

## 8. Komplexe Wegintegrale

Im Folgenden sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) und  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen.

### Definition

- (1) Ist  $\varphi$  auf  $I$  stetig, so setze:  $\int_a^b \varphi(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(t) dt$ ;  $\int_b^a \varphi(t) dt := -\int_a^b \varphi(t) dt$ ;  $\int_a^a \varphi(t) dt := 0$
- (2)  $\varphi$  heißt auf  $I$  **differenzierbar** (db)  $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi$  sind auf  $I$  differenzierbar. In diesem Fall:  $\varphi' := (\operatorname{Re} \varphi)' + i(\operatorname{Im} \varphi)'$
- (3)  $\varphi$  heißt auf  $I$  **stetig differenzierbar**  $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi$  sind auf  $I$  stetig differenzierbar.

### Satz 8.1

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in H(D)$ ,  $\varphi(I) \subseteq D$  und  $\varphi$  auf  $I$  differenzierbar.

Dann ist  $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar auf  $I$  und  $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t) \forall t \in I$ .

### Beweis

Übung! ■

### Satz 8.2

- (1) Sei  $\varphi$  stetig auf  $I$  und  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $\Phi(s) := \int_a^s \varphi(t) dt$ . Dann ist  $\Phi$  stetig differenzierbar auf  $I$  und  $\Phi' = \varphi$  auf  $I$
- (2) Sei  $\varphi$  auf  $I$  stetig differenzierbar  $\Rightarrow \int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

### Beweis

Übung! ■

### Definition

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg (also  $\gamma$  stetig).

- (1)  $\operatorname{Tr}(\gamma) := \gamma([a, b])$  **Träger von  $\gamma$**
- (2)  $\gamma$  heißt **geschlossen**  $\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$
- (3)  $\gamma$  heißt **glatt**  $\Leftrightarrow \gamma$  ist auf  $[a, b]$  stetig differenzierbar.

**Definition**

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ ,  $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$  und  $\gamma_j := [a_j, a_{j+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  seien Wege ( $j = 1, \dots, n$ ) mit  $\gamma_j(a_{j+1}) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ).

Definiere  $\gamma : [a_1, a_{n+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\gamma(t) := \gamma_j(t)$ , falls  $t \in [a_j, a_{j+1}]$ .

Dann ist  $\gamma$  ein Weg und man schreibt:  $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n$

$\gamma$  heißt **stückweise glatt**  $:\Leftrightarrow \gamma_1, \dots, \gamma_n$  sind glatt.

**Bemerkungen:**

(1) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg.  $\gamma$  ist stückweise glatt  $\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_{n+1} \in [a, b] : a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} = b$  und  $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$  ist glatt ( $j = 1, \dots, n$ )

(2) stückweise glatte Wege sind rektifizierbar.

(3) glatt  $\Rightarrow$  stückweise glatt

**Beispiel**

$\gamma_1(t) := t$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $\gamma_2(t) := 1 + i(t-1)$  ( $t \in [1, 2]$ ).

$\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2$ ,  $\gamma_1, \gamma_2$  sind glatt,  $\gamma'_1(t) = 1 \neq \gamma'_2(1) = i \Rightarrow \gamma$  in 1 nicht differenzierbar.

Wie in  $\mathbb{R}$  zeigt man: Ist  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so gilt:  $|\int_a^b \phi(t) dt| \leq \int_a^b |\phi(t)| dt$ .

Für den Rest des Paragraphen sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stets ein Weg (also stetig).

**Definition**

$\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma^-(t) := \gamma(b + a - t)$ ;  $\gamma^-$  heißt der zu  $\gamma$  **inverse Weg**.

Klar:  $\text{Tr}(\gamma) = \text{Tr}(\gamma^-)$

**Definition**

Ist  $\gamma$  glatt, so setze  $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ .

Ist  $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$  stückweise glatt (mit  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  glatt), so setze:

$L(\gamma) := L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_n)$

$L(\gamma)$  heißt **Weglänge** von  $\gamma$ .

**Beispiele:**

(1) Seien  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) := z_1 + t(z_2 - z_1)$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $\gamma$  ist glatt.

$$\gamma'(t) = z_2 - z_1. \implies L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1| dt = |z_2 - z_1|$$

(2) Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  und  $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )

$$\gamma \text{ ist glatt, } \gamma'(t) = rie^{it}, |\gamma'(t)| = r \implies L(\gamma) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

**Definition**

Sei  $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$  und  $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar, bijektiv und  $h(\alpha) = a, h(\beta) = b$ . Ist  $\gamma$  stückweise glatt, so setze  $\Gamma := \gamma \circ h$ , also  $\Gamma(s) = \gamma(h(s))$  ( $s \in [\alpha, \beta]$ ).

Dann ist  $\Gamma$  ein stückweise glatter Weg mit  $\text{Tr}(\Gamma) = \text{Tr}(\gamma)$ .

$h$  heißt eine **Parametertransformation**. Man schreibt  $\Gamma \sim \gamma$ .

