6 Integralrechnung

6.1 Riemann-Integrale

(siehe Walter: Analysis I)

Definition 6.1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Eine *Zerlegung* Z von $[a,b]$ ist eine Menge der Form

$$Z = \{(t_0, t_1, \dots, t_n), (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) : \quad \begin{aligned} & a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \\ & \tau_k \in I_k := [t_{k-1}, t_k] \text{ für } k = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. $\mathcal{Z}(a,b)$ ist die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$. Die *Riemann-Summe* von f bzgl. $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ ist

$$S(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Man setzt $d_k = t_k - t_{k-1}$ und $|Z| = \max_{k=1,\dots,n} d_k$ (*Feinheit*). t_k heißt *Teilungspunkt*, τ_k heißt *Stützstelle*. Kurzschreibweise: $Z = \{t_k, \tau_k, k \le n\}$. f heißt *Riemann-integrierbar*, falls es ein $J \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jede Folge $(Z_n) \subseteq \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt: $\exists \lim_{n\to\infty} S(f, Z_n) = J$. Dann heißt J das *Riemann-Integral* von f. Man schreibt

$$J = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Ferner $R([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ ist beschränkt und Riemann-integrierbar}\}$.

Lemma 6.2 (Cauchy-Kriterium)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $J \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

a) f ist Riemann-integrierbar mit $J = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$

b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall Z, Z' \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z|, |Z'| \le \delta_\varepsilon$ gilt:

$$|S(f,Z) - S(f,Z')| \le \varepsilon \tag{6.1}$$

Beweis. b) $\Rightarrow$ a) Es gelte (6.1). Sei $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z_n| \to 0$ $(n \to \infty)$. Wähle $\varepsilon > 0$. Sei $\delta_\varepsilon > 0$ aus (6.1). Dann $\exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|Z_j| \leq \delta_\varepsilon$ für alle $j \geq N_\varepsilon$. (6.1) liefert $|S(f,Z_n) - S(f,Z_m)| \leq \varepsilon$ für alle $n,m \geq N_\varepsilon$. Thm. 2.26 zeigt $\exists \lim_{m\to\infty} S(f,Z_m) = J$. Damit $|S(f,Z_n) - J| \leq \varepsilon$ $(\forall n \geq N_\varepsilon)$ $(*)$
Sei $Z'_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z'_n| \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann $\exists N'_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ mit $|Z'_n| \leq \delta_\varepsilon$ für alle $n \geq N'_\varepsilon \overset{6.1}{\Longrightarrow} |S(f,Z_n) - S(f,Z'_n)| \leq \varepsilon\ \forall n \geq N'_\varepsilon$ $(**)$
$\Longrightarrow |S(f,Z'_n) - J| \leq |S(f,Z'_n) - S(f,Z_n)| + |S(f,Z_n) - J| \leq 2\varepsilon$ für alle $n \geq N'_\varepsilon$, nach $(*)$, $(**)$. $\Longrightarrow \exists \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = J$

a) $\Rightarrow$ b) f sei Riemann-integrierbar. Annahme: (6.1) sei falsch, also $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists Z_n, Z'_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z_n|, |Z'_n| < \frac{1}{n}$, aber $|\underbrace{S(f,Z_n)}_{\text{n.V.}\to J} - \underbrace{S(f,Z'_n)}_{\to J\ (n\to\infty)}| > \varepsilon$ ↯

□

Beispiel 6.3. a) Sei $a \leq c \leq d \leq b$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Setze $f = \alpha \mathbf{1}_{[c,d]}$. Dann ist f Riemann-integrierbar und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha(d-c)$. Speziell $\int_a^b \alpha\,\mathrm{d}x = \alpha(b-a)$, $\int_a^b \alpha \mathbf{1}_{[c,c]}(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $Z = \{t_j,\ \tau_j,\ j \leq n\} \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z| \leq \varepsilon$. Seien $l \leq m \leq n$, sodass $c \in I_l$, $d \in I_m$. Dann $f(\tau_j) = \alpha$ für $l < j < m$ und $f(\tau_j) = 0$ für $j < l-1$ und $j > m+1$.

