

# 1 Multilineare Algebra

## §1 Moduln

Sei  $R$  ein (kommutativer) Ring (mit Eins) (in der ganzen Vorlesung).

### Definition 1.1

- (a) Eine abelsche Gruppe  $(M, +)$  zusammen mit einer Abbildung  $\cdot : R \times M \rightarrow M$  heißt  **$R$ -Modul** (genauer:  $R$ -Linksmodul), wenn gilt:

- (i)  $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
- (ii)  $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
- (iii)  $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- (iv)  $1 \cdot x = x$

für alle  $a, b \in R, x, y \in M$ .

- (b) Eine Abbildung  $\varphi : M \rightarrow M'$  zwischen  $R$ -Moduln  $M, M'$  heißt  **$R$ -Modul-Homomorphismus** (kurz  **$R$ -linear**), wenn für alle  $x, y \in M, a, b \in R$  gilt:

$$\varphi(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot \varphi(x) + b \cdot \varphi(y)$$

### Beispiele

- (1)  $R = K$  Körper. Dann ist  $R$ -Modul =  $K$ -Vektorraum und  $R$ -linear = linear
- (2)  $R$  ist  $R$ -Modul. Jedes Ideal  $I \subseteq R$  ist  $R$ -Modul
- (3) Jede abelsche Gruppe ist ein  $\mathbb{Z}$ -Modul.  
(denn:  $n \cdot x = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n\text{-mal}}$  definiert die Abbildung  $\cdot : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$  wie in 1.1 gefordert)

### Bemerkung + Definition 1.2

- (a) Sind  $M, M'$   $R$ -Moduln, so ist  $\text{Hom}_R(M, M') = \{\varphi : M \rightarrow M' : \varphi \text{ ist } R\text{-linear}\}$  ein  $R$ -Modul durch  $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$  und  $(a \cdot \varphi_1)(x) = a \cdot \varphi_1(x)$ .
- (b)  $M^* = \text{Hom}_R(M, R)$  heißt dualer Modul.

### Beispiele

$$R = \mathbb{Z}$$

$$\text{Hom}_R(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{0\}, \text{ denn } 0 = \varphi(0) = \varphi(1 + 1) = \varphi(1) + \varphi(1) \Rightarrow \varphi(1) = 0$$

### Bemerkung 1.3 (Ähnlichkeiten von Moduln mit Vektorräumen)

Die  $R$ -Moduln bilden eine **abelsche Kategorie  $R$ -Mod**.

- (a) Eine Untergruppe  $N$  eines  $R$ -Moduls  $M$  heißt  $R$ -Untermodul von  $M$ , falls  $R \cdot N \subseteq N$ .
- (b) Kern und Bild  $R$ -linearer Abbildungen sind  $R$ -Moduln.
- (c) Zu jedem Untermodul  $N \subseteq M$  gibt es einen Faktormodul  $M/N$ .
- (d) Homomorphiesatz:  
Für einen surjektiven Homomorphismus  $\varphi : M \rightarrow N$  gilt:  $M/\text{Kern}(\varphi) \cong N$ .

- (e) *Direktes Produkt*: Sei  $\{M_i\}_{i \in I}$  eine beliebige Familie von Moduln. Dann ist ihr direktes Produkt  $\prod_i M_i = \times_i M_i$  gegeben durch die Menge aller Tupel  $(m_i)_{i \in I}$  mit  $m_i \in M_i$  und die  $R$ -Aktion  $r(m_i)_{i \in I} = (rm_i)_{i \in I}$ .

*Direkte Summe*: Das gleiche wie beim direkten Produkt, jedoch dürfen in den Tupeln nur endlich viele  $m_i \neq 0$  sein.

### Beweis

- (b)  $\text{Kern}(\varphi)$ : Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  lineare Abbildung.  $m \in \text{Kern}(\varphi)$ ,  $r \in R$ :  
 $\varphi(rm) = r\varphi(m) = 0 \Rightarrow R \cdot \text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\varphi)$ ; Untergruppe klar  
 $\text{Bild}(\varphi)$ :  $n \in \text{Bild}(\varphi)$ , d. h.  $\exists m : n = \varphi(m)$ ,  $m \in M \Rightarrow r \in R : rn = r\varphi(m) = \varphi(rm) \in \text{Bild}(\varphi) \Rightarrow R \cdot \text{Bild}(\varphi) \subseteq \text{Bild}(\varphi)$

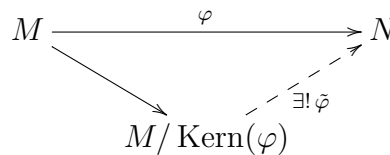
- (c)  $M$  abelsch  $\Rightarrow$  jedes  $N$  Normalteiler  $\Rightarrow M/N$  ist abelsche Gruppe.

Wir definieren  $R$ -Aktion auf  $M/N$  durch  $r(m+N) = rm+N$ . Das ist wohldefiniert, denn  
 $r((m+n)+N) = r(m+n)+N = rm + \underbrace{rn}_{\in N} + N = rm+N$

$$r((m+N) + (m'+N)) = r((m+m') + N) = r(m+m') + N = rm + N + rm' + N = r(m+N) + r(m'+N)$$

Die restlichen drei Eigenschaften gehen ähnlich.

- (d)



Wohldefiniertheit von  $\tilde{\varphi}$ :

Sei  $k \in \text{Kern}(\varphi) : \varphi(m+k) = \varphi(m)$

surjektiv:  $\forall n \in N : n = \varphi(m) = \tilde{\varphi}(m + \text{Kern}(\varphi))$

injektiv:  $m, m' \in M$  mit  $\varphi(m) = \varphi(m') = n \in N \Leftrightarrow \varphi(m-m') = 0 \Rightarrow m + \text{Kern}(\varphi) = m' + \text{Kern}(\varphi)$

$\tilde{\varphi}$  ist  $R$ -linear: Klar, wegen  $\varphi$   $R$ -linear.

### Bemerkung 1.4

- (a) Zu jeder Teilmenge  $X \subseteq M$  eines  $R$ -Moduls  $M$  gibt es den von  $X$  erzeugten Untermodul

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{M' \subseteq M \\ X \subseteq M'}} \text{Untermodul } M' = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in X \right\}$$

- (b)  $B \subset M$  heißt **linear unabhängig**, wenn aus  $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = 0$  mit  $n \in \mathbb{N}, b_i \in B, \alpha_i \in R$  folgt  $\alpha_i = 0$  für alle  $i$ .

- (c) Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt **Basis**.

- (d) Nicht jedes  $R$ -Modul besitzt eine Basis.

Beispiel:  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul:  $\{\bar{1}\}$  ist nicht linear unabhängig, da  $\underbrace{42}_{\neq 0 \text{ in } \mathbb{Z}} \cdot \bar{1} = 0$

- (e) Ein  $R$ -Modul heißt **frei**, wenn er eine Basis besitzt.

- (f) Ein freier  $R$ -Modul  $M$  hat die Universelle Abbildungseigenschaft eines Vektorraums. Ist  $B$  eine Basis von  $M$ , und  $f : B \rightarrow M'$  eine Abbildung in einen  $R$ -Modul  $M'$ , so gibt es genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : M \rightarrow M'$  mit  $\varphi|_B = f$ .
- (g) Sei  $M$  freier, endlich erzeugter Modul. Dann ist  $M^*$  wieder frei und hat dieselbe Dimension wie  $M$ .

**Beweis**

- (f) Sei  $\{y_i\}_{i \in I}$  Familie von Elementen von  $M'$ .

Sei  $x \in M$ . Durch  $x = \sum_i a_i x_i$  ist  $\{a_i\}_{i \in I}$  eindeutig bestimmt.

Wir setzen:  $\varphi(x) := \sum_i a_i y_i = \sum_i a_i \varphi(x_i)$

**Beh. 1:** Falls  $\{y_i\}_{i \in I}$  ( $y_i \neq y_j$  für  $i \neq j$ ) Basis von  $M'$  ist, dann ist  $\varphi$  ein Isomorphismus.

**Bew. 1:** Wir können den Beweis des Satzes rückwärts anwenden

$\Rightarrow \exists \psi : M' \rightarrow M$  mit  $\psi(y_i) = x_i \forall i \in I$

$\Rightarrow \varphi \circ \psi = id_{M'}, \psi \circ \varphi = id_M$

**Beh. 2:** Zwei freie Moduln mit gleicher Basis sind isomorph.

**Bew. 2:** klar

**Proposition + Definition 1.5**

Sei  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$  kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln (d.h.  $M' \subseteq M$  Untermodul,  $M'' = M/M'$ ). Dann gilt für jeden  $R$ -Modul  $N$ :

- (a)  $0 \rightarrow \text{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{\alpha_*} \text{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{\beta_*} \text{Hom}_R(N, M'') \rightarrow 0$  ist exakt.
- (b)  $0 \rightarrow \text{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}_R(M', N) \rightarrow 0$  ist exakt.
- (c) Im Allgemeinen sind  $\beta_*$  bzw.  $\alpha^*$  nicht surjektiv.
- (d) Ein Modul  $N$  heißt **projektiv** (bzw. **injektiv**), wenn  $\beta_*$  (bzw.  $\alpha^*$ ) **für sämtliche Wahlen der kurzen exakten Sequenz**  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$  surjektiv ist.
- (e) Freie Moduln sind projektiv.
- (f) Jeder  $R$ -Modul  $M$  ist Faktormodul eines projektiven  $R$ -Moduls.
- (g) Jeder  $R$ -Modul  $M$  ist Untermodul eines injektiven  $R$ -Moduls.

**Beweis**

- (a)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & N & & & & \\
 & \swarrow \varphi & \downarrow \psi & \searrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & M'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$\alpha_*$  ist injektiv: Sei  $\varphi \in \text{Hom}_R(N, M')$ , ist  $\alpha_*(\varphi) = \alpha \circ \varphi = 0 \xrightarrow{\alpha \text{ inj.}} \varphi = 0$ .

$\text{Bild}(\alpha_*) \subseteq \text{Kern}(\beta_*)$ :  $\beta_*(\alpha_*(\varphi)) = \underbrace{\beta \circ \alpha \circ \varphi}_{=0} = 0$

$\text{Kern}(\beta_*) \subseteq \text{Bild}(\alpha_*)$ :

Sei  $\beta \circ \psi = 0$  ( $\psi \in \text{Kern}(\beta_*)$ ). Für jedes  $x \in N$  ist  $\psi(x) \in \text{Kern}(\beta) = \text{Bild}(\alpha) \Rightarrow$  zu  $x \in N \exists y \in M'$  mit  $\psi(x) = \alpha(y)$ ;  $y$  ist eindeutig, da  $\alpha$  injektiv.

