8. Häufungswerte und Teilfolgen

Erinnerung: $a_n \to a \iff \forall \varepsilon > 0$ gilt: $a_n \in U_\varepsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

Definition (Häufungwerte)
(a_n) sei eine Folge und $\alpha \in \mathbb{R}$. α heißt ein **Häufungswert** (HW) von $(a_n) :\iff \forall \varepsilon > 0$ gilt: $a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. $\mathscr{H}(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha$ ist ein Häufungswert von $(a_n)\}$.

Beispiele:

(1) $a_n = (-1)^n$. $a_{2n} = 1, a_{2n-1} = -1$. Sei $\varepsilon > 0 : a_{2n} \in U_\varepsilon(1)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(1)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \in \mathscr{H}(a_n)$. Analog: $a_n \in U_\varepsilon(-1)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \Rightarrow -1 \in \mathscr{H}(a_n)$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $1 \neq \alpha \neq -1$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $1, -1 \notin U_\varepsilon(\alpha) \Rightarrow a_n \notin U_\varepsilon(\alpha)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \notin \mathscr{H}(a_n)$. Fazit: $\mathscr{H}(a_n) = \{1; -1\}$.

(2) $a_n = n$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \alpha + \varepsilon \Rightarrow n > \alpha + \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \notin U_\varepsilon(\alpha)\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \alpha \notin \mathscr{H}(a_n)$. Fazit: $\mathscr{H}(a_n) = \emptyset$.

(3) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Also: $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \ldots\}$.
Behauptung: $\mathscr{H}(a_n) = \mathbb{R}$.
Beweis: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. $\alpha_n := \alpha + \frac{\varepsilon}{n+1}\ (n \in \mathbb{N}), \alpha_n \in U_\varepsilon(\alpha)\ \forall n \in \mathbb{N}$.
$2.4 \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : \alpha_2 < r < \alpha_1$ (dann: $r \in U_\varepsilon(\alpha)$); $\exists n_1 \in \mathbb{N} : r = a_{n_1}$.
Also: $a_{n_1} \in U_\varepsilon(\alpha)$. $2.4 \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : \alpha_3 < a_{n_2} < \alpha_2$. Dann: $n_2 \neq n_1$. $2.4 \Rightarrow \exists n_3 \in \mathbb{N} : \alpha_4 < a_{n_r} < \alpha_3$ und $n_3 \neq n_2, n_3 \neq n_1$. Etc.
Wir erhalten so eine Folge von Indices $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ in $\mathbb{N}$ mit $a_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha)$ und $n_k \neq n_j$ für $k \neq j$.
$\Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \in \mathscr{H}(a_n)$.

Definition (Teilfolge)
Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $(n_1, n_2, \ldots)$ sei eine Folge in $\mathbb{N}$ mit: $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Dann heißt $(a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ eine **Teilfolge** (TF) von (a_n).

Beispiele:

(1) $n_k = 2k : (a_2, a_4, a_6, \cdots)$ ist eine Teilfolge von (a_n).

(2) $n_k = 2k - 1 : (a_1, a_3, a_5, \cdots)$ ist eine Teilfolge von (a_n).

(3) $n_k = k^2 : (a_1, a_4, a_9, \cdots)$ ist eine Teilfolge von (a_n).

(4) $(a_1, a_3, a_2, a_4, a_5, a_7, \cdots)$ ist *keine* Teilfolge.

Satz 8.1 (Sätze zu Teilfolgen)

(1) Sei (a_n) eine Folge und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann: $\alpha \in \mathscr{H}(a_n) \iff$ Es existiert eine TF (a_{n_k}) von (a_n) mit: $a_{n_k} \to \alpha\ (k \to \infty)$

(2) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so existert eine Folge (r_k) in $\mathbb{Q}$: $r_k \to \alpha$ $(k \to \infty)$

(3) Ist (a_n) konvergent und $a := \lim a_n \implies \mathscr{H}(a_n) = \{a\}$. Ist (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n), so ist (a_{n_k}) konvergent und $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$

Beweis

(1) **„$\implies$“:** Sei $\alpha \in \mathscr{H}(a_n)$. Zu $\varepsilon = 1$ existiert $n_1 \in \mathbb{N}$: $a_{n_1} \in U_1(\alpha)$.
Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existiert $n_2 \in \mathbb{N}$: $a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ und $n_2 > n_1$
Zu $\varepsilon = \frac{1}{3}$ existiert $n_2 \in \mathbb{N}$: $a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\alpha)$ und $n_3 > n_2$. etc
Wir erhalten so eine Teilfolge von (a_{n_k}) von (a_n) mit $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, also: $|a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbb{N} \implies a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$.
„$\Leftarrow$“: Sei (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n) und $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$. Sei $\varepsilon > 0 \implies \exists k_0 \in \mathbb{N}$: $a_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha)$ $\forall k > k_0 \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \implies \alpha \in \mathscr{H}(a_n)$

(2) Sei $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}$. Bekannt: $\mathrm{H}(a_n) = \mathbb{R}$. Also: $\alpha \in \mathscr{H}(a_n) \overset{(1)}{\implies}$ Behauptung.

(3) Klar: $a \in \mathscr{H}(a_n)$
Sei (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n) und $\varepsilon > 0$. $a = \lim a_n \implies a_n \in U_\varepsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$ ffa $k \in \mathbb{N} \implies a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$. Aus (1) folgt noch $\mathrm{H}(a_n) = a$. ∎

Hilfssatz (Monotone Teilfolge)
Sei (a_n) eine Folge. Dann enthält (a_n) eine *monotone* Teilfolge.

Beweis
$m \in \mathbb{N}$ heißt *niedrig* (für (a_n)) $:\iff a_n \geq a_m$ $\forall n \geq m$.

Fall 1: Es existieren unendlich viele niedrige Indices $n_1, n_2, n_3, \dots$. etwa: $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ (s. 2.3!). Sei $k \in \mathbb{N}$: n_k ist niedrig. $n_{k+1} > n_k \implies a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k} \implies$ die Teilfolge (a_{n_k}) ist monoton wachsend.

Fall 2: Es gibt höchstens endlich viele niedrige Indices $\implies \exists m \in \mathbb{N}$: $m, m+1, m+2, \dots$ sind alle nicht niedrig $\implies n_3 > n_2 : a_{n_3} < a_{n_2}$ etc.
Wir erhalten so eine mononte Teilfolge (a_{n_k}). ∎

Satz 8.2 (Satz von Bolzano-Weierstraß)
(a_n) sei eine beschränkte Folge. Dann $\mathrm{H}(a_n) \neq \emptyset$.

Beweis
$\exists c > 0 : |a_n| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Hilfssatz $\implies$ (a_n) enthält eine monotone Teilfolge (a_{n_k}). $|a_{n_k}| \leq c$ $\forall k \in \mathbb{N}$. (a_{n_k}) ist aber schränkt. 6.3 $\implies$ (a_{n_k}) ist konvergent. $\alpha := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. 8.1(1) $\implies \alpha \in \mathscr{H}(a_n)$. ∎