

## 8. Extremwerte

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$

### Definition

- (1)  $f$  hat in  $x_0$  ein **lokales Maximum** :  $\iff \exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0) \ \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ .  
 $f$  hat in  $x_0$  ein **lokales Minimum** :  $\iff \exists \delta > 0 : f(x) \geq f(x_0) \ \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ .  
**lokales Extremum** = lokales Maximum oder lokales Minimum
- (2) Ist  $D$  offen,  $f$  in  $x_0$  partiell differenzierbar und  $\text{grad } f(x_0) = 0$ , so heißt  $x_0$  ein stationärer Punkt.

### Satz 8.1 (Nullstelle des Gradienten)

Ist  $D$  offen und hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Extremum und ist  $f$  in  $x_0$  partiell differenzierbar, dann ist  $\text{grad } f(x_0) = 0$ .

### Beweis

$f$  habe in  $x_0$  ein lokales Maximum. Also  $\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$  und  $f(x) \leq f(x_0) \ \forall x \in U_\delta(x_0)$ . Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Dann:  $x_0 + te_j \in U_\delta(x_0)$  für  $t \in (-\delta, \delta)$ .  $g(t) := f(x_0 + te_j)$  ( $t \in (-\delta, \delta)$ ).  $g$  ist differenzierbar in  $t = 0$  und  $g'(0) = f_{x_j}(x_0)$ .  $g(t) = f(x_0 + te_j) \leq f(x_0) = g(0) \ \forall t \in (-\delta, \delta)$ . Analysis 1, 21.5  $\implies g'(0) = 0 \implies f_{x_j}(x_0) = 0$  ■

### Satz 8.2 (Definitheit und Extremwerte)

Sei  $D$  offen,  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$  und  $\text{grad } f(x_0) = 0$ .

- (i) Ist  $H_f(x_0)$  positiv definit  $\implies f$  hat in  $x_0$  ein lokales Minimum.
- (ii) Ist  $H_f(x_0)$  negativ definit  $\implies f$  hat in  $x_0$  ein lokales Maximum.
- (iii) Ist  $H_f(x_0)$  indefinit  $\implies f$  hat in  $x_0$  kein lokales Extremum.

### Beweis

- (i), (ii)  $A := H_f(x_0)$  sei positiv definit oder negativ definit oder indefinit. Sei  $\varepsilon > 0$  wie in 7.2.  $f \in C^2(D, \mathbb{R}) \implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$  und  $(*) \ |f_{x_j x_k}(x) - f_{x_j x_k}(x_0)| \leq \varepsilon \ \forall x \in U_\delta(x_0)$  ( $j, k = 1, \dots, n$ ). Sei  $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ ,  $h := x - x_0 \implies x = x_0 + h$ ,  $h \neq 0$  und  $S[x_0, x_0 + h] \subseteq U_\delta(x_0)$  6.7  $\implies \exists \eta \in [0, 1] : f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{h \cdot \text{grad } f(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2} Q_B(h)$ , wobei  $B = H_f(x_0 + \eta h)$ . Also:  $(**) \ f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} Q_B(h)$ .

$A$  sei positiv definit (*negativ definit*)  $\xrightarrow{7.2} B$  ist positiv definit (*negativ definit*).  $\xrightarrow{h \neq 0}$   
 $Q_B(h) \stackrel{(<)}{>} 0 \xrightarrow{(**)} f(x) \stackrel{(<)}{>} f(x_0) \implies f$  hat in  $x_0$  ein lokales Minimum (*Maximum*).

## 8. Extremwerte

- (iii)  $A$  sei indefinit und es seien  $u, v \in \mathbb{R}^n$  wie in 7.2. Wegen 7.1 OBdA:  $\|u\| = \|v\| = 1$ . Dann:  
 $x_0 + tu, x_0 + tv \in U_\delta(x_0)$  für  $t \in (-\delta, \delta)$ . Sei  $t \in (-\delta, \delta), t \neq 0$ . Mit  $h := t \overset{(v)}{u}$  folgt aus 7.2  
 und (\*\*):  $f(x_0 + t \overset{(v)}{u}) = f(x_0) + \frac{1}{2} Q_B(t \overset{(v)}{u}) = f(x_0) + \frac{t^2}{2} \underbrace{Q_B(\overset{(v)}{u})}_{>0/<0 \text{ (7.2)}} \overset{(>)}{<} f(x_0) \implies f$  hat  
 in  $x_0$  kein lokales Extremum. ■

### Beispiele:

- (1)  $D = \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - 5$ .  $f_x = 2x - 2y, f_y = 2y - 2x$ ;  $\text{grad } f(x, y) = (0, 0) \iff x = y$ . Stationäre:  $(x, x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

$$f_{xx} = 2, f_{xy} = -2 = f_{yx}, f_{yy} = 2 \implies H_f(x, x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(x, x) = 0 \implies H_f(x, x)$  ist weder pd, noch nd, noch id.

Es ist  $f(x, y) = (x - y)^2 - 5 \geq -5 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  und  $f(x, x) = -5 \forall x \in \mathbb{R}$ .

- (2)  $D = \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ .  
 $f_x = 3x^2 - 12y = 3(x^2 - 4y), f_y = -12x + 24y^2 = 12(-x + 2y^2)$ .  $\text{grad } f(x, y) = (0, 0) \iff x^2 = 4y, x = 2y^2 \implies 4y^4 = 4y \implies y = 0 \text{ oder } y = 1 \implies (x, y) = (0, 0) \text{ oder } (x, y) = (2, 1)$

$$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -12 = f_{yx}, f_{yy} = 48y. H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(0, 0) = -144 < 0 \implies H_f(0, 0)$  ist indefinit  $\implies f$  hat in  $(0, 0)$  kein lokales Extremum.

$$H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$$

$12 > 0, \det H_f(2, 1) > 0 \implies H_f(2, 1)$  ist positiv definit  $\implies f$  hat in  $(2, 1)$  ein lokales Minimum.

- (3)  $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, y \leq -x + 3\}, f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$ . Bestimme  $\max f(K), \min f(K)$ .  $f(x, y) = xy(3 - x - y)$ .  $K = \partial K \cup K^\circ$ .  $K$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\xrightarrow{3.3} \exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K : \max f(K) = f(x_1, y_1), \min f(K) = f(x_2, y_2)$ .  $f \geq 0$  auf  $K$ ,  $f = 0$  auf  $\partial K$ , also  $\min f(K) = 0$ .  $f$  ist nicht konstant  $\implies f(x_2, y_2) > 0 \implies (x_2, y_2) \in K^\circ \xrightarrow{8.1} \text{grad } f(x_1, x_2) = 0$ . Nachrechnen:  $(x_2, y_2) = (1, 1); f(1, 1) = 1 = \max f(K)$ .