

# § 1 $\sigma$ -Algebren und Maße

In diesem Paragraphen sei  $\emptyset \neq X$  eine Menge.

## Definition

Sei  $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ,  $\mathfrak{A}$  heißt eine  $\sigma$ -**Algebra** auf  $X$ , wenn gilt:

- ( $\sigma_1$ )  $X \in \mathfrak{A}$
- ( $\sigma_2$ ) Ist  $A \in \mathfrak{A}$ , so ist auch  $A^c \in \mathfrak{A}$ .
- ( $\sigma_3$ ) Ist  $(A_j)$  eine Folge in  $\mathfrak{A}$ , so ist  $\bigcup A_j \in \mathfrak{A}$ .

## Beispiel

- (1)  $\{X, \emptyset\}$  und  $\mathcal{P}(X)$  sind  $\sigma$ -Algebren auf  $X$ .
- (2) Sei  $A \subseteq X$ , dann ist  $\{X, \emptyset, A, A^c\}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .
- (3)  $\mathfrak{A} := \{A \subseteq X : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .

## Lemma 1.1

Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ , dann:

- (1)  $\emptyset \in \mathfrak{A}$
- (2) Ist  $(A_j)$  eine Folge in  $\mathfrak{A}$ , so ist  $\bigcap A_j \in \mathfrak{A}$ .
- (3) Sind  $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ , so gilt:
  - (i)  $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathfrak{A}$
  - (ii)  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathfrak{A}$
  - (iii)  $A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{A}$

## Beweis

- (1)  $\emptyset = X^c \in \mathfrak{A}$  (nach ( $\sigma_2$ )).
- (2)  $D := \bigcap A_j$ .  $D^c = \bigcup A_j^c \in \mathfrak{A}$  (nach ( $\sigma_2$ ) und ( $\sigma_3$ )), also gilt auch  $D = (D^c)^c \in \mathfrak{A}$ .
- (3) (i)  $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathfrak{A}$  folgt aus ( $\sigma_3$ ) mit  $A_{n+j} := \emptyset$  ( $j \geq 1$ ).  
(ii)  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathfrak{A}$  folgt aus (2) mit  $A_{n+j} := X$  ( $j \geq 1$ ).  
(iii)  $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c \in \mathfrak{A}$  ■

**Lemma 1.2**

Sei  $\emptyset \neq \mathcal{F}$  eine Menge von  $\sigma$ -Algebren auf  $X$ . Dann ist

$$\mathfrak{A}_0 := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{F}} \mathfrak{A}$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .

**Beweis**

( $\sigma_1$ )  $\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : X \in \mathfrak{A} \implies X \in \mathfrak{A}_0$ .

( $\sigma_2$ ) Sei  $A \in \mathfrak{A}_0$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : A \in \mathfrak{A} &\implies \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : A^c \in \mathfrak{A} \\ &\implies A^c \in \mathfrak{A}_0 \end{aligned}$$

( $\sigma_3$ ) Sei  $(A_j)$  eine Folge in  $\mathfrak{A}_0$ , dann ist  $(A_j)$  Folge in  $\mathfrak{A}$  für alle  $\mathfrak{A} \in \mathcal{F}$ , dann gilt:

$$\forall \mathfrak{A} \in \mathcal{F} : \bigcap A_j \in \mathfrak{A} \implies \bigcap A_j \in \mathfrak{A}_0 \quad \blacksquare$$

**Definition**

Sei  $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$  und  $\mathcal{F} := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{A}\}$ . Definiere

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{F}} \mathfrak{A}$$

Dann ist wegen 1.2  $\sigma(\mathcal{E})$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .  $\sigma(\mathcal{E})$  heißt die **von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra**.  $\mathcal{E}$  heißt ein **Erzeuger** von  $\sigma(\mathcal{E})$ .

**Lemma 1.3**

Sei  $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .

- (1)  $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ .  $\sigma(\mathcal{E})$  ist die "kleinste"  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ , die  $\mathcal{E}$  enthält.
- (2) Ist  $\mathcal{E}$  eine  $\sigma$ -Algebra, so ist  $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ .
- (3) Ist  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$ , so ist  $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$ .

**Beweis**

(1) Klar nach Definition.

(2)  $\mathfrak{A} := \mathcal{E}$ , dann gilt  $\mathfrak{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{A}$ .

(3)  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}' \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$ , also folgt nach Definition  $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$ . ■

**Beispiel**

- (1) Sei  $A \subseteq X$  und  $\mathcal{E} := \{A\}$ . Dann ist  $\sigma(\mathcal{E}) = \{X, \emptyset, A, A^c\}$ .
- (2)  $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}, \mathcal{E} := \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ . Dann gilt:

$$\sigma(\mathcal{E}) := \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$$

**Erinnerung:** Sei  $d \in \mathbb{N}, X \subseteq \mathbb{R}^d$ .  $A \subseteq X$  heißt **offen** (**abgeschlossen**) in  $X$ , genau dann wenn ein offenes (abgeschlossenes)  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  existiert mit  $A = X \cap G$ .