$$|S(f,Z) - \alpha(d-c)| = \left| \sum_{j=l-1}^{m+1} f(\tau_j) d_j - \left(\sum_{j=l+1}^{m-1} \alpha d_j + \alpha\,(t_l - c + d - t_{m-1}) \right) \right|$$
$$\leq 6\,|\alpha|\,|Z| \leq 6\,|\alpha|\,\varepsilon$$

Mit $|Z_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt Beh. □

b) Sei $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. *Behauptung.* f ist nicht Riemann-Integrierbar.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Setze $Z = \{t_k = \frac{k}{n},\ k = 0,\ldots,b;\ \tau_k = t_{k-1} \in \mathbb{Q}\}$, $Z' = \{t' = \frac{k}{n},\ \tau'_k = \frac{k}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{n},\ k = 1,\ldots,n\}$. $\Longrightarrow |Z| = |Z'| = \frac{1}{n}$,

$$S(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(\tau_k)}_{=1} \cdot \frac{1}{n} = 1,\ S(f,Z') = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(\tau'_k)}_{=0} \cdot \frac{1}{n} = 0$$

$\Longrightarrow$ (6.1) kann für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nicht gelten. □

Bemerkung 6.4 (Verfeinerung). Seien $Z = \{t_k,\ \tau_k,\ k \leq n\} \in \mathcal{Z}(a,b)$ und $t'_1,\ldots,t'_l \in [a,b]$. Ordne die t_k, t'_j zu $a = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \cdots < \hat{t}_m = b$. Setze $\hat{I}_j = [\hat{t}_{j-1}, \hat{t}_j]$, $\hat{d}_j = \hat{t}_j - \hat{t}_{j-1}$. Wenn $\hat{I}_j \subseteq [t_{k-1}, t_k]$, dann definiere Stützstellen $\hat{\tau}_j = \tau_k$. Dann ist $S(f,Z) = \sum_{j=1}^{m} f(\hat{\tau}_j)\hat{d}_j$ im Allgemeinen keine Riemann-Summe, weil u. U. $\hat{\tau}_j \notin \hat{I}_j$.

Satz 6.5. $C([a,b]) \subset R([a,b])$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Thm 4.16 $\implies f$ ist gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x, y \in [a,b] \text{ mit } |x-y| \le \delta_\varepsilon \text{ gilt: } |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \tag{$*$}$$

Seien $Z = \{t_k,\ \tau_k\}, Z' = \{t'_k,\ \tau'_k\} \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z|, |Z'| \le \frac{\delta_\varepsilon}{2}$. Verfeinere Z und Z' wie in Bem. 6.4 zu den gemeinsamen Teilungspunkten $\{t_k, t_i\} = \{\hat{t}_j\}$. Erhalte dabei Stützstellen $\hat{\tau}_j$ zu Z und $\hat{\tau}'_j$ zu Z', wobei $\left|\hat{\tau}_j - \hat{\tau}'_j\right| \le 2\frac{\delta_\varepsilon}{2} = \delta_\varepsilon$, weil $\hat{I}_j \subseteq I_k \cap I'_{l_j}$ und $\hat{\tau}_j \in I_{k_j}$, $\hat{\tau}'_j \in \hat{I}_{l_j}$. Somit

$$|S(f,Z) - S(f,Z')| \overset{6.4}{=} \left| \sum_{j=1}^{m} f(\hat{\tau}_j)\hat{d}_j - \sum_{j=1}^{m} f(\hat{\tau}'j)\hat{d}_j \right| \le \sum_{j=1}^{m} \underbrace{|f(\hat{\tau}_j) - f(\hat{\tau}'j)|}_{\overset{*}{\le} \varepsilon} \hat{d}_j \le \varepsilon(b-a)$$

Lemma 6.2 $\implies$ Beh. $\square$

Satz 6.6. *Seien $f, g \in R([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c \in [a,b]$, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gelten:*

a) $\alpha f + \beta g \in R([a,b])$ und $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, \mathrm{d}x = \alpha \int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \beta \int\limits_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$

b) Wenn $f(x) \le g(x)$ $(\forall x \in [a,b])$, dann $\int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \le \int\limits_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$.

