2 Ringe

2.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Definition + Bemerkung 2.1.1 (a) Ein **Ring** ist eine Menge R mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, so dass gilt:

(i) $(R,+)$ ist abelsche Gruppe

(ii) $(R,\cdot)$ ist Halbgruppe

(iii) Die Distributivgesetze gelten:

$$\left.\begin{array}{lcl} x\cdot(y+z) & = & xy+xz \\ (x+y)\cdot z & = & xz+yz \end{array}\right\} \text{für alle } x,y,z\in R$$

(b) R heißt **Ring mit Eins**, wenn $(R,\cdot)$ Monoid ist.

(c) R heißt **kommutativer Ring**, wenn $(R,\cdot)$ kommutativ ist.

(d) Ein Ring R mit Eins heißt **Schiefkörper**, wenn $R^x = (R,\cdot)^\times = R\setminus\{0\}$, dh. wenn jedes $x\in R\setminus\{0\}$ invertierbar bzgl. $\cdot$ ist.

Beispiel:

$$\mathbb{H} := \{\begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w}\end{pmatrix}, w,z\in\mathbb{C}\}$$

ist ein Schiefkörper, genannt die **Hamilton-Quaternionen**.

(e) Ein kommutativer Schiefkörper heißt **Körper**.

(f) In jedem Ring gilt:

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot 0 = 0 = 0\cdot x \\ x(-y) = -(xy) = (-x)y \\ (-x)(-y) = xy \end{array}\right\} \text{für alle } x,y\in R$$

Beweis: $x\cdot 0 = x\cdot(0+0) = x\cdot 0 + x\cdot 0$ (genauso für $0\cdot x$)
$x(-y)+xy = x(-y+y) = x\cdot 0 = 0$
$(-x)(-y) = -((-x)y) = -(-(xy)) = xy$ ■

(g) Ist R ein Ring mit Eins und $R\neq\{0\}$, so ist $0\neq 1$ in R

Beweis: Wäre $0 = 1$, so gälte für jedes $x \in R : x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$, also doch $R = \{0\}$ ■

Definition 2.1.2

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

(a) $R' \subseteq R$ heißt **Unterring**, wenn $(R', +, \cdot)$ Ring ist. Umgekehrt heißt R dann **Ringerweiterung** von R'.

(b) $I \subseteq R$ heißt (zweiseitiges) **Ideal**, wenn $(I, +)$ Untergruppe von $(R, +)$ ist und $rx \in I, xr \in I$ für alle $x \in I, r \in R$.

Beispiel: In $R = \mathbb{Z}$ sind $n\mathbb{Z}$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ Ideale. In $R = \mathbb{Q}$ dagegen sind diese für $n \neq 0$ keine Ideale.

Definition + Bemerkung 2.1.3

Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Für a ist $(a) := a \cdot R = \{a \cdot r, r \in R\}$ ein Ideal in R.

(b) Ein Ideal I in R heißt **Hauptideal**, wenn es ein $a \in R$ gibt mit $I = (a)$.

(c) R heißt **Hauptidealring**, wenn jedes Ideal in R ein Hauptideal ist.

(d) $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring.

(e) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $R \neq \{0\}$. Dann ist R ein Körper genau dann, wenn (0) und R die einzigen Ideale in R sind.

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei $I \subset R$ Ideal, $a \in I \setminus \{0\} \Rightarrow$ es gibt $a^{-1} \in R \Rightarrow 1 = aa^{-1} \in I \Rightarrow I = R$ $(x \in R \Rightarrow x = 1x)$
"$\Leftarrow$" Sei $a \in R \setminus \{0\} \Rightarrow (a) = R \Rightarrow \exists b \in R : ab = 1$ ■

Beispiel: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist $n = p$ für eine Primzahl p, so ist $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper, und $(\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \{\bar{a}, a \in \mathbb{Z}, \mathrm{ggT}(a, n) = 1\}$. In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dagegen gilt $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$.

Definition 2.1.4

Sei R ein kommutativer Ring.

(a) $x \in R$ heißt **Nullteiler**, wenn es ein $y \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $xy = 0$.

(b) $R \neq \{0\}$ heißt **nullteilerfrei**, wenn 0 der einzige Nullteiler in R ist. (Das heißt: Aus $xy = 0$ folgt, dass $x = 0$ oder $y = 0$.)

(c) R heißt **Integritätsbereich** (engl. **integral domain**), wenn er nullteilerfrei und kommutativ ist sowie eine Eins besitzt.

Definition + Bemerkung 2.1.5 (a) Eine Abbildung $\varphi : R \to R'$ (R, R' Ringe) heißt **Homomorphismus von Ringen**, wenn $\varphi : (R, +) \to (R', +)$ ein Homomorphismus von Gruppen und $\varphi : (R, \cdot) \to (R', \cdot)$ ein Homomorphismus von Halbgruppen ist.

(b) Sind R, R' Ringe mit Eins, so heißt ein Homomorphismus von Ringen $\varphi : R \to R'$ ein **Homomorphismus von Ringen mit Eins**, wenn $\varphi(1_R) = 1_{R'}$.

(c) Die Ringe bilden mit Ringhomomorphismus eine Kategorie

(d) Die Ringe mit Eins bilden mit Homomorphismen von Ringen mit Eins eine Kategorie (echte Unterkategorie der Ringe)

(e) $(R, +, \cdot) \hookrightarrow (R, +)$ ist kovarianter Funktor: Ringe $\to$ abelsche Gruppen.

$(R, +, \cdot) \mapsto (R^\times, \cdot)$ ist kovarianter Funktor: Ringe mit Eins $\to$ Gruppen.

Beispiel: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $R^{n\times n}$ der Ring der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in R Für $n \geq 2$ ist $R^{n\times n}$ nicht kommutativ und nicht nullteilerfrei.

Die Eins in $R^{n\times n}$ ist die Einheitsmatrix:

$$E_n := \begin{pmatrix} 1_R & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1_R \end{pmatrix}$$

Die Einheiten in $R^{n\times n}$ sind die invertierbaren Matrizen: $(R^{n\times n})^x = GL_n(R) = \{A \in R^{n\times n} : \exists B \in R^{n\times n} : A \cdot B = B \cdot A = E_n\} = \{A \in R^{n\times n} : \det A \in R^\times\}$, denn für die Adjungierte $A^\#$ von A gilt: $A \cdot A^\# = \det(A) \cdot E_n$.

($A^\# = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$, wobei A_{ji} die Matrix A ohne die j-te Zeile und i-te Spalte ist.)

Bemerkung 2.1.6

Sei $\varphi : R \to R'$ Ringhomomorphismus. Dann gilt:

(a) $\text{Bild}(\varphi)$ ist Unterring von R'

(b) $\text{Kern}(\varphi) := \varphi^{-1}(0)$ ist Ideal in R

Beweis: Sei $x \in \text{Kern}(\varphi)$, $r \in R \Rightarrow \varphi(rx) = \varphi(r)\varphi(x) = \varphi(r)0 = 0 \Rightarrow rx \in \text{Kern}(\varphi)$ ∎

(c) Ist R Schiefkörper, R' Ring mit Eins, φ Homomorphismus von Ringen mit Eins, so ist φ injektiv oder die Nullabbildung.

Beweis: Sei $x \in R \setminus \{0\} \Rightarrow \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(1) \neq 0$, sofern φ nicht die Nullabbildung $\Rightarrow \varphi(x) \neq 0 \Rightarrow \text{Kern}(\varphi) = \{0\} \Rightarrow \varphi$ injektiv. ∎

Definition + Bemerkung 2.1.7

Sei R Ring mit Eins.

(a)
$$\varphi_R : \mathbb{Z} \to R,\ n \mapsto \begin{cases} n \cdot 1_R = \underbrace{1_R + \cdots + 1_R}_{n} & n \geq 0 \\ -((-n) \cdot 1_R) & n \leq 0 \end{cases}$$
ist Homomorphismus von Ringen mit Eins.

