14. Stammfunktionen

In diesem Paragraphen sei stets: $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$, G ein *Gebiet* und $f = (f_1, \dots, f_n) : G \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Definition
Eine Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$ heißt eine **Stammfunktion (SF) von f auf G** $:\iff$ φ ist auf G partiell differenzierbar und $\operatorname{grad}\varphi = f$ auf G. Also: $f_{x_j} = f_j$ auf G $(j = 1, \dots, n)$.

Bemerkung:

(1) Ist φ eine Stammfunktion von f auf G $\implies$ $\operatorname{grad}\varphi = f$ $\implies$ $\varphi \in C^1(G, \mathbb{R})$ $\overset{5.3}{\implies}$ φ ist auf G differenzierbar und $\varphi' = f$ auf G.

(2) Sind φ_1, φ_2 Stammfunktionen von f auf G $\overset{(1)}{\implies}$ $\varphi_1' = \varphi_2'$ auf G $\overset{6.2}{\implies}$ $\exists c \in \mathbb{R} : \varphi_1 = \varphi_2 + c$ auf G

(3) Ist $n = 1$ $\implies$ G ist ein offenes Intervall. AI, 23.14 $\implies$ *jedes* stetige $f : G \to \mathbb{R}$ besitzt auf G eine Stammfunktion! Im Falle $n \geq 2$ ist dies *nicht* so.

Beispiele:

(1) $G = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, -x)$.

Annahme: f besitzt auf $\mathbb{R}^2$ die Stammfunktion φ. Dann: $\varphi_x = y$, $\varphi_y = -x$ auf G $\implies$ $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $\varphi_{xy} = 1 \neq -1 = \varphi_{yx}$. Widerspruch zu 4.1. Also: f besitzt auf $\mathbb{R}^2$ *keine* Stammfunktion.

(2) $G = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x - y)$.

Ansatz für eine Stammfunktion φ von f: $\varphi_x = y$ $\implies$ $\varphi = xy + c(y)$, c differenzierbar, $\implies$ $\varphi_y \overset{!}{=} x + c'(y) = x - y$ $\implies$ $c'(y) = -y$, etwa $c(y) = -\frac{1}{2}y^2$. Also: $\varphi(x, y) = xy - \frac{1}{2}y^2$. Probe: $\varphi_x = y$, $\varphi_y = x - y$, also: $\operatorname{grad}\varphi = f$. φ ist also eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{R}^n$.

Satz 14.1 (Hauptsatz der mehrdimensionalen Integralrechnung)
f besitzt auf G die Stammfunktion φ; $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\Gamma_\gamma \subseteq G$. Dann:

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

Das heißt: $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab.

Ist γ *geschlossen*, das heißt $\gamma(a) = \gamma(b)$, dann gilt $\int_\gamma f(x) \cdot dx = 0$.

Beweis
O.B.d.A.: γ ist stetig differenzierbar. $\Phi(t) := \varphi(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$. Φ ist stetig differenzierbar und $\Phi'(t) = \varphi'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)$ Dann: $\int_\gamma f(x) \cdot dx \overset{13.1}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \Phi'(t) dt \overset{\text{AI}}{=} \Phi(b) - \Phi(a) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$. ■

Hilfssatz 14.2
Es seien $x_0, y_0 \in G$. Dann existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg γ mit: $\Gamma_\gamma \subseteq G$ und Anfangspunkt von $\gamma = x_0$ und Endpunkt von $\gamma = y_0$.

Beweis
G Gebiet $\implies \exists z_0, z_1, \ldots, z_m \in G : S[z_0, \ldots, z_m] \subseteq G, z_0 = x_0, z_m = y_0$.