Beachte:  $A$  abgeschlossen in  $X \iff X \setminus A$  offen in  $X$ .

**Definition**

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^d$ .

- (1)  $\mathcal{O}(X) := \{A \subseteq X : A \text{ ist offen in } X\}$
- (2)  $\mathfrak{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}(X))$  heißt **Borelsche  $\sigma$ -Algebra** auf  $X$ .
- (3)  $\mathfrak{B}_d := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ . Die Elemente von  $\mathfrak{B}_d$  heißen **Borelsche Mengen** oder **Borel-Mengen**.

**Beispiel**

- (1) Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^d$ . Ist  $A \subseteq$  offen (abgeschlossen) in  $X$ , so ist  $A \in \mathfrak{B}(X)$ .
- (2) Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  offen (abgeschlossen) so ist  $A \in \mathfrak{B}_d$ .
- (3) Sei  $d = 1, A = \mathbb{Q}$ .  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar, also  $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$  (mit  $r_i \neq r_j$  für  $i \neq j$ ). Also ist  $\mathbb{Q} = \bigcup \{r_j\}$ . Sei nun  $r \in \mathbb{Q}$ , dann ist  $B := (-\infty, r) \cup (r, \infty) \in \mathfrak{B}_1$ . Daraus folgt  $\{r_j\} \in \mathfrak{B}_1$ , also auch  $\mathbb{Q} \in \mathfrak{B}_1$ .  
Allgemeiner lässt sich zeigen:  $\mathbb{Q}^d := \{(x_1, \dots, x_d) : x_j \in \mathbb{Q} (j = 1, \dots, d)\} \in \mathfrak{B}_d$ .

**Definition**

- (1) Seien  $I_1, \dots, I_d$  Intervalle in  $\mathbb{R}$ .  $I_1 \times \dots \times I_d$  heißt ein **Intervall** in  $\mathbb{R}^d$ .
- (2) Seien  $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ .

$$a \leq b : \iff a_j \leq b_j \quad (j = 1, \dots, d)$$

- (3) Seien  $a, b \in \mathbb{R}^d$  und  $a \leq b$ .

$$\begin{aligned} (a, b) &:= (a_1, b_1) \times \dots \times (a_d, b_d) \\ (a, b] &:= (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] \\ [a, b) &:= [a_1, b_1) \times \dots \times [a_d, b_d) \\ [a, b] &:= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \end{aligned}$$

mit der Festlegung  $(a, b) := (a, b] := [a, b) := \emptyset$ , falls  $a_j = b_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, d\}$ .

- (4) Für  $k \in \{1, \dots, d\}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  definiere die folgenden **Halbräume**:

$$\begin{aligned} H_k^-(\alpha) &:= \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_k \leq \alpha\} \\ H_k^+(\alpha) &:= \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_k \geq \alpha\} \end{aligned}$$

**Satz 1.4 (Erzeuger der Borelschen  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^d$ )**

Es seien  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &:= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\} \\ \mathcal{E}_2 &:= \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\} \\ \mathcal{E}_3 &:= \{H_k^-(\alpha) : \alpha \in \mathbb{Q}, k = 1, \dots, d\}\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3)$$

Entsprechendes gilt für die anderen Typen von Intervallen und Halbräumen.

**Beweis**

- (1) Sei  $G \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathfrak{M} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b, (a, b) \subseteq G\}$ . Dann ist  $\mathfrak{M}$  abzählbar und  $G = \bigcup_{I \in \mathfrak{M}} I$ . also gilt:

$$G \in \sigma(\mathcal{E}_1) \implies \mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$$

- (2) Sei  $(a, b) \in \mathcal{E}_1$ .

**Fall 1:**  $(a, b) = \emptyset \in \mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$

**Fall 2:**  $(a, b) \neq \emptyset, a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d)$ . Dann gilt für alle  $j \in \{1, \dots, d\} : a_j < b_j$ , also gilt auch:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall j \in \{1, \dots, d\} : a_j < b_j - \frac{1}{n}$$

Definiere  $c_n := (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in \mathbb{Q}^d$ . Dann gilt:

$$(a, b) = \bigcup_{n \geq N} (a, b - c_n] \in \sigma(\mathcal{E}_2)$$

Also auch  $\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$  und damit  $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$ .

- (3) Seien  $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{Q}^d$  mit  $a \leq b$ . Nachrechnen:

$$(a, b] = \bigcap_{k=1}^d (H_k^-(b_k) \cap H_k^-(a_k)^c) \in \sigma(\mathcal{E}_3).$$

Das heißt  $\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$  und damit auch  $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$ .

