Kapitel 1

Banachräume und lineare Operatoren

1.1 Banachräume und metrische Räume

Es sei X ein VR über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, wobei X = 0 solange nichts anderes gesagt wird.

Definition 1.1 Eine Halbnorm p auf X ist eine Abb. $p: X \to \mathbb{R}^0_+$ mit

- (a) $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ $\forall x \in \mathbb{K}, x \in X$ (Homogenität)
- (b) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in X \ (\triangle \text{-Ungleichung})$
- $(c) \ p(x) = 0 \implies x = 0 \qquad \qquad \forall x \in X \ (Definitheit)$

so heißt p Norm und (X,p) normierter VR (nVR). Man schreibt meist ||x||=p(x) und p

Bemerkung 1.2

- (a) Es gilt: $|||x|| ||y|| \le ||x y||$
- (b) ||x|| = "Länge" von x \triangle -Ungl. = Hier gehört eine kleine Zeichung rein!
- (c) 1.1 a) $\implies p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$

Definition 1.3 Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ konvergiert gegen $x\in X$, wenn

- (1.1) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{\epsilon} \in \mathbb{N} \quad ||x_n x|| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N_{\epsilon} \ (x_n) \text{ ist eine Cauchy-folge (CF)}$ in X, wenn
- $(1.2) \ \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{\epsilon} \in \mathbb{N} \quad ||x_n x_m|| \le \epsilon \quad \forall n, m \ge N_{\epsilon}$

Ein nVR $(X, ||\cdot||)$ heisst <u>Banachraum</u>, wenn er <u>vollständig</u> ist, d.h. jede Cauchy-Folge hat einen Grenzwert. Wenn die Norm klar ist, so schreibt man X statt $(X, ||\cdot||)$.

Bemerkung 1.4

(a) Eine konvergente Folge ist CF, da

$$||x_n - x_m|| \le ||x_n - x|| + ||x - x_m|| \le 2\epsilon \quad \forall n, m \ge N_{\epsilon}, N_{\epsilon} \text{ aus } (1.1)$$

- (b) Wenn $x_n \to x$ und $x_n \to y$ in X $(n \to \infty)$, so gilt x = y, wegen Def. 1.1 c) und $||x y|| \le ||x x_n|| + ||x_n y|| \le 2\epsilon \quad \text{für} \quad n \ge \max\{N_{\epsilon}(x), N_{\epsilon}(y)\}.$ (wobei $N_{\epsilon}(x), N_{\epsilon}(y)$ aus (1.1)), hier ist $\epsilon > 0$ beliebig $\implies ||x y|| = 0 \implies x = y$
- (c) CF und konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt, d.h. $\sup_{n\in\mathbb{N}}||x_n||<\infty$

Beweis Nach (1.2) $\exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } ||x_n - x_N|| \le 1 \quad \forall n \ge N.$

$$\implies ||x_n|| \le ||x_n - x_N|| + ||x_N|| \le 1 + ||x_N|| \quad \forall n \ge N.$$

Ferner:
$$||x_n|| \le \max\{||x_1||, ..., ||x_N||\}$$
 für $n = 1, ..., N$

Beispiel 1.6

- (a) $X = \mathbb{K}^d \text{ mit } ||x||_p = (\sum_{k=1}^d |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p \leq \infty$ $||x||_{\infty} = \max_{k=1...d} |x|_k, \text{ wobei } x = (x_1, ... x_d) \in \mathbb{K}^d.$ $(X, ||\cdot||_p||) \text{ ist BR für } 1 \leq p \leq \infty \text{ (BR = Banachraum)}.$
- (b) $X = C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} : \text{f stetig}\}$ Dabei sind $f + g, \alpha f$ für $f, g \in X, \alpha \in \mathbb{K}$

gegeben durch:
$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$$

 $(\alpha f)(t) = \alpha f(t), \quad t \in [0,1]$

Bekannt ist: X ist VR.

Supremums norm für $f \in X: ||f||_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \quad (= \max_{t \in [0,1]} |f(t)|).$

Klar: $||f||_{\infty} \in [0, \infty), ||f||_{\infty} = 0 \implies f = 0$

$$\begin{split} ||\alpha f||_{\infty} &= \sup_{t \in [0,1]} |\alpha f(t)| = |\alpha| ||f(t)| = |\alpha| ||f||_{\infty} \\ ||f+g||_{\infty} &= \sup_{t \in [0,1]} |f(t)+g(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + |g(t)| \leq ||f||_{\infty} + ||g||_{\infty} \end{split}$$

 $\implies (X, ||\cdot||_{\infty}) \text{ ist nVR.}$

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CF in $(X, ||\cdot||_{\infty})$

 $\implies |f_n(t) - f_m(t)| \le ||f_n(t) - f_m(t)||_{\infty} \le \varepsilon \quad \forall n, m \ge N_{\varepsilon}$, wobei $\varepsilon > 0$ bel., gilt für alle $t \in [0, 1]$. (*)

$$\Longrightarrow (f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist CF in } \mathbb{K} \xrightarrow{\mathbb{K} \text{ vollst.}} \exists f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t), \quad t\in[0,1].$$
 Sei $t\in[0,1], \ \varepsilon>0, N_\varepsilon$ aus $(*), \ n\geq N_\varepsilon$
$$|f(t)-f_n(t)|=\lim_{m\to\infty}|f_m(t)-f_n(t)|\leq \lim_{m\to\infty}||f_m(t)-f_n(t)||_\infty\leq \varepsilon$$
 Da N_ε unabhängig von t , gilt $||f-f_n||_\infty\leq \varepsilon \quad \forall n\geq N_\varepsilon$. D.h.: $f_n\to f$ glm. in $t\in[0,1]$. z.Z. bleibt Stetigkeit von f.

(c) Haben $f_n \in X = C([0,1])$ $f: [0,1] \to \mathbb{K}$ mit $\forall \varepsilon > 0 \,\exists \, N_{\epsilon} \in \mathbb{N} : \quad ||f_n - f||_{\infty} \le \varepsilon \,\forall n \ge N_{\varepsilon}$ Sei $\varepsilon > 0$ und $t, s \in [0,1]$ gegeben, wähle $n = N_{\varepsilon}$. Dann $\exists \delta = \delta(n) = \delta(\varepsilon)$, so dass: $|f_n(t) - f_n(s)| \le \varepsilon$ wenn $|t - s| \le \delta$ (f_n glm. stätig)