Speziell $\left| \int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| \le (b-a) \sup\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$.

c) $|f| \in R([a,b])$ und $\left| \int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$.

d) $h \in R([a,b]) \iff h|_{[a,c]} \in R([a,c]) \wedge h|_{[c,b]} \in R([c,b])$.
Dann $\int\limits_a^b h(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_a^c h(x)\, \mathrm{d}x + \int\limits_c^b h(x)\, \mathrm{d}x$.

Beweis. Sei $Z_n = \{t_{j,n}; \tau_{j,n}; j \le m_n\} \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|Z_n| \to 0$ $(n \to \infty)$. Setze $d_{j,n} = t_{j,n} - t_{j-1,n}$.

a)

$$S(\alpha f + \beta g, Z_n) = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha f(\tau_{j,n}) + \beta f(\tau_{j,n}) d_{j,n} = \alpha \underbrace{\sum_{j=1}^{m_n} f(\tau_{j,n}) d_{j,n}}_{\to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} + \beta \underbrace{\sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_{j,n}) d_{j,n}}_{\to \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ (n \to \infty)}$$

b)

$$\underbrace{S(f,Z_n)}_{\to\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{m_n} f(\tau_{j,n})d_{j,n} \overset{\text{n.V.}}{\leq} \sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_{j,n})d_{j,n} = \underbrace{S(g,Z_n)}_{\to\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

c) Abschätzung folgt aus $\pm f \leq \mathbf{1}_{[a,b]} \sup|f|$. Siehe Ilias.

d) Siehe Ilias.

□

Man setzt für $f \in R([a,b])$, $a \leq b$ $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Auch in diesem Fall gilt Satz 6.6 entsprechend.

6.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition 6.7. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f, wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ ist. Man schreibt $F = \int f\,\mathrm{d}t = \int f = f^{[1]}$. Beachte: mit F ist auch die Funktion $F(x) + c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ ($x \in [a,b]$) eine Stammfunktion von f.

Lemma 6.8. *Sei $f \in R([a,b])$ und f sei stetig bei $x_0 \in [a,b]$. Dann ist das unbestimmte Integral $F_0(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$, differenzierbar bei x_0 und $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Beweis. Sei $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$. Dann

$$\left|\frac{1}{x-x_0}\left(F_0(x) - F_0(x_0)\right) - f(x_0)\right| \overset{\text{Bsp. 6.3}}{=}$$

$$\left|\frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t\right| \overset{\text{Satz 6.6}}{=}$$

$$\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \overset{\text{Satz 6.6}}{\leq} \frac{1}{|x-x_0|}|x-x_0| \underbrace{\sup_{|x_0-t|\leq|x-x_0|} |f(t)-f(x_0)|}_{\to 0\ (x\to x_0)}$$

□

Theorem 6.9 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *a) Sei $f \in C([a,b])$. Dann ist* jede *Stammfunktion F gegeben durch*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad (\forall x \in [a,b]).$$

Speziell $x = b$:

$$\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) =: F|_b^a.$$

b) *Sei $g \in C^1([a,b])$. Dann $\int\limits_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t = g(b) - g(a)$.*

Beweis. a) Lem. 6.8 $\implies F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f. Sei F eine weitere Stammfunktion von f. Dann $(F - F_0)' = f - f = 0 \xRightarrow{\text{TODO 5.20}} F(x) - F_0(a) = F(a) - F_0(a) = F(a)$.

b) folgt aus 1 mit $f = g'$.

