2 Morphismen von Schemata

§6 Einbettungen

Definition 2.6.1
Sei $i : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus von Schemata.

(a) i heißt *offene Einbettung*, wenn i ein Isomorphismus auf ein offenes Unterschema von X ist.

(b) i heißt *abgeschlossene Einbettung*, wenn i ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge $Z := i(Y)$ von X ist und $i^\sharp : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ surjektiv ist. $(Z, i_*\mathcal{O})$ heißt dann *abgeschlossenes Unterschema* von X.

Beispiele 2.6.2

(a) Sei $X = \operatorname{Spec} R$ affin. Die abgeschlossenen Teilmengen von X sind die $V(I)$, ($I \subseteq R$ Ideal). $V(I)$ wird zum abgeschlossenen Unterschema durch die Schemastruktur als $\operatorname{Spec}(R/I)$. Die abgeschlossene Einbettung $\operatorname{Spec}(R/I) \to \operatorname{Spec} R$ wird induziert von der Restklassenabbildung $R \to R/I$.
Warnung: $V(I) = V(I^2)$, aber $R/I = R/I^2$ gilt im Allgemeinen **nicht**!

(b) Seien k ein Körper, $R = k[X, Y]$ und $I = (X^2, XY) \subsetneq (X)$. Es gilt $V(I) = V(X)$ (y-Achse).
In $V(I)$ ist außerhalb von $0 = (0, 0) = V(X, Y)$, also auf

$$D(Y) = \operatorname{Spec}\left(k[X,Y]/I\right)_Y = \operatorname{Spec}(k[Y]_Y)$$

das abgeschlossene Unterschema $V(I)$, also $\operatorname{Spec}(R/I)$, isomorph zu $\operatorname{Spec}(R/(X))$. ?
Aber: $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R/I),0}$ enthält ein nilpotentes Element, nämlich X.

Erinnerung / Definition 2.6.3
(Übungblatt 3, Aufgabe 1)
Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt reduziert, wenn für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein reduzierter Ring ist.
Äquivalent: Für jedes offene $U \subseteq X$ ist $\mathcal{O}_X(U)$ ein reduzierter Ring.

Proposition 2.6.4
Zu jedem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ gibt es ein eindeutiges abgeschlossenes Unterschema X_{red} von X, das folgende UAE erfüllt:
Ist $f : Y \to X$ ein Morphismus von einem reduzierten Schema Y, so gibt es genau einen Morphismus $\tilde{f} : Y \to X_{red}$ mit

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & X \\
& X_{red} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

$f = i \circ \tilde{f}$. Dabei ist $X = X_{red}$ (gleich als topologische Räume).

Beweis (1) Sei $X = \operatorname{Spec} R$ affin. Setze $X_{red} := \operatorname{Spec}(R/\sqrt{(0)})$, dann ist X_{red} ein reduziertes abgeschlossenes Unterschema.
UAE: Sei Y reduziert, $f : Y \to X$ ein Morphismus mit zugehörigem Ringhomomorphismus $\alpha_f : R \to \mathcal{O}_Y(Y)$.
Zu zeigen: $\sqrt{(0)} \subseteq \operatorname{Kern}(\alpha_f)$
Sei also $a \in \sqrt{(0)}$, also $a^n = 0$ für $n \geq 1$. Daraus folgt: $(\alpha_f(a))^n = 0$. Und weil Y reduziert ist: $\alpha_f(a) = 0$.

(2) Allgemeiner Fall:
Benutze:

$$\left(R/\sqrt{(0)}\right)_f \cong R_f/\sqrt{(0)}$$

□

Folgerung 2.6.5
Zu jedem abgeschlossenen Unterschema Z von X gibt es ein eindeutig bestimmtes reduziertes Unterschema Z_{red} (die "reduzierte induzierte Struktur").

§7 Separierte Morphismen

Definition 2.7.1
(a) Ein Morphismus $f : X \to S$ von Schemata heißt *separiert*, wenn der "Diagonalmorphismus" $\Delta_f : X \to X \times_S X$ eine abgeschlossene Einbettung ist.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dotted, "\Delta_f"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\
& X \times_S X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

(b) X heißt *separiert*, wenn $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ separiert ist.

