

## § 2 Das Lebesguemaß

In diesem Kapitel sei  $X$  eine Menge,  $X \neq \emptyset$ .

### Definition

Sei  $\emptyset \neq \mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .  $\mathfrak{R}$  heißt ein **Ring** (auf  $X$ ), genau dann wenn gilt:

- (1)  $\emptyset \in \mathfrak{R}$
- (2)  $A, B \in \mathfrak{R} \implies A \cup B, B \setminus A \in \mathfrak{R}$

### Definition

Sei  $d \in \mathbb{N}$ .

- (1)  $\mathcal{I}_d := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\}$ . Seien  $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$  und  $I := (a, b] \in \mathcal{I}_d$

$$\lambda_d(I) = \begin{cases} 0 & \text{falls } I = \emptyset \\ (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d) & \text{falls } I \neq \emptyset \end{cases} \quad (\text{Elementarvolumen})$$

- (2)  $\mathcal{F}_d := \left\{ \bigcup_{j=1}^n I_j \mid n \in \mathbb{N}, I_1, \dots, I_n \in \mathcal{I}_d \right\}$  (**Menge der Figuren**)

Ziel dieses Kapitels: Fortsetzung von  $\lambda_d$  auf  $\mathcal{F}_d$  und dann auf  $\mathfrak{B}_d$  ( $\leadsto$  Lebesguemaß)

Beachte:  $\mathcal{I}_d \subseteq \mathcal{F}_d \subseteq \mathfrak{B}_d \xrightarrow{1.4} \mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{I}_d) = \sigma(\mathcal{F}_d)$

### Lemma 2.1

Seien  $I, I' \in \mathcal{I}_d$  und  $A \in \mathcal{F}_d$ . Dann:

- (1)  $I \cap I' \in \mathcal{I}_d$
- (2)  $I \setminus I' \in \mathcal{F}_d$ . Genauer:  $\exists \{I'_1, \dots, I'_l\} \subseteq \mathcal{I}_d$  disjunkt:  $I \setminus I' = \bigcup_{j=1}^l I'_j$
- (3)  $\exists \{I'_1, \dots, I'_l\} \subseteq \mathcal{I}_d$  disjunkt:  $A = \bigcup_{j=1}^l I'_j$
- (4)  $\mathcal{F}_d$  ist ein Ring.

### Beweis

- (1) Sei  $I = \prod_{k=1}^d (a_k, b_k], I' = \prod_{k=1}^d (\alpha_k, \beta_k]$ ;  $\alpha'_k := \max\{\alpha_k, a_k\}, \beta'_k := \min\{\beta_k, b_k\}$

Ist  $\alpha'_k \geq \beta'_k$  für ein  $k \in \{1, \dots, d\}$ , so ist  $I \cap I' = \emptyset \in \mathcal{I}_d$ . Sei  $\alpha'_k < \beta'_k \forall k \in \{1, \dots, d\}$ , so ist  $I \cap I' = \prod_{k=1}^d (\alpha'_k, \beta'_k] \in \mathcal{I}_d$

## 2. Das Lebesguemaß

(2) Induktion nach  $d$ :

I.A. Klar ✓

I.V. Die Behauptung gelte für ein  $d \geq 1$

I.S. Seien  $I, I' \in \mathcal{I}_{d+1}$ . Es existieren  $I_1, I'_1 \in \mathcal{I}_1$  und  $I_2, I'_2 \in \mathcal{I}_d$  mit:  $I = I_1 \times I_2$ ,  $I' = I'_1 \times I'_2$

Nachrechnen:

$$I \setminus I' = (I_1 \setminus I'_1) \times I_2 \dot{\cup} (I_1 \cap I'_1) \times (I_2 \setminus I'_2)$$

I.A.  $\implies I_1 \setminus I'_1 =$  endliche disjunkte Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{I}_1$

I.V.  $\implies I_2 \setminus I'_2 =$  endliche disjunkte Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{I}_d$