□

Bemerkung. Für unstetige f, g' ist der Hauptsatz viel schwieriger und zum Teil falsch. Ein Beispiel ist

$$g(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x} & ,0 < x \le 1 \\ 0 & ,x = 0. \end{cases}$$

Wie in Bsp. TODO 5.11: g ist auf $[0,1]$ differenzierbar und $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$, $x > 0$ $\implies g$ ist unbeschränkt und somit nicht Riemann-integrierbar. Also ist 6.9 2 nicht sinnvoll.

Beispiel 6.10. a) Wir kennen schon zahlreiche Stammfunktionen aus Kapitel 5.

b) Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < \varrho =$ Konvergenzradius. Betrachte $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$. Wie im Beweis von Thm. TODO 5.9 zeigt man, dass F den gleichen Konvergenzradius $\varrho > 0$ hat. Thm.TODO 5.9 $\implies F'(x) = f(x)$, $|x| < \varrho$. F ist also eine Stammfunktion von f.
Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1)$$

$$\implies F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

ist Stammfunktion von f. Weitere Stammfunktion ist arctan. Da $\arctan 0 = 0 = F(x)$, folgt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1).$$

c) Fläche A zwischen $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = x^2 - \pi x$ $(0 \leq x \leq \pi)$. Beachte $f(\pi) \geq 0 \geq g(x)$ für alle $x \in [0, \pi]$. Also

$$A = \int_0^\pi (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \overset{\text{HS}}{=} \left(\mathrm{e}^x - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2\right)\right)\Big|_0^\pi$$
$$= \mathrm{e}^\pi - \left(\frac{1}{3}\pi^3 - \frac{\pi}{2}\pi^2\right) - (1 - 0) = \mathrm{e}^\pi - \frac{\pi^3}{6} - 1.$$

Satz 6.11.

Beispiel 6.12.

Satz 6.13.

Beispiel 6.14.

Bemerkung 6.15 (Integration rationaler Funktionen). Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p, q reelle gekürzte Polynome, q sei nicht konstant 0, höchster Koeffizient von p und q sei gleich 1.

a) Polynomdivison: es existieren Polynome p_0, r mit $\operatorname{grad} p_0 \leq \operatorname{grad} q$, sodass $f = r + \frac{p_0}{q}$. $\Longrightarrow r$ kann integriert werden

b) Fundamentalsatz der Algebra: $\exists!\ z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ (mit $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$) und $\exists!\ n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$, sodass: $q(x) = (x - z_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - z_m)^{n_m}$.

c) Komplexe Partialbruchzerlegung (TODO Königsberger §4.3): $\exists!\ c_{jk} \in \mathbb{C}:$

$$\frac{p_0(x)}{q(x)} = \frac{c_{11}}{(x - z_1)} + \ldots + \frac{c_{1n_1}}{(x - z_1)^{n_1}} + \ldots + \frac{c_{m1}}{(x - z_m)} + \ldots + \frac{c_{mn_m}}{(x - z_m)^{n_m}} \tag{6.2}$$

d) Integration:

   a) Terme mit $c_{jk}, z_j \in \mathbb{R}$ in (6.2) können integriert werden (man hat Formel für Stammfunktion)

   b) Komplexer Fall für Nennerpotenz $k = 1$: Da p_0, q reell sind, gilt (für $x \in \mathbb{C}$):

$$\frac{p_0(x)}{q(x)} = \overline{\frac{p_0(\overline{x})}{q(\overline{x})}} \overset{(6.2)}{=} \overline{\sum_{j,k} \frac{c_{jk}}{(\overline{x} - z_j)^k}} = \sum_{j,k} \frac{\overline{c_{jk}}}{(x - \overline{z_j})^k}$$

