27. Randwertprobleme (Einblick)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : IxD \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Wir betrachten das **Randwertproblem** (RWP):

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y''(a) = \gamma_a, \beta_1 y(b) + \beta_2 y''(b) = \gamma_b \end{cases}$$

mit α_1,α_2,β_1,β_2,γ_a,$\gamma_b \in \mathbb{R}$.

Beispiel
Die Dgl $y'' = -\pi^2 y$ hat die allg. Lösung $y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)$
Die Dgl $y'' = -\pi^2 y + 1$ hat die allg. Lösung $y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}$

$$\text{RWP (1)} \begin{cases} y'' = -\pi^2 y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (I = [0, 1])$$

$0 = y(0) = c_1 \cos(\pi 0) + c_2 sin(\pi 0) = c_1$
$0 = y(1) = c_2 \sin(\pi 0) = 0$. D.h.: das RWP hat unendlich viele Lösungen: $y(x) = c \sin(\pi x)(c \in \mathbb{R})$.

$$\text{RWP (2)} \begin{cases} y'' = -\pi^2 y + 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (I = [0, 1])$$

$0 = y(0) = c_1 \cos(\pi 0) + c_2 sin(\pi 0) + \frac{1}{\pi^2} = c_1 + \frac{1}{\pi^2} \implies c_1 = -\frac{1}{\pi^2}$
$0 = y(1) = -\frac{1}{\pi^2} \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) + \frac{1}{\pi^2} = \frac{2}{\pi^2}$. D.h.: das RWP ist unlösbar.

$$\text{RWP (3)} \begin{cases} y'' = -\pi^2 y \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \quad (I = [0, 1])$$

$0 = y(0) \implies c_1 = 0 \implies y(x) = c_2 \sin(\pi x)$
$y'(x) = c_2 \pi \cos(\pi x) \overset{x=1}{\implies} c_2 \pi \cos(\pi) = -c_2 \pi \implies c_2 = 0$
$\implies y = 0$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des RWPs.

Beachte für später:
In Bsp(1) und (3): $f(x, y) = -\pi^2 y$
In Bsp(2): $f(x, y) = -\pi^2 y + 1$
In allen 3 Bsp'en: $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| = \underbrace{\pi^2}_{L} |y - \tilde{y}|$. ($\implies \exists$ kein $L \in [0, \pi^2) : |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$)

Definition: Die Funktion $G : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$G(x, t) := \begin{cases} t(x - 1), \text{ falls } 0 \leq t \leq x. \\ x(t - 1), \text{ falls } 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

Klar: $G \leq 0; G(0,t) = G(1,t) = 0 \ \forall t \in [0,1]$. Übung: G ist stetig auf $[0,1] \times [0,1]$.

Hilfssatz 27.1
Gegeben: $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\phi(x) := \int_0^1 G(x,t)h(t)dt.$$

Dann: $\phi(0) = \phi(1) = 0, \phi \in C^2([0,1]$ und $\phi'' = h$ auf $[0,1]$.

Beweis
$\phi(0) = \int_0^1 \underbrace{G(0,t)}_{=0} h(t)dt = 0; \phi(1) = \int_0^1 \underbrace{G(1,t)}_{=0} h(t)dt = 0$
$\forall x \in [0,1] : \phi(x) = \int_0^x G(x,t)h(t)dt + \int_x^1 G(x,t)h(t)dt = \int_0^x (tx - t)h(t)dt + \int_x^1 (xt - x)h(t)dt$
$= x \int_0^x th(t)dt - \int_0^x th(t)dt + x \int_x^1 th(t)dt - x \int_x^1 h(t)dt$
$= x \int_0^1 th(t)dt - \int_0^x th(t)dt + x \int_1^x h(t)dt$
$\implies \phi$ ist db auf $[0,1]$ und $\phi'(x) = \int_0^1 th(t)dt - xh(x) + \int_1^x h(t)dt + xh(x)$
$= \int_0^1 th(t)dt + \int_1^x h(t)dt. \implies \phi$ ist auf $[0,1]$ 2 mal db und $\phi''(x) = h(t)$. ∎

Beispiel
$\int_0^1 G(x,t)dt = \underbrace{\int_0^1 G(x,t)1dt}_{=:\phi(x)} \overset{27.1}{\implies} \phi''(x) = 1 = \phi'(x) = x + c_1$
$\implies \phi(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2$
$0 = \phi(0) = c_2$
$0 = \phi(1) = \frac{1}{2} + c_1 \implies c_1 = -\frac{1}{2}$
$\implies \int_0^1 G(x,t)dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \ \forall x \in [0,1]$.

