

Kapitel 4

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Ist Ω endlich oder abzählbar unendlich, so kann $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt werden. Was machen wir z.B. bei $\Omega = [0, 1)$ im Beispiel des rotierenden Zeigers 1.1.b)?

$\mathcal{P}([0, 1))$ ist zwar eine σ -Algebra, für eine vernünftige Theorie jedoch zu groß, wie die folgende Überlegung zeigt.

Ist der Zeiger fair, so sollte für $[a, b) \subset [0, 1)$ gelten:

$$P([a, b)) = b - a$$

Bzw. $\forall A \subset [0, 1)$ und $\forall x \in [0, 1)$:

$$P(x + A) = P(A) \quad (*)$$

wobei $x + A = \{x + y \bmod 1 \mid y \in A\}$ ($\Rightarrow P$ ändert sich nicht bei Verschiebung des Intervalls)

P ist also eine Gleichverteilung auf $[0, 1)$. Es gilt jedoch:

Satz 4.1 *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (der Potenzmenge) $\mathcal{P}([0, 1))$ mit der Eigenschaft (*) existiert nicht.*

Beweis Betrachte folgende Äquivalenzrelation auf $[0, 1)$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

Die Äquivalenzklassen bilden eine Partition des $[0, 1)$

Auswahlaxiom: Aus jeder Klasse wird ein Element genommen und in eine Menge A gesteckt.

Es gilt nun:

$$(i) \quad (x + A) \cap (y + A) = \emptyset \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1), x \neq y$$

$$(ii) \quad \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} (x + A) = [0, 1)$$

- zu (i)

Annahme: $\exists a, b \in A$ und $x, y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1), x \neq y$ mit $(a + x) \bmod 1 = (b + y) \bmod 1$. Da $0 < |x - y| < 1$ folgt $a \neq b$

Wegen $a - b = y - x(\pm 1) \in \mathbb{Q}$ würde a, b in der gleichen Klasse liegen. Widerspruch.

- zu (ii)
 “ \subset “: ist klar
 “ \supset “: Sei $z \in [0, 1) \Rightarrow \exists a \in A$ mit $a \sim z$, d.h. $x := z - a \in \mathbb{Q}$ und $-1 < x < 1$
 Falls $x < 0$ ersetze x durch $x + 1$ ($z = (x + 1) + a \bmod 1$)

Sei jetzt P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}([0, 1))$ mit (*). Dann gilt:

$$1 \stackrel{\text{Normiertheit}}{=} P([0, 1)) \stackrel{(i),(ii)}{=} P\left(\sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} (x + A)\right) \stackrel{\sigma\text{-Add}}{=} \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} P(x + A) \stackrel{(*)}{=} \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} P(A)$$

\Rightarrow Widerspruch ■

Definition 4.1

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A} \supset \mathcal{E}, \mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra}} \mathcal{A}$$

die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra. \mathcal{E} heißt **Erzeugendensystem**.

Bemerkung 4.1

- $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ -Algebra, die \mathcal{E} enthält.
- Der Durchschnitt von beliebig vielen σ -Algebren über Ω ist wieder eine σ -Algebra (\rightarrow Übung)
- $\sigma(\mathcal{E}) \neq \emptyset$, da $\mathcal{P}(\Omega) > \mathcal{E}$ und σ -Algebra ist.

Wir definieren jetzt eine σ -Algebra auf \mathbb{R} .

Definition 4.2 Es sei $\mathcal{E} := \{(a, b], -\infty < a < b < \infty\}$. Dann heißt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$ **Borelsche σ -Algebra** oder σ -Algebra der Borelschen Mengen von \mathbb{R} .

Bemerkung 4.2

- Es gilt auch
 $\mathfrak{B} = \sigma(\{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{F \subset \mathbb{R} | F \text{ abgeschlossen}\})$
 $= \sigma(\{U \subset \mathbb{R} | U \text{ offen}\})$
 zur letzten Gleichung: $\mathfrak{B} = \sigma(U \subset \mathbb{R} | U \text{ offen})$
 - $\mathfrak{B} \supset \sigma(\{U \subset \mathbb{R} | U \text{ offen}\})$, da sei $U \subset \mathbb{R}$ offen $\forall x \in U \exists (a, b] \subset U$ mit $x \in (a, b], a, b \in \mathbb{Q}$
 also $U = \bigcup_{\{(a, b) \in \mathbb{Q}^2 | (a, b] \subset U\}} (a, b] \in \mathfrak{B}$
 - “ \subset “ $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n}) \in \sigma(\{U \subset \mathbb{R} | U \text{ offen}\})$

- b) Sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ Dann ist
 $\mathfrak{B}_A := \{B \cap A \mid B \in \mathfrak{B}\}$ eine σ -Algebra über A

Satz 4.2 Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]})$ mit der Eigenschaft $P(A) = P(A + x) \forall A \in \mathfrak{B}_{[0,1]}, \forall x \in [0, 1]$

Insbesondere gilt:

$$P([a, b]) = b - a \quad \forall 0 \leq a < b < 1$$

Bemerkung 4.3 P heißt Gleichverteilung auf dem Einheitsintervall.

Sei $x \in [0, 1)$ Wegen $P(\{x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P([x, x + \frac{1}{n}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

gilt $P([a, b]) = P([a, b))$ für $a, b \in [0, 1]$

Ist das Wahrscheinlichkeitsmaß aus Satz 4.2 eindeutig?

Definition 4.3 Sei $\Omega \neq \emptyset$ $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Dynkin-System**, falls gilt:

- (i) $\Omega \in \mathcal{D}$
- (ii) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$
- (iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$

Bemerkung 4.4 Der Durchschnitt von beliebig vielen Dynkin-Systemen ist wieder ein Dynkin-System. Es sei

$$\delta(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{D} \supset \mathcal{E}, \mathcal{D} \text{ Dynkin-System}} \mathcal{D}$$

das von \mathcal{E} erzeugte Dynkin-System.

Definition 4.4 Ein Mengensystem \mathcal{E} heißt **durchschnittsstabil** (\cap -stabil), falls $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$

Satz 4.3 (Satz über monotone Klassen)

Ist \mathcal{E} ein \cap -stabiles Mengensystem, so gilt $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$

Satz 4.4 Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra mit \cap -stabilem Erzeuger \mathcal{E} . Sind P und Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathcal{A} mit der Eigenschaft $P(E) = Q(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$, so gilt: $P(A) = Q(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

Beweis Sei $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \mid P(A) = Q(A)\}$ Nach Voraussetzung ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$. Wegen den Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist \mathcal{D} ein Dynkin-System.

Satz 4.3 $\mathcal{D} \supset \delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ ■

Bemerkung 4.5 $\mathcal{E} := \{[a, b] \mid 0 \leq a < b < 1\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}_{[0,1]}$. Offenbar ist \mathcal{E} durchschnittsstabil.

Also ist P aus Satz 4.3 eindeutig.