Beispiele
Sei X die affine Gerade mit doppeltem Nullpunkt. X ist nicht separiert (über k):
Seien also $S = \operatorname{Spec} k, U = \mathbb{A}_k^1 \backslash \{(0,0)\} = \operatorname{Spec}(k[X]_X)$ und X die Verklebung von $\mathbb{A}_k^1$ mit sich selbst längs U. Es ist

$$U \times_S U = \mathbb{A}_k^2 - \text{“Achsenkreuz”}$$
$$\Delta = \Delta_f(X) = \{(u,u) : u \in U\} \cup \{(0_1, 0_1), (0_2, 0_2)\}$$

Es gilt

$$\bar{\Delta} = \Delta \cup \{(0_1, 0_2), (0_2, 0_1)\}$$

denn: jede Umgebung von $(0_1, 0_2)$ enthält Punkte von Δ!

Bemerkung 2.7.2
Jeder Morphismus von affinen Schemata ist separiert.

Beweis Sei $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A, f : X \to Y, \alpha : A \to B$, α der Ringhomomorphismus zu f. Dann ist $X \times_Y X = \operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$. Δ wird induziert von

$$\mu : \begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \longrightarrow & B \\ b_1 \otimes b_2 & \longmapsto & b_1 \cdot b_2 \end{array}$$

μ ist surjektiv, also ist Δ abgeschlossen. (Das ist so, weil ein surjektiver Ringhomomorphismus Primideale auf Primideale abbildet und deswegen alle Primideale, die

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \text{ Primideal}} \mu^{-1}(\mathfrak{p})$$

enthalten, schon Urbilder von Primidealen waren.) $\square$

Bemerkung 2.7.3
Seien $f, g : X \to Y$ Morphismen von S-Schemata. Ist Y über S separiert, so ist

$$E(f, g) := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in X.

Beweis Sei $h : X \to Y \times_S Y$ der von f und g induzierte Morphismus.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & Y \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Y \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

Dann ist $E(f, g) = h^{-1}(\Delta)$, $(\Delta = \Delta_p(Y))$. Also ist $E(f, g)$ abgeschlossen. $\square$

Proposition 2.7.4
Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, R ein diskreter Bewertungsring, $K = \operatorname{Quot}(R)$, $T = \operatorname{Spec} R$. Dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(T, X) \longrightarrow \{(x_0, x_1, i) : x_0, x_1 \in X \text{ mit } x_0 \in \overline{\{x_1\}}, i : \kappa(x_1) \to K \text{ Körperhomomorphismus} \\ \text{mit } i(\mathcal{O}_{Z,x_0}) \subseteq R \text{ und } i(m_{Z,x_0}) = m_R \cap i(\mathcal{O}_{Z,x_0})\}, \end{aligned}$$

wobei $Z = \overline{\{x_1\}}_{red}$ sei. Dann ist $\mathcal{O}_{Z,x_1} = \kappa(x_1) = \mathcal{O}_{X,x_1}/m_{x_1}$.

Beweis Für $f : T \to X$ sei $x_0 := f(m_R), x_1 = f(0), i = f^\sharp_{x_1}$. Da T reduziert ist, "ist" f ein Morphismus nach Z:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & X \\ & Z \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$f^\sharp$ induziert also einen Morphismus

$$\mathcal{O}_{Z,x_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{T,m} = R$$

mit $f^\sharp(m_{Z,x_0}) \subseteq m$.
Umgekehrt induziert jedes $i : \mathcal{O}_{Z,x_0} \hookrightarrow R$ einen Morphismus

$$\operatorname{Spec} R = T \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Z,x_0}) \to Z \to X$$ □

Satz 2
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus noetherscher Schemata. f ist genau dann separiert, wenn es zu jedem "Bewertungsdiagramm"

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

($T = \operatorname{Spec} R$, R diskreter Bewertungsring, $U = \operatorname{Spec} K$, $K = \operatorname{Quot} R$)
höchstens einen Morphismus $h : T \to X$ gibt, der das Diagramm kommutativ macht.

Beispiele
Seien X die affine Gerade mit doppeltem Nullpunkt, $Y = \operatorname{Spec} k$ für einen Körper k, $R = k[X]_{(X)}$, $K = k(X)$. Sei weiter $X' = \operatorname{Spec} k[X]$, dann existiert ein Morphismus, der das Bewertungsdiagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} K & k[X] \arrow[l] \arrow[dl, dotted, "h^\sharp"'] \\ k[X]_{(X)} \arrow[u] & k \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Also gibt es für beide offenen Teile von X, die gleich $\mathbb{A}^1_k$ sind, je eine Fortsetzung.

