# Kapitel 1

# Möbiustransformationen

Ziel des Kapitels ist es, möglichst viele Transformationen der hyperbolischen Räume zu erhalten.

## 1.1 Die Riemannsche Zahlenkugel

**Definition 1.1.1** (i) Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und setze $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\overline{\mathbb{C}}$ heißt *Riemannsche Zahlenkugel*. Auf ihr wollen wir im Folgenden eine Topologie definieren. Sei dazu für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$

$$U_\epsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \epsilon\},$$

$$U_\epsilon(\infty) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| > \epsilon\}.$$

(ii) Eine Menge $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ heißt *offen*, falls für jeden Punkt $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $U_\epsilon(x) \subseteq U$.

(iii) $z \in \overline{\mathbb{C}}$ heißt *Grenzwert* der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_0 := N_0(\epsilon)$ existiert, sodass $z_n \in U_\epsilon(z)$ für alle $n \geqslant N_0$ ist. In diesem Fall sagt mann, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen $z$ konvergiert* und schreibt $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ oder $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$.

(iv) Eine Abbildung $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ heißt *stetig in* $z \in \overline{\mathbb{C}}$, falls für alle konvergenten Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ mit $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ gilt:

$$f\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = f(z) \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} f(z_n).$$

$f$ heißt *stetig*, falls $f$ stetig ist in allen Punkten $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

**Beispiel 1.1.2** (i) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ konvergiert gegen 0.

(ii) Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ konvergiert gegen $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

**Bemerkung 1.1.3 (Stereographische Projektion)** *Betrachte die 2-Sphäre*

$$\mathbb{S}^2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\right\}.$$

*$\mathbb{S}^2$ ist abgeschlossen und beschränkt im $\mathbb{R}^3$, also kompakt (nach Heine-Borel). Sei $N=(0,0,1) \in \mathbb{S}^2$ der Nordpol und definiere*

$$\sigma : \mathbb{S}^2\backslash\{N\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad P=(x,y,z) \mapsto \overline{NP} \cap \mathbb{C} = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right).$$

*Dann ist $\sigma$ die gewöhnliche stereographische Projektion, welche uns die Identität $\mathbb{S}^2\backslash\{N\} \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ liefert. Wir können $\sigma$ nun durch*

$$\overline{\sigma} : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad P \mapsto \begin{cases} \sigma(P), & \textit{falls } P \neq N, \\ \infty, & \textit{falls } P = N \end{cases}$$

*auf die ganze Sphäre erweitern.*

**Proposition 1.1.4** *Die erweiterte stereographische Projektion $\overline{\sigma} : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist ein Homoömorphismus, das heißt $\sigma$ ist bijektiv und $\sigma, \sigma^{-1}$ sind stetig. Insbesondere ist damit die Riemannsche Zahlenkugel als stetiges Bild eines Kompaktums ebenfalls kompakt.*

*Beweis.* Übung (Aufgabe 1.3). □

**Bemerkung 1.1.5 (Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$)** *Ein Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$ ist entweder ein eukidischer Kreis in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ oder die Vereinigung einer euklidischen Geraden mit $\{\infty\}$. Dies wollen wir durch Gleichungen explizit beschreiben. Betrachte den euklidischen Kreis mit Zentrum $z_0 = x_0 + iy_0$ und Radius $r > 0$. Dann liegt $z \in \mathbb{C}$ auf dem Kreis genau dann wenn gilt*

$$r^2 = |z-z_0|^2 = (z-z_0)(\overline{z-z_0}) = z\overline{z} - z_0\overline{z} - \overline{z}_0 z + z_0\overline{z}_0.$$

*Beschreibt nun $ax+by+c=0$ eine euklidische Gerade, so gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $x = \mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $y = i\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$ gerade*

$$\frac{a}{2}(z+\overline{z}) + \frac{b}{2}i(z-\overline{z}) + c = \frac{1}{2}(a+bi)z + \frac{1}{2}(a-bi)\overline{z} + c =: \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + c = 0.$$

*Wir sehen damit, dass jeder Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$ gegeben ist als Lösungsmenge einer Gleichung der Form*

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$$

*für gewisse $\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ (mit $\alpha = 0$ genau dann, wenn der Kreis eine euklidische Gerade ist* *und $\alpha \neq 0$ genau dann, wenn der Kreis ein euklidischer Kreis ist). Dabei ist $\infty$ eine Lösung, falls es eine Folge von Lösungen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $z_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.*

## 1.2 Möbiustransformationen

Eine Abbildung $\phi : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ heißt *Homöomorphismus*, falls $\phi$ bijektiv und $\phi, \phi^{-1}$ stetig sind. Definiere

$$\mathcal{H}om\ddot{o}o(\overline{\mathbb{C}}) := \left\{\phi : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \mid \phi \text{ ist Homöomorphismus}\right\}.$$

Dann wird $\mathcal{H}om\ddot{o}o(\overline{\mathbb{C}})$ mit der Komposition von Abbildungen zur Gruppe.

**Beispiel 1.2.1** Sei $p = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ ein komplexe Polynom. Dann ist die Abbildung

$$\phi_p : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto \begin{cases} p(z) & \text{falls } z \neq \infty, \\ \infty & \text{falls } z = \infty. \end{cases}$$

ein Homöomorphismus genau dann, wenn $n = 1$. In der Tat ist für $q(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$ die Abbildung $\phi_q$ eine stetige Umkehrabbildung. Ist umgekehrt $n = 0$, so ist $\phi$ nicht injektiv und damit kein Homöomorphismus. Für $n \geqslant 2$ ist $\phi$ offenbar nicht bijektiv.

**Definition + Bemerkung 1.2.2** Es ist

$$\mathcal{H}om\ddot{o}o_K(\overline{\mathbb{C}}) := \left\{\phi \in \mathcal{H}om\ddot{o}o(\overline{\mathbb{C}}) \mid \phi \text{ bildet Kreise auf Kreise ab }\right\}$$

die Menge der kreistreuen Homöomorphismen. Dabei gilt $\mathcal{H}om\ddot{o}o_K(\overline{\mathbb{C}}) \subsetneq \mathcal{H}om\ddot{o}o(\overline{\mathbb{C}})$, denn betrachte folgende Abbildung:

$$\phi : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto \begin{cases} z & \text{falls } \mathrm{Re}(z) \leqslant 0, \\ z + iRe(z) & \text{falls } \mathrm{Re}(z) > 0, \\ \infty & \text{falls } z = \infty. \end{cases}$$

Dann kann man nachrechnen, dass $\phi$ ein Homöomorphismus ist, für den Kreis $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ aber $\phi(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ kein Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$ ist.