Daraus folgt die Behauptung für  $d + 1$

(3) Wir zeigen mit Induktion nach  $n$ : ist  $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$  mit  $I_1, \dots, I_d \in \mathcal{I}_d$ , so existiert  $\{I'_1, \dots, I'_l\} \subseteq \mathcal{I}_d$  disjunkt:  $A = \bigcup_{j=1}^l I'_j$

I.A.  $n = 1 : A = I_1$  ✓

I.V. Die Behauptung gelte für ein  $n \geq 1$

I.S. Sei  $A = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j$  ( $I_1, \dots, I_{n+1} \in \mathcal{I}_d$ )

IV  $\implies \exists \{I'_1, \dots, I'_l\} \subseteq \mathcal{I}_d$  disjunkt:  $\bigcup_{j=1}^n I_j = \bigcup_{j=1}^l I'_j$

Dann:  $A = I_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^l I'_j = I_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^l (I'_j \setminus I_{n+1})$

Wende (2) auf jedes  $I'_j \setminus I_{n+1}$  an ( $j = 1, \dots, l$ ):  $I'_j \setminus I_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{l_j} I''_j$  ( $I''_j \in \mathcal{I}_d$ )

Damit folgt:

$$A = I_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^l \left( \bigcup_{j=1}^{l_j} I''_j \right)$$

Daraus folgt die Behauptung für  $n + 1$ .

(4)  $(a, a] = \emptyset \implies \emptyset \in \mathcal{F}_d$

Seien  $A, B \in \mathcal{F}_d$ . Klar:  $A \cup B \in \mathcal{F}_d$

Sei  $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$ ,  $B = \bigcup_{j=1}^n I'_j$  ( $I_j, I'_j \in \mathcal{I}_d$ ). Zu zeigen:  $B \setminus A \in \mathcal{F}_d$

I.A.  $n = 1 : A = I_1 \implies B \setminus A = \bigcup_{j=1}^n \underbrace{(I'_j \setminus I_j)}_{\in \mathcal{F}_d}$ . Wende (2) auf jedes  $I'_j \setminus I_1$  an. Aus (2)

folgt dann  $B \setminus A \in \mathcal{F}_d$ .

I.V. Die Behauptung gelte für ein  $n \in \mathbb{N}$

I.S. Sei  $A' = A \cup I_{n+1}$  ( $I_{n+1} \in \mathcal{I}_d$ ). Dann:

$$B \setminus A' = \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{F}_d} \setminus \underbrace{I_{n+1}}_{\in \mathcal{F}_d} \in \mathcal{F}_d$$

■

**Lemma 2.2**

Sei  $A \in \mathcal{F}_d$  und  $\{I_1, \dots, I_n\} \subseteq \mathcal{I}_d$  disjunkt und  $\{I'_1, \dots, I'_m\} \subseteq \mathcal{I}_d$  disjunkt mit  $\bigcup_{j=1}^n I_j = A = \bigcup_{j=1}^m I'_j$ . Dann:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j) = \sum_{j=1}^m \lambda_d(I'_j)$$

**Definition**

Sei  $A \in \mathcal{F}_d$  und  $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$  mit  $\{I_1, \dots, I_n\} \subseteq \mathcal{I}_d$  disjunkt (beachte Lemma 2.1, Punkt 3).

$$\lambda_d(A) := \sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j)$$

Wegen Lemma 2.2 ist  $\lambda_d : \mathcal{F}_d \rightarrow [0, \infty)$  wohldefiniert.

**Satz 2.3**

Seien  $A, B \in \mathcal{F}_d$  und  $(B_n)$  sei eine Folge in  $\mathcal{F}_d$ .

