

# Kapitel 16

## Testtheorie

### 16.1 Einführung

$\{P_\theta | \theta \in \Theta\}$ ,

$x = (x_1, \dots, x_n)$  ist Realisierung von der Zufallsstichprobe  $X = (X_1, \dots, X_n)$  zur Verteilung  $P_\theta$ .

$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1$ ,  $\theta$  ist nicht bekannt.

Wir müssen entscheiden, ob eher  $\theta \in \Theta_0$  oder  $\theta \in \Theta_1$ .

D.h. wir wägen die Hypothese  $H_0 : \theta \in \Theta_0$

gegen die Alternative  $H_1 : \theta \in \Theta_1$

ab.

Falls  $\Theta \subset \mathbb{R}$ , können folgende typische Fragestellungen auftreten. (sei  $\theta_0 \in \Theta$ )

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

ein sogenanntes **einseitiges Testproblem**.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

ein sogenanntes **zweiseitiges Testproblem**.

#### Beispiel 16.1

a) Einseitiger Test:

Ist der Schadstoffgehalt im Nahrungsmittel der  $\not\leq$  der zulässigen Grenze  $\theta_0$ ?

b) Zweiseitiger Test:

Hält die Abfüllanlage das Sollgewicht  $\theta_0$  ein?

Aufgabe:

Bestimme  $R \subset \mathbb{R}^n = \chi^n$ , so dass  $H_0$  verworfen wird, falls die Stichprobe  $x \in R$ .  $R$  heißt **kritischer Bereich**.

Folgende Entscheidungen sind möglich:

$0 = H_0$  wird nicht verworfen.

$1 = H_0$  wird verworfen.

### Definition 16.1

Gegeben sei ein Testproblem  $H_0$  vs  $H_1$ .

- a) Sei  $x \in \chi^n$  eine Stichprobe. Eine Funktion  $\varphi : \chi^n \rightarrow \{0, 1\}$  heißt **Test** oder **Testverfahren**. Es gilt:  $R = \{x \in \chi^n | \varphi(x) = 1\}$
- b) Einen **Fehler erster Art** macht man, wenn man zu Unrecht  $H_0$  ablehnt.  
Einen **Fehler zweiter Art** macht man, wenn man zu Unrecht  $H_0$  annimmt.
- c) Sei  $\varphi$  ein Test. Die Funktion  $\beta : \Theta \rightarrow [0, 1]$  definiert durch:

$$\beta(\theta) = P_\theta(X \in R) = P_\theta(\varphi(x) = 1)$$

heißt **Gütefunktion**. Für  $\theta \in \Theta_1$  heißt  $\beta(\theta)$  **Macht des Test**.

### Bemerkung 16.1

Entscheidung	$H_0$	$H_1$
“wahr“		
$H_0$	ok	Fehler 1.Art
$H_1$	Fehler 2.Art	ok

### Definition 16.2

Gegeben sei ein Test.

Wir sagen, dass der Test **Niveau (Signifikanzniveau)**  $\alpha$  hat, falls  $\forall \theta \in \Theta_0$  gilt:  
 $\beta(\theta) \leq \alpha$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art ist maximal  $\alpha$ .

## 16.2 Tests unter Normalverteilungsannahme

### Test auf den Mittelwert bei bekannter Varianz

$X = (X_1, \dots, X_n), X_i \sim P_\mu = N(\mu, \sigma_0^2), \sigma_0$  sei bekannt,  $\mu \in \Theta = \mathbb{R}$ .

Testproblem:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0 = 1000$$

mit  $\mu_0 \in \mathbb{R}$  gegeben.

Sinnvoller Test:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \bar{x} \leq c \\ 0 & , \text{ falls } \bar{x} > c \end{cases}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$c \in \mathbb{R}$  ist jetzt noch zu bestimmen und zwar so, dass der Test das Niveau  $\alpha$  erhält.

Bestimmung der Gütefunktion:

betrachte  $\sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_0}$

$$P_\mu \left( \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0} \leq x \right) = \Phi(x), \text{ (siehe Lemma 6.2)}$$

$$\beta_c(\mu) = P_\mu(\bar{X} > c) = P_\mu \left( \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0} > \sqrt{n} \frac{c - \mu}{\sigma_0} \right) = 1 - \Phi \left( \sqrt{n} \frac{c - \mu}{\sigma_0} \right)$$

Einstellen des Testniveaus:  $\beta_c(\mu) \leq \alpha \quad \forall \mu \leq \mu_0$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mu &\mapsto \beta_c(\mu) & , & \text{ wachsend } \text{ für festes } c \in \mathbb{R} \\ c &\mapsto \beta_c(\mu) & , & \text{ fallend } \text{ für festes } \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

deswegen genügt:  $\beta_c(\mu_0) \leq \alpha$

$$\beta_c(\mu_0) \leq \alpha \Leftrightarrow \underbrace{1 - \Phi \left( \sqrt{n} \frac{c - \mu_0}{\sigma_0} \right)}_{=z_{1-\alpha}} \leq \alpha \Leftrightarrow c \geq \frac{z_{1-\alpha} \sigma_0}{\sqrt{n}} + \mu_0 =: c^*$$

### Definition 16.3

Gegeben sei ein Testproblem zum Niveau  $\alpha$  und  $D_\alpha$  eine Menge von Tests zum Niveau  $\alpha$ .