Definiere  $\varphi' : N \rightarrow M'$  durch  $x \mapsto y$ .

Zu zeigen:  $\varphi'$  ist  $R$ -linear

Seien  $x, x' \in N \Rightarrow \varphi'(x + x') = z$  mit  $\alpha(z) = \varphi(x + x') = \varphi(x) + \varphi(x') = \alpha(y) + \alpha(y') = \alpha(y + y')$  mit  $\varphi'(x) = y, \varphi'(x') = y' \xrightarrow{\alpha \text{ inj.}} z = y + y'$

Genauso:  $\varphi'(a \cdot x) = a \cdot \varphi'(x)$

(b)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\beta} & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \searrow & & \swarrow \\
 & & & & & & N
 \end{array}$$

$\beta^*(\varphi)$        $\varphi$

$\beta^*$  injektiv, denn für  $\varphi \in \text{Hom}(M'', N)$  ist  $\beta^*(\varphi) = \varphi \circ \beta$

Sei  $\beta^*(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi \circ \beta = 0 \xRightarrow{\beta \text{ surj.}} \varphi = 0$ .

$\text{Bild}(\beta^*) \subseteq \text{Kern}(\alpha^*)$ :  $(\alpha^* \circ \beta^*)(\varphi) = \alpha^*(\varphi \circ \beta) = \varphi \circ \underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0} = 0$

$\text{Kern}(\alpha^*) \subseteq \text{Bild}(\beta^*)$ : Sei  $\psi \in \text{Kern}(\alpha^*)$ . Aber  $\psi \in \text{Hom}_R(M, N)$  mit  $\psi \circ \alpha = 0$   
Weil  $\psi$  auf  $\text{Bild}(\alpha)$  verschwindet, kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 & M'' & \\
 \beta \nearrow & & \nwarrow \cong \\
 M & \xrightarrow{\quad} & M / \text{Bild}(\alpha) \\
 \psi \searrow & & \swarrow \sigma \\
 & N &
 \end{array}$$

$\Rightarrow \beta^*(\sigma) = \psi \Rightarrow \text{Beh.}$

(c) Im Allgemeinen sind  $\beta_*$  und  $\alpha^*$  nicht surjektiv

z.B.:

1.  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  mit  $N := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$   
Es gilt:  $\text{Hom}(N, \mathbb{Z}) = \{0\}$   
 $\text{Hom}(N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0, id\} \Rightarrow \beta_*$  nicht surjektiv  $\Rightarrow N$  nicht projektiv!
2.  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow 0$  mit  $N := 2 \cdot \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$   
 $\text{Hom}(\mathbb{Z}, N) = \{0, \psi\}$ , wobei  $\psi(1) = 2$ .  
Dann:  $\alpha^*(\psi) = \psi \circ \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^*$  nicht surjektiv  $\Rightarrow N$  nicht injektiv!

- (e) Sei  $N$  frei mit Basis  $\{e_i, i \in I\}$ . Sei  $\beta : M \rightarrow M''$  surjektive  $R$ -lineare Abbildung und  $\varphi : N \rightarrow M''$   $R$ -linear. Für jedes  $i \in I$  sei  $x_i \in M$  mit  $\beta(x_i) = \varphi(e_i)$  (so ein  $x_i$  gibt es, da  $\beta$  surjektiv). Dann gibt es genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $\psi : N \rightarrow M$  mit  $\psi(e_i) = x_i$ .  
Damit  $\beta(\psi(e_i)) = \beta(x_i) = \varphi(e_i)$  für alle  $i \in I \Rightarrow \beta \circ \psi = \varphi$
- (f) Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Sei  $X$  ein Erzeugendensystem von  $M$  als  $R$ -Modul (notfalls  $X = M$ ).  
Sei  $F$  der freie  $R$ -Modul mit Basis  $X$ ,  $\varphi : F \rightarrow M$  die  $R$ -lineare Abbildung, die durch  $x \mapsto x$  für alle  $x \in X$  bestimmt ist.  $\varphi$  ist surjektiv, da  $X \subseteq \text{Bild}(\varphi)$  und  $\langle X \rangle = M$ . Nach Homomorphiesatz ist  $M \cong F / \text{Kern}(\varphi)$ .

### Proposition 1.6

Ein  $R$ -Modul  $N$  ist genau dann projektiv, wenn es einen  $R$ -Modul  $N'$  gibt, so dass  $F := N \oplus N'$  freier Modul ist.

#### Beweis

„ $\Rightarrow$ “:

Sei  $F$  freier  $R$ -Modul und  $\beta : F \rightarrow N$  surjektiv (wie in [Beweis von 1.5 \(f\)](#)). Dann gibt es  $\tilde{\varphi} : N \rightarrow F$  mit  $\beta \circ \tilde{\varphi} = id_N$  (weil  $N$  projektiv ist).

#### Behauptung:

- 1.)  $F = \text{Kern}(\beta) \oplus \text{Bild}(\tilde{\varphi}) \cong N' \oplus N$
- 2.)  $\tilde{\varphi}$  injektiv

**Beweis:**

- 1.)  $\text{Kern}(\beta) \cap \text{Bild}(\tilde{\varphi}) = (0)$ , denn:  $\beta(\tilde{\varphi}(x)) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \tilde{\varphi}(x) = 0$ .

Sei  $x \in F$ ,  $y := \tilde{\varphi}(\beta(x)) \in \text{Bild}(\tilde{\varphi})$ . Für  $z = x - y$  ist  $\beta(z) = \beta(x) - \underbrace{\beta(\tilde{\varphi}(\beta(x)))}_{= \text{id}} = 0 \Rightarrow$

$$x = \underbrace{z}_{\in \text{Kern}(\beta)} + \underbrace{y}_{\in \text{Bild}(\tilde{\varphi})}$$

- 2.)  $\tilde{\varphi}(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\beta(\tilde{\varphi}(x))}_{=x} = 0$

„ $\Leftarrow$ “:

Sei  $F = N \oplus N'$  frei,  $\beta : M \rightarrow M''$  surjektiv,  $\varphi : N \rightarrow M''$   $R$ -linear.

Gesucht:  $\psi : N \rightarrow M$  mit  $\beta \circ \psi = \varphi$ .

Definiere  $\tilde{\varphi} : F \rightarrow M''$  durch  $\tilde{\varphi}(x + y) = \varphi(x)$  wobei jedes  $z \in F$  eindeutig als  $z = x + y$  mit  $x \in N$ ,  $y \in N'$  geschrieben werden kann.

$F$  ist frei also projektiv  $\Rightarrow \exists \tilde{\psi} : F \rightarrow M$  mit  $\beta \circ \tilde{\psi} = \tilde{\varphi}$ . Sei  $\psi := \tilde{\psi}|_N$ . Dann ist  $\beta \circ \psi = \beta \circ \tilde{\psi}|_N = \tilde{\varphi}|_N = \varphi$

## §2 Tensorprodukt

### Definition 1.7

Seien  $M, N, P$   $R$ -Moduln.

- (a) Eine Abbildung  $\Phi : M \times N \rightarrow P$  heißt  **$R$ -bilinear**, wenn für jedes  $x_0 \in M$  und jedes  $y_0 \in N$  die Abbildungen

$$\Phi_{x_0} : N \rightarrow P, y \mapsto \Phi(x_0, y)$$

$$\Phi_{y_0} : M \rightarrow P, x \mapsto \Phi(x, y_0)$$

$R$ -linear sind.

- (b) Ein **Tensorprodukt** von  $M$  und  $N$  (über  $R$ ) ist ein  $R$ -Modul  $T$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung  $\tau : M \times N \rightarrow T$ , sodass  
(UAE) Für jede bilineare Abbildung  $\Phi : M \times N \rightarrow P$  gibt es genau eine lineare Abbildung  $\varphi : T \rightarrow P$  mit  $\Phi = \varphi \circ \tau$

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\tau} & T \\ & \searrow \Phi & \swarrow \exists! \varphi \\ & & P \end{array}$$

( $\tau$  ist die „universelle“ bilineare Abbildung)

### Beispiele

- 1.)  $M, N$  freie  $R$ -Moduln mit Basis  $\{e_i, i \in I\}$  bzw.  $\{f_j, j \in J\}$ . Dann ist  $M \otimes N$  freier  $R$ -Modul mit Basis  $\{e_i f_j, i \in I, j \in J\}$  ein Tensorprodukt mit  $\tau(e_i, f_j) = e_i f_j$ .

Denn: Sei  $\Phi : M \times N \rightarrow P$  bilinear. Setze  $\varphi(e_i \cdot f_j) := \Phi(e_i, f_j)$ , das bestimmt eindeutig  $\varphi : M \otimes N \rightarrow P$  ( $R$ -linear) mit  $\Phi(e_i, f_j) = \varphi(\tau(e_i, f_j))$  für alle  $i, j$ .

Sind  $I, J$  endlich, so ist  $\text{rg}(M \otimes N) = \text{rg}(M) \cdot \text{rg}(N)$ , dagegen ist  $\text{rg}(M \times N) = \text{rg}(M) + \text{rg}(N)$ .  $\tau$  ist also höchstens in Trivialfällen surjektiv.  $\tau$  ist nicht injektiv:  $\tau(x, 0) = \tau(x, 0 \cdot 1) = 0$ .

$y) = 0 \cdot \tau(x, y) = 0$  (da linear im 2. Argument), genauso  $\tau(0, y) = 0$ .  $\text{Bild}(\tau)$  ist kein Untermodul, aber  $\langle \text{Bild}(\tau) \rangle = M \otimes N$ .

2.) 0 ist ein Tensorprodukt der  $\mathbb{Z}$ -Moduln  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

Denn: jede bilineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow P$  ist die Nullabbildung.  $\Phi(\bar{1}, \bar{1}) = \Phi(3 \cdot \bar{1}, \bar{1}) = 3 \cdot \Phi(\bar{1}, \bar{1}) = \Phi(\bar{1}, 3 \cdot \bar{1}) = \Phi(\bar{1}, \bar{0}) = 0$ , genauso  $\Phi(\bar{1}, -\bar{1}) = 0$ .