**Proposition 1.2.3** *Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ sei*

$$\rho : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto \begin{cases} az + b & \textit{falls } z \neq \infty, \\ \infty & \textit{falls } z = \infty. \end{cases}$$

*Dann ist $\rho \in \mathcal{H}om\ddot{o}o_K(\overline{\mathbb{C}})$.*

*Beweis.* Nach Beispiel 1.2.1 ist $\rho$ ein Homöomorphismus. Es ist also lediglich die Kreistreue zu zeigen. Sei also $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Kreis. Dann ist $A$ die Lösungsmenge eine Gleichung

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \qquad \alpha, \gamma \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{C}.$$

Betrachte nun zwei Fälle:

**Fall (a)** $A$ ist eine euklidische Gerade, also

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0 \right\} \cup \{\infty\}.$$

Wir müssen zeigen, dass die Punkte in $\rho(A)$ ebenfalls eine Kreisgleichung erfüllen. Sei also $w = az + b = \rho(z) \in \rho(A) \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. Dann ist (da $a \neq 0$) $z = \frac{1}{a}(w - b)$ und damit

$$\begin{aligned} 0 &= \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma \\ &= \beta \frac{1}{a}(w - b) + \overline{\beta}\frac{1}{\overline{a}}(\overline{w - b}) + \gamma \\ &= \frac{\beta}{a} w + \frac{\overline{\beta}}{\overline{a}}\overline{w} - \frac{\beta}{a} b - \overline{\left(\frac{\beta}{a} b\right)} + \gamma, \end{aligned}$$

$w$ erfüllt also eine Kreigleichung wie gewünscht.

**Fall (b)** Ist nun $A$ ein euklidischer Kreis, so lässt sich analog verfahren. □

**Proposition 1.2.4** *Die Abbildung*

$$\mathcal{J} : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto \begin{cases} 0 & \textit{falls } z = \infty, \\ \frac{1}{z} & \textit{falls } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \\ \infty & \textit{falls } z = 0. \end{cases}$$

*ist ein kreistreuer Homöomorphismus.*

*Beweis.* Sei $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Kreis beschrieben durch die Gleichung $\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$. Setze $w = \mathcal{J}(z) = \frac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Dann liefert die Gleichung

$$\alpha \frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + \beta\frac{1}{w} + \overline{\beta}\frac{1}{\overline{w}} + \gamma = 0$$

durch Multiplikation mit $w\overline{w}$

$$\alpha + \beta\overline{w} + \overline{\beta}w + \gamma w\overline{w} = 0,$$

was wegen $w\overline{w} \in \mathbb{R}$ einer Kreisgleichung entspricht. □

**Bemerkung 1.2.5** *Geometrisch ist $\mathcal{J}$ die Spiegelung am Einheitskreis, denn: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt auch $|\mathcal{J}(z)| = \left|\frac{1}{z}\right| = 1$. Ist $z = re^{i\theta}$, so ist*

$$\mathcal{J}(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

*und $\mathcal{J}(\mathcal{J}(z)) = z$, also $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{-1}$.*

**Definition + Bemerkung 1.2.6** (i) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$. Dann heißt

$$m : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

*Möbiustransformation.*

(ii) Mit der Konvention $\frac{a}{0} = \infty$ für $a \neq 0$ gilt (mit erzwungener Stetigkeit von $m$)

$$m(\infty) = m\left(\lim_{z\to\infty} z\right) = \lim_{z\to\infty} m(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

(iii) Es bezeichne $\text{Möb}^+$ die Menge der Möbiustransformationen.

(iv) Es gilt $m(\infty) = \infty$ genau dann, wenn $c = 0$ sowie $m(0) = 0$ genau dann, wenn $b = 0$ (beachte, dass wegen der Bedingung an die Koeffizienten niemals beide Fälle auftreten).

(v) Gilt $ad - bc = 0$, so ist $m$ nicht injektiv, also kein Homöomorphismus.

(vi) Polynome von Grad 1 und die Inversion am Einheitskreis sind Möbiustransformationen:

$$\mathcal{J}(z) = \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}, \qquad \rho(z) = az + b = \frac{a \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}.$$

**Satz 1.2.7** *Jede Möbiustransformation ist Komposition von Möbiustransformationen der Form $\mathcal{J}(z) = \frac{1}{z}$ und $\rho(z) = az + b$.*

*Beweis.* Sei also $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbiustransformation.

**Fall (a)** Sei $c = 0$. Dann ist $m(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} =: \rho(z)$.

**Fall (b)** Sei $c \neq 0$. Dann ist

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)c}{(cz+d)c} = \frac{acz+bc}{c^2z+dc} = \frac{acz+ad-(ad-bc)}{c^2z+dc} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2z+dc}.$$

Mit

$$\rho_1(z) = c^2z + dc, \qquad \rho_2(z) = (bc - ad)z + \frac{a}{c}$$

folgt

$$m(z) = \frac{a}{c} - \frac{ac-bc}{c^2z+dc} = (\rho_2 \circ \mathcal{J} \circ \rho_1)(z),$$

was zu zeigen war. □

**Satz 1.2.8** *Möbiustransformationen sind kreistreu.*

*Beweis.* Folgt direkt aus Satz 1.2.7 und den Propositionen 1.2.3 und 1.2.4. □

## 1.3 Transitivitätseigenschaften von Möbiustransformationen

Erinnerung aus der linearen Algebra: Eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen ist durch endlich viele Vektoren (Basisvektoren) und ihre Bilder bestimmt. Analog wollen wir Möbiustransformationen durch endlich viele Punkte festlegen - und zwar durch genau drei Stück.

**Definition 1.3.1** Ein *Fixpunkt* einer Möbiustransformation $m \in \text{Möb}^+$ ist ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $m(z) = z$.

