

# Kapitel 2

## Projektive Varietäten

### § 9 Der Projektive Raum

#### Definition 9.1

Sei  $k$  ein Körper,  $n \geq 0$

$\mathbb{P}^n := \{\text{Geraden durch } 0 \text{ in } k^{n+1}\}$

#### Bemerkung 9.2

$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$  Äquivalenzklassen, wobei  $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$  genau dann, wenn ein  $\lambda \in k \setminus \{0\}$  existiert, sodass  $\lambda \cdot x_i = y_i$  für  $i = 0, \dots, n$

#### Beispiel

0)  $n = 0$ :  $\mathbb{P}^0(k)$  hat genau einen Punkt

1)  $n = 1$ :  $\mathbb{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$

2)  $k = \mathbb{R}$ ,  $n = 1$ :  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = S^1 / \{\pm 1\}$

$n = 2$ :  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  „Kreuzhaube“ (nicht orientierbare geschlossene Fläche)

3)  $k = \mathbb{C}$ :  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \stackrel{1)}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

4)  $k = \mathbb{F}_2$ ,  $n = 2$ :  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$  hat 7 Punkte

**Schreibweise:** Die Klasse von  $(x_0, \dots, x_n)$  wird mit  $(x_0 : \dots : x_n)$  bezeichnet.

#### Bemerkung 9.3

Für  $n \geq 1$  und  $i = 1, \dots, n$  sei

$$U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\}$$

a)  $U_i$  ist wohldefinierte Teilmenge von  $\mathbb{P}^n(k)$  und  $\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{P}^n(k)$

b)  $\varrho_i : \begin{cases} U_i & \rightarrow k^n \\ (x_0 : \dots : x_n) & \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) \end{cases}$  ist bijektiv

Umkehrabbildung:

$$\begin{aligned} \psi_i : k^n &\rightarrow U_i \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \end{aligned}$$

c)  $\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{P}^n(k) - U_i & \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k) \\ (x_0 : \dots : x_n) & \mapsto (x_0 : \dots : x_{i-1} : x_{i+1} : \dots : x_n) \end{cases}$  ist bijektiv

Umkehrabbildung:

$$(y_1 : \dots : y_n) \mapsto (y_1 : \dots : y_{i-1} : 0 : y_i : \dots : y_n)$$

**Beweis**

b)

$$\begin{aligned}\varrho_i \circ \psi_i(y_1, \dots, y_n) &= \varrho_i(y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \\ &= (y_1, \dots, y_i, \dots, y_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_i \circ \varrho_i(x_1 : \dots : x_n) &= \psi_i\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \\ &= \left(\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i}\right) \sim (x_1 : \dots : x_n)\end{aligned} \quad \square$$

**Folgerung 9.4**

$$\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \dot{\cup} \mathbb{P}^{n-1}(k) = k^n \dot{\cup} k^{n-1} \dot{\cup} \mathbb{P}^{n-2}(k) = \dots = k^n \dot{\cup} k^{n-1} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} k \dot{\cup} \{0\}$$

## § 10 Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$

### Bemerkung 10.1

Sei  $f \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen vom Grad  $d > 0$ .

a) Für  $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$  und  $\lambda \in k$  gilt:

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d \cdot f(x_0, \dots, x_n)$$

b)  $f$  hat wohlbestimmte Nullstellenmenge  $V(f) \subset \mathbb{A}^n(k)$

### Definition 10.2

Eine Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  heißt **projektive Varietät**, wenn es eine Menge  $F \subset k[X_0, \dots, X_n]$  von homogenen Polynomen gibt mit  $V = \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \forall f \in F\}$

### Beispiel 10.3

a)  $V(X_0, \dots, X_n) = \emptyset$

b)  $H_i := V(X_i) = \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}^n(k) - U_i$

$H_i$  heißt Hyperebene

c)  $V(X_0 X_1 - X_2^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$  projektive Varietät

$$V \cap U_0 = V\left(\frac{x_1}{x_0} - \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2\right) \subseteq U_0 = \mathbb{A}^2(k)$$

$$= V(y - x^2) \text{ Parabel}$$

$$V \cap U_2 = V\left(\frac{x_0}{x_2} \frac{x_1}{x_2} - 1\right) \subset U_2 = \mathbb{A}^2(k)$$

$$= V(xy - 1) \text{ Hyperbel}$$

**Warnung:** Ist  $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ ,  $v \neq 0$ , so ist

$$I_0(V) := \{f \in k[X_0, \dots, X_n] : f \text{ homogen}, f(x) = 0 \forall x \in V\}$$

kein Ideal!