### Satz 1 (Tensorprodukt)

Zu je zwei  $R$ -Moduln  $M, N$  gibt es ein Tensorprodukt. Dieses ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

#### Beweis 1.8

Sei  $F$  der freie  $R$ -Modul mit Basis  $M \times N$ . Sei  $Q$  Untermodul, der erzeugt wird von den

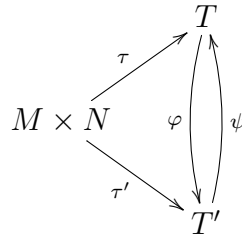
$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y), & \quad (\alpha x, y) - \alpha(x, y) \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y'), & \quad (x, \alpha y) - \alpha(x, y) \end{aligned}$$

für alle  $x, x' \in M, y, y' \in N, \alpha \in R$

Setze  $T := F/Q, \tau : M \times N \rightarrow T, (x, y) \mapsto [(x, y)] \bmod Q$ .  $\tau$  ist bilinear nach Konstruktion. Ist  $\Phi : M \times N \rightarrow P$  bilinear, so setze  $\tilde{\varphi}((x, y)) := \Phi(x, y), \tilde{\varphi} : F \rightarrow P$  ist linear.  $Q \subseteq \text{Kern}(\tilde{\varphi})$ , weil  $\Phi$  bilinear  $\xRightarrow{\text{Hom., Satz}} \tilde{\varphi}$  induziert  $\varphi : T \rightarrow P$  mit  $\Phi = \varphi \circ \tau$ .

Noch zu zeigen: Eindeutigkeit

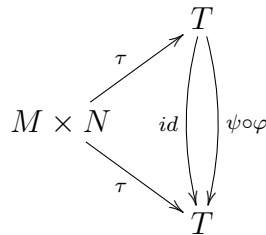
Seien  $(T, \tau), (T', \tau')$  Tensorprodukte von  $M$  und  $N$ . Dann gibt es eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : T \rightarrow T'$  mit  $\tau' = \varphi \circ \tau$  und eine  $R$ -lineare Abbildung  $\psi : T' \rightarrow T$  mit  $\tau = \psi \circ \tau'$ . Noch wissen wir nicht, ob folgendes Diagramm kommutativ ist:



aber für die beiden Dreiecke ist dies bereits bekannt.

Behauptung:  $\psi \circ \varphi = id_T$  und  $\varphi \circ \psi = id_{T'}$ .

Beweis: Das Diagramm



ist kommutativ, d. h.

$(\psi \circ \varphi) \circ \tau = \psi \circ (\varphi \circ \tau) = \psi \circ \tau' = \tau$  mit  $id : T \rightarrow T$  ist das Diagramm auch kommutativ. Wegen der Eindeutigkeit in der Definition des Tensorprodukts muss gelten:  $\psi \circ \varphi = id_T$ . (Der Beweis von  $\varphi \circ \psi = id_{T'}$  ist analog.) Also ist  $T \cong T'$ .

#### Bemerkung 1.9

Für alle  $R$ -Moduln  $M, N, M_1, M_2, M_3$  gilt:

- (a)  $M \otimes_R R \cong M$
- (b)  $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$
- (c)  $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \cong M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$

**Beweis**

- a) Zeige:  $M$  ist Tensorprodukt der  $R$ -Moduln  $M$  und  $R$ .  
 $\tau : M \times R \rightarrow M, (x, a) \rightarrow a \cdot x$  ist bilinear (wegen Moduleigenschaften). Sei  $\Phi : M \times R \rightarrow P$  bilinear.  
 Gesucht:  $\varphi : M \rightarrow P$  linear mit  $\Phi = \varphi \circ \tau$ , d. h.  $\Phi(x, a) = \varphi(a \cdot x)$   
 Setze  $\varphi(x) := \Phi(x, 1)$ .  $\varphi$  ist  $R$ -linear, da  $\Phi(\cdot, 1)$  linear ist,  $\Phi(x, a) = a\Phi(x, 1) = a\varphi(x) = \varphi(a \cdot x) = \varphi(\tau(x, a))$   
 $\varphi$  ist eindeutig: es muss gelten:  $\varphi(\tau(x, 1)) = \Phi(x, 1) =: \varphi(x)$ , damit ist  $\varphi$  eindeutig bestimmt (wegen  $\varphi \circ \tau = \Phi$ ).
- b)  $M \times N \cong N \times M$
- c) Finde lineare Abbildung:  $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \rightarrow M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$
1. Für festes  $z \in M_3$  sei  $\Phi_z : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$ ,  
 $(x, y) \rightarrow x \otimes (y \otimes z) := \tau(y, z)$   
 $\Phi_z$  bilinear: klar  
 $\Phi_z$  induziert eine lineare Abbildung:  $\varphi_z : M_1 \otimes_R M_2 \rightarrow M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$   
 Weiter ist  $\Psi : (M_1 \otimes_R M_2) \times M_3 \rightarrow M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3), (w, z) \rightarrow \varphi_z(w)$   
 bilinear: linear in  $w$ , weil  $\varphi_z$  linear; linear in  $z$  weil  $\Phi_z$  linear in  $z$ .  
 Induziert also lineare Abbildung  $\psi : (M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \rightarrow M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$
  2. Umkehrabbildung genauso!

**Proposition 1.10**

Sei  $M$  ein  $R$ -Modul,  $I \subseteq R$  ein Ideal. Dann ist  $I \cdot M = \{a \cdot x \in M : x \in M, a \in I\}$  Untermodul von  $M$  und es gilt:

$$M/I \cdot M \cong M \otimes_R R/I$$

**Beweis**

Sei  $\tilde{\varphi} : M \rightarrow M \otimes_R R/I, x \rightarrow x \otimes \bar{1}$

$\tilde{\varphi}$  ist  $R$ -linear.

$$I \cdot M \subseteq \text{Kern}(\tilde{\varphi}) : \forall a \in I, x \in M \text{ ist } \tilde{\varphi}(ax) = ax \otimes \bar{1} = x \otimes \underbrace{a \cdot \bar{1}}_{\bar{a}} = 0$$

$\tilde{\varphi}$  induziert also lineare Abbildung

$$\varphi : M/(I \cdot M) \rightarrow M \otimes_R R/I$$

Umgekehrt:  $\Psi : M \times R/I \rightarrow M/(I \cdot M), (x, \bar{a}) \rightarrow \overline{ax}$

$$\Psi \text{ ist wohldefiniert: ist } \bar{b} = \bar{a}, \text{ so ist } \overline{b \cdot x} - \overline{a \cdot x} = \underbrace{\overline{(b-a) \cdot x}}_{\substack{\in I \\ \in I \cdot M}} = 0$$

$\Psi$  ist bilinear, induziert also  $\psi : M \otimes_R R/I \rightarrow M/(I \cdot M)$  (linear). Es ist  $(\psi \circ \varphi)(\bar{x}) = \psi(x \otimes \bar{1}) = \overline{1x} = \bar{x}$  und  $(\varphi \circ \psi)(x \otimes \bar{a}) = \varphi(\overline{a \cdot x}) = ax \otimes \bar{1} = x \otimes a \cdot \bar{1} = x \otimes \bar{a}$

### §3 Flache Moduln

#### Bemerkung 1.11

Für jeden  $R$ -Modul  $M$  ist die Zuordnung  $M \mapsto M \otimes_R N$  ein Funktor

$$\otimes_R N : \underline{R\text{-Mod}} \rightarrow \underline{R\text{-Mod}}$$

#### Beweis

Ist  $\varphi : M \rightarrow M'$   $R$ -linear, so setze  $\varphi_N : M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N, x \otimes y \mapsto \varphi(x) \otimes y$  und linear fortgesetzt:  $\sum_{i=0}^n a_i(x_i \otimes y_i) \mapsto \sum_{i=0}^n a_i(\varphi(x_i) \otimes y_i)$

#### Proposition 1.12

Der Funktor  $\otimes_R N$  ist rechtsexakt, d.h. ist  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \rightarrow 0$  exakt,

so ist  $M' \otimes_R N \xrightarrow{\varphi_N} M \otimes_R N \xrightarrow{\psi_N} M'' \otimes_R N \rightarrow 0$  exakt.

#### Beispiele

Seien  $R = \mathbb{Z}$  und  $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Die Sequenz  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  ist exakt, und nach Prop. 1.12 ist somit auch die Sequenz  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  exakt, doch der erste Pfeil in dieser Sequenz ist die Nullabbildung  $\varphi_N : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} (\cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ nach 1.9a})$  und somit nicht injektiv, d. h. die Sequenz läßt sich nicht zu einer exakten Sequenz  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  verlängern.

#### Beweis

**1. Schritt:**  $\text{Bild}(\varphi_N) \subseteq \text{Kern}(\psi_N)$ , denn:  $\psi_N(\varphi_N(x \otimes y)) = \psi_N(\varphi(x) \otimes y) = \underbrace{\psi(\varphi(x))}_{=0} \otimes y = 0$ .

Der Homomorphiesatz liefert ein  $\Psi : M \otimes_R N / \text{Bild}(\varphi_N) \rightarrow M'' \otimes_R N$  mit der Eigenschaft, dass  $\Psi(\bar{x}) = \psi_N(x)$  für jedes  $x \in M \otimes_R N$  gilt.

**2. Schritt:**  $\Psi$  ist Isomorphismus.

Wenn dies gezeigt ist, ist klar, daß  $\Psi$  und damit  $\psi_N$  surjektiv ist und  $\text{Kern}(\psi_N) = \text{Bild}(\varphi_N)$  gilt.

Zeige also, dass  $\Psi$  Isomorphismus ist.

Konstruiere Umkehrabbildung  $\sigma : M'' \otimes_R N \rightarrow \bar{M} := M \otimes_R N / \text{Bild}(\varphi_N)$  folgendermaßen:

Wähle zu jedem  $x'' \in M''$  ein Urbild  $\chi(x'') \in \psi^{-1}(x'') \subset M$ .

Definiere eine Abbildung  $\tilde{\sigma} : M'' \times N \rightarrow \bar{M}$  durch  $(x'', y) \mapsto \overline{\chi(x'') \otimes y}$ .