- (1)  $A \cap B = \emptyset \implies \lambda_d(A \cup B) = \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$
- (2)  $A \subseteq B \implies \lambda_d(A) \leq \lambda_d(B)$
- (3)  $\lambda_d(A \cup B) \leq \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$
- (4) Sei  $\delta > 0$ . Es existiert  $C \in \mathcal{F}_d : \overline{C} \subseteq B$  und  $\lambda_d(B \setminus C) \leq \delta$ .
- (5) Ist  $B_{n+1} \subseteq B_n \forall n \in \mathbb{N}$  und  $\bigcap B_n = \emptyset$ , so gilt:  $\lambda_d(B_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

**Beweis**

- (1) Aus Lemma 2.1 folgt: Es existiert  $\{I_1, \dots, I_n\} \subseteq \mathcal{I}_d$  disjunkt und es existiert  $\{I'_1, \dots, I'_m\} \subseteq \mathcal{I}_d$  disjunkt:  $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$ ,  $B = \bigcup_{j=1}^m I'_j$ .

$J := \{I_1, \dots, I_n, I'_1, \dots, I'_m\} \subseteq \mathcal{I}_d$ . Aus  $A \cap B = \emptyset$  folgt:  $J$  ist disjunkt. Dann:  $A \cup B = \bigcup_{I \in J} I$

Also:

$$\begin{aligned} \lambda_d(A \cup B) &= \sum_{I \in J} \lambda_d(I) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j) + \sum_{j=1}^m \lambda_d(I'_j) \\ &= \lambda_d(A) + \lambda_d(B) \end{aligned}$$

- (2) wie bei Satz 1.7

## 2. Das Lebesguemaß

$$(3) \quad \lambda_d(A \cup B) = \lambda(A \cup (B \setminus A)) \stackrel{(1)}{=} \lambda_d(A) + \lambda_d(B \setminus A) \stackrel{(2)}{\leq} \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$$

(4) Übung; es genügt zu betrachten:  $B \in \mathcal{I}_d$

(5) Sei  $\varepsilon > 0$ . Aus (4) folgt: Zu jedem  $B_n$  existiert ein  $C_n \in \mathcal{F}_d : \overline{C_n} \subseteq B_n$  und

$$\lambda_d(B_n \setminus C_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (2.1)$$

$$\text{Dann: } \bigcap \overline{C_n} \subseteq \bigcap B_n = \emptyset \implies \bigcup \overline{C_n}^c = \mathbb{R}^d \implies \underbrace{\overline{B_1}}_{\text{kompakt}} \subseteq \bigcup \underbrace{\overline{C_n}^c}_{\text{offen}}$$

Aus der Definition von Kompaktheit (Analysis II, §2) folgt:  $\exists m \in \mathbb{N} : \bigcup_{j=1}^m \overline{C_j}^c \supseteq \overline{B_1}$

Dann:  $\bigcap_{j=1}^m \overline{C_j} \subseteq \overline{B_1}^c$ . Andererseits:  $\bigcap_{j=1}^m \overline{C_j} \subseteq \bigcap_{j=1}^m B_j \subseteq B_1 \subseteq \overline{B_1}$ .

Also:  $\bigcap_{j=1}^m \overline{C_j} = \emptyset$ . Das heißt:  $\bigcap_{j=1}^n \overline{C_j} = \emptyset \forall n \geq m$

$D_n := \bigcap_{j=1}^n C_j$ . Dann:  $D_n = \emptyset \forall n \geq m$

**Behauptung:**  $\lambda_d(B_n \setminus D_n) \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \varepsilon \forall n \in \mathbb{N}$

**Beweis**

I.A.  $\lambda_d(B_1 \setminus D_1) = \lambda_d(B_1 \setminus C_1) \stackrel{(2.1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \varepsilon \checkmark$

I.V. Die Behauptung gelte für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

I.S.