(b) Ist Kern(φ_R)$= n\mathbb{Z}$ ($n \geq 0$), so heißt n die **Charakteristik** von R : $n =$char(R)

(c) Ist R nullteilerfrei, so ist char(R)= 0, oder char(R)= p für eine Primzahl p.

(d) Bild(φ_R) $\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n = \text{char}(R)$

(e) Ist K (Schief-)Körper der Charakteristik $p > 0$, so ist Bild(φ_K)$\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ der kleinste Teilkörper von K. Er heißt **Primkörper**. Ist char(K)= 0, so läst sich φ_K eindeutig fortsetzen zu einem injektiven Homomorphismus $\tilde{\varphi}_K : \mathbb{Q} \to K$ mit $\tilde{\varphi}_K(\frac{n}{m}) = \varphi_K(n) \cdot \varphi_K(m)^{-1}$.

Definition + Bemerkung 2.1.8

Sei R Ring. Dann gilt:

(a) Ist J eine Indexmenge und sind I_j, $j \in J$ Ideale in R, so ist $\bigcap_{i \in J} I_j$ ein Ideal in R.

(b) Sind I_1, I_2 Ideale in R, dann ist $I_1 + I_2 = \{a + b : a \in I_1, b \in I_2\}$ ein Ideal.

(c) Sind I_1, I_2 Ideale in R, dann ist $I_1 \cdot I_2 = \{\sum_{i=1}^{<\infty} a_i b_i : a_i \in I_1, b_i \in I_2\}$ ein Ideal.

(d) Sind I_1, I_2 Ideale in R, dann ist $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$ (aber im allgemeinen $\neq$!)

(e) Sei R kommutativ mit Eins, $X \subseteq R$. Die Menge
$$(X) = \bigcap_{\substack{I \subseteq R \text{ Ideal} \\ X \subseteq I}} I = \{\sum_{\text{endl.}} r_i x_i :\ r_i \in R, x_i \in X\}$$
heißt das von X erzeugte Ideal.

(f) Sind I_1, I_2 Ideale in einem kommutativen Ring R mit Eins, so ist $I_1 + I_2 = (I_1 \cup I_2)$ und $I_1 \cdot I_2 = (\{ab : a \in I_1, b \in I_2\})$.

2.2 Polynomringe

Definition + Bemerkung 2.2.1

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $R \neq \{0\}$.

(a) Ein **Polynom** über R ist eine Folge $f = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall i > n_0 : a_i = 0$.

Symbolische Schreibweise: $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

(b) Die Menge $R[X]$ der Polynome über R ist kommutativer Ring mit Eins mit den Verknüpfungen

$$\begin{array}{rcrcl} (a_i)_{i\in\mathbb{N}} & + & (b_i)_{i\in\mathbb{N}} & = & (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}} \\ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} & \cdot & (b_i)_{i\in\mathbb{N}} & = & (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ mit } c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} \end{array}$$

(c) $R \to R[X]$, $a \mapsto (a, 0, \dots)$ ist injektiver Ringhomomorphismus

(d) Für $f = \sum a_i X^i \in R[X]$, $f \neq 0$, heißt $\text{Grad}(f) := \max\{i \in \mathbb{N}, a_i \neq 0\}$ der Grad von f.

(e) Für f, g ist $\text{Grad}(f + g) \leq \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$, falls $f, g, f + g \neq 0$

(f) Für f, g ist $\text{Grad}(f \cdot g) \begin{array}{cl} \leq & \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \\ = & \text{, falls } R \text{ nullteilerfrei} \end{array}$ für $f, g, f \cdot g \neq 0$.

Folgerung 2.2.2

Ist R Integritätsbereich, so ist $R[X]$ ebenfalls Integritätsbereich und $R[X]^x = R^x$

Proposition 2.2.3

Sei R kommutativer Ring mit Eins.

(a) Zu jedem $x \in R$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus. $\varphi_x : R[X] \to R$ mit $\varphi_x|R = id_R$ und $\varphi_x(X) = x$. Es ist $\varphi_x(a_0, a_1, \dots) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$

(b) Zu jedem Homomorphismus $\alpha : R \to R'$ von Ringen mit Eins und jedem $y \in R'$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\varphi_y : R[X] \to R'$, $\varphi_y|R = \alpha$ und $\varphi_y(X) = y$. Explizit: $\varphi_y(\sum a_i X^i) = \sum \alpha(a_i) y^i$.

Beweis:

(a) ist (b) für $R' = R$ und $\alpha = id_R$

(b) Die angegebene Formel ist die einzig mögliche Definition dieses Ringhomomorphismus, weil $\varphi_y(a_0, a_1, \dots) = \varphi_y(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_y(a_i)\varphi_y(X)^i$ sein muß. ■

Bemerkung 2.2.4

Die vorangehende Folgerung bleibt richtig, wenn R' nicht kommutativ ist, solange $\alpha(R) \subseteq Z(R)$ ist, also $\alpha(a) \cdot b = b \cdot \alpha(a)$ für alle $a \in R, b \in R'$ gilt.

Bemerkung 2.2.5

Die Zuordnung $R \mapsto R[X]$ ist ein kovarianter Funktor: $\underline{\text{Ringe mit Eins}} \to \underline{\text{Ringe mit Eins}}$.

Beweis: Ist $\alpha : R \to R'$ Ringhomomorphismus, so sei $\Psi : R[X] \to R'[X]$ der Homomorphismus, der durch $\alpha : R \to R' \underset{2.8(c)}{\hookrightarrow} R'[X]$ und $X \mapsto X$ bestimmt ist. ■

Definition + Bemerkung 2.2.6

(a) $R[\![X]\!] = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in R\}$ ist mit $+$ und $\cdot$ wie im Polynomring ein kommutativer Ring mit Eins. $R[\![X]\!]$ heißt **Ring der (formalen) Potenzreihen** über R.
Schreibweise (auch):

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

für $f = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

(b) $R[X]$ ist Unterring von $R[\![X]\!]$.

(c) Sei $0 \neq f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[\![X]\!]$. Dann heißt $o(f) := \min\{i \in \mathbb{N},\ a_i \neq 0\}$ der **Untergrad** von f. Es gilt für alle $f, g \in R[\![X]\!] \setminus \{0\}$:

$$o(f+g) \geq \min\{o(f), o(g)\} \text{ und } o(f \cdot g) \geq o(f) + o(g)$$

wobei in der Ungleichung für die Multiplikation Gleichheit gilt, wenn R nullteilerfrei ist.

Proposition 2.2.7

(a) Ist R Integritätsbereich, so ist $o(f \cdot g) = o(f) + o(g)\ \forall f, g \in R[\![X]\!] \setminus \{0\}$ und es gilt: $R[\![X]\!]^{\times} = \{f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[\![X]\!] : a_0 \in R^{\times}\}$

(b) Ist $R = K$ Körper, so ist $m := K[\![X]\!] \setminus K[\![X]\!]^{\times} = \{\sum a_i X^i : a_0 = 0\}$ Ideal in $K[\![X]\!]$, und das einzige maximale.

Beweis: (a), (b), (d) ✓

(c) "$\subseteq$": Sei $f = \sum a_i X^i \in R[\![X]\!]^{\times}$. Dann gibt es $g = \sum b_i X^i \in R[\![X]\!]$ mit $1 = fg = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)X + \ldots \Rightarrow a_0 \in R^{\times}$
"$\supseteq$": Definiere $g = \sum b_i X^i$ rekursiv durch $b_0 = a_0^{-1}, b_i := a_0^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{i} (-1)^k a_k b_{i-k},\ i \geq 1$. Dann ist $fg = 1$ ■

Beispiel: $i = 1 : b_i = a_0^{-1}(a_1 b_0)$

2.3 Faktorringe

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition + Bemerkung 2.3.1 (a) Sei I Ideal in R. Durch die Verknüpfung $\bar{x} \cdot \bar{y} := \overline{xy}$ wird die Faktorgruppe $(R,+)/(I,+)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Dieser Ring R/I heißt **Faktorring** oder **Quotientenring** von R und I. (Man verwechsle diesen Begriff des Quotientenrings nicht mit dem Quotientenkörper eines Integritätsbereiches, siehe weiter unten!)

