

# 11. Extremwerte unter Nebenbedingungen

## Definition

Seien  $M, N$  Mengen  $\neq \emptyset$ ,  $f : M \rightarrow N$  eine Funktion und  $\emptyset \neq T \subseteq M$ . Die Funktion  $f|_T : T \rightarrow N$ ,  $f|_T(x) := f(x) \forall x \in T$  heißt die **Einschränkung** von  $f$  auf  $T$ .

In diesem Paragraphen gelte stets:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen,  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p < n$  und  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$ . Es sei  $T := \{x \in D : \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset$ .

## Definition

$f$  hat in  $x_0 \in D$  ein **lokales Extremum unter der Nebenbedingung**  $\varphi = 0 : \iff x_0 \in T$  und  $f|_T$  hat in  $x_0$  ein lokales Extremum.

Wir führen folgende Hilfsfunktion ein: Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$  und  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$  gilt:

$$H(x, \lambda) := f(x) + \lambda \cdot \varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_p \varphi_p(x)$$

Es ist

$$H_{x_j} = f_{x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad H_{\lambda_j} = \varphi_j$$

Für  $x_0 \in D$  und  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$  gilt:

$$\begin{aligned} H'(x_0, \lambda_0) = 0 &\iff f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0 \text{ und } \varphi(x_0) = 0 \\ &\iff f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0 \text{ und } x_0 \in T \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

## Satz 11.1 (Multiplikationenregel von Lagrange)

$f$  habe in  $x_0 \in D$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $\varphi = 0$  und es sei  $\text{Rang } \varphi'(x_0) = p$ . Dann existiert ein  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$  mit:  $H'(x_0, \lambda_0) = 0$  ( $\lambda_0$  heißt **Multiplikator**).

## Folgerung 11.2

$T$  sei beschränkt und abgeschlossen. Wegen 3.3 gilt:  $\exists a, b \in T : f(a) = \max f(T)$ ,  $f(b) = \min f(T)$ . Ist  $\text{Rang } \varphi'(a) = p \implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}^p : H'(a, \lambda_0) = 0$ .

## Beweis

Es ist  $x_0 \in T$  und

$$\varphi'(x_0) = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix}}_{=:A} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \right)$$

## 11. Extremwerte unter Nebenbedingungen

Rang  $\varphi'(x_0) = p \implies$  o.B.d.A.:  $\det A \neq 0$ .

Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$  schreiben wir  $x = (y, z)$ , wobei  $y = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $z = (x_{p+1}, \dots, x_n)$ . Insbesondere ist  $x_0 = (y_0, z_0)$ . Damit gilt:  $\varphi(y_0, z_0) = 0$  und  $\det \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_0, z_0) \neq 0$ .

Aus 10.1 folgt:  $\exists$  offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$  von  $z_0$ ,  $\exists$  offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^p$  von  $y_0$  und es existiert  $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$  mit:

$$(II) \quad g(z_0) = y_0$$

$$(III) \quad \varphi(g(z), z) = 0 \quad \forall z \in U$$

$$(IV) \quad g'(z_0) = - \underbrace{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y}(g(z_0), z_0) \right)^{-1}}_{=x_0} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(g(z_0), z_0)}_{=x_0} \quad \blacksquare$$

(III)  $\implies (g(z), z) \in T \quad \forall z \in U$ . Wir definieren  $h(z)$  durch

$$h(z) := f(g(z), z) \quad (z \in U)$$

Dann hat  $h$  in  $z_0$  ein lokales Extremum (*ohne* Nebenbedingung). Damit gilt nach 8.1:

$$0 = h'(z_0) \stackrel{5.4}{=} f'(g(z_0), z_0) \cdot \begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \mid \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \right) \cdot \begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) g'(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)$$

$$\stackrel{(IV)}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0) \right)^{-1}}_{=: \lambda_0 \in \mathbb{R}^p} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \implies \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0) = 0 \quad (V)$$

$$\lambda_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0) \right)^{-1} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0) = 0 \quad (VI)$$

Aus (V), (VI) folgt:  $f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0 \stackrel{(I)}{\implies} H'(x_0, \lambda_0) = 0$ .

### Beispiel

( $n=3, p=2$ )  $f(x, y, z) = x + y + z$ ,  $T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x + z = 1\}$ ,  $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2, x + z - 1)$ .

Bestimme  $\max f(T)$ ,  $\min f(T)$ . Übung:  $T$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\stackrel{3.3}{\implies} \exists a, b \in T : f(a) = \max f(T)$ ,  $f(b) = \min f(T)$ .

$$\varphi'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang  $\varphi'(x, y, z) = 1 < p = 2 \iff x = y = 0$ .  $a, b \in T \implies \text{Rang } \varphi'(a) = \text{Rang } \varphi'(b) = 2$

$$H(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

$$H_x = 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (1)$$

$$H_y = 1 + 2\lambda_1 y \stackrel{!}{=} 0 \quad (2)$$

$$H_z = 1 + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (3)$$

$$H_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (4)$$

$$H_{\lambda_2} = x + z - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (5)$$

$$(3) \implies \lambda_2 = -1 \stackrel{(1)}{\implies} 2\lambda_1 x = 0; (2) \implies \lambda_1 \neq 0 \implies x = 0 \stackrel{(5)}{\implies} z = 1; (4) \implies y = \pm\sqrt{2}$$

$$11.2 \implies a, b \in \{(0, \sqrt{2}, 1), (0, -\sqrt{2}, 1)\}$$

$$f(0, \sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2} = \max f(T); f(0, -\sqrt{2}, 1) = 1 - \sqrt{2} = \min f(T)$$

**Anwendung** Sei  $A$  eine reelle, *symmetrische*  $(n \times n)$ -Matrix. Beh:  $A$  besitzt einen reellen EW.

**Beweis**

$f(x) := x \cdot (Ax) = Q_A(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ),  $T := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial U_1(0)$  ist beschränkt und abgeschlossen.

$$\varphi(x) := \|x\|^2 - 1 = x \cdot x - 1; \varphi'(x) = 2x, f'(x) = 2Ax.$$

$$3.3 \implies \exists x_0 \in T : f(x_0) = \max f(T); \varphi'(x) = 2(x_1, \dots, x_n); x_0 \in T \implies \text{Rang } \varphi'(x_0) = 1 (= p)$$

$$11.2 \implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : H'(x_0, \lambda_0) = 0; h(x, \lambda) = f(x) + \lambda \varphi(x); H'(x, \lambda) = 2Ax + 2\lambda x$$

$$\implies 0 = 2(Ax_0 + \lambda_0 x_0) \implies Ax_0 = (-\lambda_0)x_0, x_0 \neq 0 \implies -\lambda_0 \text{ ist ein EW von } A. \quad \blacksquare$$