$$\begin{aligned} \lambda_d(B_{n+1} \setminus D_{n+1}) &= \lambda_d((B_{n+1} \setminus D_n) \cup (B_{n+1} \setminus C_{n+1})) \\ &\stackrel{(3)}{\leq} \underbrace{\lambda_d(B_{n+1} \setminus D_n)}_{\subseteq B_n \setminus D_n} + \underbrace{\lambda_d(B_{n+1} \setminus C_{n+1})}_{\stackrel{(2.1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}} \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \lambda_d(B_n \setminus D_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{\leq} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \varepsilon \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Für  $n \geq m : D_n = \emptyset \implies \lambda_d(B_n) = \lambda_d(B_n \setminus D_n) \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \varepsilon \leq \varepsilon \quad \blacksquare$

### Definition

Es sei  $\mathfrak{R}$  ein Ring auf  $X$ . Eine Abbildung  $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$  heißt ein **Prämaß** auf  $\mathfrak{R}$ , wenn gilt:

(1)  $\mu(\emptyset) = 0$

(2) Ist  $A_j$  eine disjunkte Folge in  $\mathfrak{R}$  und  $\bigcup A_j \in \mathfrak{R}$ , so ist  $\mu(\bigcup A_j) = \sum \mu(A_j)$ .

### Satz 2.4

$\lambda_d : \mathcal{F}_d \rightarrow [0, \infty]$  ist ein Prämaß.

### Beweis

(1) Klar:  $\lambda_d(\emptyset) = 0$

(2) Sei  $A_j$  eine disjunkte Folge in  $\mathcal{F}_d$  und  $A := \bigcup A_j \in \mathcal{F}_d$ .

$B_n := \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$  ( $n \in \mathbb{N}$ );  $(B_n)$  hat die Eigenschaften aus 2.3, Punkt 5. Also:  $\lambda_d(B_n) \rightarrow 0$ .

Für  $n \geq 2$ :

$$\lambda_d(A) = \lambda_d(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup B_n) \stackrel{2.3.(1)}{=} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_d(A_j) + \lambda_d(B_n)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_d(A_j) = \lambda_d(A) - \lambda_d(B_n) \quad \forall n \geq 2$$

Mit  $n \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung. ■

### Satz 2.5 (Fortsetzungssatz von Carathéodory)

Sei  $\mathfrak{R}$  ein Ring auf  $X$  und  $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$  ein Prämaß. Dann existiert ein Maßraum  $(X, \mathfrak{A}(\mu), \bar{\mu})$  mit

(1)  $\sigma(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{A}(\mu)$

(2)  $\bar{\mu}(A) = \mu(A) \forall A \in \mathfrak{R}$

Insbesondere:  $\bar{\mu}$  ist ein Maß auf  $\sigma(\mathfrak{R})$ .

### Satz 2.6 (Eindeutigkeitssatz)

Sei  $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , es seien  $\nu, \mu$  Maße auf  $\sigma(\mathcal{E})$  und es gelte:  $\mu(E) = \nu(E) \forall E \in \mathcal{E}$ .

Weiter gelten:

(1)  $E, F \in \mathcal{E} \implies E \cap F \in \mathcal{E}$  (durchschnittstabil)

(2) Es existiert eine Folge  $(E_n)$  in  $\mathcal{E}$ :  $\bigcup E_n = X$  und  $\mu(E_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ .

Dann:  $\mu = \nu$  auf  $\sigma(\mathcal{E})$ .

### Satz 2.7

Es gibt genau eine Fortsetzung von  $\lambda_d : \mathcal{F}_d \rightarrow [0, \infty]$  auf  $\mathfrak{B}_d$  zu einem Maß. Diese Fortsetzung heißt **Lebesguemaß** (L-Maß) und wird ebenfalls mit  $\lambda_d$  bezeichnet.

## 2. Das Lebesguemaß

### Beweis

Aus Lemma 2.1 und Satz 2.4 folgt:  $\lambda_d$  ist ein Prämaß auf  $\mathfrak{A} := \mathcal{F}_d$ ; es ist  $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}_d$ .