$\varphi^* \in D_\alpha$  heißt **gleichmäßig bester Test** in  $D_\alpha$ , falls

$$\forall \theta \in \Theta_1 : \beta^*(\theta) = P_\theta(\varphi^*(x) = 1) = \max_{\varphi \in D_\alpha} P_\theta(\varphi(x) = 1)$$

Zurück zum Beispiel:

sei  $D_\alpha$  die Menge aller Tests der Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \bar{x} \leq c \\ 1 & , \text{ falls } \bar{x} > c \end{cases} \text{ und } c \geq c^*$$

I.A. findet man keinen gleichmäßig besten Test.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \bar{x} \leq c^* \\ 1 & , \text{ falls } \bar{x} > c^* \end{cases}$$

ist gleichmäßig bester Test in  $D_\alpha$ , denn:

$$\beta_c^*(\mu_0) = \alpha \beta_{c^*+h}(\mu) = \beta_c^*(\mu - h) \leq \beta_c^*(\mu) \quad \forall \mu \in \mathbb{R}, h \geq 0$$

### Bemerkung 16.2 (Wahl der Nullhypothese)

Wird  $H_0$  verworfen, so hat man eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von  $1 - \alpha$  für die Alternative. Möchte man sich zum Beispiel für  $\theta < \theta_0$  entscheiden, sollte man die Nullhypothese  $H_0 : \theta \geq \theta_0$  wählen.

### Definition 16.4

Seien  $X_0, X_1, \dots, X_r$  unabhängig und identisch verteilte ZV mit  $X_i \sim N(0, 1), r \in \mathbb{N}$ . Dann heißt die Verteilung von

a)

$$\sum_{i=1}^r X_i^2$$

eine  $\chi^2$ -Verteilung mit  $r$  Freiheitsgraden (Schreibweise:  $\chi_r^2$ )

b)

$$\frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r X_i^2}}$$

eine  $t$ -Verteilung mit  $r$  Freiheitsgraden (Schreibweise:  $t_r$ )

### Satz 16.1

Es sei  $X = (X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe zur  $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung. Dann gilt:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ und } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ unabhängig und}$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ und } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

**Beweis** Es sei  $Y_i := \frac{X_i - \mu}{\sigma}$   $i = 1, \dots, n$

Vor.  $\Rightarrow Y_1, \dots, Y_n$  unabhängig und identisch verteilt mit  $Y_i \sim N(0, 1)$

Sei  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ .

$$f_y(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Y_i^2}$$

Sei jetzt  $a \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix (d.h.  $A^{-1} = A^T$ ) mit

$$a_{nj} = \frac{1}{\sqrt{n}}, j = 1, \dots, n$$

Sei  $Z := A \cdot Y$  und  $a, b \in \mathbb{R}^n$  mit  $a_i \leq b_i$

$$\begin{aligned} P(Z \in \underbrace{(a, b]}_{=(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]}) &= P(Y \in A^{-1}(a, b]) \\ &= \int_{A^{-1}(a, b]} f_y(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n \\ &\stackrel{\text{Substitutionsregel}}{=} \int_{(a, b]} f_y(z_1, \dots, z_n) dz_1 \cdots dz_n \\ &= P(Y \in (a, b]) \text{ (wegen } \|y\|^2 = \|Ay\|^2, \det A = 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow Z \stackrel{d}{=} Y$  und  $Z_1, \dots, Z_n$  unabhängig.

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i = \sqrt{n} \cdot \bar{Y} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X} - \mu) \\ (n-1)S^2(x) &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2 (n-1)S^2(Y) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n (Y_i^2 - 2Y_i \bar{Y} + \bar{Y}^2) = \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2 \right) \\ &= \sigma^2 (\underbrace{\|Y\|^2}_{=\|Z\|^2} - Z_n^2) = \sigma^2 (Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2) \end{aligned}$$

$\bar{X}$  und  $S^2(X)$  sind unabhängig, da  $\bar{X}$  nur von  $Z_n$  und  $S^2(x)$  nur von  $Z_1, \dots, Z_{n-1}$  abhängt.  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  klar und  $\frac{(n-1)S^2(X)}{\sigma^2} = (n-1)S^2(Y) = Z_1^2 + \dots + Z_{n-1}^2 \sim \chi_{n-1}^2$  nach Definition der  $\chi^2$ -Verteilun. ■