**Satz 1.3.2** *Sei* $m \in \text{Möb}^+$ *eine Möbiustransformation. Fixiert* $m$ *drei verschiedene Punkte in* $\mathbb{C}$*, so ist* $m$ *bereits die Identität.*

*Beweis.* Schreibe $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Wir zeigen nun, dass $m$ höchstens zwei Fixpunkte besitzt, falls $m \neq \text{id}$.

**Fall (a)** Sei zunächst $c = 0$. Dann gilt nach 2.6 $m(\infty) = \infty$. Weiter ist $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, also gilt für weitere Fixpunkte $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z = m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Ist $\frac{a}{d} = 1$, so folgt $\frac{b}{d} = 0$, also $m = \text{id}$, ein Widerspruch. Für $\frac{a}{d} \neq 1$ ergibt sich ein zweiter und letzter Fixpunkt $z = \frac{b}{d-a}$.

**Fall (b)** Ist nun $c \neq 0$, so ist $m(\infty) \neq \infty$. Alle Fixpunkte sind also Lösungen der Gleichung

$$z = m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \Longleftrightarrow \quad cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Diese ist quadratisch in $\overline{\mathbb{C}}$ und besitzt ebenfalls eine oder zwei paarweise verschiedene Lösungen.

Insgesamt muss damit eine Möbiustransformation mit drei Fixpunkten die Identität sein. □

**Satz 1.3.3** *Die Menge* $\text{Möb}^+$ *ist einfach* 3*-Punkt transitiv, das heißt für zwei geordnete Tripel* $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3)$ *von paarweise verschiedenen Punkten in* $\overline{\mathbb{C}}$ *existiert genau eine Möbiustransformation* $m \in \text{Möb}^+$ *mit* $m(z_i) = w_i$ *für* $i \in \{1, 2, 3\}$.

*Beweis.* wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit einer solchen Möbiustransformation. Seien also $m_1, m_2 \in \text{Möb}^+$ mit $m_1(z_i) = w_i = m_2(z_i)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Setze $m := m_1^{-1} \circ m_2$. Dann ist $m$ ebenfalls eine Möbiustransformation und es gilt $m(z_i) = z_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, nach dem

vorangegangenen Satz ist $m$ also die Identität, woraus $m_1 = m_2$ folgt.
Zur Existenz. Es genügt zu zeigen, dass es für jedes Tripel $(z_1, z_2, z_3)$ von paarweise verschiedenen Punkten in $\overline{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation $m_z \in \text{Möb}^+$ gibt, welche dieses auf $(0, 1, \infty)$ abbildet. Durch $m := m_w^{-1} \circ m_z$ erhalten wir die gwünschte Möbiustransformation. Seien also $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Wir unterscheiden zwei Fälle.

**Fall (a)** Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Mit dem Ansatz $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ und

$$m(z_1) = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = 0, \qquad \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = 1, \qquad \frac{az_3 + d}{cz_3 + d} = \infty$$

findet man

$$m(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{(z_2 - z_3)z - (z_2 - z_3)z_1}{(z_2 - z_1)z - (z_2 - z_1)z_3} =: \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

mit $m(z_1) = 0$, $m(z_2) = 1$, $m(z_3) = \infty$ sowie

$$\begin{aligned} \delta - \beta\gamma &= (z_2 - z_3)(-z_3(z_2 - z_3)) - (-z_1(z_2 - z_3))(z_2 - z_1) \\ &= (z_2 - z_3)(z_1 - z_3)(z_1 - z_2) \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

$m$ ist also eine Möbiustransformation mit den gewünschten Eigenschaften.

**Fall (b)** Ist $z_1 = \infty$, so geht man analog vor. □

**Bemerkung 1.3.4** *Tripel sind geordnete Mengen. Für ungeordnete Mengen $\{z_1, z_2, z_3\}$ existiert eine Möbiustransformation wie in Satz 1.3.3 zwar, ist aber nicht eindeutig.*

**Korollar 1.3.5** Möb$^+$ *operiert einfach 3-Punkt transitiv auf $\overline{\mathbb{C}}$.*

**Satz 1.3.6** *Die Gruppe* Möb$^+$ *opertiert transitiv auf der Menge $\mathcal{K}$ der Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass ein Tripel von drei verschiedenen Punkten in $\overline{\mathbb{C}}$ einen eindeutigen Krei in $\overline{\mathbb{C}}$ definiert. Sei also $(z_1, z_2, z_3)$ ein solches Tripel.

**Fall (a)** Sind $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ nicht kolinear, so existiert genau ein euklidischer Kreis durch $z_1, z_2, z_3$ (Mittelsenkrechtenkonstruktion) sowie keine euklidische Gerade.

**Fall (b)** Sind $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ kolinear, so gibt es genau eine Gerade durch die drei Punkte.

**Fall (c)** Ist ohne Einschränkung $z_1 = \infty$ und $z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, so ändert sich nichts.

Seien nun $A, B$ Kreise in $\overline{\mathbb{C}}$. Wir müssen eine Möbiustransformation $m \in \text{Möb}^+$ finden mit $m(A) = B$. Wähle jeweils drei verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in A$ und $w_1, w_2, w_3 \in B$. Dann existiert genau ein $m \in \text{Möb}^+$ mit $m(z_i) = w_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Weiter ist $m$ kreistreu, $m(A)$ und $B$ sind also beide Kreise, welche $w_1, w_2, w_3$ enthalten, also $m(A) = B$. □

**Bemerkung 1.3.7** *Die Operation aus Satz 1.3.6 ist nicht einfach transitiv, denn durch eine andere wahl der $z_i$ oder $w_i$ erhält man verschiedene Möbiustransformationen mit $m(A) = B$.*

**Definition 1.3.8** Eine *Scheibe* $D$ in $\overline{\mathbb{C}}$ ist eine Zusammenhangskomponente von $\overline{\mathbb{C}} \backslash K$, wobei $K$ ein Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$ ist. Also ist $D$ eine Kreisscheibe, das Komplement einer Kreisscheibe oder eine Halbebene. Da wir $\overline{\mathbb{C}}$ mit $\mathbb{S}^2$ identifizieren können, fallen diese drei Begriffe zusammen und jede Scheibe $D$ ist topologisch homöomorph zu dem Inneren des Einheitskreises.