Beweis, dass  $\tilde{\sigma}$  wohldefiniert ist: Sind  $x_1, x_2 \in M$  mit  $\psi(x_1) = \psi(x_2) = x''$ , so ist  $x_1 - x_2 \in \text{Kern}(\psi) = \text{Bild}(\varphi)$ , also  $x_1 - x_2 = \varphi(x')$  für ein  $x' \in M'$ , daher  $\overline{x_1 \otimes y - x_2 \otimes y} = \underbrace{\overline{\varphi(x') \otimes y}}_{\in \text{Bild}(\varphi_N)} = 0$ .

Rest klar!!

#### Definition + Proposition 1.13

Sei  $N$  ein  $R$ -Modul.

- (a)  $N$  heißt **flach**, wenn, wenn der Funktor  $\otimes_R N$  exakt ist, d.h. für jede kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  auch  $0 \rightarrow M' \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow M'' \otimes_R N \rightarrow 0$  exakt ist.
- (b)  $N$  ist genau dann flach, wenn für jeden  $R$ -Modul  $M$  und jeden Untermodul  $M'$  von  $M$  die Abbildung  $i : M' \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$  injektiv ist.



- (c) Jeder projektive  $R$ -Modul ist flach.
- (d) Ist  $R = K$  ein Körper, so ist jeder  $R$ -Modul flach.
- (e) Für jedes multiplikative Monoid  $S$  ist  $R_S$  flacher  $R$ -Modul.

**Beweis**

- (b) folgt aus Prop 1.12.
- (e) Sei  $M$  ein  $R$ -Modul, und sei  $M' \subseteq M$  ein  $R$ -Untermodule. Nach 1.12 ist  $M \otimes_R R_S \cong M_S$ .  
Zu zeigen: Die Abbildung  $M'_S \rightarrow M_S, \frac{a}{s} \mapsto \frac{a}{s}$  ist injektiv.  
Sei also  $a \in M'$  und  $\frac{a}{s} = 0$  in  $M_S$ , d.h. in  $M$  gilt:  $t \cdot a = 0$  für ein  $t \in S$ .  $\Rightarrow t \cdot a = 0$  in  $M' \Rightarrow \frac{a}{s} = 0$  in  $M'_S$ .
- (d) folgt aus (c), weil jeder  $K$ -Modul frei ist, also projektiv.
- (c) Sei  $N$  projektiv. Nach Prop. 1.6 gibt es einen  $R$ -Modul  $N'$ , sodass  $N \oplus N' =: F$  frei ist.

**Beh. 1:**  $F$  ist flach.Dann sei  $M$  ein  $R$ -Modul, und  $M' \subseteq M$  ein Untermodul; dann ist  $F \otimes_R M' \rightarrow F \otimes_R M$  injektiv.**Beh. 2:** Tensorprodukt vertauscht mit direkter Summe.

$$\begin{array}{ccc} M' \otimes_R F & \cong & M' \otimes_R (N \oplus N') \cong (M' \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N') \\ \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \text{und } M \otimes_R F & & \cong (M \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N') \end{array}$$

Die Abbildung  $M' \otimes_R F \rightarrow M \otimes_R F$  bildet  $M' \otimes_R N$  auf  $M \otimes_R N$  ab,  $M' \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$  ist also als Einschränkung einer injektiven Abbildung selbst injektiv.**Bew. 1:** Sei  $\{e_i : i \in I\}$  Basis von  $F$ , also  $F = \bigoplus_{i \in I} R e_i \cong \bigoplus_{i \in I} R$ . Wegen Beh. 2 ist

$$M \otimes_R F \cong M \otimes_R \bigoplus_{i \in I} R \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_R R) = \bigoplus_{i \in I} M$$

Genauso:  $M' \otimes_R F \cong \bigoplus_{i \in I} M'$ .Die Abbildung  $M' \otimes_R F \rightarrow M \otimes_R F$  ist in jeder Komponente die Einbettung  $M' \hookrightarrow M$ , also injektiv.**Bew. 2:** Sei  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , zu zeigen:  $M \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$ .Die Abbildung  $M \times N \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N), ((x_i)_{i \in I}, y) \mapsto (x_i \otimes y)_{i \in I}$  ist bilinear, induziert also eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : M \otimes_R N \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$ .Umgekehrt: Für jedes  $i \in I$  induziert die Inklusion  $M_i \hookrightarrow M$  eine  $R$ -lineare Abbildung  $\psi_i : M_i \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$ ; die  $\psi_i$  induzieren  $\psi : \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N) \rightarrow M \otimes_R N$  (UAE der direkten Summe).„Nachrechnen“:  $\varphi$  und  $\psi$  sind zueinander invers.

## §4 Tensoralgebra

**Definition 1.14**Eine  **$R$ -Algebra** ist ein (kommutativer) Ring (mit Eins)  $R'$  zusammen mit einem Ringhomomorphismus  $\alpha : R \rightarrow R'$ . Ist  $\alpha$  injektiv, so heißt  $R'/R$  auch **Ringweiterung**.**Bemerkung 1.15**Sei  $R'$  eine  $R$ -Algebra.

- (a) Die Zuordnung  $M \rightarrow M \otimes_R R'$  ist ein kovarianter rechtsexakter Funktor  $\otimes_R R' : \underline{R\text{-Mod}} \rightarrow \underline{R'\text{-Mod}}$ ; dabei wird  $M \otimes_R R'$  zum  $R'$ -Modul durch  $b \cdot (x \otimes a) := x \otimes b \cdot a$ .
- (b) Sei  $V : \underline{R'\text{-Mod}} \rightarrow \underline{R\text{-Mod}}$  der „Vergiss-Funktor“, der jeden  $R'$ -Modul als  $R$ -Modul auffasst, mit der Skalarmultiplikation  $a \cdot x := \alpha(a) \cdot x$  für  $a \in R, x \in M$ .

Dann ist  $\otimes_R R'$  „links adjungiert“ zu  $V$ , d.h. für alle  $R$ -Moduln  $M$  und  $R'$ -Moduln  $M'$  sind  $\text{Hom}_R(M, V(M'))$  und  $\text{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', M')$  isomorph (als  $R$ -Moduln).

### Beweis

- (b) Die Zuordnungen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(M, V(M')) &\rightarrow \text{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', M') \\ \varphi &\mapsto (x \otimes a \mapsto a \cdot \varphi(x)) \\ (x \mapsto \psi(x \otimes 1)) &\leftarrow \psi \end{aligned}$$

sind zueinander invers.

### Beispiele

Sei  $R'$  eine  $R$ -Algebra, und sei  $F$  ein freier  $R$ -Modul mit Basis  $\{e_i : i \in I\}$ . Dann ist  $F \otimes_R R'$  ein freier  $R'$ -Modul mit Basis  $\{e_i \otimes 1 : i \in I\}$ .

**denn:** Sei  $M$  ein beliebiger  $R'$ -Modul, und  $f : \{e_i \otimes 1 : i \in I\} \rightarrow M$  eine Abbildung. Dann gibt es genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : F \rightarrow V(M)$  mit  $\varphi(e_i) = f(e_i \otimes 1)$  (UAE für  $F$ ). Mit 1.15 (b) folgt: dazu gehört eine eindeutige  $R'$ -lineare Abbildung  $\tilde{\varphi} : F \otimes_R R' \rightarrow M$  mit  $\tilde{\varphi}(e_i \otimes 1) = \varphi(e_i)$ .

### Proposition 1.16

Seien  $R', R''$   $R$ -Algebren.

- (a)  $R' \otimes_R R''$  wird zur  $R$ -Algebra durch  $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$
- (b)  $\sigma' : R' \rightarrow R' \otimes_R R'', a \mapsto a \otimes 1$  und  $\sigma'' : R'' \rightarrow R' \otimes_R R'', b \mapsto 1 \otimes b$  sind  $R$ -Algebrenhomomorphismen.
- (c) UAE: Sei  $A$  eine beliebige  $R$ -Algebra. In der Kategorie der  $R$ -Algebren gilt:

$$\begin{array}{ccc} R' & & \\ \sigma' \downarrow & \searrow \varphi' & \\ R' \otimes_R R'' & \xrightarrow{\exists! \varphi} & A \\ \sigma'' \uparrow & \nearrow \varphi'' & \\ R'' & & \end{array}$$

### Beweis

- (c) Definiere eine lineare Abbildung  $\varphi : R' \otimes_R R'' \rightarrow A$  durch  $\varphi(a \otimes b) = \varphi'(a) \cdot \varphi''(b)$ .

$\varphi$  ist die lineare Abbildung, die von der bilinearen Abbildung  $\tilde{\varphi} : R' \times R'' \rightarrow A, (a, b) \mapsto \varphi'(a) \cdot \varphi''(b)$  induziert wird.

Nachrechnen:  $\varphi$  ist Ringhomomorphismus und eindeutig bestimmt.

Beobachte:  $a \otimes b = (a \otimes 1)(1 \otimes b) = \sigma'(a)\sigma''(b)$ .

Also muss gelten:  $\varphi(a \otimes b) = \underbrace{(\varphi \circ \sigma')(a)}_{\varphi'(a)} \cdot \underbrace{(\varphi \circ \sigma'')(b)}_{\varphi''(b)}$ .

**Beispiele**

$R'$  sei eine  $R$ -Algebra. Dann ist  $R'[X] \cong R[X] \otimes_R R'$  (als  $R'$ -Algebren), denn:

Zeige, dass  $R[X] \otimes_R R'$  die UAE des Polynomrings  $R'[X]$  erfüllt.

Sei  $A$  eine  $R'$ -Algebra und  $a \in A$ . Zu zeigen:  $\exists!$   $R'$ -Algebrahomomorphismus  $\varphi : R[X] \otimes_R R' \rightarrow A$  mit  $\varphi(X \otimes 1) = a$ . Ein solcher wird als  $R$ -Algebra-Homomorphismus induziert von  $\varphi' : R[X] \rightarrow A$ ,  $X \mapsto a$  und  $\varphi'' : R' \rightarrow A$  (der Strukturhomomorphismus  $\alpha$  aus der Definition)

Noch zu zeigen:  $\varphi$  ist  $R'$ -linear (richtig, weil  $\varphi''$  Ringhomomorphismus)

**Definition + Bemerkung 1.17**

Sei  $M$  ein  $R$ -Modul

- $T^0(M) := R$ ,  $T^n(M) = M \otimes_R T^{n-1}(M)$ ,  $n \geq 1$
- $T(M) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(M)$  wird zur  $R$ -Algebra durch  
 $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) := x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^{n+m}(M)$  (wenn auch nicht zu einer  $R$ -Algebra im Sinne von Definition Def. 1.14, da die Multiplikation in  $T(M)$  nicht immer kommutativ ist).
- $T(M)$  ist nicht kommutativ (im Allgemeinen), denn  $x \otimes y \neq y \otimes x$ .
- $T(M)$  erfüllt UAE: Ist  $R'$  eine  $R$ -Algebra (nicht notwendig kommutativ), und ist  $\varphi : M \rightarrow R'$   $R$ -linear, so  $\exists!$   $R$ -Algebra-Homomorphismus  $\tilde{\varphi} : T(M) \rightarrow R'$  mit  $\tilde{\varphi}|_{\underbrace{T^1(M)}_{=M}} = \varphi$

**§5 Symmetrische und äußere Algebra****Definition 1.18**

Seien  $M, N$   $R$ -Moduln,  $n \geq 0$ , und sei  $\Phi : M^n \rightarrow N$   $R$ -multilinear.

