

13 Konfidenzbereiche

Sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ statistisches Modell, $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^s$.

13.1 Definition

Sei $\alpha \in (0, 1)$. Eine Abbildung $C : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^s)$ heißt **Konfidenzbereich** für $g(\vartheta)$ zum Niveau $1 - \alpha$ genau dann, wenn

- (1) $\{x \in \mathfrak{X} : C(x) \ni g(\vartheta)\} \in \mathcal{B} \quad \forall \vartheta \in \Theta$
- (2) $P_\vartheta(\{x \in \mathfrak{X} : C(x) \ni g(\vartheta)\}) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta.$

Falls $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$ eine Zufallsvariable mit Verteilung P_ϑ ist, so die zweite Bedingung gleichbedeutend mit

$$P_\vartheta(C(X) \ni g(\vartheta)) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Falls $s = 1$ und $C(x)$ für alle $x \in \mathfrak{X}$ ein Intervall ist, so heißt $C(\cdot)$ ein **Konfidenzintervall**.³⁶

Beispiel:

$$X = (X_1, \dots, X_n), X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \vartheta = (\mu, \sigma^2), g(\vartheta) = \mu$$

$$C(X) = [\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}]$$

ist Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ nach 2.4.

13.2 Bemerkung (Pivot-Methode)

Praktische Berechnung von Konfidenzintervallen:

Finde Funktion k so, dass die Verteilung von $k(X, \vartheta)$ unabhängig von ϑ ist, d.h., dass $H(x) := P_\vartheta(k(X, \vartheta) \leq x)$ unabhängig von ϑ ist.

Dann existieren Konstanten a, b :

$$P_\vartheta(a \leq k(X, \vartheta) \leq b) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

³⁶Anmerkung: Ermitteln wir z.B. das 95%-Konfidenzintervall für den wahren Erwartungswert einer Population, dann bedeutet dies, dass wir bei durchschnittlich 5 von 100 gleichgroßen Zufallsstichproben ein Konfidenzintervall ermitteln, das den Erwartungswert nicht enthält.

Falls man das Ereignis $\{a \leq k(X, \vartheta) \leq b\}$ umschreiben kann als $\{U(X) \leq g(\vartheta) \leq O(X)\}$, so ist $[U(X), O(X)]$ Konfidenzintervall für $g(\vartheta)$ zum Niveau $1 - \alpha$.

Im Beispiel oben:
Verteilung von

$$k(X, \vartheta) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$$

unabhängig von $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$.

$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$ ist Pivot für $g(\vartheta) = \mu$.

$[-t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \leq k(X, \vartheta) \leq t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}] \rightarrow C(X)$ im Beispiel oben]

Weiteres Beispiel:

$X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} U(0, \vartheta), \vartheta > 0, g(\vartheta) = \vartheta$

MLE³⁷ von ϑ : $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$

Verteilungsfunktion von $X_{(n)}$ ist $(\frac{x}{\vartheta})^n, 0 \leq x \leq \vartheta$

\Rightarrow Verteilungsfunktion von $\frac{X_{(n)}}{\vartheta}$ ist $x^n, 0 \leq x \leq 1$, also ist $\frac{X_{(n)}}{\vartheta}$ Pivot für ϑ .

Wähle a, b so, dass

$$P_{\vartheta}(a \leq \frac{X_{(n)}}{\vartheta} \leq b) = b^n - a^n \stackrel{!}{=} 1 - \alpha \quad (\forall \vartheta \in \Theta)$$

Dann ist $[\frac{X_{(n)}}{b}, \frac{X_{(n)}}{a}]$ $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für ϑ .

Wie a und b wählen?

- Intervall $[a, b]$ „kleinstmöglich“ wählen
- andere Optimalitätsbegriffe

13.3 Zusammenhang zwischen Konfidenzintervallen und (nichtrandomisierten) Tests

1. $C(x)$ sei Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ für ϑ (d.h.

$$P_{\vartheta}(C(X) \ni \vartheta) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta).$$

Zu testen ist $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$.

Definiere Test φ :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \vartheta_0 \notin C(x) \\ 0 & , \vartheta_0 \in C(x) \end{cases}$$

³⁷ML-Schätzer (*Estimator*)

Umfang von φ :

$$E_{\vartheta_0} \varphi(x) = 1 - \underbrace{P_{\vartheta_0}(\vartheta_0 \in C(x))}_{\geq 1-\alpha} \leq \alpha$$

d.h. φ ist Niveau α -Test.