**Satz 1.3.9** Möb$^+$ *operiert transitiv auf der Menge $\mathcal{S}$ der Scheiben in $\overline{\mathbb{C}}$.*

*Beweis.* Seien $D = D_+, E = E_+ \in \mathcal{S}$ Scheiben in $\overline{\mathbb{C}}$ und $\partial D = A$, $\partial E = B$ die Randkreise. weitere seien $D_- := \overline{\mathbb{C}} \backslash \{A, D\}$ sowie $E_- := \overline{\mathbb{C}} \backslash \{B, E\}$. Nach Satz 3.6 existiert $m \in$ Möb$^+$ mit $B = m(A)$. wegen der Stetigkeit von $m$ und der Kreistreue gilt nun bereits $m(D) \in \{E_+, E_-\}$. Ist $m(D) = E$, so sind wir fertig. Andernfalls benötigen wir noch eine Möbiustransformation, die $E_+$ und $E_-$ vertauscht und $B$ auf sich selbst abbildet. Betrachte dazu den speziellen Kreis $K = \mathbb{R} \cup \infty = \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt für

$$\mathcal{J} : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } z = \infty \\ \frac{1}{z}, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}, \\ \infty, & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

gerade $\mathcal{J}(K) = K$. Weiter ist $\mathcal{J}(i) = \frac{1}{i} = -i$ und da $\mathcal{J}$ ein Homöomorphismus ist, folgt $\mathcal{J}(\mathbb{H}^+) = \mathbb{H}^-$ und $\mathcal{J}(\mathbb{H}^-) = \mathbb{H}^+$. Sei nun $K_1$ ein beliebiger Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$ und $n \in$ Möb$^+$ mit $n(A) = K$ (eine solche Möbiustransformation existiert nach Satz 3.6). Dann gilt für $M := n^{-1} \circ \mathcal{J} \circ n$:

$$M(A) = (n^{-1} \circ \mathcal{J} \circ n)(A) = n^{-1}(\mathcal{J}(K)) = n^{-1}(K) = A$$

und $M$ vertauscht die durch $A$ definierten Scheiben, was zu zeigen war. Damit liefert die Möbiustransformation $N := M \circ m$ die gewünschte Eigenschaft $N(A) = B$ und $N(D) = E$. □

## 1.4 Das Doppelverhältnis: Eine numerische Invariante

Eine Funktion $f : \overline{\mathbb{C}}^k \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, (z_1, \ldots, z_k) \mapsto f(z_1, \ldots, z_k)$ heißt *invariant unter* Möb$^+$, falls für jede Möboiustransformation $m \in$ Möb$^+$ und für alle $(z_1, \ldots, z_k) \in \overline{\mathbb{C}}^k$ gilt

$$f\left(m(z_1), \ldots, m(z_k)\right) = f(z_1, \ldots, z_k).$$

Beispielsweise ist die Abbildung

$$f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto \begin{cases} z^2, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

nicht invariant unter $\text{Möb}^+$ (Aufgabe 2.3). Was ist die größte Untergruppe vom $\text{Möb}^+$, die $f$ invariant lässt?

**Bemerkung 1.4.1** *Da* $\text{Möb}^+$ *einfach* 3*-Punkt transitiv auf* $\mathbb{H}^2$ *operiert, sind für* $1 \leqslant k \leqslant 3$ *die einzigen invarianten Funktionen die Konstanten, denn: Sei zum Beispiel* $f : \overline{\mathbb{C}}^3 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *invariant unter* $\text{Möb}^+$ *und* $c := f(0,0,0)$*. Für* $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ *gibt es* $m \in \text{Möb}^+$ *mit* $m(z_i) = 0$ *für* $i \in \{1,2,3\}$*. Dann gilt aber bereits*

$$f(z_1, z_2, z_3) = f(m(z_1), m(z_2), m(z_3)) = f(0,0,0) = c.$$

**Definition 1.4.2** Die Abbildung

$$[\,]: \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto [z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

heißt *Doppelverhältnis.* Ist $z_k = \infty$ für ein $k$, so erweitern wir die Abbildung sinnvoll zu

$$[\infty, z_2; z_3, z_4] = \lim_{z \to \infty} [z, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}$$

und analog für $z_2 = \infty$, $z_3 = \infty$, $z_4 = \infty$.

**Proposition 1.4.3** *Das Doppelverhältnis* $[\,]$ *ist invariant unter* $\text{Möb}^+$*.*

*Beweis.* Nach Satz 1.2.7 genügt es zu zeigen, dass das Doppelverhältnis invariant unter $\mathcal{J}$ und unter linearen Polynomen von Grad 1 ist. In der Tat gilt für paarweise verschiedene $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned}
[\mathcal{J}(z_1), \mathcal{J}(z_2); \mathcal{J}(z_3), \mathcal{J}(z_4),] &= \left[\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}; \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}\right] \\
&= \frac{\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4}\right)\left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}\right)}{\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_4}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{z_4 - z_1}{z_4 z_1}\right)\left(\frac{z_2 - z_3}{z_3 z_2}\right)}{\left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2}\right)\left(\frac{z_4 - z_3}{z_4 z_3}\right)} \\
&= \frac{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)} \\
&= [z_1, z_2; z_3, z_4]
\end{aligned}$$

sowie für $\rho(z) = az + b$ mit $a \neq 0$

$$\begin{aligned}[\rho(z_1), \rho(z_2); \rho(z_3), \rho(z_4)] &= [az_1 + b, az_2 + b; az_3 + b, az_4 + b] \\ &= \frac{(az_1 - az_4)(az_3 - az_2)}{(az_1 - az_2)(az_3 - az_4)} \\ &= [z_1, z_2; z_3, z_4],\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

**Proposition 1.4.4** *Seien $z_1, z_2, z_3, z_4$ vier paarweise verschiedene Punkte in $\overline{\mathbb{C}}$. Dann liegen $z_1, z_2, z_3, z_4$ auf einem Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$ genau dann, wenn das Doppelverhältnis $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ reell ist.*

*Beweis.* Übung (Aufgabe 2.4). □

## 1.5 Möbiustransformationen und Matrizen

Erinnerung: Es ist

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \;\middle|\; \det A = ad - bc \neq 0 \right\}$$

die allgemeine lineare Gruppe sowie

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; \det A = 1 \right\}$$

die spezielle lineare Gruppe.