- $\Phi$  heißt **symmetrisch**, wenn für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$  und alle  $\sigma \in S_n$  gilt:  
 $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ . (Wenn  $n = 0$  oder  $n = 1$  ist, ist also jedes  $\Phi$  symmetrisch.)
- $\Phi$  heißt **alternierend**, wenn für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$  gilt:  
 Ist  $x_i = x_j$  für ein Paar  $(x_i, x_j)$  mit  $i \neq j$ , so ist  $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0$   
 Wenn 2 in  $R$  invertierbar ist (z. B. also wannimmer  $R$  ein Körper von Charakteristik  $\neq 2$  ist), ist dies äquivalent zu  $\Phi(x_1, \dots, x_n) = -\Phi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$  für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$ . (Wenn  $n = 0$  oder  $n = 1$  ist, ist also jedes  $\Phi$  alternierend.)
- $\text{Sym}_M^n(N) := \{\Phi : M^n \rightarrow N : \Phi \text{ multilinear, symmetrisch}\}$   
 $\text{Alt}_M^n(N) := \{\Phi : M^n \rightarrow N : \Phi \text{ multilinear, alternierend}\}$   
 $\text{Sym}_M^n(N)$  und  $\text{Alt}_M^n(N)$  sind  $R$ -Moduln.

**Satz 2 (Symmetrische und äußere Potenz)**

Zu jedem  $R$ -Modul  $M$  und jedem  $n \geq 0$  gibt es  $R$ -Moduln  $S^n(M)$  und  $\Lambda^n(M)$  (genannt die  $n$ -te **symmetrische** bzw. **äußere Potenz** von  $M$ ) und eine symmetrische bzw. alternierende multilineare Abbildung  $M^n \rightarrow S^n(M)$  bzw.  $M^n \rightarrow \Lambda^n(M)$  mit folgender UAE:

$$\begin{array}{ccc}
 M^n & \xrightarrow{\quad} & S^n(M) \\
 \searrow \Phi \in \text{Sym}_M^n(N) & & \swarrow \exists! \varphi \text{ linear} \\
 & N &
 \end{array}
 \quad \text{bzw.} \quad
 \begin{array}{ccc}
 M^n & \xrightarrow{\quad} & \Lambda^n(M) \\
 \searrow \Psi \in \text{Alt}_M^n(N) & & \swarrow \exists! \psi \text{ linear} \\
 & N &
 \end{array}$$

Mit  $S^0(M) := R =: \Lambda^0(M)$  heißt  $S(M) := \bigoplus_{n \geq 0} S^n(M)$  die **symmetrische Algebra** über  $M$   
 $\Lambda(M) := \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(M)$  die **äußere Algebra** über  $M$  (oder **Graßmann-Algebra**)

### Beweis

Sei  $\mathbb{J}^n(M)$  der Untermodul von  $T^n(M)$ , der erzeugt wird von allen

$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$ ,  $x_i \in M$ ,  $\sigma \in S_n$  und

$\mathbb{I}^n(M)$  der Untermodul von  $T^n(M)$ , der erzeugt wird von allen

$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$  für die  $x_i = x_j$  für ein Paar  $(i, j)$  mit  $i \neq j$ .

Setze  $S^n(M) := T^n(M) / \mathbb{J}^n(M)$  und  $\Lambda^n(M) := T^n(M) / \mathbb{I}^n(M)$

Sei  $\Phi : M^n \rightarrow N$  multilinear und symmetrisch.  $\Phi$  induziert  $\tilde{\varphi} : T^n(M) \rightarrow N$   $R$ -linear (weil  $\Phi$  multilinear), da  $\Phi$  symmetrisch ist, ist  $\mathbb{J}(M) \subseteq \text{Kern}(\tilde{\varphi})$ .  $\tilde{\varphi}$  induziert also  $\varphi : S^n(M) \rightarrow N$   $R$ -linear; genauso falls  $\Psi : M^n \rightarrow N$  alternierend.

### Proposition 1.19

Sei  $M$  freier  $R$ -Modul mit Basis  $e_1, \dots, e_r$ . Dann gilt für jedes  $n \geq 0$ :

- $S^n(M)$  ist freier Modul mit Basis  $\{e_1^{\nu_1} \cdots e_r^{\nu_r} : \sum_{i=1}^r \nu_i = n\}$
- $S(M) \cong R[X_1, \dots, X_r]$
- $\Lambda^n(M)$  ist freier  $R$ -Modul mit Basis  
 $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq r\}$
- $\Lambda^n(M) = 0$  für  $n > r$

### Beweis

b) folgt aus a)

d) folgt aus c)

c)  $\Lambda^r(M)$  wird erzeugt von  $e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$ : klar.

$\Lambda^r(M)$  ist frei (vom Rang 1), denn aus  $a \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_r = 0$  folgt  $a = 0$  (weil die Determinantenabbildung  $M^r \rightarrow R$  multilinear und alternierend ist, und daher gemäß der UAE eine lineare Abbildung  $\Lambda^r(M) \rightarrow R$  induziert, welche  $a \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_r = 0$  auf  $a$  sendet).

Für jedes  $n$  bilden  $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq r\}$  ein Erzeugendensystem von  $\Lambda^n(M)$ .

Zu zeigen:  $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq r\}$  ist linear unabhängig.

Sei dazu  $\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq r} a_{\underline{i}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = 0$ , wobei  $\underline{i}$  kurz für  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  steht.

Für jedes  $\underline{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$  mit  $1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq r$  existiert nun ein  $\sigma_{\underline{j}} \in S_r$  mit  $\sigma_{\underline{j}}(\nu) = j_\nu$  für alle  $\nu = 1, \dots, n$ . Mit diesem  $\sigma$  gilt  $0 = (\sum a_{\underline{i}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = a_{\underline{j}} (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = a_{\underline{j}} (e_{\sigma_{\underline{j}}(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n)}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = (-1)^{\sigma_{\underline{j}}} a_{\underline{j}} e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$ , also  $a_{\underline{j}} = 0 \Rightarrow$  l.u.

## §6 Differentiale

### Definition + Bemerkung 1.20

Sei  $A$  eine kommutative  $R$ -Algebra,  $M$  ein  $A$ -Modul.

(a) Eine  $R$ -lineare Abbildung  $\delta : A \rightarrow M$  heißt **Derivation**, wenn für alle  $f, g \in A$  gilt:

$$\delta(f \cdot g) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f)$$

(b)  $\text{Der}_R(A, M) := \{\delta : A \rightarrow M : \delta \text{ } R\text{-lineare Derivation}\}$  ist ein  $A$ -Modul.

(c)  $M \mapsto \text{Der}_R(A, M)$  ist ein Funktor (Unterfunktor von  $\text{Hom}_R(A, \cdot)$ ).

Wie man an dieser Definition sieht, hängt der Begriff einer "Derivation" nicht nur von  $A$ , sondern auch vom Grundring  $R$  ab. Wenn der Grundring nicht aus dem Kontext heraus klar ist (z. B. wenn zwei verschiedene Grundringe möglich sind), werden wir diese Abhängigkeit explizit machen, indem wir von  $R$ -linearen Derivationen statt einfach nur von Derivationen sprechen.

### Beispiele

1.)  $A = R[X], d = \frac{d}{dX}$  ist eine  $R$ -Derivation  $d : A \rightarrow A$ , definiert durch  $d(\sum_{i=0}^n a_i X^i) := \sum_{i=1}^n a_i i X^{i-1}$

**Beh.:** In dieser Situation gilt  $\text{Der}_R(A, A) = A \cdot d$

**Bew.:** Dass  $A \cdot d \subseteq \text{Der}_R(A, A)$  gilt, ist klar. Wir müssen also die umgekehrte Inklusion nachweisen.

Sei  $\delta : A \rightarrow A$  eine  $R$ -lineare Derivation. Sei  $f := \delta(X)$ .

Dann ist  $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 1 \cdot \delta(1) + 1 \cdot \delta(1) \Rightarrow \delta(1) = 0 \Rightarrow \forall r \in R : \delta(r) = 0$  (denn  $\delta$  ist  $R$ -linear).

Ferner ist  $\delta(X^2) = 2 \cdot X \cdot \delta(X) = 2 \cdot X \cdot f$ . Allgemeiner gilt  $\delta(X^n) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$  für jedes  $n \geq 1$  (Beweis durch Induktion nach  $n$ , mit Induktionsschritt  $\delta(X^n) = \delta(X X^{n-1}) = X \cdot \delta(X^{n-1}) + X^{n-1} \cdot \delta(X) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$ ). Da  $\delta$  eine  $R$ -lineare Abbildung ist, folgt hieraus  $\delta(\sum a_i X^i) = \sum a_i i X^{i-1} \cdot f$  für jede endliche Summe  $\sum a_i X^i$  mit  $a_i \in R$ . Daher ist  $\delta = f \cdot d$ , was zu zeigen war.

2.)  $A = R[[X]], d = \frac{d}{dX}$  wie in 1.) mit  $\infty$  statt  $n$ .

**Beh.:** Auch hier gilt  $\text{Der}_R(A, A) = A \cdot d$

**Bew.:** Wie in 1.) ist  $A \cdot d \subseteq \text{Der}_R(A, A)$  offensichtlich. Sei also  $\delta : A \rightarrow A$  eine  $R$ -lineare Derivation. Sei  $f := \delta(X)$ .