   Da (6.2) eindeutig ist, gilt: wenn $c_{jk}, z_j \notin \mathbb{R}$, dann $\exists l \neq j$, sodass $\overline{z_j} = z_l$ und $\overline{c_{jk}} = c_{lk}$ (gleiches k). Für $k = 1$ treten im komplexen Fall also Terme der Form auf:

$$\frac{c}{x - z} + \frac{\overline{c}}{x - \overline{z}} = \frac{(c + \overline{c})x - (c\overline{z} + \overline{c}z)}{(x - z)(x - \overline{z})} = \frac{2\,\mathrm{Re}\,(c)x - 2\,\mathrm{Re}\,(c\overline{z})}{x^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z)x + |z|^2} =: \frac{ax + b}{x^2 + \alpha x + \beta}, \tag{6.3}$$

mit $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > \frac{\alpha^2}{4}$.
Übung: Stammfunktion für (6.3)

e) Komplexer Fall für $k > 1$: Mit komplexer Integration erhält man:

$$\int \left(\frac{c}{(t-z)^k} + \frac{\overline{c}}{(t-\overline{z})^k} \right) \mathrm{d}t = \frac{-2\operatorname{Re}\left(c(x-\overline{z})^k\right)}{(k+1)\left(x^2 - 2\operatorname{Re}(z)x + |z|^2\right)^{k-1}} \tag{6.4}$$

(siehe TODO Amann/Escher: Analysis II, Bem. II.5.10)
reelle Methode: Walter, Analysis I, §11.5

Fazit. 2 zugestanden, findet man Formel für eine Stammfunktion von f.

Beispiel. a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben, $a \neq b$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$.

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)} \overset{(6.2),\text{ Ansatz}}{=} \frac{c_1}{x-a} + \frac{c_2}{x-b} \implies 1 = c_1(x-b) + c_2(x-a) \quad (*)$$

(für zu bestimmende $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)
Berechne c_1, c_2: $(*)$ gilt nach stetiger Fortsetzung für alle $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen:

$$x = a: \quad 1 = c_1(a-b) \neq 0 \qquad \implies c_1 = \frac{1}{a-b}$$

$$x = b: \quad 1 = 0 + c_2(b-a) \qquad \implies c_2 = \frac{1}{b-a}$$

$$\implies f(x) = \frac{1}{b-a}\left(-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right)$$

$$\begin{aligned}
\implies \int f(t)\mathrm{d}t &= -\frac{1}{b-a}\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{t-a} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t-b}\right) \\
&= -\frac{1}{b-a}\left(\ln|x-a| - \ln|x-b|\right) \\
&= \frac{1}{a-b} \ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| \quad (x \neq a, b) \text{ (Probe!)}
\end{aligned}$$

b)

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$$

Ansatz mit (6.2) und (6.3):

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{1+x^2}, \text{ wobei } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ zu bestimmen sind}$$

$$\implies x = a(x-1)(1+x^2) + b(1+x^2) + (cx+d)(x-1)^2 \quad (*)$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} x=1: &\quad 1=0+2b+0 &&\implies b=\frac{1}{2} \\ x=0: &\quad 0=-a+b+d &&\implies a-d=\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{+}$$

Koeffizientenvergleich (vgl. Thm. TODO 5.28):

$$\begin{aligned} \text{für } x^2: &\quad 0=a+0+c &&\implies c=-a \\ \text{für } x^3: &\quad 0=-a+b-2c+d=-a+\frac{1}{2}+2c+d &&\implies a+b=-\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{++}$$

(+) und (++): $2a=0 \implies a=0=c$, $d=-\frac{1}{2}$

$$\implies f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}-\frac{\frac{1}{2}}{1+x^2}$$

$$\implies \int f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\arctan x\right)$$

6.3 Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung

Beispiel (Zinseszins)**.** Gegeben seien Anfangskapital u_0, Anlage dauert Zinsrate nach Zeit $\frac{t}{n}$ mit Wiederanlage der Zinsen. u_k sei Kapital zur Zeit $\frac{kt}{n}$, $k=0,\dots,n$ ($n\in\mathbb{N}$).