**Korollar 16.2** Unter der Voraussetzung von Satz 16.1 gilt:

$$\sqrt{n} \cdot \frac{(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}$$

**Beweis** Weil  $\bar{X}$  und  $S^2(X)$  unabhängig sind, sind auch die Zufallsvariablen

$$\sqrt{n} \left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right) \text{ und } \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \frac{(n-1)S^2(X)}{\sigma^2}} \text{ unabhängig.}$$

Also gilt:

$$\frac{\sqrt{n}(X - \mu)}{S(X)} = \frac{\overbrace{\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}}^{\sim N(0,1)}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \underbrace{(n-1)S^2(X)}_{\sim \chi^2_{n-1}}}} \sim t_{n-1}$$

### 16.3 Test auf den Mittelwert bei unbekannter Varianz

$P_{\mu, \sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .  $\sigma^2$  ist hier nicht bekannt!

**Einseitiges Testproblem:**  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  vs  $H_1 : \mu > \mu_0$  für ein festes  $\mu_0 \in \mathbb{R}$

Sei  $X = (X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe zu  $P_{\mu, \sigma^2}$ . Dann gilt:  $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}$

Als Test verwenden wir:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \bar{x} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \overbrace{t_{n-1}(1-\alpha)}^{(1-\alpha)\text{-Quantil der } t_{n-1}\text{-Verteilung}} S(x) + \mu_0 \\ 0, & \text{falls } \bar{x} > \dots \end{cases}$$

Der Test  $\varphi$  hält das Niveau  $\alpha$  ein: Sei  $\mu \leq \mu_0$

$$\begin{aligned} \beta_\varphi(\mu) &= P_{\mu, \sigma^2} \left( \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu_0}{S(X)} > t_{n-1}(\alpha - 1) \right) \\ &\leq P_{\mu, \sigma^2} \left( \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{S(X)} > t_{n-1}(\alpha - 1) \right) \\ &= 1 - P_{\mu, \sigma^2} \left( \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{S(X)} \leq t_{n-1}(\alpha - 1) \right) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha \end{aligned}$$

**Zweiseitiges Testproblem:**  $H_0 : \mu = \mu_0$  vs  $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Der zugehörige Test ist:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} 0, & \text{falls } \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} \right| \leq t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \\ 1, & \text{falls } \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S(x)} \right| > t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \end{cases} \text{ hat Niveau } \alpha \quad \blacksquare$$

**Beispiel 16.2 (Zweiseitiger t-Test)** Dieses Beispiel wurde nur in der Hannoverschen Vorlesung gezeigt.

Einer früheren Untersuchung zur Folge sind Jungen einer bestimmten Altersgruppe im Mittel  $\sigma_0 = 150\text{cm}$  groß. Ein Hersteller für Kinderbekleidung möchte feststellen, ob sich seit der letzten Untersuchung eine Veränderung ergeben hat. Dazu wird die Größe von  $n = 49$  zufällig ausgesuchten Jungen des entsprechenden Alters gemessen:

Es ergibt sich:  $\bar{X} = 147$  und  $S^2 = \frac{1}{(49-1)} \sum_{i=1}^{49} (X_i - \bar{X})^2 = 36$ .

Als Niveau wird  $\alpha = 0.05$  gewählt.

Annahme: Körpergröße normalverteilt  $N(\theta, \sigma^2)$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

$$\sqrt{n} \left| \frac{\bar{X} - \theta_0}{S} \right| = \left| \frac{147 - 150}{6} \right| \cdot 7 = 3,5$$

Aus Tabelle:  $t_{48}(1 - \frac{\alpha}{2}) = t_{48}(0.975) \approx 2.01$

Ablehnung von  $H_0$  ist auf dem Niveau  $\alpha = 0.05$  gesichert.

Bemerkung:

Die angegebenen t-Tests sind unverfälscht und trennscharf in Menge der unverfälschten Tests.

## 16.4 Test auf die Varianz

$P_{\mu, \sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  wie gehabt.

**Testproblem:**  $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$  vs.  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

Nach Satz 16.1 gilt:

$$P_{\mu, \sigma^2} \left( \frac{(n-1)S(X)^2}{\sigma_0} \leq x \right) = F_{\chi_{n-1}^2}(x)$$

Als Test verwenden wir:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0} \leq \chi_{n-1}^2(1-\alpha) \\ 1, & \text{falls } \frac{(n-1)S(x)^2}{\sigma_0} > \chi_{n-1}^2(1-\alpha) \end{cases}$$

Berechnung des Testniveaus: Sei  $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$

$$P_{\mu, \sigma^2} \left( \frac{(n-1)S(X)^2}{\sigma_0} > \chi_{n-1}^2(1-\alpha) \right) \leq P_{\mu, \sigma^2} \left( \frac{(n-1)S(X)^2}{\sigma} > \chi_{n-1}^2(1-\alpha) \right) = 1 - (1-\alpha) = \alpha$$