(b) Die Restklassenabbildung $\pi : R \to R/I,\ x \mapsto \bar{x}$ ist surjektiver Ringhomomorphismus mit $\text{Kern}(\pi) = I$.

(c) (UAE des Faktorrings:) Sei $\varphi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Dann gibt es zu jedem Ideal $I \subseteq R$ mit $I \subseteq \text{Kern}(\varphi)$ einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\bar{\varphi} : R/I \to R'$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$

(d) (Homomorphiesatz für Ringe:) Ist $\varphi : R \to R'$ surjektiver Ringhomomorphismus, dann ist $R' \cong R/\,\text{Kern}(\varphi)$.

Beweis:

(a) **Wohldef. des Produkts:** Seien $x', y' \in R$ mit $\overline{x'} = \bar{x},\ \overline{y'} = \bar{y}$. Dann gibt es $a, b \in I$ mit $x' = x + a,\ y' = y + b. \Rightarrow x'y' = (x+a)(y+b) = xy + \underbrace{ay + bx + ab}_{\in I} \Rightarrow$
$\bar{x'}\bar{y'} = \bar{x}\bar{y}$.
Die restlichen Eigenschaften vererben sich dann von R.

(b) π ist surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\text{Kern}(\varphi) = I$ nach Satz 1(a). $\pi(xy) = \pi(x) \cdot \pi(y)$ nach Definition der Verknüpfung.

(c) Nach Satz 1(d) gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\bar{\varphi} : R/I \to R'$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.
Zeige also: $\bar{\varphi}$ ist Ringhomomorphismus: Für $x, y \in R$ ist $\bar{\varphi}(\overline{xy}) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \bar{\varphi}(\bar{x})\bar{\varphi}(\bar{y})$

(d) Folgt aus (c) und Satz 1(a) ■

Definition 2.3.2 (a) Ein Ideal $I \subsetneq R$ heißt **maximal**, wenn es kein Ideal I' in R gibt mit $I \subsetneq I' \subsetneq R$.

Beispiel: In $R = K[X]$, K Körper, ist $(X) = \{f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, a_0 = 0\}$ maximal.

(b) Ein Ideal $I \subsetneq R$ heißt **Primideal**, wenn für $x, y \in R$ mit $xy \in I$ gilt: $x \in I$ oder $y \in I$.

Beispiel:

(1) Für $p \in \mathbb{Z}$, $p > 0$ gilt: p prim $\Leftrightarrow$ $p\mathbb{Z}$ ist Primideal in $\mathbb{Z}$ (sogar maximal)

(2) (X) ist Primideal in $R[\![X]\!] \Leftrightarrow R$ ist Körper.

(3) $\{0\}$ ist Primideal in $\mathbb{Z}$.

Bemerkung 2.3.3 (a) R ist nullteilerfrei $\Leftrightarrow$ (0) ist Primideal.

(b) $I \subsetneq R$ ist Primideal genau dann, wenn R/I nullteilerfrei ist.

Beweis:

(a) R ist nicht nullteilerfrei $\Leftrightarrow \exists a, b \in R \setminus \{0\}$: $ab = 0 \Leftrightarrow (0)$ kein Primideal.

(b) Seien $x, y \in R$ mit $x \cdot y = I$, also $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ in R/I. I Primideal $\iff x \in I$ oder $y \in I \iff \bar{x} = 0$ oder $\bar{y} = 0 \iff R/I$ ist nullteilerfrei. ∎

Bemerkung 2.3.4

Sei $I \subset R$ ein Ideal. Dann gilt:

(a) Jedes maximale Ideal ist Primideal.

(b) I ist maximales Ideal $\Leftrightarrow$ R/I ist Körper.

Beweis:

(a) folgt aus (b) und Bemerkung 2.3.5.

(b) Nach 2.1.3 (e) ist R/I genau dann Körper, wenn (0) und R/I die einzigen Ideal in R/I sind. Die Behauptung folgt dann aus: $I \subsetneq J \subsetneq R$ in $R \Leftrightarrow 0 \neq \bar{J} \neq R/I$ in R/I wobei $\bar{J}$ das Bild von J in R/I ist. ∎

Bemerkung 2.3.5

Sei I ein Ideal in R. Dann entsprechen die Ideale in R/I bijektiv den Idealen in R, die I enthalten.

Beweis: Sei $\pi : R \to R/I$ die Restklassenabbildung. Für jedes Ideal $\bar{J}$ in R/I ist $\pi^{-1}(\bar{J})$ ein Ideal in R. Es gilt $\pi^{-1}(\bar{J}) \supseteq \pi^{-1}(0) = \operatorname{Kern} \pi = I$.

Sei umgekehrt $J \subsetneq R$ ein Ideal mit $I \subseteq J$. Dann ist $\bar{J} := \pi(J)$ ein Ideal in R/I, da π surjektiv ist.

Weiter ist $\pi^{-1}(\pi(J)) = J$, da Kern $\pi \subseteq J$, und $\pi(\pi^{-1}(\bar{J})) = \bar{J}$, da π surjektiv ist. ■

Beispiel 2.3.6 (Algebraische Konstruktion der reelen Zahlen)
Sei $C = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : (a_n)$ Cauchy-Folge, $a_n \in \mathbb{Q}\}$ (dh. für $k \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : |a_i - a_j| < \frac{1}{k}$ für $i, j \geq n$)
C ist Ring mit komponentenweiser $+$ und $\cdot$ (vornehm: $C \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}$).
$N = \{(a_n) \in C : (a_n)$ Nullfolge $\}$ (dh. für $k \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : |a_i| < \frac{1}{k}\ \forall i > n$)
N ist Ideal in C : ✓
Beh.: C/N ist Körper (bzw. N ist maximal)

Beweis: Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C \setminus N$. zu zeigen: $1 \in (N + (a))$.
$(a_n) \notin N \Rightarrow a_n = 0$ nur für endlich viele n, dh. $a_i \neq 0$ für $i > n_0$.

$$b_n := \begin{cases} 0 & , \quad a_i = 0 | i \leq n_0 \\ \frac{1}{a_i} & , \quad a_i \neq 0 | i > n_0 \end{cases}$$

$b = (b_n) \in C$.

$$ab = (c_n),\ c_n = \begin{cases} 0 & : \quad n < n_0 \\ 1 & : \quad n \geq n_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 - ab = (d_n),\ d_n = \begin{cases} 1 & : \quad n < n_0 \\ 0 & : \quad n \geq n_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (d_n) \in N \Rightarrow 1 = (d_n) + ba \in N + (a) \Rightarrow N$ maximal.

$$\Rightarrow C/N = \mathbb{R}!$$

■

Satz 7 (Chinesischer Restsatz)

Sei R kommutativer Ring mit Eins, $I_1, \ldots, I_n$ Ideale in R mit $I_\nu + I_\mu = R$ für alle $\nu \neq \mu$ (dann heißen I_ν, I_μ **relativ prim** oder **koprim**) Für $\nu = 1, \ldots, n$ sei $\pi_\nu : R \to R/I_\nu$ die Restklassenabbildung. Dann gilt:

(a) $\begin{array}{rcl} \varphi : R & \to & R/I_1 \times \cdots \times R/I_n \\ x & \mapsto & (\pi_1(x), \ldots, \pi_n(x)) \end{array}$ ist surjektiv.