Aus Satz 2.5 folgt:  $\lambda_d$  kann zu einem Maß auf  $\mathfrak{B}_d$  fortgesetzt werden.

Sei  $\nu$  ein weiteres Maß auf  $\mathfrak{B}_d$  mit:  $\nu(A) = \lambda_d(A) \forall A \in \mathcal{F}_d$ .  $\mathcal{E} := \mathcal{I}_d$ . Dann:  $\sigma(\mathcal{E}) \stackrel{1.4}{=} \mathfrak{B}_d$ .

$$(1) \ E, F \in \mathcal{E} \xrightarrow{2.1} E \cap F \in \mathcal{E}$$

$$(2) \ E_n := (-n, n]^d$$

Klar:

$$\begin{aligned} \bigcup E_n &= \mathbb{R}^d \\ \lambda_d(E_n) &= (2n)^d < \infty \end{aligned}$$

Klar:  $\nu(E) = \lambda_d(E) \forall E \in \mathcal{E}$ . Mit Satz 2.6 folgt dann:  $\nu = \lambda_d$  auf  $\mathfrak{B}_d$ . ■

**Bemerkung:** Sei  $X \in \mathfrak{B}_d$ . Aus 1.6 folgt:  $\mathfrak{B}(X) = \{A \in \mathfrak{B}_d \mid A \subseteq X\}$ . Die Einschränkung von  $\lambda_d$  auf  $\mathfrak{B}(X)$  heißt ebenfalls L-Maß und wird mit  $\lambda_d$  bezeichnet.

### Beispiele:

(1) Seien  $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d, a \leq b$  und  $I = [a, b]$ .

#### Behauptung

$\lambda_d([a, b]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$  (Entsprechendes gilt für  $(a, b)$  und  $[a, b)$ )

#### Beweis

$I_n := (a_1 - \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times (a_d - \frac{1}{n}, b_d]$ ;  $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ ;  $\bigcap I_n = I, \lambda_d(I_1) < \infty$

Aus Satz 1.7, Punkt 5, folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_d(I) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_d(I_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 - a_1 + \frac{1}{n}) \cdots (b_d - a_d + \frac{1}{n}) \\ &= (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) \end{aligned}$$

■

(2) Sei  $a \in \mathbb{R}^d, \{a\} = [a, a] \in \mathfrak{B}_d$ . Aus obigem Beispiel (1) folgt:  $\lambda_d(\{a\}) = 0$ .

(3)  $\mathbb{Q}^d$  ist abzählbar, also:  $\mathbb{Q}^d = \{a_1, a_2, \dots\}$  mit  $a_j \neq a_i (i \neq j)$ . Dann:  $\mathbb{Q}^d = \bigcup \{a_j\}$

Dann gilt:  $\mathbb{Q}^d \in \mathfrak{B}_d$  und  $\lambda_d(\mathbb{Q}^d) = \sum \lambda_d(\{a_j\}) = 0$ .

(4) Wie in Beispiel (3): Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  abzählbar, so ist  $A \in \mathfrak{B}_d$  und  $\lambda_d(A) = 0$ .

(5) Sei  $j \in \{1, \dots, d\}$  und  $H_j := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_j = 0\}$ .  $H_j$  ist abgeschlossen, damit folgt:  $H_j \in \mathfrak{B}_d$ .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $j = d$ . Dann:  $I_n := \underbrace{[-n, n] \times \cdots \times [-n, n]}_{(d-1)\text{-mal}} \times \{0\}$ .

Aus Beispiel (1) folgt:  $\lambda_d(I_n) = 0$ .

Aus  $H_d = \bigcup I_n$  folgt:  $\lambda_d(H_d) \leq \sum \lambda_d(I_n) = 0$ . Also:  $\lambda_d(H_j) = 0$ .

**Definition**

Sei  $x \in \mathbb{R}^d, B \subseteq \mathbb{R}^d$ . Definiere:

$$x + B := \{x + b \mid b \in B\}$$

**Beispiel**

Ist  $I \in \mathcal{I}_d$ , so gilt  $x + I \in \mathcal{I}_d$  und  $\lambda_d(x + I) = \lambda_d(I)$ .