**Definition**

Sei  $f \in C(\text{Tr}(\gamma))$ ;

Ist  $\gamma$  glatt, so setze  $\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

Ist  $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$  stückweise glatt mit  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  glatt, so setze  $\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz$ .  
 $\int_{\gamma} f(z) dz$  heisst ein (komplexes) **Wegintegral** (von f längs  $\gamma$ )

### Beispiel

$$\gamma(t) := 3e^{it} (t \in [0, 2\pi])$$

$$(1) \int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} 3e^{-it} i 3e^{it} dt = 18\pi i.$$

$$(2) \int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^{2\pi} 9e^{2it} i 3e^{it} dt = 0.$$

Wie in der Analysis zeigt man:

#### Satz 8.3

$\gamma$  sei stückweise glatt,  $f, g : \text{Tr}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  seien stetig,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  und  $\Gamma$  sei ein stückweise glatter Weg mit  $\Gamma \sim \gamma$ .

$$(1) \int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$$

$$(2) \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \text{ (und } L(\Gamma) = L(\gamma))$$

$$(3) \int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

#### Satz 8.4

$\gamma$  und  $f$  seien wie in 8.3.  $f_n$  sei eine Folge in  $C(\text{Tr}(\gamma))$  und es sei  $M := \max_{z \in \text{Tr}(\gamma)} |f(z)|$ . Dann:

$$(1) \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML(\gamma)$$

(2) Konvergiert die Folge  $(f_n)$  auf  $\text{Tr}(\gamma)$  gleichmässig gegen  $f$ , so gilt:

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz (n \rightarrow \infty)$$

$$(\text{also: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)) dz)$$

### Beweis

$$(1) \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = ML(\gamma).$$

## 8. Komplexe Wegintegrale

(2)  $M_n := \max_{z \in \text{Tr}(\gamma)} |f_n(z) - f(z)|$ . Voraussetzung  $\implies M_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ .

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n(z) - f(z)) dz \right| \stackrel{(1)}{\leq} M_n L(\gamma).$$

### Definition

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f \in C(D)$ .  $f$  besitzt auf  $D$  eine **Stammfunktion** (SF) :  $\iff \exists F \in H(D) : F' = f$  auf  $D$ .

### Satz 8.5

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f \in C(D)$  besitze auf  $D$  die Stammfunktion  $F$  und  $\gamma$  sei ein stückweiser glatter Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$ . Dann:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

### Beweis

O.B.d.A:  $\gamma$  glatt.  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt \stackrel{8.2}{=} (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a)$ . ■

### Folgerung 8.6

$D$ ,  $f$  und  $\gamma$  seien wie in 8.5. Ist  $\gamma$  geschlossen  $\implies \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

### Beispiel 8.7

Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ .  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ );  $\gamma$  ist geschlossen.

Für  $k \in \mathbb{Z}$  sei  $f_k(z) := (z - z_0)^k$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ )

(1) Sei  $k \neq -1$ .  $f_k$  hat auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  die Stammfunktion  $z \mapsto \frac{1}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$ .

$$8.6 \implies \int_{\gamma} (z - z_0)^k dz = 0$$

(2) Sei  $k = -1$ :  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i$ .

Also:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 1$$

Wegen 8.6: Die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$  hat auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  keine Stammfunktion!

Aber: im Falle  $z_0 = 0$  hat die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  die Stammfunktion  $\text{Log} z$  auf  $\mathbb{C}_-$ .

### Satz 8.8

Sei  $[a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}$  und  $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$  glatte Wege mit  $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$  ( $j = 1, \dots, n$ )

Dann existiert ein stückweise glatter Weg  $\gamma$  mit:  $\text{Tr}(\gamma) = \bigcup_{j=1}^n \text{Tr}(\gamma_j)$ ,  $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots +$

$L(\gamma_n)$  und  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz \quad \forall f \in C(\text{Tr}(\gamma))$

**Beweis**

mit 8.3(2). ■

**Beispiel**

$\gamma_1(t) = t, (t \in [0, 1]); \gamma_2(t) = 1 + it, t \in [0, 1]$

$\tilde{\gamma}_2(t) := 1 + i(t - 1), t \in [1, 2]$ . Dann:  $\tilde{\gamma}_2 \sim \gamma_2$ ;  $\gamma := \gamma_1 \oplus \tilde{\gamma}_2 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Satz 8.9**

Sei  $(K_n)$  eine Folge kompakter Mengen in  $\mathbb{C}$  mit:  $K_n \neq \emptyset$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ),  $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$  und  $d(K_n) := \max_{z, w \in K_n} |z - w| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset.$$

**Beweis**

Wähle in jedem  $K_n$  ein  $z_n$ . Für  $n, k \in \mathbb{N} : z_n, z_{n+k} \in K_n$

Dann:  $|z_n - z_{n+k}| \leq d(K_n) \implies (z_n)$  ist eine Cauchy-Folge  $\implies \exists z_0 \in \mathbb{C} : z_n \rightarrow z_0$ .

Sei  $N \in \mathbb{N}$ .  $z_n \in K_N \forall n \geq N$ .  $K_N$  abgeschlossen  $\implies z_0 \in K_N$ . ■