2. Umgekehrt sei für jedes $\vartheta_0 \in \Theta$ ein Niveau α -Test $\varphi_{\vartheta_0}(x)$ für obige Situation gegeben (d.h. $P_{\vartheta_0}(\varphi_{\vartheta_0}(X) = 0) \geq 1 - \alpha$, $\vartheta_0 \in \Theta$).
Definiere $C^*(x) = \{\vartheta_0 : \varphi_{\vartheta_0}(x) = 0\}$

$$\Rightarrow P_{\vartheta}(C^*(X) \ni \vartheta) = P_{\vartheta}(\varphi_{\vartheta}(x) = 0) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

d.h. $C^*(X)$ ist $(1 - \alpha)$ -Konfidenzbereich für ϑ .

Beispiel (1 Stichproben-t-Test):

1. $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für μ : $[\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}]$.
Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ ab, falls $\mu_0 \notin$ Konfidenzintervall.

$$\begin{aligned} &\hat{=} |\mu_0 - \bar{x}_n| > \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \\ &\hat{=} \frac{\sqrt{n} |\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

2. Umgekehrt:

$$\frac{\sqrt{n} |\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

Ablehnbereich für Test φ_{μ_0} von $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ für jedes $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} C^*(x) &= \{\mu : \varphi_{\mu}(x) = 0\} \\ &= \left\{ \mu : \frac{\sqrt{n} |\bar{x}_n - \mu_0|}{s_n} \leq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right\} \\ &= \left\{ \bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right\} \end{aligned}$$

$(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für μ .

Bemerkungen:

- (i) Es besteht also eine Dualität zwischen Signifikanztests und Konfidenzbereichen, allerdings nur, wenn eine ganze Schar von Hypothesen

$H_{\vartheta_0} : \vartheta = \vartheta_0$ getestet wird.

Bei Beschränkung auf einen Test (was bei praktischer Testdurchführung immer der Fall ist) ist der Test „weniger“ informativ.

[Allerdings: Bei Tests wird in der Praxis p-Wert (siehe Beispiel nach 11.4) angegeben \Rightarrow andere Information als Konfidenzintervall].

- (ii) UMP(U)-Tests führen auf Konfidenzbereiche, die gewisse (komplizierte) Optimalitätseigenschaften haben.
(Im Allgemeinen aber nicht kürzeste Konfidenzintervalle.)

13.4 Definition

Ist für jedes n die Abbildung $C_n : \mathfrak{X}_n \rightarrow \mathbb{R}^s$ ein Konfidenzbereich für $g(\vartheta)$, basierend auf (X_1, \dots, X_n) , und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vartheta}(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{X}_n : C_n(x_1, \dots, x_n) \ni g(\vartheta)\}) = 1 - \alpha$$

für alle $\vartheta \in \Theta$, so heißt die Folge (C_n) ein **asymptotischer Konfidenzbereich** für $g(\vartheta)$ zum Niveau $1 - \alpha$.

13.5 Beispiel

$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} X, EX^2 < \infty, F(x) = P(X \leq x), \vartheta := F,$
 $g(\vartheta) = \int x dF(x) = EX =: \mu$

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 := \text{Var}(X)$$

ZGWS: $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vartheta} \left(\underbrace{\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}_{\text{asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau } 1-\alpha} \right) = 1 - \alpha$$

13.6 Hilfssatz

$$Y \sim \mathcal{N}_k(0, \Sigma), \Sigma > 0 \implies Y^T \Sigma^{-1} Y \sim \chi_k^2.$$

Beweis:

$$\Sigma^{-1/2} Y \sim \mathcal{N}_k(0, I_k) \implies \|\Sigma^{-1/2} Y\|^2 = Y^T \Sigma^{-1} Y \sim \chi_k^2.$$

13.7 Asymptotische Konfidenzbereiche in parametrischen Modellen

Seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f(\xi; \vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ offen und f eine reguläre Dichte im \mathbb{R}^s bezüglich μ ($= \lambda^s$ oder Zählmaß).

Sei $\hat{\vartheta}_n$ eine Schätzfolge für ϑ mit der Eigenschaft

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}_k(0, \Sigma(\vartheta)), \quad \vartheta \in \Theta \quad (1)$$

wobei $\Sigma(\vartheta) > 0$ und $\Sigma(\cdot)$ stetig.