**Satz 2.8**

Sei  $x \in \mathbb{R}^d, \mathfrak{A} := \{B \in \mathfrak{B}_d : x + B \in \mathfrak{B}_d\}$  und  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$  sei definiert durch  $\mu(A) := \lambda_d(x + A)$ . Dann gilt:

- (1)  $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}, \mu)$  ist ein Maßraum.
- (2) Es ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_d$  und  $\mu = \lambda_d$  auf  $\mathfrak{B}_d$ . D.h. für alle  $A \in \mathfrak{B}_d$  ist  $x + A \in \mathfrak{B}_d$  und  $\lambda_d(x + A) = \lambda_d(A)$  (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes).

**Beweis**

(1) Leichte Übung!

(2) Es ist klar, dass  $\mathfrak{B}_d \supseteq \mathfrak{A}$ . Nach dem Beispiel von oben gilt:

$$\mathcal{I}_d \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{I}_d) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$$

Setze  $\mathcal{E} := \mathcal{I}_d$ , dann ist  $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}_d$  und es gilt nach dem Beispiel von oben:

$$\forall E \in \mathcal{E} : \mu(E) = \lambda_d(E)$$

$\mathcal{E}$  hat die Eigenschaften (1) und (2) aus Satz 2.6, daraus folgt dann, dass  $\mu = \lambda_d$  auf  $\mathfrak{B}_d$  ist. ■

**Satz 2.9**

Sei  $\mu$  ein Maß auf  $\mathfrak{B}_d$  mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathfrak{B}_d : \mu(A) = \mu(x + A)$$

Weiter sei  $c := \mu((0, 1]^d) < \infty$ . Dann gilt:

$$\mu = c \cdot \lambda_d$$

**Satz 2.10 (Regularität des Lebesgue-Maßes)**

Sei  $A \in \mathfrak{B}_d$ , dann gilt:

- (1)  $\lambda_d(A) = \inf \{ \lambda_d(G) \mid G \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen und } A \subseteq G \}$   
 $= \inf \left\{ \lambda_d(V) \mid V = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, I_j \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offenes Intervall, } A \subseteq V \right\}$
- (2)  $\lambda_d(A) = \sup \{ \lambda_d(K) \mid K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt, } K \subseteq A \}$

**Beweis**

(1) Ohne Beweis.

(2) Setze  $\beta := \sup\{\lambda_d(K) \mid K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt}, K \subseteq A\}$ . Sei  $K$  kompakt und  $K \subseteq A$ , dann gilt  $\lambda_d(K) \leq \lambda_d(A)$ , also ist auch  $\beta \leq \lambda_d(A)$ .

**Fall 1:** Sei  $A$  zusätzlich beschränkt.

Sei  $\varepsilon > 0$ . Es existiert ein  $r > 0$ , sodass  $A \subseteq B := \overline{U_r(0)} \subseteq [-r, r]^d$  ist, dann gilt:

$$\lambda_d(A) \leq \lambda_d([-r, r]^d) = (2r)^d < \infty$$

Aus (1) folgt, dass eine offene Menge  $G \supseteq B \setminus A$  existiert mit  $\lambda_d(G) \leq \lambda_d(B \setminus A) + \varepsilon$ . Dann gilt nach 1.7:

$$\lambda_d(B \setminus A) = \lambda_d(B) - \lambda_d(A)$$

Setze nun  $K := B \setminus G = B \cap G^c$ , dann ist  $K$  kompakt und  $K \subseteq B \setminus (B \setminus A) = A$ . Da  $B \subseteq G \cup K$  ist, gilt:

$$\lambda_d(B) \leq \lambda_d(G \cup K) \leq \lambda_d(B) - \lambda_d(A) + \varepsilon + \lambda_d(K)$$