Beweis "$\Rightarrow$" Sei ein Bewertungsdiagramm (mit den üblichen Bezeichnungen) gegeben. Zwei $h_1, h_2 : T \to X$ Fortsetzungen von $h_0 : U \to X$, induzieren einen Morphismus h:

$$
\begin{tikzcd}
& T \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[ldd, bend right, "h_1"'] \arrow[rdd, bend left, "h_2"] & \\
& X \times_Y X \arrow[ld] \arrow[rd] & \\
X \arrow[rd, "f"'] & & X \arrow[ld, "f"] \\
& Y &
\end{tikzcd}
$$

Es ist $h_1(0) = h_0(0) = h_2(0)$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow h(0) \in \Delta = \Delta_f(X) \Rightarrow h(m) \in \overline{\{h(0)\}} \subseteq \Delta \\
&\Rightarrow h_1(m) = h_2(m)
\end{aligned}
$$

"$\Leftarrow$" Nach Übungsblatt 6, Aufgabe 1 genügt es zu zeigen: Δ ist abgeschlossen in $X \times_Y X$.

Behauptung (1)
Ist für jedes $x_1 \in \Delta$ auch $\overline{\{x_1\}} \subseteq \Delta$, so ist Δ abgeschlossen.

Seien also $x_1 \in \Delta, x_0 \in \overline{\{x_1\}}, Z := \overline{\{x_1\}}_{red}, \mathcal{O} := \mathcal{O}_{Z,x_0}, K = \mathcal{O}_{Z,y_1} = \kappa(x_1)$

Behauptung (2)
Es gibt einen diskreten Bewertungsring $R \subseteq K$, der $\mathcal{O}$ dominiert, das heißt $\mathcal{O} \subseteq R$ und $m_{\mathcal{O}} = m_R \cap \mathcal{O}$.

Dann gibt es nach Proposition 2.7.4 einen Morphismus $h : T = \operatorname{Spec} R \to X \times_Y X$ mit $h(0) = x_1$ und $h(m) = x_0$. Für $h_i = pr_i \circ h$, $i = 1, 2$, ist $f \circ h_1 = f \circ h_2$, $h_i : T \to X$.
Da $x_1 \in \Delta$, ist $h_1(0) = h_2(0)$. Mit $h_0 := h|U$ folgt: $h_1 = h_2 \Rightarrow h(m) \in \Delta$. □

Beweis (2) $m = m_{\mathcal{O}}$ ist endlich erzeugt, etwa $m = (x_1, \dots, x_n)$. Sei $\mathcal{O}' = \mathcal{O}[\frac{X_2}{X_1}, \dots, \frac{X_n}{X_1}]$ und $I = X_1 \cdot \mathcal{O}'$. (Œ $I \neq \mathcal{O}'$)
Krullscherr Hauptidealsatz: es gibt ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}'$ der Höhe 1 mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ (Eisenbud Theorem 10.1)
$\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ ist ein noetherscher lokaler Ring der Dimension 1. Sei $\tilde{\mathcal{O}}$ der ganze Abschluss von $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ in K.
$\Rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ ist normal, $\dim \tilde{\mathcal{O}} = 1$, Œ $\tilde{\mathcal{O}}$ lokal, $\tilde{\mathcal{O}}$ ist noethersch (Satz von Krull-Akizuki, Eisenbud Theorem 11.13)
$\Rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ ist diskreter Bewertungsring. Es gilt:
$m_{\tilde{\mathcal{O}}} \cap \mathcal{O} \subseteq m_{\mathcal{O}}$: Klar.
$m_{\tilde{\mathcal{O}}} \cap \mathcal{O} \supseteq m_{\mathcal{O}}$, weil $X_1, \dots, X_n \in I$. □

Behauptung 1 ist (für $f = \Delta$) ein Spezialfall von

Proposition 2.7.5
Sei $f : W \to X$ Morphismus noetherscher Schemata. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&f(W) \text{ ist abgeschlossen} \\
\Leftrightarrow &f(W) \text{ ist abgeschlossen unter Spezialisierung: Für } x_1 \in f(W) \text{ und } x_0 \in \overline{\{x_1\}} \text{ ist } x_0 \in f(W).
\end{aligned}
$$

Beweis "$\Rightarrow$" Klar.