Aus (1) und Hilfssatz 13.6 folgt, dass

$$n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{D_\vartheta} \chi_k^2, \quad \vartheta \in \Theta$$

das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\vartheta \left(n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \leq \chi_{k;1-\alpha}^2 \right) = 1 - \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Da die Menge

$$\left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^k : (\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T \Sigma(\hat{\vartheta}_n)^{-1} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \leq \frac{\chi_{k;1-\alpha}^2}{n} \right\}$$

ein Ellipsoid in \mathbb{R}^k mit Zentrum $\hat{\vartheta}_n$ ist, handelt es sich hier um einen elliptischen Konfidenzbereich für ϑ .

Falls $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist, so folgt aus (1), dass

$$\sqrt{n}(g(\hat{\vartheta}_n) - g(\vartheta)) \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\vartheta)),$$

wobei

$$\sigma^2(\vartheta) = g'(\vartheta)^T \Sigma(\vartheta) g(\vartheta).$$

Somit gilt

$$\frac{\sqrt{n}(g(\hat{\vartheta}_n) - g(\vartheta))}{\sigma(\hat{\vartheta}_n)} \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}(0, 1).$$

Mit $r_n = \sigma(\hat{\vartheta}_n) \cdot \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) / \sqrt{n}$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\vartheta \left(g(\hat{\vartheta}_n) - r_n \leq g(\vartheta) \leq g(\hat{\vartheta}_n) + r_n \right) = 1 - \alpha.$$

Man hat also einen asymptotischen Konfidenzbereich für $g(\vartheta)$ konstruiert.

13.8 Beispiele

- a) $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \text{Bin}(1, p)$, $0 < p < 1$, $\vartheta = p$, $\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$
ZGWS:

$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \underbrace{p(1-p)}_{=\Sigma(\vartheta)})$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(p) = \log \frac{p}{1-p}$ „logit“-Funktion

$$g'(p) = \frac{1}{p(1-p)}$$

$$\Rightarrow \sigma^2(p) = g'(p)^2 \Sigma(p) = \frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} - \log \frac{p}{1-p}) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \frac{1}{p(1-p)})$$

und

$$[\log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} - \frac{\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}, \log \frac{\hat{p}_n}{1-\hat{p}_n} + \frac{\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}]$$

ist asymptotisches $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervall für $\log \frac{p}{1-p}$.

- b) Konfidenzintervall für „log odds ratio“
 $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bin}(1, p)$, $Y_1, \dots, Y_n \sim \text{Bin}(1, q)$

$$\Theta = \log \frac{\frac{p}{1-p}}{\frac{q}{1-q}}, \quad \Theta = 0 \Leftrightarrow p = q$$

siehe Übung

13.9 Beispiel

Sei $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$, $X_i = \begin{pmatrix} X_i^{(1)} \\ X_i^{(2)} \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$

Σ regulär, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$, $\bar{X}_n = \begin{pmatrix} \bar{X}_n^{(1)} \\ \bar{X}_n^{(2)} \end{pmatrix}$ mit $\bar{X}_n^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(k)}$,

$k = 1, 2$

Σ bekannt: $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}_2(0, \Sigma)$

$$\stackrel{13.6}{\Rightarrow} n(\bar{X}_n - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{X}_n - \mu) \sim \chi_2^2$$

$$\Rightarrow P_\mu(\underbrace{n(\bar{X}_n - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{X}_n - \mu) \leq \chi_{2;1-\alpha}^2}_{\text{elliptischer } (1-\alpha)\text{-Konfidenzbereich für } \mu}) = 1 - \alpha$$

Σ unbekannt: Konsistenter Schätzer für Σ ist

$$\hat{\Sigma}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(X_i - \bar{X}_n)^T$$

$$\vartheta = (\mu, \Sigma), \quad \hat{\vartheta}_n = (\bar{X}_n, \hat{\Sigma}_n)$$

Für $n > d(= 2)$ ³⁸ ist $\hat{\Sigma}_n$ nicht singulär mit Wahrscheinlichkeit 1.

$$\Rightarrow n(\bar{X}_n - \mu)^T \hat{\Sigma}_n^{-1} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{D} \chi_2^2$$

Betrachte $g(\vartheta) = \mu_1 - \mu_2$.

$$g'(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2(\vartheta) = (1, -1)\Sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}((\bar{X}_n^{(1)} - \bar{X}_n^{(2)}) - (\mu_1 - \mu_2))}{\sigma(\hat{\vartheta}_n)} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$$

³⁸d ist Dimension