$\gamma_j(t) := z_{j-1} + t(z_j - z_{j-1})$, $(t \in [0, 1])$, $(j = 1, \ldots, n)$. Dann:$\Gamma_{\gamma_j} = S[z_{j-1}, z_j] \implies \Gamma_{\gamma_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\gamma_m} = S[z_0, \ldots, z_m] \subseteq G$. 13.4 $\implies \exists \gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ stückweise stetig differenzierbar $\implies \Gamma_\gamma = S[z_0, \ldots, z_m] \subseteq G$. ■

Definition
$\int f(x) \cdot \mathrm{d}x$ heißt **in G wegunabhängig** (wu) $:\iff$ für je zwei Punkte $x_0, y_0 \in G$ gilt: für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma_\gamma \subseteq G$, $\gamma(a) = x_0$ und $\gamma(b) = y_0$ hat das Integral $\displaystyle\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x$ stets denselben Wert. In diesem Fall: $\displaystyle\int_{x_0}^{y_0} f(x) \cdot \mathrm{d}x := \int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x$.

14.4 lautet dann: besitzt f auf G die Stammfunktion $\varphi \implies \displaystyle\int f(x) \cdot \mathrm{d}x$ ist in G wegunabhängig und $\int_{x_0}^{y_0} = \varphi(y_0) - \varphi(x_0)$ (Verallgemeinerung von Analysis 1, 23.5).

Satz 14.3 (Wegunabhängigkeit, Existenz von Stammfunktionen)
f besitzt auf G eine Stammfunktion $\iff \int f(x) \cdot \mathrm{d}x$ ist in G wegunabhängig.
In diesem Fall: ist $x_0 \in G$ und $\varphi : G \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$\varphi(z) = \int_{x_0}^{z} f(x) \cdot \mathrm{d}x \ (z \in G) \ (*)$$

Dann ist φ eine Stammfunktion von f auf G.

Beweis
„ $\implies$ “: 14.1 „$\Leftarrow$“: Sei $x_0 \in G$ und φ wie in $(*)$. Zu zeigen: φ ist auf G differenzierbar und $\varphi' = f$ auf G. Sei $z_0 \in G, h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ und $\|h\|$ so klein, dass $z_0 + th \in G \ \forall t \in [0, 1]$. $\gamma(t) := z_0 + th \ (t \in [0, 1]), \Gamma_\gamma = s[z_0, z_0 + h] \subseteq G$. $\rho(h) := \frac{1}{\|h\|}(\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0) - f(z_0) \cdot h)$. Zu zeigen: $\rho(h) \to 0$ $(h \to 0)$. 14.2 $\implies$ es existieren stückweise stetig differenzierbare Wege γ_1, γ_2 mit: $\Gamma_{\gamma_1}, \Gamma_{\gamma_2} \subseteq G$. Anfangspunkt von $\gamma_1 = x_0$ =Anfangspunkt von γ_2. Endpunkt von $\gamma_1 = z_0$, Endpunkt von $\gamma_2 = z_0 + h$. Sei $\gamma_3 \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \gamma)$ stückweise stetig differenzierbar (13.4!). Dann:

$$\underbrace{\int_{\gamma_3} f(x) \cdot \mathrm{d}x}_{=\varphi(z_0+h)} = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(x) \cdot \mathrm{d}x}_{=\varphi(z_0)} + \int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

$\displaystyle\int f(x) \cdot \mathrm{d}x$ ist wegunabhängig in $G \implies$

$$\int_{\gamma_3} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{\gamma_2} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \varphi(z_0 + h) \implies \varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0) = \int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Es ist:

$$\int_\gamma f(z_0)\cdot \mathrm{d}x = \int_0^1 f(z_0)\cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{=h}\mathrm{d}t = f(z_0)\cdot h$$

$$\implies \rho(h) = \frac{1}{\|h\|}\int_\gamma (f(x)-f(z_0))\mathrm{d}x$$

$$\implies |\rho(h)| = \frac{1}{\|h\|}\left|\int_\gamma f(x)-f(z_0)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq \frac{1}{\|h\|}\underbrace{L(\gamma)}_{=\|h\|}\underbrace{\max\{\|f(x)-f(z_0)\| : x\in\Gamma_\gamma\}}_{=\|f(x_n)-f(z_0)\|}$$

wobei $x_n \in \Gamma_\gamma = S[z_0, z_0+h] \implies |\rho(h)| \leq \|f(x_n)-f(z_0)\|$. Für $h\to 0 : x_n \to z_0 \xRightarrow{\text{f stetig}} \|f(x_n)-f(z_0)\| \to 0 \implies \rho(h)\to 0$. ■