**Proposition 1.5.1** *Die Abbildung*

$$\Phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Möb}^+, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left( m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

*ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern*

$$\ker \Phi := \mathcal{Z} = \left\{ \lambda E_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \right\}.$$

*Insbesondere liefert der Isomorphiesatz*

$$\text{Möb}^+ \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) / \mathcal{Z} =: \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}).$$

*Beweis.* Seien Matrizen $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

gegeben mit $a, b, c, d, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0 \neq \tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\Phi(A) \circ \Phi(B))(z) &= \left(\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \circ \Phi\left(\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}\right)\right)(z) \\
&= \frac{a\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}} + b}{c\frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}} + d} \quad = \quad \frac{(a\tilde{a} + b\tilde{c})z + a\tilde{b} + b\tilde{d}}{(c\tilde{a} + d\tilde{c})z + c\tilde{b} + d\tilde{d}} \\
&= \Phi\left(\begin{pmatrix} a\tilde{a} + b\tilde{c} & a\tilde{b} + b\tilde{d} \\ c\tilde{a} + d\tilde{c} & c\tilde{b} + d\tilde{d} \end{pmatrix}\right)(z) \\
&= \Phi(AB)(z).
\end{aligned}$$

Surjektivität ist klar: Für $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ wähle die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dann gilt offensichtlich $\Phi(A)(z) = m(z)$. Zu zeigen ist noch die Aussage über den Kern. Sei also $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker \Phi$. Dann gilt

$$z = \mathrm{id}(z) = \Phi(A)(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Setzen wir nun $z = 0, 1, \infty$ ein, liefert das $0 = \mathrm{id}(0) = \Phi(A)(0) = \frac{b}{d}$, also $b = 0$. Analog folgt $\infty = \mathrm{id}(\infty) = \Phi(A)(\infty) = \frac{a}{c}$, also $c = 0$. Schließlich liefert $z = 1$ dann $a = d := \lambda$ und $\lambda \neq 0$, da wir außerdem $ad - bc \neq 0$ benötigen. Insgesamt erhalten wir also die Behauptung. □

## 1.6 Spiegelungen

Wir wollen nun eine umfassendere Gruppe von kreistreuen Homöomorphismen in $\overline{\mathbb{C}}$ haben.

**Proposition 1.6.1** *Die komplexe Konjugation*

$$C : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad z = x + iy \;\mapsto \begin{cases} \overline{z} = x - iy, & \text{falls } z \neq \infty \\ \infty, & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

*ist ein kreistreuer homöomorphismus, aber keine Möbiustransformation, das heißt es gilt $C \in \mathcal{H}om\ddot{o}o_K(\overline{\mathbb{C}}) \backslash \text{Möb}^+$.*

*Beweis.* Wir zeigen zu erst, dass $C \in \mathcal{H}om\ddot{o}o_K(\overline{\mathbb{C}})$. Sicherlich ist $C$ ein Homöomorphismus, denn wegen $C^{-1} = C$ ist $C$ bijektiv und $C(U_\epsilon(z)) = U_\epsilon(C(z))$ liefert die Stetigkeit von $C$ und $C^{-1}$.

Wir müssen noch die Kreistreue zeigen. Dazu genügt es, dass Kreisgleichungen unter $C$ wieder auf Kreisgleichungen abgebildet werden. Sei also durch $X : \alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$ ein Kreis gegeben. Dann gilt

$$C(X) : \alpha\overline{z}z + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0,$$

was also einer Kreisgleichung entspricht. Wir zeigen nun, dass $C$ keine Möbiustransformation ist. Das sieht man schnell ein, denn $C$ fixiert offenbar jeden Punkt in $\overline{\mathbb{R}}$ und hat damit insbesondere mehr als 3 Fixpunkte. Wäre $C$ eine Möbiustransformation, so wäre $C$ nach Satz 1.3.2 bereits die Identität, was wegen $C(i) = i \neq i$ nicht wahr ist, weshalb $C$ keine Möbiustransformation ist. □

**Bemerkung 1.6.2 (Geometrische Interpretation)** *$C$ ist die Spiegelung am Kreis $\mathbb{R}$, denn es gilt $C(z) = z$ für $z \in \mathbb{R}$ und $C = C^{-1}$. Ist nun $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein beliebiger Kreis, so definiert man die Spiegelung an $A$ durch $C_A := m \circ C \circ m^{-1}$, wobei $m \in$ Möb$^+$ eine Möbiustransformation ist, welche $\overline{\mathbb{R}}$ auf $A$ abbildet. Beachte: Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $m$ (vgl. Aufgabe 3.1).*

**Definition 1.6.3** Die *allgemeine Möbius-Gruppe* ist die von Möb$^+$ und $C$ erzeugte Gruppe Möb $= \langle$Möb$^+, C\rangle$. Das bedeutet, dass jede allgemeine Möbiustransformation $m \in$ Möb geschrieben werden kann als $m = m_1 \circ \ldots \circ m_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m_i \in$ Möb$^+$ oder $m_i = C$.