(b) Wegen dem Homomorphiesatz und Kern(φ)$= \bigcap_{\nu=1}^n I_\nu$ gilt:

$$R/I_1 \times \cdots \times R/I_n \cong R/\bigcap_{\nu=1}^{n} I_\nu$$

(c) (Simultane Kongruenzen:)
Für paarweise teilerfremde ganze Zahlen $m_1, \ldots, m_n$ und beliebige $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}$ gibt es $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv r_\nu \mod m_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$ (Spezialfall von (a) für $R = \mathbb{Z}$)

Beweis: Es genügt z.z.: $\bar{e}_\nu = (0, \dots, 0, \underbrace{1,}_{\nu\text{-te Stelle}} 0, \dots, 0) \in \mathrm{Bild}(\varphi)$ für jedes ν, dh. es gibt $e_\nu \in R$ ($\nu = 1, \dots, n$) mit $e_\nu \in I_\mu$ für $\nu \neq \mu$ und $1 - e_\nu =: a_\nu \in I_\nu$ (Denn für $x = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in R/I_1 \times \dots \times R/I_n$ sei $e := \sum_{\nu=1}^n r_\nu e_\nu$ mit $r_\nu \in p_\nu^{-1}(\bar{x}_\nu) \Rightarrow \varphi(e) = \sum p_\nu(r_\nu e_\nu) = x$.)
Nach Voraussetzung gibt es für jedes $\mu \neq \nu$ $a_\mu \in I_\nu, b_\mu \in I_\mu$ mit

$$a_\mu + b_\mu = 1 \Rightarrow 1 = \prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^n (a_\mu + b_\mu) = \underbrace{\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^n b_\mu}_{=:\, e_\nu \in \bigcap_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^n I_\mu} + \underbrace{a_\nu}_{\in I_\nu}$$

$\Rightarrow 1 - e_\nu = a_\nu$ wie gewünscht. ■

2.4 Teilbarkeit

Sei R ein Integritätsbereich.

Definition + Bemerkung 2.4.1

Seien $a, b \in R \setminus \{0\}$.

(a) a **teilt** b (Schreibweise $a \mid b$) $:\Leftrightarrow b \in (a)$ ($\Leftrightarrow \exists x \in R : b = ax$)

(b) $d \in R$ heißt **größter gemeinsamer Teiler** von a und b, (Schreibweise $\mathrm{ggT}(a,b)$) wenn gilt:

  (i) $d \mid a$ und $d \mid b$ bzw. $a \in (d), b \in (d)$

  (ii) ist $d' \in R$ auch Teiler von a und b, so gilt $d' \mid d$ bzw. $d \in (d')$

(c) Ist $d \in R$ ein ggT von a und b und $e \in R^\times$, so ist auch $e \cdot d$ ein ggT. Sind d, d' beide ggT von a und b, so gibt es $e \in R^\times$ mit $d' = ed$.

Beweis: Nach Definition gibt es $x, y \in R$ mit $d' = xd$ und $d = yd' \Rightarrow d' = xyd' \Rightarrow d'(1 - xy) = 0 \underset{\substack{d'\neq 0\\ R \text{ nullteilerfrei}}}{\Longrightarrow} 1 = xy \Leftrightarrow x, y \in R^\times$ ■

(d) In analoger Weise wird das kleinste gemeinsame Vielfache definiert.

Beispiel:

(a) In $\mathbb{Z}$ gibt es einen größten gemeinsamen Teiler.

(b) In jedem nullteilerfreiem Hauptidealring R gibt es zu je zwei Elementen a, b einen größten gemeinsamen Teiler: Denn $(a, b) = (a) + (b)$ ist ein Hauptideal, das heißt, es gibt ein $d \in R$ mit $(a, b) = (d)$. Also gilt $d \mid a$ und $d \mid b$ und für jedes $d' \in R$, für das $d' \mid a$ und $d' \mid b$ gilt, gilt auch: $(a) \subseteq (d')$, $(b) \subseteq (d')$, also $(a, b) \subseteq (d')$ und somit $(d) \subseteq (d')$, also $d' \mid d$.

(c) In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ gibt es zu 6 und $4 + 2\sqrt{-5}$ keinen größten gemeinsamen Teiler.

Definition 2.4.2

Ein Integritätsbereich R heißt **euklidisch**, wenn es eine Abbildung: $\delta : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft gibt: zu $f, g \in R, g \neq 0$ gibt es $q, r \in R$ mit $f = qg + r$ mit $r = 0$ oder $\delta(r) < \delta(g)$.

Beispiel: $\mathbb{Z}$ mit $\delta(a) = |a|$, $K[X]$ mit $\delta(f) = \mathrm{Grad}(f)$

Bemerkung 2.4.3

Sei R euklidisch.

(a) Für $a, b \in R \setminus \{0\}$ gilt:
  (i) in R gibt es einen ggT von a und b, er heiße d.
  (ii) $(d) = (a, b) = (a) + (b)$

(b) Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.

Beweis:

(a) Œsei $\delta(a) \geq \delta(b)$. Nach Voraussetzung gibt es $q_1, r_1 \in R$ mit $a = q_1 b + r_1$, $\delta(r_1) < \delta(b)$ oder $r_1 = 0$.
Ist $r_1 = 0$, so ist $a \in (b) = (a, b)$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = b$. Sonst gibt es $q_2, r_2 \in R$ mit $b = q_2 r_1 + r_2$ und $r_2 = 0$ oder $\delta(r_2) < \delta(r_1)$. usw...

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} r_i & = & q_{i+2} r_{i+1} & + & r_{i+2} \\ \vdots & & \vdots & & \\ r_{n-2} & = & q_n r_{n-1} & & \end{array}$$

(da $\delta(r_{i+2}) < \delta(r_{i+1})$)
Beh.: $d := r_{n-1}$ ist ggT von a und b.
denn: $d \mid r_{n-2}$ (vorletzte Zeile: $r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \Rightarrow d \mid r_{n-3}$)
Induktion: $d \mid r_i$ für alle $i \Rightarrow d \mid b \Rightarrow d \mid a$
umgekehrt: Sei d' Teiler von a und $b \Rightarrow d' \mid r_1 \underset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} d' \mid r_i \; \forall i \Rightarrow d' \mid d$.
noch zu zeigen ist $(d) = (a, b)$:
"$\subseteq$": $d \in (a, b)$ Nach Konstruktion ist $r_{i+2} \in (r_i, r_{i+1}) \subset \dots \subset (a, b) \; \forall i$
"$\supseteq$" $a \in (d), b \in (d)$ nach Definition.

(b) Sei $I \subseteq R$ Ideal, $I \neq \{0\}$. Wähle $a \in I$ mit $\delta(a)$ minimal. Dann gilt für jedes $b \in I: b = qa + r$ mit $r \in I$ und $\delta(r) < \delta(a)$ $\lightning$ also $r = 0 \Rightarrow I = (a)$ ■

Definition + Bemerkung 2.4.4

Sei R kommutativer Ring mit Eins.

(a) $x, y \in R$ heißen **assoziiert**, wenn es $e \in R^\times$ mit $y = xe$ gibt. "assoziiert" ist eine Äquivalenzrelation.

(b) $x \in R \setminus R^\times$, $x \neq 0$ heißt **irreduzibel** (unzerlegbar), wenn aus $x = y_1 \cdot y_2$ mit $y_1, y_2 \in R$ folgt: $y_1 \in R^\times$ oder $y_2 \in R^\times$.

(c) $x \in R \setminus R^\times$ heißt **prim** (oder **Primelement**), wenn (x) ein Primideal ist, dh. aus $x \mid y_1 y_2$ folgt $x \mid y_1$ oder $x \mid y_2$.

(d) Sind $x, y \in R \setminus R^\times$ assoziiert, so ist x genau dann irreduzibel (bzw. prim), wenn y irreduzibel (bzw. prim) ist.

(e) Ist R nullteilerfrei, so ist jedes von Null verschiedene Primelement irreduzibel.