Wie in 1.) können wir zeigen, dass  $\delta(X^n) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$  für jedes  $n \geq 1$  gilt. Für jede Potenzreihe  $P \in A$  und jedes  $n \geq 1$  ist also  $\delta(X^n P) = X^n \delta(P) + P \underbrace{\delta(X^n)}_{=n \cdot X^{n-1} \cdot f} =$

$X^n \delta(P) + P n \cdot X^{n-1} \cdot f = X^{n-1} (\delta(P) + P n f)$  durch  $X^{n-1}$  teilbar.

Wie in 1.) können wir zeigen, dass  $\delta(\sum a_i X^i) = \sum a_i i X^{i-1} \cdot f$  für jede endliche Summe  $\sum a_i X^i$  mit  $a_i \in R$  gilt. Das heißt,  $\delta(S) = f \cdot d(S)$  für jedes Polynom  $S \in R[X]$ .

Sei nun  $Q \in A = R[[X]]$  eine Potenzreihe. Für jedes  $n \geq 1$  läßt sich  $Q$  schreiben als Summe  $Q = S + X^n P$ , wobei  $S \in R[X]$  ein Polynom und  $P \in A$  eine Potenzreihe ist. Damit ist  $\delta(Q) = \delta(S + X^n P) = \delta(S) + \delta(X^n P) \equiv \delta(S) \pmod{X^{n-1}}$  (denn  $\delta(X^n P)$  ist durch  $X^{n-1}$  teilbar). Andererseits ist  $d(Q) = d(S + X^n P) = d(S) + d(X^n P) \equiv d(S) \pmod{X^{n-1}}$  (denn  $d(X^n P)$  ist durch  $X^{n-1}$  teilbar). Somit ist  $\delta(Q) \equiv \delta(S) = f \cdot \underbrace{d(S)}_{\equiv d(Q) \pmod{X^{n-1}}} \equiv f \cdot d(Q) \pmod{X^{n-1}}$ . Da dies für alle  $n \geq 1$  gilt, muß folglich  $\delta(Q) =$

$f \cdot d(Q)$  sein. Da dies für alle Potenzreihen  $Q$  gilt, ist also  $\delta = f \cdot d$ , und wieder ist der Beweis vollendet.

3.)  $A = R[X_1, \dots, X_n], \partial_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$  ist Derivation genauso wie für 1.)

$\text{Der}_R(A, A)$  ist freier  $A$ -Modul mit Basis  $\partial_1, \dots, \partial_n$ .

Die in Beispiel 1.) observierte Tatsache, dass  $\delta(r) = 0$  für jedes  $r \in R$  ist, gilt allgemein für jede Derivation  $\delta : A \rightarrow M$  aus jeder kommutativen  $R$ -Algebra  $A$  in jeden  $A$ -Modul  $M$ . Insbesondere gilt also stets  $\delta(1) = 0$ .

**Proposition + Definition 1.21**

Der Funktor  $M \mapsto \text{Der}_R(A, M)$  ist „darstellbar“, d.h. es gibt einen  $A$ -Modul  $\Omega_{A/R}$  und eine ( $R$ -lineare) Derivation  $d : A \rightarrow \Omega_{A/R}$  mit folgender UAE:

Zu jedem  $A$ -Modul  $M$  und jeder ( $R$ -linearen) Derivation  $\delta : A \rightarrow M$  existiert genau eine  $A$ -lineare Abbildung  $\varphi : \Omega_{A/R} \rightarrow M$  mit  $\delta = \varphi \circ d$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \Omega_{A/R} \\ & \searrow \delta & \swarrow \exists! \varphi \\ & M & \end{array}$$

**Beweis**

Sei  $F$  der freie  $A$ -Modul mit Basis  $A$ , dabei sei  $X_f$  das zu  $f \in A$  gehörige Basiselement von  $F$ . Sei  $U$  der Untermodul von  $F$ , der erzeugt wird von allen

$$\left. \begin{array}{l} X_{f+g} - X_f - X_g \\ X_{\lambda f} - \lambda X_f \\ X_{f \cdot g} - f \cdot X_g - g \cdot X_f \end{array} \right\} \text{ für alle } f, g \in A, \lambda \in R$$

Sei  $\Omega_{A/R} := F/U$ , und definiere eine Abbildung  $d : A \rightarrow \Omega_{A/R}, f \mapsto [X_f] =: df$ . Diese Abbildung  $d$  ist eine Derivation nach Konstruktion („universelle Derivation“).

**UAE:** Sei  $M$   $A$ -Modul,  $\delta : A \rightarrow M$  Derivation. Sei  $\Phi : F \rightarrow M$  die  $A$ -lineare Abbildung mit  $\Phi(X_f) = \delta(f)$ . Dann ist  $U \subseteq \text{Kern}(\Phi)$ , weil  $\delta$  Derivation, d.h.  $\Phi$  induziert  $\varphi : F/U \rightarrow M$ .

**Beispiele**

Sei  $A = R[X_1, \dots, X_n]$ . Dann ist  $\Omega_{A/R}$  ein freier  $A$ -Modul mit Basis  $dX_1, \dots, dX_n$ .

*Beweis:* Für  $f = \sum_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n)} a_\nu X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n} \in A$  ( $a_\nu \in R$ ) ist  $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i \Rightarrow$  die  $dX_i$  erzeugen  $\Omega_{A/R}$ .

Nach [Prop. 1.21](#) ist  $\boxed{\text{Der}_R(A, A) = \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}, A)}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \Omega_{A/R} \\ & \searrow \delta & \swarrow \exists! \varphi \\ & A & \end{array}$$

Zu zeigen: die  $dX_i$  sind linear unabhängig.

Sei also  $\sum_{i=1}^n a_i dX_i = 0$  mit  $a_i \in A$ . Für jedes  $j$  ist  $\frac{\partial}{\partial X_j} : A \rightarrow A$  eine Derivation, und somit existiert genau eine lineare  $A$ -lineare Abbildung  $\varphi_j : \Omega_{A/R} \rightarrow A$  mit  $\frac{\partial}{\partial X_j} = \varphi_j \circ d$  (gemäß der UAE von  $d$ ). Aus  $\sum_{i=1}^n a_i dX_i = 0$  folgt (durch Anwendung ebendieser Abbildung  $\varphi_j$ ) nun

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial X_j} X_i = 0. \text{ Wegen } \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} X_i}_{=1 \text{ wenn } i=j \text{ und } 0 \text{ sonst}} = a_j \text{ ist also } a_j = 0. \text{ Da dies für jedes}$$

$j$  gezeigt ist, folgt hieraus die lineare Unabhängigkeit der  $dX_i$ .

**Beispiele**

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  offen (für ein  $n \geq 1$ ),  $A := \mathcal{C}^\infty(X)$  die  $\mathbb{R}$ -Algebra der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf  $X$ .

**Beh.:**  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(A, A)$  ist ein freier  $A$ -Modul mit Basis  $\partial_1, \dots, \partial_n$  (mit  $\partial_i := \frac{\partial}{\partial X_i}$  partielle Ableitung

nach  $X_i$ ).

Dann ist auch  $\Omega_{A/\mathbb{R}}$  freier  $A$ -Modul mit Basis  $dX_1, \dots, dX_n$ .

**Beh.1:** Für jedes  $x \in X$  wird das Ideal  $I_x = \{f \in A : f(x) = 0\}$  erzeugt von  $X_i - x_i$   $i = 1, \dots, n$  (Taylor-Entwicklung), wobei  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Sei nun  $\partial : A \rightarrow A$  Derivation. Zu zeigen:  $\partial = \sum_{i=1}^n \partial(X_i) \partial_i$ .

Setze  $\partial' := \partial - \sum_{i=1}^n \partial(X_i) \partial_i$ .

**Beh.2:** Für jedes  $x \in X$  ist  $\partial'(I_x) \subseteq I_x$ .

**Bew.2:** Sei  $f \in I_x$ . Also  $f = \sum_{i=1}^n g_i (X_i - x_i)$  (siehe Beh. 1) mit  $g_i \in A$ . Also ist  $\partial'(f) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\partial'(g_i)(X_i - x_i)}_{\in I_x} + \sum_{i=1}^n g_i \underbrace{\partial'(X_i - x_i)}_{=0, \text{ da } \partial_j(X_i - x_i) = \delta_{ij}} \in I_x$ . Also ist  $\partial'(I_x) \subseteq I_x$  gezeigt.

Sei nun  $g \in A, x \in X$ . Schreibe  $g = \underbrace{g - g(x)}_{\in I_x} + g(x) \Rightarrow \partial'(g) = \partial'(g - g(x)) \in I_x$

d.h.  $\partial'(g)(x) = 0 \Rightarrow \partial'(g) = 0 \Rightarrow \partial' = 0$ . Daher ist  $\partial = \sum_{i=1}^n \partial(X_i) \partial_i$ .

### Proposition 1.22

a)  $\Omega_{./R}$  ist ein Funktor  $R\text{-Alg} \rightarrow R\text{-Mod}$ .

#### Beweis

Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein  $R$ -Algebra-Homomorphismus. Wir suchen einen natürlichen  $R$ -Modulhomomorphismus  $d\varphi : \Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{B/R}$ . Wir wollen, daß  $d\varphi$  folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d_A} & \Omega_{A/R} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \exists! d\varphi \text{ } A\text{-linear} \\ B & \xrightarrow{d_B} & \Omega_{B/R} \end{array}$$

Die Abbildung  $d_B \circ \varphi : A \rightarrow \Omega_{B/R}$  erfüllt:

$$d_B \circ \varphi(\lambda \cdot a) = d_B(\lambda \varphi(a)) = \lambda d_B(\varphi(a)) \quad \forall \lambda \in R, a \in A.$$

$$d_B \circ \varphi(a_1 \cdot a_2) = d_B(\varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2)) = \varphi(a_1) \cdot d_B(\varphi(a_2)) + \varphi(a_2) \cdot d_B(\varphi(a_1)).$$

Die Abbildung  $d_B \circ \varphi$  ist also eine Derivation, wenn  $\Omega_{B/R}$  vermöge  $\varphi$  als  $A$ -Modul aufgefasst wird. Gemäß der UAE gibt es also genau einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $d\varphi : \Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{B/R}$ , für den obiges Diagramm kommutativ wird. Dadurch wird  $\Omega_{./R}$  zu einem Funktor.

b) Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein  $R$ -Algebra-Homomorphismus. Man kann den  $A$ -Modul  $\Omega_{A/R}$  aufwerten zum  $B$ -Modul durch  $\otimes_A B$ :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d_A} & \Omega_{A/R} \otimes_A B \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \exists! \alpha \text{ } B\text{-linear} \\ B & \xrightarrow{d_B} & \Omega_{B/R} \end{array}$$

(wobei die oberen horizontale Abbildung strenggenommen nicht  $d_A$ , sondern  $a \mapsto d_A(a) \otimes 1$  ist). Die Abbildung  $\alpha$  ist dabei durch  $\alpha(\omega \otimes b) = b \cdot d\varphi(\omega)$  definiert.

