$ und $\gamma = 2$. ■

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\Phi : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, d.h.

$$\Phi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\Phi(x) + (1-\alpha)\Phi(y) \quad \forall x, y \in I, \ \forall \alpha \in [0,1]$$

Außerdem gilt $\forall y \in I, \exists m \in \mathbb{R}$, mit

$$\Phi(x) \geq \Phi(y) + m(x - y)$$

Satz 2.11 (Jensensche Ungleichung)
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\Phi : I \to \mathbb{R}$ konvex und X eine Zufallsvariable mit $E|X| < \infty, E|\Phi(X)| < \infty$ und $P(X \in I) = 1$. Dann gilt:

$$EX \in I \text{ und } \Phi(EX) \leq E\Phi(X)$$

Beweis
Falls $I = (-\infty, \infty)$ ist automatisch $EX \in I$. Ist $X < a$ P-f.s. so gilt: $EX \leq Ea = a$.
Falls $E(a - X) = 0$ folgt, da $a - X \geq 0 \xRightarrow{\text{Satz 2.5}} X = a$ P-f.s. Widerspruch!
D.h., falls $I = (\cdot, a) \subset (-\infty, a) \implies EX < a$. Analog untere Schranke $\implies EX \in I$.
Mit der Vorüberlegung folgt $(y = EX, x = X(\omega))$

$$\Phi(X) \geq \Phi(EX) + m(X - EX) \quad \text{P-f.s.}$$

für ein $m \in \mathbb{R}$. Erwartungswert auf beiden Seiten führt zur Behauptung (Nullmengen können wir vernachlässigen). ■

Beispiel 2.2
Für $\Phi(x) = |x|, \Phi(x) = x^2$ folgt: $|EX| \leq E|X|, (EX)^2 \leq EX^2$. ($\implies$ $EX^2 - (EX)^2 = \operatorname{Var} X \geq 0$)

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wieder ein Maßraum.

Definition
*Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt p-**fach** μ-**integrierbar**, wenn $\int |f|^p d\mu < \infty$ mit $p > 0$.*

$$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} | \int |f|^p d\mu < \infty\}$$

$$||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Wie im vorigen Abschnitt ist L^p bzw. $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)/\sim_\mu$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $||f||_p$ auf den Äquivalenzklassen eine Norm.

Satz 2.12

a) *(Höldersche Ungleichung) Es seien $p > 1, f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann folgt: $f \cdot g \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und es gilt:*

$$||f \cdot g||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$$

b) *(Minkowskische Ungleichung) Es seien $p \geq 1$ und $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dann folgt $f + g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und es gilt:*

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Beweis

a) Falls $\int |f|^p \mathrm{d}\mu = 0 \xRightarrow{\text{Satz 2.5}} f = 0$ μ-f.s. und die Ungleichung ist richtig. Sei also $||f||_p > 0$ und $||g||_q > 0$ (gleiches Argument). $x \mapsto \log x$ ist konkav, d.h. es gilt: $\alpha \log(a) + (1 - \alpha) \log(b) \leq \log(\alpha a + (1 + \alpha)b)$ $\forall a, b > 0, 0 < \alpha < 1$. $\exp(\cdot)$ auf beiden Seiten:

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b \quad \forall a, b \geq 0, 0 < \alpha < 1$$

Setze $a := \frac{|f(\omega)|^p}{||f||_p^p}, b := \frac{|g(\omega)|^q}{||g||_q^q}, \alpha = \frac{1}{p}$ (ω beliebig)

$$\begin{aligned}
\implies \quad \tfrac{|f(\omega)| \cdot |g(\omega)|}{||f||_p \cdot ||g||_q} &\leq \frac{1}{p} \frac{|f(\omega)|^p}{||f||_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(\omega)|^q}{||g||_q^q} \\
\implies \quad |f(\omega)| \cdot |g(\omega)| &\leq \frac{1}{p} |f(\omega)|^p ||f||_p^{1-p} ||g||_q + \frac{1}{q} |g(\omega)|^q ||g||_q^{1-q} ||f||_p \\
\xRightarrow{\text{Int. über } \omega} \quad ||f \cdot g||_1 &\leq \frac{1}{p} ||f||_p^p ||f||_p^{1-p} ||g||_q + \frac{1}{q} ||g||_q^q ||g||_q^{1-q} ||f||_p \\
&= \frac{1}{p} ||f||_p ||g||_q + \frac{1}{q} ||g||_q ||f||_p \\
\implies \quad &\text{Behauptung}
\end{aligned}$$

b) Wegen $|f+g| \leq |f|+|g|$ gilt $||f+g||_p \leq |||f|+|g|||_p$. Also genügt es die Ungleichung für $f+g \geq 0$ zu beweisen. Falls $p=1$ folgt $||f+g||_1 = \int (f+g)\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu = ||f||_1 + ||g||_1$. Sei also $p > 1$. Mit $(f+g)^p \leq (2 \cdot \max\{f,g\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p) \implies (f+g) \in L^p$, also $||f+g||_p < \infty$. Sei $q := \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$. Anwendung von Teil a) liefert:

$$\begin{aligned} ||f+g||_p^p &= \int f(f+g)^{p-1}\mathrm{d}\mu + \int g(f+g)^{p-1}\mathrm{d}\mu \\ &\overset{\text{a)}}{\leq} (||f||_p + ||g||_p)||(f+g)^{p-1}||_q \quad (*) \end{aligned}$$

Wegen $(p-1)q = p$ gilt:

$$||(f+g)^{p-1}||_q = \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = ||f+g||_p^{\frac{p}{q}} = ||f+g||_p^{p-1}$$

Falls $||f+g||_p = 0$ ist die Ungleichung richtig. Sei also $||f+g||_p > 0$. Nehme $(*)$ und teile durch $||f+g||_p^{p-1}$ auf beiden Seiten $\implies$ Behauptung. ∎

Bemerkung
Falls $p = q = 2, \Omega = \{1,\ldots,n\}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \mu = \sum_{k=1}^n \delta_k, f(i) = a_i, g(i) = b_i$, bekommt man:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

In diesem Fall ist Satz 2.12 a) die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
Lineare Algebra: $|\langle a,b\rangle| \leq ||a|| \cdot ||b|| \quad \forall a,b \in \mathbb{R}^n$. Das motiviert

Satz 2.13
Es sei $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)/\sim_\mu$ der Raum der $\sim_\mu$-Äquivalenzklassen quadratisch μ-integrierbarer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Dann ist $\langle f,g\rangle := \int f \cdot g d\mu$ hierauf ein Skalarprodukt, durch den $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)/\sim_\mu$ zu einem Hilbertraum wird.

Beweis siehe Henze, Stochastik II ∎

Bemerkung

a) $(L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)/\sim_\mu, ||\cdot||_p)$ ist ein Banachraum für $p \geq 1$.

b) Ist $\Phi : L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu) \to \mathbb{R}$ stetig und linear, so existiert ein $g \in L^q(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ mit $\Phi(f) = \int f \cdot g\mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.