Beweis: Sei (x) Primideal und $x = y_1 y_2$, $y_1, y_2 \in R \Rightarrow$ Œ: $y_1 \in (x)$, dh. $y_1 = xa$ für ein $a \in R$ (R nullteilerfrei, $x \neq 0$) $\Rightarrow x = xay_2 \Rightarrow x(1 - ay_2) = 0 \underset{x \neq 0}{\Rightarrow} ay_2 = 1 \Rightarrow y_2 \in R^\times$ ■

Beispiel 2.4.5

(a) In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist 2 nicht irreduzibel: $2 \cdot (-2) = 2$.

(b) In $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5}: \ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ ist $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 6 = 2 \cdot 3$
In R ist 2 kein Primelement, weder $1 + \sqrt{-5}$ noch $1 - \sqrt{-5}$ sind durch 2 teilbar, **aber** 2 ist irreduzibel!.
denn: Sei $2 = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) \Rightarrow 4 = |2|^2 = (a + b\sqrt{-5})(a - b\sqrt{-5})(\dots) = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2) = a^2c^2 + \underbrace{5P}_{P \geq 0} \Rightarrow P = 0 \Rightarrow b = d = 0 \Rightarrow a^2 = 1, \ c^2 = 4$

Proposition + Definition 2.4.6

Sei R ein Integritätsbereich.

(a) Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

(i) Jedes $x \in R \setminus \{0\}$ läßt sich eindeutig als Produkt von Primelementen schreiben.

(ii) Jedes $x \in R \setminus \{0\}$ läßt sich "irgendwie" als Produkt von Primelementen schreiben.

(iii) Jedes $x \in R \setminus \{0\}$ läßt sich eindeutig als Produkt von irreduziblen Elementen schreiben.

(b) Sind diese drei Eigenschaften für R erfüllt, so heißt R **faktorieller** Ring. (Oder **ZPE-Ring** (engl.: UFD)). Dabei ist in (a) "eindeutig" gemeint, bis auf Reihenfolge und Multiplikation mit Einheiten. Präziser: Sei $\mathcal{P}$ ein Vertretersystem der Primelemnte ($\neq 0$) bezüglich "assoziiert".
Dann heißt (i) $\forall x \in R \setminus \{0\}$ $\exists!$ $e \in R^\times$ und für jedes $p \in \mathcal{P}$ ein $\nu_p(x) \geq 0 : x = e \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p}$. (beachte $\nu_p \neq 0$ nur für endlich viele p).

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $x \neq 0, x = ep_1 \cdot \ldots \cdot p_r,\ p_i \in \mathcal{P},\ e \in R^\times$.
Sei weiter $x = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$ mit irreduziblem Element q_j.
Es ist $x \in (p_1) \Rightarrow \exists j$ mit $q_j \in (p_1)$. Œ: $j = 1$ dh. $q_1 = \varepsilon_1 p_1$ mit $\varepsilon_1 \in R^\times$ (da q_1 irreduzibel) $\Rightarrow \varepsilon_1 q_2 \cdot \ldots \cdot q_s = ep_2 \cdot \ldots \cdot p_r$. Mit Induktion über r folgt die Behauptung.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Noch zu zeigen: Jedes irreduzible Element in R ist prim.
Sei $p \in R \setminus R^\times$ irreduzibel, $x, y \in R$ mit $xy \in (p)$, also $xy = pa$ für ein $a \in R$. Schreibe $x = q_1, \ldots, q_m,\ y = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n,\ a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l$ mit irreduziblen Elementen q_i, s_j, p_k.
$\Rightarrow xy = q_1 \ldots q_m s_1 \ldots s_n = pa = p \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_l \overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Longrightarrow} p \in \{q_1, \ldots, q_m, s_1, \ldots, s_n\}$ (bis auf Einheiten)

∎

Bemerkung 2.4.7
Ist R faktorieller Ring, so gibt es zu allen $a, b \in R \setminus \{0\}$ einen ggT(a,b).

Beweis: Sei $\mathcal{P}$ wie in 2.4.6 Vertretersystem der Primelemente.

$$a = e_1 \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)},\ b = e_2 \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(b)} \Longrightarrow d := \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(d)}$$

mit $\nu_p(d) = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$ ist ggT von a und b. ∎

Satz 8
Jeder nullteilerfreie Hauptidealring ist faktoriell.

Beweis:

(1) Jedes $x \in R \setminus \{0\}$ läßt sich als Produkt von irreduziblen Elementen schreiben.

(2) Jedes irreduzible $p \in R \setminus \{0\}$ erzeugt ein maximales Ideal. Mit 2.4.6 folgt dann die Behauptung.

B(2) Sei $p \in R \setminus \{0\}$ irreduzibel, I Ideal in R mit $(p) \subseteq I \subset R$.
Nach Voraussetzung gibt es $a \in R$ mit $I = (a)$, $a \notin R^x$, da $I \neq R$.
Da $p \in (p) \subseteq I = (a)$, gibt es $\varepsilon \in R$ mit $p = a\varepsilon \overset{p \text{ irreduzibel}}{\Longrightarrow} \varepsilon \in R^x \Rightarrow (p) = (a) = I$

B(1) $x \in R \setminus \{0\}$ heiße Störenfried, wenn x nicht als Produkt von irreduziblen Elementen darstellbar ist.
Sei x Störenfried. Dann ist $x \notin R^x$ und x nicht irreduzibel, also $x = x_1 y_1$ mit $x_1, y_1 \notin R^x$.
Œsei x_1 Störenfried (sonst ist x doch Produkt von irreduziblen Elementen). Also $x_1 = x_2 y_2$, $x_2, y_2 \notin R^x$.
Œsei x_2 Störenfried. Induktiv erhalten wir $x, x_1, x_2, \ldots$ alles Störenfriede mit $(x) \subset (x_1) \subset (x_2) \subset \ldots$.
Sei nun $I = \bigcup_{i \geq 1}(x_i)$. I ist Ideal ✓ $\Rightarrow$
Es gibt $a \in R$ mit $I = (a) \Rightarrow \exists i$ mit $a \in (x_i) \Rightarrow x_j \in (x_i)$ für alle $j > i$ ↯ ■

Bemerkung 2.4.8

Sei R ein faktorieller Ring, $\mathcal{P}$ ein Vertretersystem der Primelemente $\neq 0$. Für $x \in R \setminus \{0\}$ sei $x = e \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(x)}$ die eindeutige Darstellung, also $e \in R^\times$, $\nu_p(x) \in \mathbb{N}$, $\nu_p(x) \neq 0$ nur für endlich viele $p \in \mathcal{P}$. Dann gilt für jedes $p \in \mathcal{P}$:

(a) $\nu_p(x) = n \iff p^n \mid x$ und $p^{n+1} \nmid x$

(b) Die Abbildung $\nu_p \to \mathbb{N}$ erfüllt

  (i) $\nu_p(x \cdot y) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$

  (ii) $\nu_p(x + y) \geq \min(\nu_p(x), \nu_p(y))$, falls $x + y \neq 0$

(c) Sei $\rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < 1$. Dann ist die Abbildung $|\cdot|_\rho : R \to \mathbb{R}$,

$$|x|_\rho = \begin{cases} \rho^{\nu_p(x)}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ein „nichtarchimedischer Betrag" auf R, d.h. $|x \cdot y|_\rho = |x|_\rho \cdot |y|_\rho$ und $|x + y|_\rho \leq \max(|x|_\rho, |y|_\rho)$.

(d) $d_\rho(x, y) = |x - y|_\rho$ ist eine Metrik auf R.

Beispiel: $R = \mathbb{Z}$, $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{N}_{>0}, p \text{ Primzahl}\}$. ν_p ist die p-**adische Bewertung** und $|\cdot|_{\frac{1}{p}}$ ist der p-**adische Betrag** auf $\mathbb{Z}$ (und $\mathbb{Q}$).