**Satz 1.6.4** *Es gilt* Möb $\subseteq \mathcal{H}om\ddot{o}o_K(\overline{\mathbb{C}})$.

*Beweis.* Da $C \in \mathcal{H}om\ddot{o}o_K(\overline{\mathbb{C}})$ nach Proposition 1.6.1 und Möb$^+ \subseteq \mathcal{H}om\ddot{o}o_K(\overline{\mathbb{C}})$ nach Satz 1.2.8 ist jede Komposition aus $C$ und $m_i \in$ Möb$^+$ ebenfalls in $\mathcal{H}om\ddot{o}o_K(\overline{\mathbb{C}})$, also Möb $\subseteq \mathcal{H}om\ddot{o}o_K(\overline{\mathbb{C}})$.
□

**Bemerkung 1.6.5** *In Satz 1.6.4 gilt sogar Gleichheit, also* Möb $= \mathcal{H}om\ddot{o}o_K(\overline{\mathbb{C}})$. *Man hat also eine Charakterisierung von allgemeinen Möbiustransformationen als genau die kreistreuen Homöomorphismen der Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$.*

**Proposition 1.6.6** *Jede Möbiustransformation in* Möb $= \langle$Möb$^+, C\rangle$ *hat entweder die Form $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ oder $m(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$.*

*Beweis.* Sei $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in$ Möb$^+$ und $n(z) = \frac{\alpha\overline{z}+\beta}{\gamma\overline{z}+\delta} = (\tilde{n} \circ C)(z) \in$ Möb mit $\tilde{n} = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \in$ Möb$^+$. Dann sind auch die möglichen Kompositionen

$$(m \circ C)(z) = \frac{a\overline{z}b}{c\overline{z} + d}$$

$$(m \circ n)(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)z + c\beta + d\delta}$$

und ebenso $n \circ m$ von derselben Gestalt. □

**Beispiel 1.6.7** Betrachte den Kreis $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Um eine Möbiustransformation $m \in \text{Möb}^+$ mit $m(\overline{\mathbb{R}}) = \mathbb{S}^1$ zu finden, genügt es, das Tripel $(0, 1, \infty)$ auf $(-i, 1, i)$ abzubilden. Mit dem Ansatz

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

führt das mit

$$-i = m(0) = \frac{b}{d}, \qquad 1 = m(1) = \frac{a+b}{c+d}, \qquad i = m(\infty) = \frac{a}{c}$$

zu $d = ib$, $c = -ia$ und

$$1 = \frac{a+b}{-ia+ib} = i\,\frac{a+b}{a-b}.$$

Damit erhalten wir $a - b = i(a + b)$, also $a(1 - i) = b(i + 1)$, also $b = a\frac{1-i}{i+1}$. Wähle zum Beispiel $a = i$, dann folgt $b = 1$, $c = 1$ und $d = i$ und damit

$$m(z) = \frac{iz + 1}{z + 1}.$$

Um die inverse Möbiustransformation und letztlich die Spiegelung an $\mathbb{S}^1$ zu bestimmen, gehen wir zur Matrixschreibweise über, um die Rechnung zu vereinfachen. Demnach ist die zu $m$ zugehörige Matrix ist

$$M_m = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

die zu $m^{-1}$ also

$$M_{m^{-1}} = (M_m)^{-1} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix},$$

also

$$m^{-1}(z) = \frac{-\frac{i}{2}z + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}z - \frac{i}{2}} = \frac{-iz + 1}{z - i}.$$

Die Spieglung an $\mathbb{S}^1$ ist also

$$C_{\mathbb{S}^1}(z) = (m \circ C \circ m^{-1})(z) = (m \circ C)\left(\frac{-iz+1}{z-i}\right) = m\left(\frac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i}\right) = \frac{i\frac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i} + 1}{\frac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i} + 1} = \frac{1}{\overline{z}} = (\mathcal{J} \circ C)(z).$$

**Proposition 1.6.8** *Jede Möbiustransformation $m \in \text{Möb}^+$ kann als Verknüpfung von endlich vielen Spiegelungen an Kreisen in $\overline{\mathbb{C}}$ geschrieben werden.*

*Beweis.* Übung (Aufgabe 3.2). ☐

## 1.7 $\mathbb{H}$-invariante Möbiustransformationen

Es sei $\mathbb{H} = \mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene. Weiter setzen wir

$$\text{Möb}(\mathbb{H}) := \{m \in \text{Möb} \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\},$$

$$\text{Möb}^+(\mathbb{H}) := \{m \in \text{Möb}^+ \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\},$$

$$\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}}) := \{m \in \text{Möb} \mid m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}\}.$$

Nach Proposition 1.6.6 und durch Normieren können wir annehmen, dass jede Möbiustransformation $m \in$ Möb von den Formen

$$(1) \quad m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad (2) \quad m(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$$

mit $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ und $ad - bc = 1$ ist. Dabei ist im zweiten Fall $m(z) = (\tilde{m} \circ C)(z)$ mit $\tilde{m}$ wie in (1). Als erstes interessieren wir uns für Möb$(\overline{\mathbb{R}})$.

**Proposition 1.7.1** *Sei $m \in$ Möb$^+$. Dann sind die Koeffizienten von $m$ allesamt reell oder aber alle rein imaginär genau dann, wenn $m \in$ Möb$^+(\overline{\mathbb{R}})$.*

*Beweis.* Sei zunächst $m \in$ Möb$^+(\overline{\mathbb{R}})$ und schreibe

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad m^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\frac{dz-b}{-cz+a} = \frac{dz-b}{-cz+a}.$$

Dann gilt nach Voraussetzung $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$, also

$$m(\infty) = \frac{a}{c} \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad m^{-1}(0) = -\frac{b}{a} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle.

**Fall (a)** Sei $a \neq 0 \neq c$. Dann sind alle obigen Werte in $\mathbb{R}$ und jeder Koeffizient ist ein Vielfaches von $c$:

$$a = m(\infty)c, \qquad b = -m^{-1}(0)a = -m^{-1}(0)m(\infty)c, \qquad d = -m^{-1}(\infty)c.$$

Dann gilt

$$1 = ad - bc = c^2(-m(\infty)m^{-1}(\infty) + m(\infty)n^{-1}(0)) \in c^2 \cdot \mathbb{R}$$

und also auch $c^2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Damit ist $c \in \mathbb{R}$ oder $c$ rein imaginär. Aus den obigen Beziehungen folgt dann, dass bereits $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oder $a, b, c, d \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^\times$.

**Fall (b)** Sei $c = 0$. Dann ist $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ und damit $m(0) = \frac{b}{d} \in \mathbb{R}$, $m(1) = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} \in \mathbb{R}$ und somit $\mu := \frac{a}{d} = m(1) - m(0) \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$1 = ad - bc = ad = \mu d^2$$

und mit derselben Argumentation wie im ersten Fall ist $d$ reell oder rein imaginär. Aus $a = \mu d$ und $b = m(0)d$ folgt $a, b, d \in \mathbb{R}$ oder $a, b, d \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^\times$.

