Stochastische Prozesse
Stoffzusammenfassung

Joachim Breitner

11. März 2017

Diese Zusammefassung ist natürlich alles andere als vollständig und zu knapp, um immer alle Aussagen mit Voraussetzungen korrekt wiederzugeben. Man verwende sie mit Vorsicht.

1 Vokabeln, Definitionen und äquivalente Charakterisierungen

1.1 Markov-Ketten in diskreter Zeit

$(X_n)_{x\in\mathbb{N}_0}$, $X_n : \Omega \to S$	Markov-Kette mit Zustandsraum S
	$P(X_{n+1} = i_{n+i} \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$
$P = (p_{ij})_{i,j\in S}$	Übergangsmatrix mit Übergangswahrscheinlichkeiten
$P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j\in S}$	n-Schritt-Übergangsmatrix mit n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten
$i \rightsquigarrow j$	$\exists n \in \mathbb{N} p_{ij}^{(n)} > 0$, „$i$ führt nach j“
$i \leftrightarrow j$	$i \rightsquigarrow j \wedge j \rightsquigarrow i$, „$i$ kommuniziert mit j“
$J \subseteq S$ abgeschlossen	$\nexists j \in J, i \in S \setminus J : i \rightsquigarrow j$
	$(p_{ij},\, i, j \in S)$ ist stochastische Matrix
(X_n) irreduzibel	(X_n) hat nur eine Äquivalenzklasse bzgl. „$\leftrightarrow \vee =$“
T_i	$\inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = i\}$, „Ersteintrittszeit“
$f_{ij}^{(n)}$	$P(T_j = n \mid X_0 = i)$, insbesondere $f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$
f_{ij}^*	$\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P_i(T_j < \infty)$
i rekurrent	$f_{ii}^* = 1$
	$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty = E_i(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{X_n=i})$, die erwartete Zahl der Besuche.
i transient	i nicht rekurrent
$\nu : S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	Maß
	Verteilung, wenn gilt: $\sum_{a\in S} \nu(a) = 1$
ν invariant	$\sum_{i\in S} \nu(i) p_{ij} = \nu(j)$, also $\nu = \nu P$
$\gamma_k : S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	$E_k(\sum_{n=1}^{T_k} 1_{(X_n=i)})$, Besucher pro Zyklus
	invariant, $0 < \gamma_k < \infty$, eindeutig mit $\gamma_k(k) = 1$, wenn (X_n) irreduzibel, rekurrent.
	(X_n) irreduzibel, transient: stationäre Verteilung existiert nicht.
m_i	$E_i(T_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)} + \infty \cdot (1 - f_{ii}^*)$
	i transient $\implies m_i = \infty$.
i positiv rekurrent	$m_i < \infty$
	(X_n) irreduzibel: Stationäre Verteilung existiert $\iff$ ein/alle Zustände positive rekurrent. Dann: $\pi(i) = \frac{1}{m_i}$

$(Ph)(i)$	$\sum_{j\in S} p_{ij}h(j)$, vergleiche Matrix-Vektor-Multiplikation. $Ph \geq h \implies h(X_n)$ Sub-Martingal $Ph = h \implies h(X_n)$ Martingal $Ph \leq h \implies h(X_n)$ Super-Martingal

1.2 Markov-Ketten in stetiger Zeit

1.2.1 Poisson-Prozess

(A1) $t \mapsto N(t,\omega) \in \{f : [0,\infty) \to \mathbb{N}_0 \mid f(0) = 0,\ f \text{ monoton wachsend, } f \text{ stetig von rechts}\}$

(A2) Unabhängige Zuwächse

(A3) Identisch verteilte Zuwächse

(A4) Ereignisse einzeln: $P(N_h \geq 2) = o(h)$ für $h \to 0$

Dann gilt:

- $\forall s,t \geq 0 : N_{s+t} - N_s \sim \mathcal{P}o(\lambda t)$
- Zeit zwischen Sprüngen $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt.

Intensitätsmatrix:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \\ \vdots & 0 & -\lambda & \lambda & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

1.2.2 Der allgemeine Fall

Markov-Eigenschaft	$P(X_{t_n+h} = i_{n+1} \mid X_{t_k} = i_k,\ k = 1,\dots,n) = P(X_{t_n+h} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n) = P(X_{t+h} = i_{n+1} \mid X_t = i_n)$
$P(t) = (p_{ij}(t))$	$p_{ij}(t) \coloneqq P(X_t = j \mid X_0 = i)$, Übergangsmatrizenfunktion
P_{ij} SÜMF	$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$, „Standardübergangsmatrizenfunktion“
$Q = (q_{ij})$	Instensitätsmatrix $q_{ij} \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t} = p'_{ij}(0)$ Anschaulich: Kehrwert der Diagonalelemente sagt, wie lange die Kette in dem Zustand bleibt, die anderen Elemente geben die Wahrscheinlichkeit des nächsten Zustands an.
q_i	$-q_{ii}$
P konservativ	$\sum_{i\in S} q_{ij} = 0$

1.3 Brownsche Bewegung

Gauss-Prozess	alle Fidis normalverteilt
Brownsche Bew.	$P(B_0 = 0) = 1$, P-f.a. Pfade stetig, $B_t - B_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$, $\mathcal{N}(0, t-s)$-verteilt.