Satz 9 (Irreduzibilitätskriterium für Polynome)

Sei R ein faktorieller Ring, $p \in \mathcal{P}$, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$ mit $a_n \neq 0$, $\operatorname{ggT}(a_0, \dots, a_n) = 1$, $p \nmid a_n$.

(a) (Eisenstein) Ist $n > 0$, $p \mid a_i$ oder $a_i = 0$ für $i = 0, \dots, n-1$, $p^2 \nmid a_0 \neq 0$, so ist f irreduzibel.

Beweis: Sei $f = gh$ mit $g = \sum_{i=0}^{r} b_i X^i$, $h = \sum_{i=0}^{s} c_i X^i$ $b_r \neq 0 \neq c_s \Rightarrow n = r + s$, $a_n = b_r c_s$, $a_0 = b_0 c_0 \Rightarrow p \nmid b_r$, $p \nmid c_s$

(a) Œ$p \mid b_0$, $p \nmid c_0$.
Sei t maximal mit $p \mid b_i$ für $i = 0, \dots, t$
Dann ist $0 \leq t \leq r - 1$ und

$$\underbrace{a_{t+1}}_{\notin (p)} = \underbrace{b_{t+1} \cdot c_0}_{\notin (p)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{t} b_i c_{t+1-i}}_{\in (p)} \notin (p)$$

$\Rightarrow t + 1 = n \Longrightarrow r = n \Rightarrow s = 0 \Rightarrow f = c_0 \cdot g$, nach Voraussetzung ist dann $c_0 \in R^\times$. ■

2.5 Brüche

Ziel: Verallgemeinere die Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{Z} \neq 0\}/_\sim$$

mit $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' = m'n$

Definition + Bemerkung 2.5.1

Sei R kommutativer Ring mit Eins, $S \subseteq (R, \cdot)$ ein Untermonoid.

(a) $S^{-1}R = R_S = (R \times S)/_\sim$ mit der Äquivalenzrelation $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) :\Leftrightarrow \exists t \in S \ : t(a_2 s_1 - a_1 s_2) = 0$ heißt **Ring der Brüche** von R mit Nennern in S. (oder **Lokalisierung** von R nach S) Schreibweise: $\frac{a}{s}$ sei eine Äquivalenzklasse von (a, s)

Beweis: z.z.: $\sim$ ist Äquivalenzrelation:
reflexiv ✓
symmetrisch ✓
transitiv: $\left.\begin{array}{lll}(1) & a_2s_1 & = a_1s_2 \\ (2) & a_3s_2 & = a_2s_3\end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} a_3s_1 = a_1s_3$

$$a_3s_2s_1 \overset{(2)}{=} a_2s_3s_1 \overset{(1)}{=} a_1s_3s_2 \Rightarrow s_2(a_3s_1 - a_1s_3) = 0$$

(falls R nullteilerfrei und $0 \notin S \Rightarrow a_3s_1 = a_1s_3$)

Andernfalls sei nun mit $t, t' \in S$ $\left.\begin{array}{r}t(a_2s_1 - a_1s_2) = 0 \\ t'(a_2s_3 - a_3s_2) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow tt's_2(a_3s_1 - a_1s_3) = t(t'a_3s_2s_1 - t'a_1s_3s_2) \overset{(2)}{=} t(t'a_2s_3s_1 - t'a_1s_3s_2) = ts_3t'(a_2s_1 - a_1s_2) \overset{(1)}{=} 0$ ■

(b) Mit $\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1a_2}{s_1s_2}$ und $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1s_2+a_2s_1}{s_1s_2}$ ist R_S ein kommutativer Ring mit Eins.

Beweis: $\cdot$ **wohldefiniert**: Sei $\frac{a_1'}{s_1'} = \frac{a_1}{s_1} \Rightarrow \exists t \in S : t(a_1's_1 - a_1s_1') = 0 (*) \Rightarrow t(a_1'a_2s_1s_2 - a_1a_2s_2s_1') \overset{(*)}{=} (ta_1s_1'a_2s_2 - ta_1a_2s_2s_1') = 0$
$+$ **wohldefiniert**: Seien die $\frac{a_1'}{s_1'}$, $\frac{a_1}{s_1}$ wie oben. $\Rightarrow$ $t(s_1's_2(a_1s_2 + a_2s_1) - s_1s_2(a_1's_2+a_2s_1')) = ts_2(a_1s_2s_1'+a_2s_1s_1'-a_1's_1s_2-a_2s_1s_1') \overset{(\dots)}{=} 0$. Die restlichen Eigenschaften vererben sich von R ■

Definition + Bemerkung 2.5.2

Sei R Integritätsbereich, $S = R \setminus \{0\}$. Dann ist Quot(R):= R_S ein Körper, denn das Inverse zu $\frac{b}{a}$ mit $a \neq 0$ ist $\frac{a}{b}$. Er heißt der **Quotientenkörper** von R. (Dieser Begriff hat mit dem Quotientenring R/I von R modulo einem Ideal I nichts zu tun.)

Beispiel:

(a) $R = \mathbb{Z}[X] \Rightarrow$ Quot(R)= $\mathbb{Q}(X)$

(b) $R = K[X_1, \dots, X_n]$, K Körper $\Rightarrow$ Quot(R)= $K(X_1, \dots, X_n)$ Körper der rationalen Funktionen in n Variablen.

Beispiele 2.5.3 (a) Ist $0 \in S$, so ist $R_S = 0$.

(b) $x \in R \setminus \{0\}$, $S = \{x^n : n \geq 0\}$ $R_S =: R_x = \{\frac{a}{x^n} : a \in R, n \geq 0\}$
z.B.: $R = \mathbb{Z}$, $x = 2 \Rightarrow R_S = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$

(c) Sei $\mathfrak{p} \subset R$ Primideal, dann ist $S = R \setminus \mathfrak{p}$ ist Monoid.
$R_S =: R_\mathfrak{p}$ heißt Lokalisierung von R nach $\mathfrak{p}$.

Beispiel:

a) $R = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} = (2) \Rightarrow \mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{m}{n} \ : m \in \mathbb{Z},\ n$ ungerade $\}$

b) $\mathfrak{p} = (0)$, R nullteilerfrei, dann ist $R_\mathfrak{p} = \mathrm{Quot}(R)$.

c) $R = K[X]$, $\mathfrak{p} = (X)$, dann ist $R_\mathfrak{p} = \{\frac{f}{g}, f, g \in K[X], g(0) \neq 0\}$.

(d) $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \{\frac{x}{y} \ : x \in \mathfrak{p},\ y \in R \setminus \mathfrak{p}\}$ ist maximales Ideal in $R_\mathfrak{p}$ und zwar das einzige.
denn: Sei $\frac{z}{y} \in R_\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$, dh. $z \in R \setminus \mathfrak{p}$, $y \in R \setminus \mathfrak{p} \Rightarrow \frac{y}{z} \in R_\mathfrak{p} \Rightarrow \frac{z}{y} \in (R_\mathfrak{p})^\times$,
typisches Beispiel: $R = \mathbb{R}[X]$ (oder $R = C^0([-1, 1])$) $\mathfrak{p} = \{f \in R \ : f(0) = 0\}$ ist Primideal in R. $R_\mathfrak{p} = \{\frac{f}{g} \ : f, g \in R, g(0) \neq 0\}$

Bemerkung 2.5.4

Sei R kommutativer Ring mit Eins, $S \subset (R, \cdot)$ Monoid.

