10. Das Cauchy-Kriterium

Motivation: Sei (a_n) eine konvergente Folge, $a := \lim a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_0$.
Für $n, m \geq n_0$: $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.
Eine konvergente Folge (a_n) hat also die folgende Eigenschaft:

$$(*) \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Definition (Cauchy-Folge)
Hat (a_n) die Eigenschaft $(*)$, so heißt (a_n) eine **Cauchyfolge** (CF). **Beachte:** (a_n) ist eine Cauchyfolge $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n > m \geq n_0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}$.

Beispiel
$s_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$s_{2n} - s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n+1} + \ldots + \tfrac{1}{2n} - (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n}) = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq$$

$n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \implies |s_{2n} - s_n| \geq \frac{1}{2}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies (s_n)$ ist keine Cauchyfolge!

Satz 10.1 (Cauchy-Kriterium)
(a_n) ist konvergent $\iff$ (a_n) ist eine Cauchyfolge.

Beweis
„$\Rightarrow$“: siehe oben

„$\Leftarrow$“: Zu $\varepsilon = 1$ existiert $n_o \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n_0}| < 1\ \forall n \geq n_0$. Für $n \geq n_0 : |a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| =: c \implies (a_n)$ ist beschränkt.

Annahme: (a_n) ist divergent $\overset{9.3}{\implies} \alpha := \liminf a_n < \limsup a_n =: \beta$

$\varepsilon := \frac{\beta - \alpha}{3}$; $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_0$

$\alpha \in H(a_n) \implies \exists n \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ und $n \geq n_0 \implies a_n < \alpha + \varepsilon$
$\beta \in H(a_n) \implies \exists m \in \mathbb{N} : a_m \in U_\varepsilon(\beta)$ und $m \geq n_0 \implies a_m < \beta - \varepsilon$

$\implies a_m > a_n \implies |a_m - a_n| = a_m - a_n > \beta - \varepsilon - (\alpha + \varepsilon) = \beta - \alpha - 2\varepsilon = 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon.$ ` ∎

Folgerung 10.2
Die Folge (s_n) mit $s_n := 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$ ist divergent.