$$\begin{aligned} \implies u_1 &= u_0+\frac{at}{n}u_0=\left(1+\frac{at}{n}\right)u_0 \\ u_2 &= u_1+\frac{at}{n}u_1=\left(1+\frac{at}{n}\right)^2u_0 \\ \text{iterativ: } u_n &= \left(1+\frac{at}{n}\right)^n u_0 \end{aligned}$$

„instantane Wiederanlage“ =TODO „$n\to\infty$“. Damit $u_n\to \mathrm{e}^{at}u_0$ (vgl. Aufg. 5.6, Aufg. 12.3 e). $\rightsquigarrow u(t)=\mathrm{e}^{at}u_0=$ Kapital zur Zeit t bei instantaner Wiederanlage.

Nach Bem. TODO 5.21 ist $u\in C^1(\mathbb{R})$ die einzige Lösung von

$$\begin{cases} u'(t)=au(t) \\ u(0)=u_0 \end{cases} \quad (a,u_0\in\mathbb{R} \text{ gegeben})$$

Andere Interpretation: $a=\frac{u'(t)}{u(t)}=$ momentane, relative Änderung des Kapitals („pro Kopf“). Weitere Beispiele für diese Differentialgleichung: Radioaktiver Zerfall ($a<0$), Populationswachstum bei unbeschränktem Nahrungsangebot ($u(t)=$ Stoffmenge)

„$\frac{u'}{u} = a$“ ist unplausibel für Population (etwa da $u(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$ für $a > 0$). Verhulst (1837): Gesetz für begrenztes Wachstum: $\frac{u'(t)}{u(t)} = \lambda - \frac{\lambda u(t)}{u_\infty}$ ist $u(t)$-abhängig. „mehr Konkurrenten“ =TODO $u(t)$ groß =TODO weniger Wachstum

$$\Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = \lambda \left(1 - \frac{u(t)}{u_\infty}\right) u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad t \geq 0. \tag{6.5}$$

Gegeben sind $\lambda, u_0, u_\infty > 0$ (λ: Wachstumsparameter, u_∞: Sättigungsparameter, u_0: Anfangswert). Gesucht: $u \in C^1(\mathbb{R}_+)$, das (6.5) für $t \geq 0$ löst.

Bemerkung. Spezielle, „stationäre“ Lösungen: $u(t) = 0$ mit $u_0 = 0$ oder $u(t) = u_\infty$ mit $u_0 = u_\infty$ (für alle $t \in \mathbb{R}$). Im folgenden sei $u_0 \neq u_\infty$, $u_0 > 0$.

Lösung von (6.5): Wir nehmen an, es gebe eine Lösung $u \in C^1([0, b])$ von (6.5). Wenn $u_0 > u_\infty$ $(u_0 < u_\infty)$, dann existiert ein $t_0 > 0$, sodass $u(t) > 0$, $u(t) > u_\infty$ $(u(t) < u_\infty)$ für alle $0 \leq t \leq t_0$ (da u stetig und $u(0) = u_0$).

$$(6.5) \Longrightarrow \frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)} = \frac{\lambda}{u_\infty} \quad (\forall\ 0 \leq s \leq t_0)$$

$$\xRightarrow{\int_0^t \dots \mathrm{d}s} \int_0^t \frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)} \,\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{\lambda}{u_\infty} \,\mathrm{d}s = \frac{\lambda}{u_\infty} t \quad (\forall\ 0 \leq t \leq t_0)$$

