0.2 Übung 1, 08.11.2004

0.2.1 Aufgabe 1

b) $A \neq \emptyset$ eine Menge, $(G, \circ)$ eine Gruppe.
z.Z.: $(G^A, *)$ ist Gruppe.
Beweis: $G^A \neq \emptyset$, da $A \neq \emptyset$

(1) $*$ is assoziativ
Sei $x \in A, f, g, h \in G^A$
$((f*g)*h)(x) = (f*g)(x)\circ h(x) = ((f(x)\circ g(x))\circ h(x) = f(x)\circ g(x)\circ h(x) = (f*(g*h))(x)$

Da $x \in A$ bel. gilt $(f * g) * h = f * (g * h)$

(2) neutrales Element
Wir def. $f : A \to G,\ x \mapsto e$. Sei $x \in A$ bel., dann gilt:
$f(n(x)) = f(x)$. Also ist n das neutrale Element in G^A.

$\square$

0.2.2 Aufgabe 3

Im Hinterkopf: $A = \mathbb{N}_0$; $\circ$?? $+$ und $(B, *) = (\mathbb{Z}, +)$

a) z.Z.: $\sim$ ist ÄR
Beweis:

(1) $\sim$ ist reflexiv: $x_1 \circ y_1 = x_1 \circ y_2 \Rightarrow (x_1, y_1) \sim (x_1, y_1)$

(2) $\sim$ ist symmetrisch da „=“ symmetrisch ist

(3) $\sim$ ist transitiv:
$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$
Es gilt also: $x_1 \circ y_2 = x_2 \circ y_2$ und $x_2 \circ y_1 = x_3 \circ y_2 \Rightarrow x_1 \circ y_2 \circ x_2 \circ y_3 = x_2 \circ y_1 \circ x_3 \circ y_2 \Rightarrow$
$x_1 \circ y_3 = y_1 \circ x_3$

$\square$

b) Seien $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \sim (x_2, y_2)$
z.Z.: $(x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2) \sim (x'_1 \circ x'_2, y'_1 \circ y'_2)$ (dann wohldefiniert.)
$x_1 \circ x_2 \circ y'_1 \circ y'_2 = x'_1 \circ y_1 \circ x'_2 \circ y_2 = x'_1 \circ x'_2 \circ y_1 \circ y_2$

c) $A \times A_{/\sim} \neq 0$
$[(x_1, y_1)]_\sim \times [(x_2, y_2)]_\sim = [(x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2)]_\sim$

(1) $*$ ist assoziativ weil $\circ$ assoziativ ist

(2) $[(e, e)]_\sim$ ist das neutrale Element bzgl. $*$

(3) $*$ ist kommutativ
Sei $x_1, y_1 \in A, [(y_1, x_1)]_\sim$ ist invers zu $[(x_1, y_1)]_\sim$, denn