(a) Die Abbildung $i_S : R \to R_S, a \mapsto \frac{a}{1}$ ist Ringhomomorphismus

(b) i_S ist injektiv genau dann, wenn S keinen Nullteiler von R enthält. ($0 \notin S$)

Beweis: $\frac{a}{1} = 0 = \frac{0}{1}$ in $R_S \Rightarrow \exists s \in S$ mit $s(a1 - 01) = 0$ ■

(c) $i_S(S) \subset (R_S)^\times$

Beweis: $(\frac{s}{1})^{-1} = \frac{1}{s}$ ■

(d) (UAE) Zu jedem Homomorphismus $\varphi : R \to R'$ von Ringen mit Eins mit $\varphi(S) \subset (R')^\times$ gibt es genau einen Homomorphismus $\widetilde{\varphi} : R_S \to R'$ mit $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ i_S$

Beweis: $\widetilde{\varphi}(\frac{a}{s}) = \widetilde{\varphi}(a\frac{1}{s}) = \widetilde{\varphi}(\frac{a}{1}(\frac{s}{1})^{-1}) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ ■

2.6 Der Satz von Gauß

Sei R faktorieller Ring, $\mathcal{P}$ Vertretersystem der von Null verschiedenen Primelemente in R.

Bemerkung 2.6.1

Für jedes $p \in \mathcal{P}$ lässt sich ν_p fortsetzen zu einer Abbildung $\nu_p : \mathrm{Quot}(R) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$, die die Eigenschaften von 2.4.8 b) erfüllt. Dabei gilt für $a, b \in R \setminus \{0\} : \nu_p(\frac{a}{b}) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$.

Beispiel:

(a) $R = \mathbb{Z}$, $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{N}, p \text{ Primzahl}\}$. ν_p ist die p-**adische Bewertung** auf $\mathbb{Q}$. Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ wie in Beispiel 2.3.6 ergibt den Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen.

(b) $R = \mathbb{C}[X]$, $\mathcal{P} = \{X - a, a \in \mathbb{C}\}$. Für $p = X - a \in \mathcal{P}$, $f \in \mathbb{C}[X]$ ist $\nu_p(f) = \operatorname{ord}_a(f)$ die Nullstellenordnung der Nullstelle a.

Definition + Proposition 2.6.2

Sei R faktorieller Ring, $\mathcal{P}$ Vertretersystem der von Null verschiedenen Primelemente in R, $p \in \mathcal{P}$ und $K = \operatorname{Quot}(R)$.

(a) Für $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X] \setminus \{0\}$ sei $\nu_p(f) := \min\{\nu_p(a_i), i = 0, \dots, n\}$.

(b) $f \in K[X] \setminus \{0\}$ heißt **primitiv**, wenn $\nu_p(f) = 0$ für alle $p \in \mathcal{P}$ ist.

(c) (Gauß) Für $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$ gilt: $\nu_p(f \cdot g) = \nu_p(f) + \nu_p(g)$ für alle $p \in \mathcal{P}$.

Beweis: Sei $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$, $f \cdot g = \sum_{k=0}^{m \cdot n} c_k X^k$, also $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

1. Fall: Sei $m = 0$. Dann ist $c_k = a_k b_0$ für $k = 0, \dots, n$ und

$$\begin{aligned} \nu_p(f \cdot g) &= \min_{i=0}^n (\nu_p(a_i b_0)) \\ &= \min_{i=0}^n (\nu_p(a_i) + \nu_p(b_0)) \\ &= \min_{i=0}^n (\nu_p(a_i)) + \nu_p(b_0) = \nu_p(f) + \nu_p(g) \end{aligned}$$

2. Fall: Sei $f, g \in R[X]$ und primitiv, also $\nu_p(f) = \nu_p(g) = 0$. Sei $i_0 := \min_{i=0}^n \{i : p \nmid a_i\}$ und $j_0 := \min_{j=0}^n \{j : p \nmid b_j\}$. Es ist:

$$c_{i_0+j_0} = \underbrace{a_{i_0} b_{j_0}}_{p\nmid} + \sum_{i=0}^{i_0-1} \underbrace{a_i}_{p|} b_{i_0+j_0-i} + \sum_{j=0}^{j_0-1} a_{i_0+j_0-j} \underbrace{b_j}_{p|}$$

also gilt $p \nmid c_{i_0+j_0}$ und damit $\nu_p(f \cdot g) = 0$.

3. Fall: f, g sind beliebig. Es gibt $c, d \in K \setminus \{0\}$, so dass $\tilde{f} = c \cdot f$, $\tilde{g} = d \cdot g$ primitiv sind. Dann folgt aus Fall 1 und Fall 2, dass:

$$\begin{aligned}\nu_p(f \cdot g) &= \nu_p(\frac{1}{c}\tilde{f} \cdot \frac{1}{d}\tilde{g}) \\ &= \nu_p(\frac{1}{c}) + \nu_p(\frac{1}{d}) + \nu_p(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) \\ &= \nu_p(\frac{1}{c}) + \nu_p(\tilde{f}) + \nu_p(\frac{1}{d}) + \nu_p(\tilde{g}) \\ &= \nu_p(f) + \nu_p(g)\end{aligned}$$

■

Satz 10 (Gauß)

Ist R faktorieller Ring, so ist $R[X]$ faktoriell.

Beweis: Sei $K = \mathrm{Quot}(R)$. Dann ist $K[X]$ faktoriell (sogar euklidisch), und $R[X] \subseteq K[X]$ ist ein Unterring. Sei $\mathcal{P}$ Vertretersystem der von Null verschiedenen Primelemente in $K[X]$. O.B.d.A. ist jedes Primpolynom in $\mathcal{P}$ ein primitives Polynom in $R[X]$. Sei weiter $\tilde{\mathcal{P}}$ ein Vertretersystem der von Null verschiedenen Primelemente in R. Sei nun $f \in R[X] \setminus \{0\}$. Schreibe $f = c \cdot f_1 \cdots f_n$ mit $f_i \in \mathcal{P}$ und $c \in (K[X])^\times = K \setminus \{0\}$.

Es ist $c \in R$, denn: für $p \in \tilde{\mathcal{P}}$ ist nach 2.6.2

$$\underbrace{\nu_p(f)}_{\geq 0} = \nu_p(c) + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\nu_p(f_i)}_{=0},$$

also ist $\nu_p(c) \geq 0$.

Schreibe also $c = e \cdot p_1 \cdots p_m$ mit $e \in R^\times$ und $p_i \in \tilde{\mathcal{P}}$.

Behauptung 1: Jedes $p_i \in \tilde{\mathcal{P}}$ ist auch prim in $R[X]$:

Sei $(p) := p \cdot R[X]$ das von p in $R[X]$ erzeugte Ideal. Es genügt zu zeigen: $R[X]/(p)$ ist nullteilerfrei (nach 2.3.3 b)). Sei $\bar{R} := R/(p \cdot R)$. $\bar{R}$ ist nullteilerfrei, da $p \in \tilde{\mathcal{P}}$ ist, also ist auch $\bar{R}[X]$ nullteilerfrei.

Die Restklassenabbildung $\pi : R \to \bar{R}$ ist surjektiv und induziert einen surjektiven Ringhomomorphismus $\tilde{\pi} : R[X] \to \bar{R}[X]$. Es ist $\mathrm{Kern}\,\pi = \{f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X], p \mid a_i, i = 0, \ldots, n\} = p \cdot R[X]$, also ist $\bar{R}[X] \cong R[X]/(p)$.

Behauptung 2: Jedes $f_i \in \mathcal{P}$ ist auch prim in $R[X]$:

Seien $g, h \in R[X]$ mit $g \cdot h \in (f_i) := f_i \cdot R[X]$. Da f_i prim in $K[X]$ ist, ist o.B.d.A: $g \in f_i \cdot K[X]$, also $g = f_i \cdot \tilde{g}$ für ein $\tilde{g} \in K[X]$. Für jedes $p \in \tilde{\mathcal{P}}$ ist $0 \leq \nu_p(g) = \nu_p(f_i) + \nu_p(\tilde{g}) = \nu_p(\tilde{g})$, also ist $\tilde{g} \in R[X]$ und damit (f_i) ein Primideal in $R[X]$. ∎

Beispiel 2.6.3

$f(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$, p Primzahl. Beh.: f ist irreduzibel.
Beobachte:

$$f(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1}$$

(f heißt "p-tes Kreisteilungspolynom" (Zeichnung fehlt))
Trick: $g(X) = f(X+1)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $f(X)$ irreduzibel ist.

$$g(X) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^{k-1},\ (n = p-1),\ (\binom{p}{p} = 1 = a_{p-1},\ \binom{p}{1} = p = a_0)$$

Noch zu überlegen: $\binom{p}{k}$ ist durch p teilbar für $k = 1, \ldots, p-1$, bekannt: $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \Rightarrow \binom{p}{k}$ ist durch p teilbar. Mit Eisenstein folgt die Behauptung.