	$\iff EB_t = 0$, $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t$, Gauss-Prozess mit F-f.s. stetigen Pfaden.
$P : \mathbb{R} \times \mathfrak{B} \to [0,1]$	Stochasticher Kern $A \mapsto P(x, A)$ Wahrscheinlichkeitsmaß und $x \mapsto P(x, A)$ messbar
$\mathcal{G}$ Generator	$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t - P_0)$ Bei BB: $\mathcal{G}f = \frac{1}{2}f''$
Markov-Eigenschaft	$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P_{t-s}(X_s, A)$
$\mathcal{F}_\tau$	$\{A \in \mathcal{F} \mid \forall t \geq 0 : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$
Progressiv messbar	$\forall t \geq 0 : (s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ ist $\mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar.

2 Formeln

Methode des ersten Besuchs:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(n-k)}$$

Übergangswahrscheinlichsgrenzwert bei Periode d_j:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n\cdot d_j + r} = \frac{d_j}{m_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{k\cdot d_j + r}$$

insbesondere ist $p_{ij}^{(n)} \to 0$ für $m_j = \infty$, d.h. i transient oder null-rekurrent.

Chapman-Kolmogorov-Gleichungen

- diskret

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

- stetig

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s)$$

- allgemein (eigentlich die Definition von stochastischem Kern)

$$P_{t+s}(x, A) = \int P_s(y, A) P_t(x, dy)$$

Kolmogorovsche Rückwärts-DGL:

$$P'(t) = QP(t) \text{ d.h. } p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} q_{ik} p_{kj}(t)$$

Kolmogorovsch Vorwärts-DGL: *Wann genau gilt die?*

$$P'(t) = P(t)Q$$

Ist S endlich, kann man $P(t) = e^{tQ}$ schreiben.

Erfüllt Q die Bedingungen

$$\sum_{j\in S} q_{ij} = 0 \text{ und } 0 < \sup_{i\in S} |q_i i| =: \lambda < \infty \qquad ((*))$$

so gilt:

- Ist N Poissonprozess und Y_n Markov-Kette mit $P = E + \frac{1}{\lambda}Q$, dann ist $X_t = Y_{N_t}$ Markov-Kette mit Intensitätsmatrix Q.
- μ ist invariantes Maß $\iff \mu Q = 0$
- Ist X_n rekurrent, irreduzibel, dann gilt $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \frac{1}{m_j q_j}$

Ist (B_t) eine Brownsche Bewegung, dann auch:

- $(-B_t)$, $(B_{a+t} - B_a)$, $(cB_{\frac{t}{c^2}})$
- Zeitumkehr: $(tB_{\frac{1}{t}})$
- Spiegelungsprinzip: Der nach τ gespiegelte Prozess.

Eigenschaften der Brownschen Bewegung:

- $\sup B_t = \infty$, $\inf B_t = -\infty$, also unendlich oft weit hoch und runter.
- P-fast-sicher nie Lipschitzs-Stetig
- Totalvariation ∞, quadratische Variation $\xrightarrow{P} t$.
- Stochastischer Kern $P_t(x, \cdot) = \mathcal{N}(x, t)$
- $\mathcal{G}f = \frac{1}{2}f''$
- Ist τ endliche Stoppzeit, dann ist $(B_{\tau+t} - B_\tau)$ verteilt wie (B_t) und unabhängig von $\mathcal{F}_\tau$.
- Identisch verteilt sind: $M_t := \sup_{0\le s\le t} B_s$, $M_t - B_t$, $|B_t|$
- P-fast-sicher Nullstellenmenge perfekt

Invarianzprinzip von Dansker: Ist $E\xi_i = 0$, $0 < \operatorname{Var}(\xi_i) =: \sigma^2 < \infty$, $S_k = \sum_{j=1}^k \xi_i$, $Y_t = S_{\lfloor t\rfloor} + (t - \lfloor t\rfloor t)\xi_{\lfloor t\rfloor+1}$, $(X_t^{(n)}) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{nt}$, dann konvergieren die Wahrscheinlichkeitsmaße P_n schwach gegen P, wobei P so ist, dass die Projektionen π_t eine Brownsche Bewegung sind.

3 Wichtige Beweisideen

3.1 Konvergenz gegen stationäre Verteilung

Voraussetzungen: (X_n) irreduzibel, aperiodisch, positiv rekurrent. „Kopplungs-Argument“: (Y_n) Kette mit gleicher Übergangsmatrix, $Y_n \sim \pi$, $T := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = Y_n\}$.

- Zeige $P(T < \infty) = 1$
- Definiere
$$Z_n := \begin{cases} X_n, n \le T Y_n, n > T \end{cases}$$
- Schätze ab
$$|p_{ij}^{(n)} - \pi(j)| \le 2 \cdot P_{\hat\nu}(T > n) \to P(T = \infty) = 0$$

3.2 $\mu Q = 0 \iff \mu$ stationäre Verteilung

- $P'(t) = P(t)Q = QP(t)$
- $\implies P(t) = E + Q\int_0^t P(s)ds = E + \int_0^t P(s)dsQ$
- $\implies \mu = \mu P(t) = \mu + \int_0^t \mu P(s)dsQ = \mu + t\cdot(\mu Q) = \mu$

3.3 Solidaritätsprinzip

i rekurrent, $j \in K(i)$, also $\exists m,n \in \mathbb{N} : p_{ij}^(m)p_{ji}^{(n)} > 0$. Dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(n+m+k)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)}p_{ii}^{(k)}p_{ij}^{(m)} = p_{ij}^{(m)}p_{ji}^{(n)}\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty$$

4 Verteilungen

- $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2)$
- $\mathrm{Exp}(\lambda)$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $EX = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}\,X = \frac{1}{\lambda^2}$.
- $\mathcal{P}o(\lambda)$: $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $EX = \mathrm{Var}\,X = \lambda$.