Woraus folgt:

$$\lambda_d(A) \leq \lambda_d(K) + \varepsilon$$

**Fall 2:** Sei  $A \in \mathfrak{B}_d$  beliebig.

Setze  $A_n := A \cap \overline{U_n(0)}$ . Dann ist  $A_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  beschränkt,  $A_n \subseteq A_{n+1}$  und  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Nach 1.7 gilt:

$$\lambda_d(A) = \lim \lambda_d(A_n)$$

Aus Fall 1 folgt, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein kompaktes  $K_n \subseteq A_n$  mit  $\lambda_d(A_n) \leq \lambda_d(K_n) + \frac{1}{n}$  existiert. Dann gilt:

$$\lambda_d(A_n) \leq \lambda_d(K_n) + \frac{1}{n} \leq \lambda_d(A) + \frac{1}{n}$$

Also auch:

$$\lambda_d(A) = \lim \lambda(K_n) \leq \beta$$

■

**Auswahlaxiom:**

Sei  $\emptyset \neq \Omega$  Indexmenge, es sei  $\{X_\omega \mid \omega \in \Omega\}$  ein disjunktes System von nichtleeren Mengen  $X_\omega$ . Dann existiert ein  $C \subseteq \bigcup_{\omega \in \Omega} X_\omega$ , sodass  $C$  mit jedem  $X_j$  genau ein Element gemeinsam hat.

**Satz 2.11 (Satz von Vitali)**

Es existiert ein  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  sodass  $C \notin \mathfrak{B}_d$ .

**Beweis**

Wir definieren auf  $[0, 1]^d$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$ , durch:

$$\forall x, y \in [0, 1]^d : x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^d$$

$$\forall x \in [0, 1]^d : [x] := \{y \in [0, 1]^d \mid x \sim y\}$$



Nach dem Auswahlaxiom existiert ein  $C \subseteq [0, 1]^d$ , sodass  $C$  mit jedem  $[x]$  genau ein Element gemeinsam hat. Es ist  $\mathbb{Q}^d \cap [-1, 1]^d = \{q_1, q_2, \dots\}$  mit  $q_i \neq q_j$  für  $(i \neq j)$ . Dann gilt:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + C) \subseteq [-1, 2]^d \quad (1)$$

$$[0, 1]^d \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + C) \quad (2)$$

### **Beweis**

Sei  $x \in [0, 1]^d$ . Wähle  $y \in C$  mit  $y \in [x]$ , dann ist  $x \sim y$ , also  $x - y \in \mathbb{Q}^d \cap [-1, 1]^d$ . D.h.:

$$\exists n \in \mathbb{N} : x - y = q_n \implies x = q_n + y \in q_n + C \quad \blacksquare$$

Außerdem ist  $\{q_n + C \mid n \in \mathbb{N}\}$  disjunkt.

### **Beweis**

Sei  $z \in (q_n + C) \cap (q_m + C)$ , dann existieren  $a, b \in \mathbb{Q}^d$ , sodass gilt:

$$\begin{aligned} (q_n + a = z = q_m + b) &\implies (b - a = q_m - q_n \in \mathbb{Q}^d) \\ &\implies (a \sim b) \implies ([a] = [b]) \\ &\implies (a = b) \implies (q_n = q_m) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Annahme:**  $C \in \mathfrak{B}_d$ , dann gilt nach (1):

$$\begin{aligned} 3^d &= \lambda_d([-2, 1]^d) \\ &\geq \lambda_d\left(\bigcup (q_n + C)\right) \\ &= \sum \lambda_d(q_n + C) \\ &= \sum \lambda_d(C) \end{aligned}$$

Also ist  $\lambda_d(C) = 0$ . Damit folgt aus (2):

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_d([0, 1]^d) \\ &\leq \lambda_d\left(\bigcup (q_n + C)\right) \\ &= \sum \lambda_d(C) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