Substitution: $x = u(s)$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = u'(s)$, $u(0) = u_0$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \int_{u_0}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}x}{(u_\infty - x)x} = \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{x}{|x - u\infty|} \Big|_{u_0}^{u(t)} \\
&\xRightarrow{x>0} \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{u(t)}{|u(t) - u_\infty|} = \frac{\lambda}{u_\infty} t + \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|} \\
&\xRightarrow{\cdot u_\infty,\ \exp} \frac{u(t)}{|u(t) - u\infty|} = \mathrm{e}^{\lambda t} \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|} \\
&\Longrightarrow u(t) = \frac{u_0 u_\infty}{u_0 + (u_\infty - u_0)\mathrm{e}^{\lambda t}}.
\end{aligned}$$

Probe zeigt, dass dieses u (6.5) für alle $t \geq 0$ löst.
Es gilt:

- $u(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ $(u_0 > 0)$ (biologisch sinnvoll)
- $u(t) \to u_\infty$ für $t \to \infty$
- $u(t)$ wächst und $u(t) < u_\infty$ $(\forall t > 0)$, falls $u_0 < u_\infty$
- $u(t)$ fällt und $u(t) > u_\infty$ $(\forall t > 0)$, falls $u_0 > u_\infty$

Gegeben sei $f \in C([a,b])$, $g \in C(\mathbb{R}_+)$, $u_0 \in (a,b)$. Suchen $u \in C^1([0,\tau))$ und $\tau \in (0,\infty)$, sodass $u(t) \in (a,b)$ für alle $t \in [0,\tau)$ und

$$\begin{cases} u'(t) = g(t)f(u(t)), \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad 0 \le t < \tau. \tag{6.6}$$

(in (6.5): $f(x) = \left(1 - \frac{x}{u_\infty}\right) x$, $g(x) = \lambda$)

Satz 6.16 (Trennung der Variablen). *Sei $f \in C((a,b))$, $g \in C(\mathbb{R}_+)$, $u_0 \in (a,b)$, $f(u_0) \neq 0$. Dann existiert ein $t_0 > 0$ und eine eindeutige Lösung $u \in C^1([0,t_0])$ von (6.6).*

Beweis. Sei etwa $f(u_0) > 0$ und $\tau > 0$. Wähle $\varepsilon \in (0, f(u_0))$. Da f stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \subseteq (a,b)$. Sei $M := \max\limits_{|x-u_0| \le \delta} f(x) < \infty$ (Satz vom Maximum). Setze $t_0 = \min\{\frac{\delta}{Mc}, T\}$, $c = \max\limits_{0 \le t \le T} |g(t)|$.

a) Eindeutigkeit: Sie $u \in C^1([0,\tau))$ eine Lösung von (6.6). Annahme: $\tau > t_0$ und es existiere $t_1 \in (0, t_0)$ mit $|u(s) - u_0| \le \delta$ für alle $0 \le s < t_1$ und $|u(t_1) - u_0| = \delta$.

$$\implies |u(t_1) - u_0| \overset{\text{HS}}{=} \left| \int_0^{t_1} \underbrace{u'(s)}_{\overset{(6.6)}{=} f(u(s))g(s)} \mathrm{d}s \right|$$

$$\overset{\text{Satz 6.6}}{\le} \int_0^{t_1} |f(u(s))|\,|g(s)|\,\mathrm{d}s \le \int_0^{t_1} Mc\,\mathrm{d}s \le Mct_1 < Mct_0 = \delta \quad \lightning$$

$\implies |u(s) - u_0| \le \delta$ für alle $0 \le s < \min\{t_0, T\} =: \bar{t}$. Damit (6.6) $\implies \frac{u'(s)}{f(u(s))} = g(s)$.

$$\implies G(t) := \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t u'(s)\,\mathrm{d}f(u(s))s \overset{x=u(s)}{=} \int_{u_0}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \quad \text{für alle } 0 \le t < \bar{t} \tag{6.7}$$