**Fall (c)** Sei schließlich $a = 0$. Dann ist $m(z) = \frac{b}{cz+d}$ und damit $m(0) = \frac{b}{d} \in \mathbb{R}$, $m(1) = \frac{b}{c+d} \in \mathbb{R}$. Es ist dann auch $\frac{d}{b} \in \mathbb{R}$ und $\frac{c+d}{b} \in \mathbb{R}$ und $\mu := \frac{c}{b} \in \mathbb{R}$. Es gilt dann

$$1 = ad - bc = -bc = -b^2\mu$$

und dieselbe Argumentation liefert die Behauptung.

Sind nun umgekehrt alle Koeffizienten reell oder alle rein imaginär, so sieht man leicht ein, dass $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$. □

**Korollar 1.7.2** *Jedes Element $m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ hat eine der 4 Formen*

$$\begin{array}{llll}
(1) & m(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, & a,b,c,d \in \mathbb{R}, & ad-bc=1, \\
(2) & m(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, & a,b,c,d \in \mathbb{R}, & ad-bc=1, \\
(3) & m(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, & a,b,c,d \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^\times, & ad-bc=1, \\
(4) & m(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, & a,b,c,d \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^\times, & ad-bc=1.
\end{array}$$

*Beweis.* Folgt direkt aus den Propositionen 1.6.6 und 1.7.1. □

Als nächstes sollen die Möbiustransformationen klassifiziert werden, welche die obere Halbebene invariant lassen.

**Satz 1.7.3** *Jedes Element $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ hat eine der 2 Formen*

$$\begin{array}{llll}
(1) & m(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, & a,b,c,d \in \mathbb{R}, & ad-bc=1, \\
(2) & m(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, & a,b,c,d \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^\times, & ad-bc=1.
\end{array}$$

*Beweis.* Der Kreis $\overline{\mathbb{R}}$ bestimmt zwei Scheiben $\mathbb{H} = \mathbb{H}^+$ und $\mathbb{H}^- = C(\mathbb{H}^+)$ in $\overline{\mathbb{C}}$. Da Möbiustransformationen stetig sind, lässt jedes Element in $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ die beiden Halbebenen invariant oder vertauscht sie. Daraus sieht man leicht: Ein Element in $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ liegt in $\text{Möb}(\mathbb{H})$ genau dann, wenn $\text{Im}(m(i)) > 0$ gilt. Wir rechnen dies für die vier Fälle aus Korollar 1.7.2 direkt nach:

$$(1) \quad \text{Im}(m(i)) = \text{Im}\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = \text{Im}\left(\frac{(ai+b)(-ci+d)}{|ci+d|^2}\right) = \frac{ad-bc}{|ci+d|^2} = \frac{1}{|ci+d|^2} > 0$$

$$
\begin{array}{llllll}
(2) & \operatorname{Im}(m(i)) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{-ai+b}{-ci+d}\right) & = \operatorname{Im}\left(\dfrac{(-ai+b)(ci+d)}{|-ci+d|^2}\right) & = \dfrac{-ad+bc}{|ci+d|^2} & = \dfrac{-1}{|ci+d|^2} & < 0 \\
(3) & \operatorname{Im}(m(i)) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{ai+b}{ci+d}\right) & = \operatorname{Im}\left(\dfrac{(ai+b)(ci-d)}{|ci+d|^2}\right) & = \dfrac{-ad+bc}{|ci+d|^2} & = \dfrac{-1}{|ci+d|^2} & < 0 \\
(4) & \operatorname{Im}(m(i)) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{-ai+b}{-ci+d}\right) & = \operatorname{Im}\left(\dfrac{(-ai+b)(-ci-d)}{|-ci+d|^2}\right) & = \dfrac{ad-bc}{|ci+d|^2} & = \dfrac{-1}{|ci+d|^2} & > 0
\end{array}
$$

(Beachte: Es gilt stets $ad - bc = 1$ sowie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ in (1) und (2) sowie $a, b, c, d \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^\times$ in (3) und (4)). Daraus folgt insgesamt dann die Behauptung. $\square$

**Korollar 1.7.4** *Es gilt*

$$\text{Möb}(\mathbb{H}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \cup (\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \circ \sigma)\,.$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass die beiden Typen (1) und (2) aus Satz 1.7.3 jeweils einer Komponente der rechten Seite der Behauptung entspricht.
Wir haben bereits in Proposition 1.5.1 gesehen, dass $\text{Möb}^+ \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ gilt. Die Normalisierung $ad - bc = 1$ gibt uns Determinante 1 der Matrizen und reelle Koeffizienten implizieren auch reelle Matrixeinträge. Insgesamt folgt daraus

$$\text{Möb}(\mathbb{H})|_{\text{Typ (1)}} \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

Betrachte nun die From (2) in Satz 1.7.3 und schreibe $a = \alpha i$, $b = \beta i$, $c = \gamma i$, $d = \delta i$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\alpha\delta - \beta\gamma = \frac{1}{i^2}(ad - bc) = -1$. Ist nun $\sigma(z) := -C(z)$ die Spiegelung an der imaginären Achse, so ist $\sigma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$. (2) wird dann zu

$$m(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d} = \frac{\alpha i\overline{z} + \beta i}{\gamma i\overline{z} + \delta i} = \frac{(-\alpha)(-\overline{z}) + \beta}{(-\gamma)(-\overline{z}) + \delta} = (\tilde{m} \circ \sigma)(z)$$

mit

$$\tilde{m}(z) = \frac{-\alpha z + \beta}{-\gamma z + \delta}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \qquad (-\alpha)\delta - \beta(-\gamma) = 1,$$

also $\tilde{m}$ wie in (1). Das liefert

$$\text{Möb}(\mathbb{H})|_{\text{Typ (2)}} \cong (\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \circ \sigma)$$

und insgesamt die Behauptung. $\square$

## 1.8 Konformität von Möbiustransformationen

Sein $C_1, C_2$ differenzierbare Kurven in $\overline{\mathbb{C}}$, die sich in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ schneiden. Der *Winkel* $\measuredangle_{z_0}(C_1, C_2)$ zwischen $C_1$ und $C_2$ in $z_0$ ist definiert als der orientierte (also im Gegenuhrzeigersinn laufende) Winkel zwischen den Tangenten $T_1$ und $T_2$ von $C_1$ und $C_2$ in $z_0$ modulo $\pi$. Ein Diffeomorphismus $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ heißt *konform* oder *winkeltreu*, falls er den absoluten Wert von Winkeln zwischen Kurven erhält. Beachte: Ist $m \in$ Möb eine Möbiustransformation und $m(z_0) = \infty$, so definieren wir den Winkel zwischen $m(C_1)$ und $m(C_2)$ ind $m(z_0)$ als den Winkel zwischen $C_1$ und $C_2$ in $z_0$.