Betrachten wir  $B$  als  $A$ -Modul (statt als  $R$ -Modul), so liefert Proposition [Prop. 1.21](#) einen  $B$ -Modul  $\Omega_{B/A}$  und eine  $A$ -lineare Derivation  $d_{B/A} : B \rightarrow \Omega_{B/A}$  mit folgender UAE:

Zu jedem  $B$ -Modul  $M$  und jeder  $A$ -linearen Derivation  $\delta : B \rightarrow M$  existiert genau eine  $B$ -lineare Abbildung  $\eta : \Omega_{B/A} \rightarrow M$  mit  $\delta = \eta \circ d_{B/A}$ .

Nun können wir aber die UAE von  $d_B$  (nicht die von  $d_{B/A}$ ) auf den  $B$ -Modul  $\Omega_{B/A}$  und die  $R$ -lineare Derivation  $d_{B/A} : B \rightarrow \Omega_{B/A}$  anwenden. Dadurch erfahren wir, dass genau eine  $B$ -lineare Abbildung  $\beta : \Omega_{B/R} \rightarrow \Omega_{B/A}$  mit  $d_{B/A} = \beta \circ d_B$  existiert.

Für dieses  $\beta$  ist

$$\Omega_{A/R} \otimes_A B \xrightarrow{\alpha} \Omega_{B/R} \xrightarrow{\beta} \Omega_{B/A} \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von  $B$ -Moduln.

### Beweis

Dass  $\beta$  surjektiv ist, folgt leicht aus der Konstruktion von  $\Omega_{./..}$ .

Als nächstes zeigen wir  $\beta \circ \alpha = 0$  (d.h.  $\text{Bild}(\alpha) \subseteq \text{Kern}(\beta)$ ):

Wir haben  $d_{B/A}\varphi(a) = 0$  für jedes  $a \in A$ .

(Denn da  $d_{B/A}$  eine  $A$ -lineare Derivation ist, sendet sie alle „konstanten  $A$ -Funktionen“ auf 0.) Wegen  $d_{B/A} = \beta \circ d_B$  ist also  $(\beta \circ d_B \circ \varphi)(a) = 0$  für jedes  $a \in A$ . Da  $d_B \circ \varphi = \alpha \circ d_A$ , wird dies zu  $(\beta \circ \alpha \circ d_A)(a) = 0$ . Das heißt,  $\beta \circ \alpha = 0$  auf der Menge  $d_A(A)$ . Da der  $B$ -Modul  $\Omega_{A/R} \otimes_A B$  aber von  $d_A(A)$  erzeugt ist, und  $\beta \circ \alpha$  eine  $B$ -lineare Abbildung ist, folgt hieraus, dass  $\beta \circ \alpha = 0$  auf ganz  $\Omega_{A/R} \otimes_A B$  ist. Damit ist  $\text{Bild}(\alpha) \subseteq \text{Kern}(\beta)$  gezeigt.

Es bleibt nur noch,  $\text{Kern}(\beta) \subseteq \text{Bild}(\alpha)$  zu verifizieren.

Wir bezeichnen  $d_B$  mit  $d_{B/R}$ , um Verwechslungen mit  $d_{B/A}$  zu vermeiden.

Sei  $\omega = \sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) \in \text{Kern}(\beta)$  mit  $b_i, c_i \in B$ .

Aufgrund von  $d_{B/A} = \beta \circ d_{B/R}$  ist dann  $\beta(\omega) = \sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i)$ . Da  $\omega \in \text{Kern}(\beta)$  ist, ist also  $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i) = 0$ .

Nun sei an die Moduln  $F$  und  $U$  aus dem Beweis von [Prop. 1.21](#) erinnert, die dort in Abhängigkeit von einem Ring  $R$  und einem  $R$ -Modul  $A$  definiert wurden. Wir bezeichnen diese Moduln mit  $F_A$  und  $U_{A/R}$ , um die Abhängigkeit von  $A$  bzw. von  $A$  und  $R$  zu verdeutlichen. Indem wir die gleiche Konstruktion für  $B$  statt  $A$  durchführen, erhalten wir Moduln  $F_B$  und  $U_{B/R}$ , und wenn wir auch  $R$  durch  $A$  ersetzen, erhalten wir einen Modul  $U_{B/A}$ . So ist beispielsweise  $F_B$  der freie  $B$ -Modul mit Basis  $\{X_b : b \in B\}$ .

Aus  $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i) = 0$  in  $\Omega_{B/A} = F_B/U_{B/A}$  folgt nun  $\sum_{i=1}^n b_i X_{c_i} \in U_{B/A}$ . Nach Definition von  $U_{B/A}$  folgt hieraus  $\sum_i b_i X_{c_i} = \sum_j b_j \underbrace{(X_{f_j+g_j} - X_{f_j} - X_{g_j})}_{\in U_{B/R}} + \sum_k b'_k (X_{\varphi(\lambda_k)g_k} -$

$\varphi(\lambda_k)X_{g_k}) + \sum_l b''_l \underbrace{(X_{f_l g_l} - f_l X_{g_l} - g_l X_{f_l})}_{\in U_{B/R}}$  für gewisse  $b_j, b'_k, b''_l \in B$ ,  $f_j, f_l, g_k, g_j, g_l \in B$ ,

$\lambda_k \in A$ .

Projizieren wir diese Gleichung nach  $F_B/U_{B/R} = \Omega_{B/R}$ , so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) = \sum_k b'_k (d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)g_k) - \varphi(\lambda_k)d_{B/R}(g_k)).$$

Wegen  $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) = \omega$  wird dies zu

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_k b'_k (d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)g_k) - \varphi(\lambda_k)d_{B/R}(g_k)) \\ &= \sum_k b'_k (\varphi(\lambda_k)d_{B/R}(g_k) + g_k d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)) - \varphi(\lambda_k)d_{B/R}(g_k)) \\ &= \sum_k b'_k g_k d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)) = \alpha(\sum_k d\lambda_k \otimes b'_k g_k) \in \text{Bild}(\alpha). \end{aligned}$$

Damit ist  $\text{Kern}(\beta) \subseteq \text{Bild}(\alpha)$  nachgewiesen.



## §7 Der de Rham-Komplex

Sei  $A$  eine (kommutative)  $R$ -Algebra.

Setze  $\Omega_A := \Omega_{A/R}$  (definiert nach [Definition 1.21](#)). Dies ist ein  $A$ -Modul. Für jedes  $i \geq 0$  setze  $\Omega_A^i := \Lambda^i \Omega_A$  (wobei  $\Lambda^i \Omega_A$  die  $i$ -te äußere Potenz des  $A$ -Moduls – nicht des  $R$ -Moduls –  $\Omega_A$  bedeutet). Sei auch die Derivation  $d : A \rightarrow \Omega_A$  definiert wie in [Definition 1.21](#).

### Satz + Definition 3

- a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$  von  $R$ -linearen Abbildungen  $d_i : \Omega_A^i \rightarrow \Omega_A^{i+1}$  für alle  $i \geq 0$ , welche folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $d_i(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f d_i(\omega)$  für alle  $f \in A, \omega \in \Omega_A^i$ .
- (ii)  $d_{i+1} \circ d_i = 0$ .
- (iii)  $d_0 = d$ .

- b) Die Sequenz

$$A \xrightarrow{d_0} \Omega_A \xrightarrow{d_1} \Omega_A^2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega_A^n \xrightarrow{d_n} \dots$$

heißt **de Rham-Komplex** zu  $A$ , und wird mit  $\Omega_A^\bullet$  bezeichnet.

- c) Für jedes  $i \geq 0$  heißt  $H_{dR}^i(A) := \text{Kern}(d_i) / \text{Bild}(d_{i-1})$  ( $R$ -Modul) der  $i$ -te de Rham-Kohomologie-Modul von  $A$ . Dabei sei  $d_{-1} = 0$ , d.h.  $H_{dR}^0(A) = \text{Kern}(d) = R$ .

### Beweis

**1. Fall:** Es gilt  $A = R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ .

Dann ist  $\Omega_A^k$  freier  $A$ -Modul mit Basis  $dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .

Für jedes  $f \in A$  ist  $df = d_A f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i = \sum_{i=1}^n \partial_i f dX_i$ .

**Existenz der Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$ :** Erstmal läßt sich  $d_0$  definieren durch  $d_0 = d$ . Damit ist (iii) erfüllt, und (i) gilt für  $i = 0$  weil  $d$  eine Derivation ist.

Nun definieren wir  $d_1$  durch  $d_1(\sum_{i=1}^n f_i dX_i) = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dX_i \in \Omega_A^2$  für alle  $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$ .

Konkretes Beispiel:  $d_1(f_1 dX_1 + f_2 dX_2)$

$$= \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_1}{\partial X_2} dX_2 \right) \wedge dX_1 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_2}{\partial X_2} dX_2 \right) \wedge dX_2 = \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_1} - \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \right) dX_1 \wedge dX_2$$

(denn  $dX_1 \wedge dX_1 = 0$ ,  $dX_2 \wedge dX_2 = 0$  und  $dX_2 \wedge dX_1 = -dX_1 \wedge dX_2$ ).

Allgemein definieren wir  $d_k$  für jedes  $k \geq 0$  durch:

$$d_k \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k} \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d(f_{i_1 \dots i_k}) \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$$

für alle Tupel  $(f_{i_1 \dots i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$  von Elementen von  $A$ .

Diese Definition von  $d_k$  stimmt in den Fällen  $k = 0$  und  $k = 1$  überein mit den oben gegebenen Definitionen von  $d_0$  und  $d_1$ .