2.7 Maximale Ideale

Proposition 2.7.1

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Dann gibt es zu jedem echten Ideal $I \triangleright R$ ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $I \subseteq \mathfrak{m}$.

Lemma von Zorn

Sei M eine nicht leere, geordnete Menge. Hat jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke in M, so besitzt M ein maximales Element.

Zur Erinnerung:

- $\leq$ heißt **Ordnung** wenn $\leq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
- $N \subset M$ ist **total geordnet**, falls für $x, y \in N$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$.
- $x \in M$ ist eine **oberere Schranke** für N wenn für alle $y \in N$ gilt: $y \leq x$.
- $m \in M$ heißt **maximal**, wenn für alle $x \in M$ aus $m \leq x$ folgt, dass $x = m$ ist.

Beweis: (der Proposition) Sei M die Menge aller echten Ideale in R, die I enthalten. $I \in M$, also $M \neq \emptyset$. M ist durch $\subseteq$ geordnet.

Behauptung: $n = \bigcup_{J \in N} J$ ist obere Schranke für $N \subseteq M$. Nach Zorn enthält M dann ein maximales Element $\mathfrak{m}$. $\mathfrak{m}$ ist ein maximales Ideal in R. ∎

Beweis: (der Behauptung)

- n ist ein Ideal: Seien $x, y \in n$, also $x \in J_1$, $y \in J_2$. O.B.d.A.A. $J_1 \subseteq J_2$, also $x \in J_2$ und damit auch $x + y \in J_2 \subseteq n$. Auch gilt für alle $a \in R$: $a \cdot x \in J \subseteq n$.
- $I \subseteq n$ ✓
- n ist eine obere Schranke von N. ✓
- $n \neq R$, denn sonst wäre $1 \in n$, also $1 \in J$ für ein $J \in N$, im Widerspruch zu $J \in M$.

■

2.8 Moduln

Sei R kommutativ mit Eins.

Definition + Bemerkung 2.8.1 (a) Eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : R \times M \to M$ heißt **R-Modul**, wenn für alle $a, b \in R$, $x, y \in M$ gilt:

(i) $a(x + y) = ax + ay$

(ii) $(a + b)x = ax + bx$

(iii) $(ab)x = a(bx)$

(iv) $1x = x$

Beispiel:

(1) R ist R-Modul. (mit $\cdot$ als Ringmultiplikation)

(2) Ist R ein Körper, so ist R-Modul = R-Vektorraum.

(3) $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ ist $\mathbb{Z}$-Modul durch $n \cdot \bar{0} = \bar{0}$, $n \cdot \bar{1} = \bar{n}$. Jede abelsche Gruppe A ist $\mathbb{Z}$-Modul durch $nx = \underbrace{x + \cdots + x}_{\text{n-mal}}$ und $(-n)x = n(-x)$ für $n \in \mathbb{N}_1, x \in A$

(4) Jedes Ideal in R ist R-Modul.

(b) Eine Abbildung $\varphi : M \to M'$ von R-Moduln heißt **R-Modulhomomorphismus** (oder **R-linear**), wenn φ Gruppenhomomorphismus ist und für alle $x \in M, a \in R$ gilt: $\varphi(ax) = a\varphi(x)$

(c) $Hom_R(M, M') := \{\varphi : M \to M' : \varphi\ R\text{-linear}\}$ ist R-Modul durch
$$\left.\begin{array}{ll}(\varphi_1 + \varphi_2)(x) & := \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \\ (a\varphi)(x) & := a\varphi(x)\end{array}\right\} \forall\ \varphi_1, \varphi_2 \in Hom_R(M, M'),\ a \in R,\ x \in M$$

(d) Die R-Moduln bilden mit den R-linearen Abbildungen eine Kategorie

(e) Die Kategorien $\mathbb{Z}$**-Mod.** und **Abelsche Gruppen** sind isomorph. denn:
$$\ldots \varphi(nx) = \varphi(x + \cdots + x) = \varphi(x) + \cdots + \varphi(x) = n\varphi(x)$$
($\varphi : A \to A'$ Gruppenhomomorphismus, $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow$ Jeder Gruppenhomomorphismus von abelschen Gruppen ist $\mathbb{Z}$-linear.

Definition + Bemerkung 2.8.2

Sei M ein R-Modul.

(a) Eine Untergruppe U von $(M, +)$ heißt R-**Untermodul** von M, wenn $R \cdot U \subseteq U$ ist, dh. wenn U selbst R-Modul ist.

(b) Ist $\varphi : M \to M'$ R-linear, so sind Kern(φ) und Bild(φ) Untermoduln von M bzw. M' (denn $\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(ax) = 0\forall \ldots$ und $a\varphi(x) = \varphi(ax)\forall \ldots$)

(c) Sei $U \subseteq M$ Untermodul.
Dann wird M/U zu einem R-Modul durch $a\overline{x} =: \overline{ax}$ (denn: Ist $x' \in \overline{x}$, also $x - x' \in U$, so ist $ax' - ax = a(x' - x) \in U$)
Die Restklassenabbildung $p : M \to M/U,\ x \mapsto \bar{x}$ ist dann R-linear ($p(ax) = \overline{ax} = a\overline{x} = ap(x)$)

Definition + Bemerkung 2.8.3

(a) Für $X \subseteq M$ heißt
$$\langle X \rangle := \bigcap_{\substack{U \text{ Untermodul von } M \\ X \subseteq U}} U$$
der von X erzeugte Untermodul.

(b) $\langle X \rangle = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x_i,\ a_i \in R, x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Eine Teilmenge $B \subseteq M$ heißt **linear unabhängig**, wenn $0 = \sum_{b \in B} a_b b$ mit $a_b \in R$ (wobei $a_b = 0$ für alle bis auf endlich viele $b \in B$ gelten soll, damit die Summe $\sum_{b \in B} a_b b$ wohldefiniert ist) nur möglich ist mit $a_i = 0\ \forall i$.

(d) Eine Teilmenge $B \subseteq M$ heißt **Basis**, wenn jedes $x \in M$ eindeutig als Linearkombination $0 = \sum_{b \in B} a_b b$ mit $a_b \in R$ (wobei $a_b = 0$ für alle bis auf endlich viele $b \in B$ gelten soll) darstellbar ist.
äquivalent: B linear unabhängig und $\langle B \rangle = M$

(e) M heißt **frei**(er R-Modul), wenn M eine Basis besitzt.

Beispiel:

(1) R ist freier R-Modul mit Basis 1 (oder einer anderen Einheit)

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $R^n = R \oplus \cdots \oplus R$ freier R-Modul mit Basis $e_1, \ldots, e_n$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (hier steht die 1 an der i-ten Stelle).

(3) Ist $I \subseteq R$ Ideal, so ist $M := R/I = \langle\{\bar{1}\}\rangle$. Für $I \neq \{0\}$ ist R/I **nicht** frei. denn: Sei $\bar{x} \in M$, $a \in I \backslash \{0\} \Rightarrow a\bar{x} = \overline{ax} = \overline{0} \Rightarrow$ in M gibt es kein linear unabhängiges Element (oder, um formal zu sein, keine linear unabhängige einelementige Teilmenge).