Satz 14.4 (Integrabilitätsbedingungen)
Sei $f = (f_1,\dots,f_n) \in C^1(G,\mathbb{R}^n)$. Besitzt f auf G die Stammfunktion $\varphi \implies$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ auf } G \ (j,k = 1,\dots,n)$$

(**Integrabilitätsbedingungen** (IB)). Warnung: Die Umkehrung von 14.4 gilt im Allgemeinen **nicht** ($\to$ Übungen!).

Beweis
Sei φ eine Stammfunktion von f auf $G \implies \varphi$ ist differenzierbar auf G und $\varphi_{x_j} = f_j$ auf G $(j=1,\dots,n)$. $f\in C^1(G,\mathbb{R}^n) \implies \varphi\in C^2(G,\mathbb{R})$

$$\implies \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \varphi_{x_j x_k} \overset{4.7}{=} \varphi_{x_k x_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ auf G.}$$

■

Definition
Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$. M heißt **sternförmig** $:\iff \exists x_0\in M : S[x_0,x]\subseteq M\ \forall x\in M$.
Beachte:

(1) Ist M konvex $\implies$ M ist sternförmig

(2) Ist M offen und sternförmig $\implies$ M ist ein Gebiet

Satz 14.5 (Kriterium zur Existenz von Stammfunktionen)
Sei G sternförmig und $f\in C^1(G,\mathbb{R}^n)$. Dann: f besitzt auf G eine Stammfunktion $:\iff f$ erfüllt auf G die Integrabilitätsbedingungen

Beweis
„ $\Longrightarrow$ “: 14.1 „$\Longleftarrow$“: G sternförmig $\Longrightarrow$ $\exists x_0 \in G : S[x_0, x] \subseteq G\ \forall x \in G$. OBdA: $x_0 = 0$.

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ sei $\gamma_x(t) = tx, t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &:= \int_{\gamma_x} f(z) \cdot \mathrm{d}z \ (x \in G) \\
&= \int_0^1 f(tx) \cdot x \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (f_1(tx) \cdot x_1 + f_2(tx) \cdot x_2 + \ldots + f_n(tx) \cdot x_n) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Zu zeigen: φ ist auf G partiell differenzierbar nach x_j und $\varphi_{x_j} = f_j$ $(j = 1, \dots, n)$. OBdA: $j = 1$.
Später (in 21.3) zeigen wir: φ ist partiell differenzierbar nach x_1 und:

$$\varphi_{x_1}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1(tx)x_1 + \ldots + f_n(tx) \cdot x_n) \mathrm{d}t$$

Für $k = 1, \dots, n:\ g_k(x) = f_k(tx) \cdot x_k$.
$k = 1:\ g_1(x) = f_1(tx)x_1 \Longrightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) = f_1(tx) + t\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1$
$k \geq 2:\ g_k(x) = f_k(tx)x_k \Longrightarrow \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x) = t\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(tx)x_k \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\varphi_{x_1}(x) &= \int_0^1 (f_1(tx) + t(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(tx)x_n)) \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{IB}}{=} \int_0^1 (f_1(tx) + t(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx)x_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(tx)x_n)) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (f_1(tx) + tf_1'(tx) \cdot x) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Sei $x \in G$ (fest), $h(t) := t \cdot f_1(tx)$ $(t \in [0, 1])$. h ist stetig differenzierbar und $h'(t) = f_1(tx) + tf_1'(tx) \cdot x \Longrightarrow \varphi_{x_1}(x) = \int_0^1 h'(t) \mathrm{d}t \overset{\text{A1}}{=} h(1) - h(0) = f_1(x)$. ■