"$\Leftarrow$" Sei $Y = \overline{f(W)}$ (als abgeschlossenes Unterschema mit reduzierter Struktur)
Sei $y \in Y$; zu zeigen: $y \in f(W)$.
Œ $Y = \operatorname{Spec} A$ affin, sei $B = \mathcal{O}_W(W)$. f wird also induziert von $\alpha : A \to B$ und α ist injektiv, weil f dominant ist (AG I, Proposition 6.8 (b)). Sei $y' \subseteq y$ ein minimales Primideal, dann gilt $y \in \overline{\{y'\}}$. Also genügt es zu zeigen: $y' \in f(W)$ (das ist die Voraussetzung)
Es gilt $f^{-1}(y') = \operatorname{Spec}(\underbrace{B \otimes_A \kappa(y')}_{=:R})$. Zu zeigen: $R \neq \{0\}$
Es ist $\kappa(y') = {A_{y'}}/{y' A_{y'}}$ und $A_{y'}$ ist ein Körper, weil A reduziert ist. ? Damit gilt: $R = B \otimes_A A_{y'}$. Weiter gilt: $A \subseteq B \Rightarrow A \otimes_A A_{y'} \subseteq B \otimes_A A_{y'} = R$. Und $A_{y'}$ ist ein flacher A-Modul, weil er eine Lokalisierung ist. □

Beispiele
$A = {k[X,Y]}/{(X \cdot Y)}$, $y' = (X) \Rightarrow A_{y'} = k(Y)$.

Folgerung 2.7.6
Für noethersche Schemata gilt:

(a) Affine und abgeschlossene Einbettungen sind separiert.
(b) Die Komposition separierter Morphismen ist separiert.
(c) "separiert" ist stabil unter Basiswechsel.
(d) $g \circ f$ separiert $\Rightarrow$ f separiert.
(e) "separiert" ist lokal bezüglich der Basis, das heißt:
$f : X \to Y$ separiert $\Leftrightarrow$ es existiert eine offene Überdeckung (U_i) von Y, sodass

$$f|f^{-1}(U_i) : f^{-1}(U_i) \to U_i \text{ separiert}$$

Beweis Übung! □

§8 Eigentliche Morphismen

Definition 2.8.1
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.

(a) f heißt *lokal von endlichem Typ*, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$, mit $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, von Y gibt und für jedes $i \in \mathcal{I}$ eine offene Überdeckung $(U_{ij})_{j \in \mathcal{J}_i}$, mit $U_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}$, von $f^{-1}(U_i)$ existiert, sodass für alle i, j B_{ij} vermöge $f^\sharp$ zu einer endlich erzeugten A_i-Algebra wird.
(b) f heißt *von endlichem Typ*, wenn in (a) alle J_i endlich gewählt werden können.
(c) f heißt *endlich*, wenn in (a) jedes J_i einelementig gewählt werden kann (also $f^{-1}(U_i) =: \operatorname{Spec} B_i$) und B_i ein endlich erzeugter A_i-*Modul* ist.

Bemerkung 2.8.2
In Definition 2.8.1 kann "es gibt eine offene affine Überdeckung" ersetzt werden durch "für jedes offene affine $U \subseteq Y$ gilt".

Beweis (a) Übungsblatt 5, Aufgabe 2, (b) und (c) analog. □

Bemerkung 2.8.3
Ist $f : X \to Y$ endlich, so ist $f^{-1}(y)$ für jedes $y \in Y$ eine endliche Menge.

Beweis Sei Œ $Y = \operatorname{Spec} A$ affin. Dann ist auch $X = \operatorname{Spec} B$ affin. Es ist $f^{-1}(y) = \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$. $B \otimes_A \kappa(y)$ ist eine $\kappa(y)$-Algebra und, da B ein endlich erzeugter A-Modul ist, ist $B \otimes_A \kappa(y)$ ein endlich dimensionaler $\kappa(y)$-Vektorraum. Es ist $\dim(B \otimes_A \kappa(y)) = 0$ (?), also $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$ endlich. □

Definition 2.8.4
Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt *eigentlich*, wenn er von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist, das heißt für jeden Basiswechsel

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

ist f' abgeschlossen.

Beispiele
$f : \mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ ist abgeschlossen. Basiswechsel:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^2_k \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "f"'] \\ \mathbb{A}^1_k \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

f' ist nicht abgeschlossen, denn:
$V = V(XY-1)$ ist abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^2_k$, aber $f'(V) = \mathbb{A}^1_k - \{0\}$ ist nicht abgeschlossen.

Satz 3
Seien X, Y noethersche Schemata, $f : X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ. f ist genau dann eigentlich, wenn es zu jedem Bewertungsdidagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

genau eine Fortsetzung h gibt.