Definition
$f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Das RWP

$$(R) \begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

heisst **Dirichlet Randwert-Problem** und obige Funktion G heisst die zu (R) gehörende **Greensche Funktion**.

Im Folgenden sei $X := C([0,1], \mathbb{R})$ und der Operator $T : X \to X$ definiert durch

$$(T_y)(x) := \int_0^1 G(x,t)f(t,y(t))dt(y \in X, x \in [0,1])$$

Aus 27.1: $(T_y)(0) = (T_y)(1) = 0, T_y \in C^2[0,1]$ und $(T_y)''(x) = f(x,y(x)) \ \forall y \in X \ \forall x \in [0,1]$.

Satz 27.2
Sei $y \in X$.

$$y \text{ löst (R) auf } [0,1] \iff T_y = y$$

Beweis
" $\implies$ ":
$\forall x \in I: y''(x) = f(x, y(x)) \overset{\text{s.o.}}{=} (T_y)''(x); \Psi(x) := y(x) - (T_y)(x)$
$\implies \Psi'' = 0$ auf $[0,1] \implies \Psi'(x) = c_1 \implies \Psi(x) = c_1 x + c_2$
$\Psi(0) = y(0) - (T_y)(0) = 0 \implies c_2 = 0.$
$\Psi(1) = y(1) - (T_y)(1) = 0 \implies c_1 = 0.$
"$\Leftarrow$":
Sei $y = T_y \overset{27.1}{\implies} y \in C^2([0,1])$ und $y''(x) = (T_y)''(x) = f(x, y(x))\ \forall x \in [0,1]$
$y(0) = (T_y)(0) \overset{\text{s.o.}}{=} 0$
$y(1) = (T_y)(1) \overset{\text{s.o.}}{=} 0.$ ∎

Vorbetrachtung:
Sei $0 < c < \pi$, $\phi(x) := \cos c(x - \frac{1}{2}) (x \in [0,1])$.
$\phi \in C([0,1], \mathbb{R})$. $x \in [0,1] \implies c(x - \frac{1}{2}) \in [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}] \subsetneq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\implies \phi(x) > \frac{c}{2} > 0\ \forall x \in [0,1]$

Satz 27.3 (Satz von Lettenmeyer)
$f: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Es sei $L \geq 0$ und es gelte:
$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|\ \forall (x,y), (x,\tilde{y}) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.
Ist $L < \pi^2$, so hat (R) auf $[0,1]$ genau eine Lösung.

Bemerkung:

(1) Die Beispiele am Anfang des Paragrafen zeigen, dass die Schranke π^2 optimal ist.

(2) Allgemein kann man das RWP

$$\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

(mit $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig) betrachten. Dann ist π^2 durch $\frac{\pi^2}{(a-b)^2}$ zu ersetzen.

Beweis
Sei $c := (\frac{c+\pi^2}{2})^{\frac{1}{2}}$. Dann: $L < c^2 < \pi^2$, $q = \frac{L}{c^2}$, also $q < 1$.
Sei ϕ wie in der Vorbetrachtung. Wir versehen nun X mit folgender Norm:

$$||u|| := \max\{\frac{u(x)}{\phi(x)} : 0 \leq x \leq 1\}\ (u \in X)\ \textbf{gewichtete Max-Norm}$$

Bekannt: $(X, ||\cdot||)$ ist ein BR (Par. 13). Wir werden zeigen:
$||T_u - T_v|| \leq q||u - v||\ \forall u, v \in X$.
Aus 11.2 folgt dann: T hat genau einen Fixpunkt. Aus 27.2 folgt dann die Behauptung.
Seien $u, v \in X$ und $x \in [0,1]$. $|(T_u)(x) - (T_v)(x)| = |\int_0^1 G(x,t)(f(t,u(t)) - f(t,v(t))dt| \leq \int_0^1 |G(x,t)|L|u(t) - v(t)|dt$
$= L \int_0^1 |G(x,t)| \underbrace{\frac{|u(t) - v(t)|}{\phi(t)}}_{\leq ||u-v||} \phi(t)dt \leq L||u - v|| \int_0^1 |G(x,t)|\phi(t)dt$

$\overset{G\leq 0}{=} \ L||u-v||(-\underbrace{\int_0^1 G(x,y)\phi(t)dt)}_{=:g(x)}$