Setze $H(y) = \int\limits_{u_0}^{y} \mathrm{d}x f(x)$ für $y \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \implies H(u(t)) = G(t)$. H ist strikt wachsend

$$u(t) = H^{-1}(G(t)) \quad (\forall\, 0 \le t < \bar{t}) \tag{6.8}$$

b) Existenz: Sei u durch (6.8) für $0 \le t \le t_0$ gegeben. Dann $u(0) = H^{-1}(G(0)) = H^{-1}(0) = u_0$. Kettenregel und Umkehrsatz liefern:

$$\exists u'(t) = \frac{1}{H'(H^{-1}(G(t)))} G'(t) \overset{\text{HS}}{=} \frac{1}{H'(u(t))} \overset{\text{HS}}{=} \frac{1}{\frac{1}{f(u(t))}} g(t) = f(u(t))g(t)$$

$\implies u$ löst (6.6).

Fazit: u aus (6.8) ist eine Lösung von (6.6) und jede weitere Lösung ist auf $[0, t_0]$ gleich diesem u und kann, falls $\tau < t_0$, zu u auf $[0, t_0]$ fortgesetzt werden. $\square$

Beispiel 6.17. a)

$$\text{Betrachte } \begin{cases} u'(t) = u(t)^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, t \geq 0. \text{ Es sei } u_0 > 0.$$

$$\implies f(x) = x^2, \ g(t) = 1.$$

$$\xRightarrow{\text{TV, (6.7)}} \underbrace{\int_{u_0}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}}_{=-\frac{1}{x}|_{u_0}^{u(t)}} = \int_0^t 1 \ \mathrm{d}s = t$$

$$\implies t = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)}$$

$$\implies u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - t} \text{ für } 0 \leq t < \frac{1}{u_0} =: \tau$$

Zum Beispiel für $u_0 = 1$: $u(t) = \frac{1}{1-t}$ (Probe!). „blow up“.

b)

$$\text{Sei } a \in C(\mathbb{R}), \ u_0 \in \mathbb{R}. \text{ Betrachte } \begin{cases} u'(t) = a(t)u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}, t \geq 0.$$

$\implies f(x) = x$. Sei $u_0 > 0$. Trennung der Variablen liefert

$$\underbrace{\int_{u_0}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x}}_{=\ln u(t) - \ln u_0} = \int_0^t a(s) \ \mathrm{d}s$$

$$\implies u(t) = \exp\left(\ln u_0 + \int_0^t a(s) \ \mathrm{d}s\right) = \exp\left(\int_0^t a(s) \ \mathrm{d}s\right) u_0$$

Probe zeigt: Dies löst die Gleichung für alle $t \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in \mathbb{R}$.

c) $u'(t) = \sqrt{u(t)}$, $u(0) = 0$, $t \geq 0$. $\implies f(x) = \sqrt{x}$, $g(t) = 1$. $\implies f(0) = f(u_0) = 0$, haben Lösung $v(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Führe Trennung der Variablen trotzdem durch. Sei u eine weitere Lösung, die auf $(0, t_0]$ ungleich 0 ist. Dann $\frac{u'(s)}{\sqrt{u(s)}} = 1$ für $0 < s \leq t_0$. Sei $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < t_0$

$$\xRightarrow{\text{TV}} \int_\varepsilon^t 1 \ \mathrm{d}s = \int_\varepsilon^t \frac{u'(s)}{\sqrt{u(s)}} \ \mathrm{d}s = \int_{u(\varepsilon)}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{u(t)} - \sqrt{u(\varepsilon)}\right).$$

$\varepsilon \to 0$: $t = 2\sqrt{u(t)}$ $(0 < t \leq t_0)$ $\implies u(t) = \frac{t^2}{4}$. Probe: u löst Gleichung.

6.4 Uneigentliche Integrale

Definition 6.18. a)

b)

Bemerkung 6.19. a)

b)

Beispiel 6.20. a)

b)

c)

d)

Satz 6.21. *a)*

b)

Beispiel 6.22. a)

b)

c)

d)

Beispiel 6.23.

Beispiel 6.24.

Trapezregel. ...