Diese  $d_k$  erfüllen (i), denn:

Sei  $\omega = \sum_{\underline{i}} f_{\underline{i}} dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k} \in \Omega_A^k$  (wobei alle  $f_{\underline{i}}$  in  $A$  liegen) und sei  $f \in A$ . Hierbei ist  $\underline{i}$  eine Abkürzung für ein  $k$ -Tupel  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  natürlicher Zahlen, welches  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  erfüllt. Dann ist

$$\begin{aligned} d_k(f\omega) &= \sum_{\underline{i}} d(f f_{\underline{i}}) \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k} \\ &= \underbrace{\sum_{\underline{i}} f df_{\underline{i}} \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}}_{= f \cdot d_k(\omega)} + \underbrace{\sum_{\underline{i}} f_{\underline{i}} df \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}}_{= df \wedge \omega} \end{aligned}$$

$$= f \cdot d_k(\omega) + df \wedge \omega.$$

Damit ist (i) für unsere Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$  bewiesen.

Jetzt zeigen wir, dass (ii) gilt. Sei  $k \geq 0$ . Wir müssen zeigen, dass  $d_{k+1} \circ d_k = 0$  ist.

Dazu reicht es aus, zu beweisen, dass  $(d_{k+1} \circ d_k)(fdX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = 0$  für alle  $f \in A$  und alle  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$  gilt. Betrachten wir nun ein solches  $f$  und solche  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ . Bezeichne  $dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}$  mit  $\omega$ . Dann gilt  $d_k \omega = d_k(dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = 0$  (nach der Definition von  $d_k$ , denn  $d(1) = 0$ ).

Wegen  $dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k} = \omega$  ist nun

$$\begin{aligned} (d_{k+1} \circ d_k)(fdX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) &= (d_{k+1} \circ d_k)(f\omega) = d_{k+1}(d_k(f\omega)) \stackrel{(i)}{=} d_k(d_{k+1}(df \wedge \omega + f \underbrace{d_k \omega}_{=0})) \\ &= d_{k+1}(df \wedge \omega) = d_{k+1}\left(\left(\sum_{i=1}^n \partial f_i dX_i\right) \wedge \omega\right) = \sum_{i=1}^n d_{k+1}(\partial f_i \cdot dX_i \wedge \omega) \\ &\stackrel{\text{nach Definition von } d_{k+1}}{=} \sum_{i=1}^n d(\partial_i f) \wedge dX_i \wedge \omega \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega = \sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega \\ &= \sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2; i=j} \partial_j(\partial_i f) \underbrace{dX_j \wedge dX_i}_{=dX_j \wedge dX_j=0 \text{ (da } i=j)} \wedge \omega + \sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2; i \neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega \\ &= \underbrace{\sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2; i=j} \partial_j(\partial_i f) 0}_{=0} + \sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2; i \neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega \\ &= \sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2; i \neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega. \end{aligned}$$

Doch die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist 0, da sich ihre Addenden paarweise gegeneinander kürzen (nämlich kürzt sich der Addend zu  $(i, j)$  jeweils mit dem Addenden zu  $(j, i)$ , weil  $\partial_j(\partial_i f) = \partial_i(\partial_j f)$  und  $dX_i \wedge dX_j = -dX_j \wedge dX_i$  für alle  $i$  und  $j$  gilt). Somit ist auch die linke Seite dieser Gleichung 0; das heißt,

$$(d_{k+1} \circ d_k)(fdX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = 0.$$

Damit ist gezeigt, dass (ii) gilt. Die Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$ , die wir konstruiert haben, erfüllt mithin alle Eigenschaften (i), (ii) und (iii); damit ist der Beweis der Existenz vollständig.

**Eindeutigkeit der Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$ :** Gemäß (iii) ist  $d_0 = d$  vorgegeben.

Zur Eindeutigkeit von  $d_1$ : Wegen (ii) ist  $d_1(dX_i) = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Wegen (i) ist  $d_1(fdX_i) = df \wedge dX_i + f \underbrace{d_1(dX_i)}_{=0} = df \wedge dX_i$  für alle  $f \in A$  und  $i = 1, \dots, n$ .

Dadurch ist die Abbildung  $d_1$  eindeutig determiniert.

Zur Eindeutigkeit von  $d_2$ : Zuerst einmal gilt  $d_2(dX_{i_1} \wedge dX_{i_2}) = 0$  für alle  $i_1$  und  $i_2$ . (Dies folgt aus (ii), da  $dX_{i_1} \wedge dX_{i_2} = d_1(X_{i_1} dX_{i_2}) = d_1(-X_{i_2} dX_{i_1})$ .)

Wegen (i) folgt hieraus wiederum  $d_2(fdX_{i_1} \wedge dX_{i_2}) = df \wedge dX_{i_1} \wedge dX_{i_2}$  für alle  $f \in A$ . Hierdurch

ist  $d_2$  eindeutig determiniert.

Dieses Argument läßt sich leicht zu einem Beweis der Gleichheit  $d_k(f dX_{i_1} \wedge dX_{i_2} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}) = df \wedge dX_{i_1} \wedge dX_{i_2} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$  für alle  $k \geq 0$ ,  $f \in A$  und  $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  verallgemeinern. (Der Beweis benötigt Induktion über  $k$ .) Durch diese Gleichheit ist  $d_k$  eindeutig bestimmt. Also ist die Eindeutigkeit der Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$  gezeigt. Der Beweis in Fall 1 ist somit komplett.

**2. Fall:**  $A$  ist beliebige  $R$ -Algebra.

Schreibe  $A$  als Faktoralgebra eines Polynomrings  $P$  (in eventuell unendlich vielen Variablen) über  $R$ .

vornehm: Es gibt einen surjektiven  $R$ -Algebren-Homomorphismus  $\varphi : P \rightarrow A$ .

$\Omega$  ist Funktor,  $\Lambda^i$  auch,  $\varphi$  induziert also einen Homomorphismus  $\varphi_i : \Omega_P^i \rightarrow \Omega_A^i$ .

Da wir unseren Satz bereits im 1. Fall bewiesen haben, wissen wir, dass es eine eindeutig bestimmte Folge  $(d_{i,P})_{i \geq 0}$  von  $R$ -linearen Abbildungen  $d_{i,P} : \Omega_P^i \rightarrow \Omega_P^{i+1}$  für alle  $i \geq 0$  gibt, die die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) erfüllt.

Wir wollen nun (für festes  $i$ ) eine  $R$ -lineare Abbildung  $d_{i,A} : \Omega_A^i \rightarrow \Omega_A^{i+1}$  konstruieren, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_P^i & \xrightarrow{d_{i,P}} & \Omega_P^{i+1} \\ \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_{i+1} \\ \Omega_A^i & \xrightarrow{d_{i,A}} & \Omega_A^{i+1} \end{array}$$

Es gilt:

- $\text{Kern}(\varphi_i) \subseteq \text{Kern}(\varphi_{i+1} \circ d_{i,P})$ . [Warum?]
- $\varphi_i$  ist surjektiv (Ü4A3a für  $i = 1$ ).

Dann induziert  $d_{i,P}$  eine Abbildung  $d_{i,A} : \Omega_A^i \rightarrow \Omega_A^{i+1}$ , für welche obiges Diagramm kommutativ wird.

Die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) werden (aufgrund der Surjektivität von  $\varphi_i$ ) von  $P$  auf  $A$  „vererbt“. Damit ist die Existenz der Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$  gezeigt. Die Eindeutigkeit einer solchen Folge ergibt sich genauso wie im 1. Fall, wobei hier  $X_1, \dots, X_n$  durch Algebra-Erzeugenden von  $A$  ersetzt werden.

### Beispiele

$A = K[X_1, \dots, X_n]$ ,  $\text{char}(K) = 0$ .

**Beh.:**  $H_{dR}^i(A) = 0$  für alle  $i > 0$ .

**Bew.:**  $i = n$ : Ü4A2

$i > n$ :  $\Omega_A^i = 0$

$i = 1$ : Sei  $\omega = \sum_{\nu=1}^n f dX_\nu \in \text{Kern}(d_1)$ , also:  $0 = \sum_{\nu=1}^n df_\nu \wedge dX_\nu = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} dX_\mu \wedge dX_\nu$

Für alle  $\nu \neq \mu$  ist also  $\frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial X_\nu}$  (da  $dX_\mu \wedge dX_\nu = -dX_\nu \wedge dX_\mu$ ).

Zu zeigen:  $\omega = df$  für ein  $f \in A$ , d.h.  $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial X_\nu}$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ .

Schreibe  $f_\nu = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}^{(\nu)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ .

Ansatz:  $f = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_\nu} = \sum_{\underline{i}=(i_1, \dots, i_n), i_\nu \geq 1} a_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$

Wähle also  $a_{\underline{i}}$  so, dass  $i_\nu \cdot a_{\underline{i}} = a_{\underline{i}-e_\nu}^{(\nu)}$ ,  $e_\nu = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_\nu, 0, \dots, 0)$

Es bleibt zu zeigen:  $\frac{1}{i_\nu} a_{\underline{i}-e_\nu}^{(\nu)} = \frac{1}{i_\mu} a_{\underline{i}-e_\mu}^{(\mu)}$  für alle  $\nu \neq \mu$ .

Äquivalent:  $(*) \ i_\mu \cdot a_{\underline{i}-e_\nu}^{(\nu)} = i_\nu \cdot a_{\underline{i}-e_\mu}^{(\mu)}$

Beweis von  $(*)$ :  $\sum_{\underline{i}} i_\mu a_{\underline{i}-e_\nu} X^{i-e_\mu-e_\nu} = \sum_{\underline{i}, i_\mu \geq 1} i_\mu a_{\underline{i}}^{(\nu)} X^{i-e_\mu} = \sum_{\underline{i}, i_\nu \geq 1} i_\nu a_{\underline{i}}^{(\mu)} X^{i-e_\nu}$   
 $= \sum_{\underline{i}} i_\nu a_{\underline{i}-e_\nu}^{(\mu)} X^{i-e_\nu-e_\mu}$ , da  $\frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial X_\nu}$ .

### Beispiele

$$A = K[X, X^{-1}] = K[X, Y]/(XY - 1) = \{f = \sum_{\nu=-n_0}^{n_1} a_\nu X^\nu : a_\nu \in K, n_0, n_1 \in \mathbb{N}\}$$

$$\Omega_A = AdX, df = (\sum_{\nu \neq 0} \nu a_\nu X^{\nu-1})dX \Rightarrow \Omega^2 = 0 \Rightarrow \text{Bild}(d) = \{f dx : f \in A, a_{-1} = 0\}, \text{ d.h.}$$

$$H_{dR}^1(A) = K \frac{dx}{x}$$