27.1 $\Longrightarrow g(0) = g(1) = 0, g \in C^2([0,1])$ und $g'' = \phi$. Dann: $g'(x) = \frac{1}{c}\sin c(x-\frac{1}{2}) + c_1$
$\Longrightarrow g(x) = -\frac{1}{c^2}\cos c(x-\frac{1}{2}) + c_1 x + c_2 = -\frac{1}{c^2}\phi(x) + c_1 x + c_2$.
$0 = g(0) = -\frac{1}{c^2}\phi(0) + c_2 \implies c_2 = \frac{1}{c^2}\cos\frac{c}{2}$ $0 = g(1) = -\frac{1}{c^2}\phi(1) + \frac{1}{c^2}\cos\frac{c}{2} \implies c_1 = 0$
$\Longrightarrow g(x) = -\frac{1}{c^2}\phi(x) + \frac{1}{c^2}\cos\frac{c}{2}$
$\Longrightarrow |(T_u)(x) - (T_v)(x)| \leq L||u-v||\frac{1}{c^2}(\phi(x) - \cos\frac{c}{2}) = \frac{L}{c^2}||u-v||(\phi(x) - \cos\frac{c}{2}) \implies \underbrace{|(T_u)(x) - (T_v)(x)|}_{=\phi(x)} \leq$

$\frac{L}{c^2}||u-v||(1 - \frac{\cos\frac{c}{2}}{\phi(x)}) \leq \frac{L}{c^2}||u-v|| = q||u-v||$
$\Longrightarrow ||T_u - T_v|| \leq q||u-v||$. ■

Satz 27.4 (Satz von Scorza-Dragoni)
Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $D := I \times \mathbb{R}$ und $f \in C(D, \mathbb{R})$ sei auf D beschränkt.

Dann hat das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

eine Lösung auf I.

Beispiel

$$I = [0,\pi], \quad f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \leq -1 \\ -y, & |y| \leq 1 \\ -1, & y \geq 1 \end{cases}$$

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq 1$ und $y_\alpha(x) := \alpha\sin x$, $|y_\alpha| \leq 1$, $y_\alpha''(x) = -\alpha\sin x = -y_\alpha(x) = f(x, y_\alpha(x))$, $y_\alpha(0) = y_\alpha(\pi) = 0$. Das heißt: Ein Randwertproblem wie in 27.4 muß *nicht* eindeutig lösbar sein.

Beweis
Wir führen den Beweis nur unter der zusätzlichen Voraussetzung:

$$\exists L \geq 0 : |f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \ \forall (x,y), (x,\tilde{y}) \in D$$

Sei $M \geq 0$ so, dass $|f| \leq M$ auf D.

Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(a) = 0, y'(a) = s \end{cases}$$

18.3 $\Longrightarrow$ obiges Anfangswertproblem hat genau eine Lösung y_s auf I. §18 und 25.2 $\Longrightarrow$ $|y_{s_1}(x) - y_{s_2}(x)| \leq c|s_1 - s_2| \ \forall x \in I, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

$h(s) := y_s(b)$ $(s \in \mathbb{R})$, damit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $s_0 \in \mathbb{R}$ und $h(s_0) = 0$, so ist $y := y_{s_0}$ eine Lösung des Randwertproblems.

$$\begin{aligned}
\forall x \in I : y_s'(x) - s = y_s'(x) - y_s'(a) &= \int_a^x y_s''(t)dt = \int_a^x f(t, y_s(t))dt \\
\Longrightarrow y_s'(x) &= s + \int_a^x f(t, y_s(t))dt \\
\Longrightarrow y_s(b) &= y_s(b) - y_s(a) \\
&\overset{\text{MWS}}{=} y_s'(\xi)(b-a) \\
&= \left(s + \int_a^\xi f(t, y_s(t))dt\right)(b-a) \\
&= s(b-a) + \int_a^\xi f(t, y_s(t))dt(b-a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow |h(s) - s(b-a)| = |\int_a^\xi f(t, y_s(t))dt(b-a)| \leq M(\xi - a) \leq M(b-a) =: c \\
&\Longrightarrow -c \leq h(s) - s(b-a) \leq c \ \forall s \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow s(b-a) - c \leq h(s) \leq c + s(b-a) \ \forall s \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow h(s) \to \infty \ (s \to \infty) \text{ und } h(s) \to -\infty \ (s \to -\infty)
\end{aligned}$$

Der Zwischenwertsatz liefert nun: $\exists s_0 \in \mathbb{R} : h(s_0) = 0$ ■

Satz 27.5
Sei $A > 0$, $0 < B < \pi^2$, $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und es gelte

$$|f(x,y)| \leq A + B|y| \ \forall x \in [0,1], y \in \mathbb{R}$$

Dann hat das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

eine Lösung auf $[0,1]$

Bemerkung: Die Schranke π^2 ist optimal:

$$\begin{cases} y'' = -\pi^2 y + 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

ist unlösbar!