- (4)  $H_k^-(\alpha)$  ist abgeschlossen, somit ist  $H_k^-(\alpha)^c$  offen und damit  $H_k^-(\alpha)^c \in \mathfrak{B}_d$ , also auch  $H_k^-(\alpha) \in \mathfrak{B}_d$ . Damit ist  $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathfrak{B}_d \implies \sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \mathfrak{B}_d$ . ■

**Definition**

Sei  $\emptyset \neq \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$  und  $\emptyset \neq Y \subseteq X$ .

$$\mathfrak{M}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathfrak{M}\}$$

heißt die **Spur von  $\mathfrak{M}$  in  $Y$** .

**Satz 1.5 (Spuren und  $\sigma$ -Algebren)**

Sei  $\emptyset \neq Y \subseteq X$  und  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .

- (1)  $\mathfrak{A}_Y$  ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$ .
- (2)  $\mathfrak{A}_Y \subseteq \mathfrak{A} \iff Y \in \mathfrak{A}$
- (3) Ist  $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , so ist  $\sigma(\mathcal{E}_Y) = \sigma(\mathcal{E})_Y$ .

**Beweis**

(1) ( $\sigma_1$ ) Es ist  $Y = Y \cap X \in \mathfrak{A}_Y$ , da  $X \in \mathfrak{A}$ .

( $\sigma_2$ ) Sei  $B \in \mathfrak{A}_Y$ , dann existiert ein  $A \in \mathfrak{A}$  mit  $B = A \cap Y$ . Also ist  $Y \setminus B = (X \setminus A) \cap Y \in \mathfrak{A}_Y$ , da  $X \setminus A \in \mathfrak{A}$  ist.

( $\sigma_3$ ) Sei  $(B_j)$  eine Folge in  $\mathfrak{A}_Y$ , dann existiert eine Folge  $(A_j) \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$  mit  $B_j = A_j \cap Y$ . Es gilt:

$$\bigcup B_j = \bigcup (A_j \cap Y) = \left( \bigcup A_j \right) \cap Y \in \mathfrak{A}_Y$$

(2) Der Beweis erfolgt durch Implikation in beiden Richtungen:

„ $\implies$ “ Es gilt  $Y \in \mathfrak{A}_Y \subseteq \mathfrak{A}$ .

„ $\impliedby$ “ Sei  $B \in \mathfrak{A}_Y$ , dann existiert ein  $A \in \mathfrak{A}$  mit  $B = A \cap Y \in \mathfrak{A}$ .

(3) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) &\implies \mathcal{E}_Y \subseteq \sigma(\mathcal{E})_Y \\ &\implies \sigma(\mathcal{E}_Y) \subseteq \sigma(\mathcal{E})_Y \end{aligned}$$

Sei nun:

$$\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \cap Y \in \sigma(\mathcal{E}_Y)\}$$

Übung:  $\mathcal{D}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .

Sei  $E \in \mathcal{E}$  dann ist  $E \cap Y \in \mathcal{E}_Y \subseteq \sigma(\mathcal{E}_Y)$  also  $E \in \mathcal{D}$  und damit  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E})_Y &\subseteq \sigma(\mathcal{D})_Y = \mathcal{D}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{D}\} \\ &\subseteq \sigma(\mathcal{E}_Y) \end{aligned}$$

■

**Folgerungen 1.6**

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^d$ . Dann gilt:

- (1)  $\mathfrak{B}(X) = (\mathfrak{B}_d)_X$
- (2) Ist  $X \in \mathfrak{B}_d$ , so ist  $\mathfrak{B}(X) = \{A \in \mathfrak{B}_d : A \subseteq X\} \subseteq \mathfrak{B}_d$ .

**Definition**

Wir fügen  $\mathbb{R}$  das Symbol  $+\infty$  hinzu. Es soll gelten:

- (1)  $\forall a \in \mathbb{R} : a < +\infty$

## 1. $\sigma$ -Algebren und Maße

$$(2) \quad \pm a + (+\infty) := +\infty =: (+\infty) \pm a$$

$$(3) \quad (+\infty) + (+\infty) := +\infty$$

Sei etwa  $[0, +\infty] := [0, \infty) \cup \{+\infty\}$ .

(1) Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $[0, +\infty]$ . Es gilt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty : \iff \forall c > 0 \exists n_c \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_c : x_n > c$$

(2) Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $[0, +\infty]$ . Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n = +\infty$$

genau dann wenn  $a_j = +\infty$  für ein  $j \in \mathbb{N}$  oder, falls alle  $a_j < +\infty$ , wenn  $\sum a_n$  divergiert.

