26. Das Riemann-Stieltjes-Integral

Stets in diesem Paragraphen: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. RS := Riemann-Stieltjes.

Definition

(1) Sei $(Z,\xi) \in \mathfrak{Z}^*$.

$$\sigma_f(Z,\xi,g) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

heißt eine **Riemann-Stieltjes-Summe**.

(2) f heißt **Riemann-Stieltjes-integrierbar** bzgl. g über $[a,b] :\iff \exists S \in \mathbb{R} : \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) \to S \quad (n \to \infty)$ für jede Nullfolge $((Z_n, \xi^{(n)})) \in \mathfrak{Z}^*$.

In diesem Fall heißt $\int_a^b f dg := \int_a^b f(x) dg(x) := S$ das **Riemann-Stieltjes-Integral** von f bzgl. g und wir schreiben $f \in R_g[a,b]$. g heißt auch **Integrator(funktion)**.

Beispiele:

(1) Ist $g(x) = x$, so ist $R_g[a,b] = R[a,b]$ und $\int_a^b f dg = \int_a^b f dx$.

(2) Ist g auf $[a,b]$ konstant $\implies f \in R_g[a,b]$ und $\int_a^b f dg = 0$.

(3) Sei $\tau \in (a,b)$.

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,\tau) \\ 1, & x \in [\tau, b] \end{cases}$$

Sei $(Z,\xi) \in \mathfrak{Z}^*$, $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Es existiert genau ein j_0 mit $\tau \in (x_{j_0-1}, x_{j_0}]$.

$\sigma_f(Z,\xi,g) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) = f(\xi_{j_0})(g(x_{j_0}) - g(x_{j_0-1})) = f(\xi_{j_0})$.

Ist f stetig in $\tau \implies f \in R_g[a,b]$ und $\int_a^b f dg = f(\tau)$.

Satz 26.1

(1) $R_g[a,b]$ ist ein reeller Vektorraum und die Abbildung

$$f \mapsto \int_a^b f dg$$

ist linear.

(2) Sei $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine weitere beschränkte Funktion, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \in R_g[a,b]$ und $f \in R_h[a,b]$. Dann gilt: $f \in R_{\alpha g + \beta h}[a,b]$ und $\int_a^b f d(\alpha g + \beta h) = \alpha \int_a^b f dg + \beta \int_a^b f dh$.

(3) Sei $c \in (a,b)$ und $f \in R_g[a,b] \implies f \in R_g[a,c],\ f \in R_g[c,b]$ und $\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$.

Beweis
Übung. ■

Bemerkung zu 26.1(3): Ist $f \in R_g[a,c]$ und $f \in R_g[c,b]$, so gilt i.A. <u>nicht</u>: $f \in R_g[a,b]$ (Beispiel: Übungen).

Satz 26.2 (Partielle Integration)
Ist $f \in R_g[a,b] \implies g \in R_f[a,b]$ und

$$\int_a^b f dg = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g df.$$

Beweis
Sei $(Z,\xi) \in \mathfrak{Z}^*,\ Z = \{x_0, \ldots, x_n\},\ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \xi_0 := a,\ \xi_{n+1} := b.$

Nachrechnen: $\sigma_g(Z,\xi,f) = \underbrace{f(x)g(x)|_a^b}_{=:c} - \underbrace{\sum_{j=0}^{n} f(x_j)(g(\xi_{j+1}) - g(\xi_j))}_{=:A}$

Die verschiedenen unter den Punkten $\xi_0, \ldots, \xi_{n+1}$ definieren eine Zerlegung $\tilde{Z} \in \mathfrak{Z}$ mit $|\tilde{Z}| \leq 2|Z|$. Dann ist A eine RS-Summe $\sigma_f(\tilde{Z},\eta,g)$, wobei η geeignet zu wählen ist.

Also: $\sigma_g(Z,\xi,f) = c - \sigma_f(\tilde{Z},\eta,g)$.

Sei $((Z_n,\xi^{(n)})) \in \mathfrak{Z}^*$ eine Nullfolge. Zu jeden $(Z_n,\xi^{(n)})$ konstruiere $(\tilde{Z}_n,\eta^{(n)})$ wie oben. Dann ist $((\tilde{Z}_n,\eta^{(n)}))$ eine Nullfolge in $\mathfrak{Z}^*$ und $\sigma_g(Z_n,\xi^{(n)},f) = c - \sigma_f(\tilde{Z}_n,\eta^{(n)},g)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Aus der Voraussetzung folgt: $\sigma_f(\tilde{Z}_n,\eta^{(n)},g) \to \int_a^b f dg \implies \sigma_g(Z_n,\xi^{(n)},f) \to c - \int_a^b f dg \quad (n \to \infty)$. ■

Beispiel
$f(x) = x,\ R[a,b] = R_f[a,b]$. Sei $g \in R[a,b] = R_f[a,b] \overset{26.2}{\implies} f \in R_g[a,b]$ und $\int_a^b x dg = xg(x)|_a^b - \int_a^b g dx$.

Satz 26.3
Sei $f \in R[a,b],\ g$ sei differenzierbar auf $[a,b]$ und $g' \in R[a,b]$. Dann: $f \in R_g[a,b]$ und

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g' \mathrm{d}x.$$

Beweis
Sei $(Z,\xi) \in \mathfrak{Z}^*$, $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. m_j, M_j, I_j seien wie immer und $\alpha > 0$ sei so, dass $|g'(x)| \leq \alpha \; \forall x \in [a,b]$.