**Satz 1.8.1** *Möbiustransformationen sind konform.*

*Beweis.* Da Winkel über Tangentialvektoren definiert sind, genügt es zu zeigen, dass für beliebige sich in $z_0 \in \mathbb{C}$ schneidende euklidische Geraden $X_1, X_2$ in $\mathbb{C}$ und Möbiustransformationen $m \in$ Möb gilt:

$$\measuredangle_{m(z_0)}(m(X_1), m(X_2)) = \measuredangle_{z_0}(X_1, X_2).$$

Seien also $X_1, X_2$ sich im Punkt $z_0$ schneidende euklidische Geraden in $\mathbb{C}$ und wähle Punkte $z_k \in X_k$ mit $z_k \neq z_0$ für $k \in \{1, 2\}$. Für die Steigungen $s_k$ der Geraden $X_k$ erhalten wir

$$s_k = \frac{\operatorname{Im}(z_k - z_0)}{\operatorname{Re}(z_k - z_0)} = \tan \theta_k,$$

wobei $\theta_k$ den Winkel zwischen $z_k - z_0$ und der reellen Achse bezeichne. Insbesondere erhalten wir also

$$\measuredangle_{z_0}(X_1, X_2) = \theta_2 - \theta_1 = \arctan s_2 - \arctan s_1.$$

Nun wird Möb$(\overline{\mathbb{C}})$ erzeugt von Transformationen der Form

$$(i) \quad f(z) = az + b, \qquad (ii) \quad \mathcal{J}(z) = \frac{1}{z}, \qquad (iii) \quad C(z) = \overline{z}.$$

Es genügt also, Konformität für diese drei Abbildungen zu zeigen.

(i) Sei $m(z) = f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Schreibe $a = \rho e^{i\beta}$. Da $f(\infty) = \infty$, sind $f(X_1)$ und $f(X_2)$ wieder euklidische Geraden in $\mathbb{C}$. Die Bildgeraden $f(X_k)$ verlaufen durch die Punkte $f(z_0)$ und $f(z_k)$ und besitzen die Steigung

$$t_k = \frac{\operatorname{Im}(f(z_k) - f(z_0))}{\operatorname{Re}(f(z_k) - f(z_0))} = \frac{\operatorname{Im}(a(z_k - z_0)}{\operatorname{Re}(a(z_k - z_0)} = \frac{\operatorname{Im}(e^{i\beta}(z_k - z_0))}{\operatorname{Re}(e^{i\beta}(z_k - z_0))} = \tan(\theta_k + \beta).$$

für $k \in \{1,2\}$. Dann folgt für den Winkel

$$\sphericalangle_{f(z_0)}(f(X_1), f(X_2)) = \arctan t_2 - \arctan t_1 = \theta_2 - \theta_1 = \sphericalangle_{z_0}(X_1, X_2).$$

(ii) Sei $m(z) = \mathcal{J}(z) = \frac{1}{z}$. Dann gibt es drei Fälle zu betrachten: $\mathcal{J}(X_1)$ und $\mathcal{J}(X_2)$ sind zwei euklidische Kreise, zwei euklidische Geraden und ein euklidischer Kreis und eine euklidische Gerade. Wir betrachten lediglich den ersten, die beiden anderen Fälle verbleiben als Übung (Aufgabe 4.3). Seien also die Geraden $X_k$ gegeben durch die Gleichungen $\beta_k z + \overline{\beta}_k \overline{z} + 1 = 0$ mit $\beta_k \in \mathbb{C}$. Mit $z = x + iy$ erhalten wir also

$$\beta_k(x+iy) + \overline{\beta_k}(x-iy) + 1 = x(\beta_k + \overline{\beta}_k) + yi(\beta_k - \overline{\beta}_k) + 1 = x\mathrm{Re}(\beta_k) + iy\mathrm{Im}(\beta_k) + 1 = 0$$

und damit ist die Steigung von $X_k$ gerade

$$s_k = \frac{\mathrm{Re}(\beta_k)}{\mathrm{Im}(\beta_k)}.$$

Die Bildkreise sind gegeben durch

$$\mathcal{J}(X_k) : \beta_k \frac{1}{z} + \overline{\beta}_k \frac{1}{\overline{z}} + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta_k \overline{z} + \overline{\beta}_k z + z\overline{z} = 0.$$

Umformen liefert die Gleichung

$$\mathcal{J}(X_k) : |z + \beta_k|^2 = (z + \beta_k)(\overline{z} + \overline{\beta}_k) = |\beta_k|^2,$$

das heißt $\mathcal{J}(X_k)$ sind Kreise mit Zentrum $-\beta_k$ und Radius $|\beta_k|$. Die Steigung der Tangente in $\mathcal{J}(X_k)$ in 0 ist

$$t_k = -\frac{\mathrm{Re}(\beta_k)}{\mathrm{Im}(\beta_k)} = -\tan\theta_k = \tan(-\theta_k),$$

es folgt also

$$\sphericalangle_0(\mathcal{J}(X_1), \mathcal{J}(X_2)) = -\theta_2 - (-\theta_1) = -\sphericalangle_\infty(X_1, X_2).$$

Aus Symmetriegründen gilt bereits

$$\sphericalangle_{\mathcal{J}(z_0)}(\mathcal{J}(X_1), \mathcal{J}(X_2)) = \sphericalangle_{\mathcal{J}(\infty)}(\mathcal{J}(X_1), \mathcal{J}(X_2)),$$

woraus die Konformität von $\mathcal{J}$ in diesem Fall folgt.

(iii) Übung (Aufgabe 4.3). □