Wegen 13.1 Ana I können Reihen der obigen Form beliebig umgeordnet werden, ohne dass sich ihr Wert verändert.

### Definition

Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  und  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$  eine Abbildung.  $\mu$  heißt ein **Maß** auf  $\mathfrak{A}$ , genau dann wenn gilt:

$$(M_1) \quad \mu(\emptyset) = 0$$

( $M_2$ ) Ist  $(A_j)$  eine disjunkte Folge in  $\mathfrak{A}$ , so ist  $\mu(\bigcup A_j) = \sum \mu(A_j)$ . Diese Eigenschaft heißt  **$\sigma$ -Additivität**.

Ist  $\mu$  ein Maß auf  $\mathfrak{A}$ , so heißt  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  ein **Maßraum**.

Ein Maß  $\mu$  heißt **endlich**, genau dann wenn  $\mu(X) < \infty$ . Ein Maß  $\mu$  heißt ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**, genau dann wenn  $\mu(X) = 1$  ist.

### Beispiel

(1) Sei  $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(X)$  und  $x_0 \in X$ .  $\delta_{x_0} : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$  sei definiert durch:

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

Klar ist, dass  $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$  ist.

Sei  $(A_j)$  eine disjunkte Folge in  $\mathfrak{A}$ .

$$\delta_{x_0}(\bigcup A_j) = \begin{cases} 1, & x_0 \in \bigcup A_j \\ 0, & x_0 \notin \bigcup A_j \end{cases} = \sum \delta_{x_0}(A_j)$$

$\delta_{x_0}$  ist ein Maß auf  $\mathcal{P}(X)$  und heißt **Punktmaß** oder **Dirac-Maß**.

(2) Sei  $X := \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{A} := \mathcal{P}(X)$  und  $(p_j)$  eine Folge in  $[0, +\infty]$ . Definiere  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$  durch:

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ \sum_{j \in A} p_j & , A \neq \emptyset \end{cases}$$

Übung:  $\mu$  ist ein Maß auf  $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  und heißt ein **Zählmaß**. Sind alle  $p_j = 1$ , so ist  $\mu(A)$  gerade die Anzahl der Elemente von  $A$ .

- (3) Sei  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $\emptyset \neq Y \subseteq X$  und  $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$ . Definiere  $\mu_0 : \mathfrak{A}_0 \rightarrow [0, +\infty]$  durch  $\mu_0(A) := \mu(A)$  ( $A \in \mathfrak{A}_0$ ). Dann ist  $(Y, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$  ein Maßraum. Ist spezieller  $Y \in \mathfrak{A}$ , so ist  $\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}_Y \subseteq \mathfrak{A}$  und man definiert  $\mu|_Y : \mathfrak{A}_Y \rightarrow [0, +\infty]$  durch  $\mu|_Y(A) := \mu(A)$ .

### Satz 1.7

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$  sei ein Maßraum, es seien  $A, B \in \mathfrak{A}$  und  $(A_j)$  sei eine Folge in  $\mathfrak{A}$ . Dann:

- (1)  $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
- (2) Ist  $\mu(A) < \infty$  und  $A \subseteq B$ ,  $\implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- (3) Ist  $\mu$  endlich, dann ist  $\mu(A) < \infty$  und  $\mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A)$
- (4)  $\mu(\bigcup A_j) \leq \sum \mu(A_j)$  ( $\sigma$ -Subadditivität)
- (5) Ist  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ , so ist  $\mu(\bigcup A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$
- (6) Ist  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$  und  $\mu(A) < \infty$ , so ist  $\mu(\bigcap A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$

### Beweis

(1)-(3)  $B = (B \setminus A) \cup A$ . Dann:  $\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A)$

(4)  $B_1 = A_1, B_k := A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \quad (k \geq 2)$

Dann:  $B_j \in \mathfrak{A}, B_j \subseteq A_j (j \in \mathbb{N}); (B_j)$  disjunkt und  $\bigcup A_j = \bigcup B_j$ . Dann:

$$\mu\left(\bigcup A_j\right) = \mu\left(\bigcup B_j\right) = \sum \underbrace{\mu(B_j)}_{\leq \mu(A_j)} \leq \sum \mu(A_j)$$

(5)  $B_1 = A_1, B_k = A_k \setminus A_{k-1} (k \geq 2)$

Dann:  $B_j \subseteq \mathfrak{A}; B_j \subseteq A_j (j \in \mathbb{N}); \bigcup A_j = \bigcup B_j$  und  $A_n = \bigcup_{j=1}^n B_j$

$$\begin{aligned} \text{Dann: } \mu(\bigcup A_j) &= \mu(\bigcup B_j) = \sum \mu(B_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu(B_j)}_{=\mu(\bigcup_{j=1}^n B_j)=\mu(A_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

(6) Übung ■