Aus dem Mittelwertsatz folgt: $\forall j \in \{1, \dots, n\} \; \exists \eta_j \in I_j : g(x_j) - g(x_{j-1}) = g'(\eta_j)|I_j|$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_f(Z,\xi,g) &= \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)g'(\eta_j)|I_j| \\ &= \sum_{j=1}^n (f(\xi_j) - f(\eta_j))g'(\eta_j)|I_j| + \underbrace{\sum_{j=1}^n f(\eta_j)g'(\eta_j)|I_j|}_{=\sigma_{fg'}(Z,\eta),\ \eta:=(\eta_1,\dots,\eta_n)} .\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}|\sigma_f(Z,\xi,g) - \sigma_{fg'}(Z,\eta)| &\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{|f(\xi_j) - g'(\eta_j)|}_{\leq M_j - m_j} \underbrace{|g'(\eta_j)|}_{\leq \alpha} |I_j| \\ &\leq \alpha \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)|I_j| = \alpha(S_f(Z) - s_f(Z)).\end{aligned}$$

Sei $((Z_n, \xi^{(n)}))$ eine Nullfolge. Zu jedem $(Z_n, \xi^{(n)})$ konstruiere man $\eta^{(n)}$ wie oben. Dann gilt:

$$|\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) - \underbrace{\sigma_{fg'}(Z_n, \eta^{(n)})}_{\to \int_a^b fg' \mathrm{d}x}| \leq \alpha \underbrace{(S_f(Z_n) - s_f(Z_n))}_{\to 0}$$

$\implies \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) \to \int_a^b fg' \mathrm{d}x$. ■

Beispiel
$\int_0^1 e^x \mathrm{d}(e^{-x}) = \int_0^1 e^x(-e^{-x})\mathrm{d}x = \int_0^1 (-1)\mathrm{d}x = -1$.

Satz 26.4 (Abschätzen des RS-Integrals mit Hilfe der Totalvarianz)
Sei $g \in \mathrm{BV}[a,b]$ und $f \in R_g$. Dann:

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \gamma V_g[a,b], \text{ wobei } \gamma := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$$

Beweis
Sei $(Z,\xi) \in \mathfrak{Z}^*, Z = \{x_0, \dots, x_n\}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.
$|\sigma_f(Z,\xi,g)| = |\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))| \leq \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)||g(x_j) - g(x_{j-1})| \leq \gamma V_g(Z) \leq \gamma V_g[a,b]$ ■

Bezeichnungen
Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$. m_j, M_j, I_j seien wie immer, $d_j := g(x_j) - g(x_{j-1})$ $(j = 1, \dots, n)$. $s(Z) = \sum_{j=1}^n m_j d_j$, $S(Z) = \sum_{j=1}^n M_j d_j$.

Hilfssatz 26.5
g sei wachsend ($\implies d_j \geq 0$)

(1) $s(Z_1) \leq S(Z_2)\ \forall Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$.

(2) $\sup\{s(z) : z \in \mathfrak{Z}\} \leq S(Z)\ \forall z \in \mathfrak{Z}$.

Beweis
(1) Wie in 23.1

(2) folgt aus (1) ■

Satz 26.6 (Weiteres Kritierium zur RS-Integrierbarkeit)
Ist $f \in C[a,b]$ und $g \in \mathrm{BV}[a,b] \implies f \in R_g[a,b]$.

Beweis
Wegen 25.2 und 26.1(2) O.B.d.A: g wachsend. $c := g(b) - g(a)$ (≥ 0). O.B.d.A: $c > 0$.
1. Sei $(Z,\xi), Z = \{x_0, \dots, x_n\}, \xi = (\xi_0, \dots, \xi_n) . m_j, M_j, I_j, d_j$ seien wie oben. $S := \sup\{s(z) : z \in \mathfrak{Z}\}$, also $S \leq S(Z)$. $\alpha := S(Z) - s(Z)$
Es gilt: $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j \overset{d_j \geq 0}{\implies} m_j d_j \leq f(\xi_j) d_j \leq M_j d_j \implies (*)\ s(z) \leq \sigma_f(Z,\xi,g) \leq S(Z)$.
Dann: $-\alpha = s(z) - S(Z) \leq S - S(Z) \overset{(*)}{\leq} S - \sigma_f(Z,\xi,g) \leq S(Z) - \sigma_f(Z,\xi,g) \overset{(*)}{\leq} S(Z) - s(z) = \alpha \implies |s - \sigma_f(Z,\xi,g)| \leq \alpha = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) d_j$.
Sei $\varepsilon > 0$. f ist auf $[a,b]$ **gleichmäßig** stetig $\implies \exists \delta > 0 : |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{c}\ \forall t, s \in [a,b]$ mit $|t - s| < \delta$. Sei $|Z| < \delta \implies M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{c} \implies |s - \delta_f(Z,\xi,g)| < \frac{\varepsilon}{c} \underbrace{\sum_{j=1}^n d_j}_{=c} = \varepsilon$.

2. Sei $((Z_n, \xi^{(n)}))$ eine Nullfolge in $\mathfrak{Z}^*$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ wie in (1), $|Z_n| \to 0 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : |Z_n| < \delta\ \forall n \geq n_0 \implies |s - \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g)| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$. Also: $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) \to S\ (n \to \infty)$. ■