Denn: ist  $f \in I_0(V)$ ,  $\deg(f) \geq 1 \Rightarrow f^2 \in I_0(V)$ , aber  $f + f^2$  ist nicht homogen.

### Definition 10.4

a) Für  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  sei  $I(V) \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$  das von  $I_0(V) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \text{ homogen}, f(x) = 0 \forall x \in V\}$  erzeugte Ideal.  $I(V)$  heißt **Verschwindungsideal**.

b) Ein Ideal  $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$  heißt **homogen**, wenn es von homogenen Polynomen erzeugt werden kann.

c) Für ein homogenes Ideal  $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$  sei

$$V(I) := \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \text{ für alle homogenen } f \in I\}$$

### Definition + Bemerkung 10.5

a) Ein Ring  $R$  heißt **graduier**, wenn es eine Zerlegung  $R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$  gibt mit abelschen Gruppen  $R_d$ , sodass  $R_d R_e \subseteq R_{d+e}$  für alle  $d, e \geq 0$

b) Eine  $k$ -Algebra  $S$  heißt **graduier**, wenn  $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$  graduierter Ring ist und  $S_0 = k$ . Dann ist jedes  $S_d$  ein  $k$ -Vektorraum.

c) Die Elemente von  $R_d$  heißen **homogen** vom Grad  $d$ .

d) Ein Ideal  $I \subseteq R$  heißt **homogen**, wenn es von homogenen Elementen erzeugt werden kann.

- e)  $I$  homogen  $\Leftrightarrow I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap R_d) \Leftrightarrow$  für jedes  $a \in I, a = \sum_{d=0}^n a_d, a_d \in R_d$  ist  $a_d \in I$  für jedes  $d = 0, \dots, n$
- f) Ist  $I \subset R$  homogenes Ideal, so ist  $R/I$  graduierter Ring mit  $(R/I)_d = R_d/I \cap R_d$
- g) Summe, Produkt, Durchschnitt und Radikal von homogenen Idealen ist homogen.

### Beweis

e) „ $\Leftarrow$ “: ✓

„ $\Rightarrow$ “: Seien  $(a_i)_{i \in J}$  homogene Erzeuger von  $I, a_i \in R_{d_i}$ , sei  $a \in I$  beliebig, schreibe

$$a = \sum_{\text{endl.}} r_i a_i \text{ mit } r_i \in R. \text{ Sei } r_i = \sum_{d=0}^n r_{i,d} \text{ mit } r_{i,d} \in R$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r_i a_i &= \sum_{d=0}^n \underbrace{r_{i,d} a_i}_{\in I \cap R_{d+d_i}} \Rightarrow r_i a_i \in \bigoplus_{d \geq 0} (R_d \cap I) \\ &\Rightarrow a \in \bigoplus_{d \geq 0} (R_d \cap I) \end{aligned}$$

f)  $\pi : \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d/I \cap R_d \rightarrow R/I$  ist surjektiver Homomorphismus.  
 $r \bmod I \cap R_d \mapsto r \bmod I$

Sei  $\sum_{d=0}^n r_d \bmod I \cap R_d \in \text{Kern } \pi \Leftrightarrow \sum r_d \in I \xLeftrightarrow{I \text{ hom.}} r_d \in I$  für alle  $d$

$$\Rightarrow r_d \in R_d \cap I \forall d \Rightarrow \sum r_d \bmod I \cap R_d = 0 \text{ in } \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d/I \cap R_d$$

$\Rightarrow \pi$  injektiv  $\Rightarrow \pi$  ist Isomorphismus.

g) Seien  $I_1, I_2$  homogen mit homogenem Erzeuger  $(a_i)_{i \in J}$  bzw.  $(b_i)_{i \in J}$ .

- $I_1 + I_2$  wird von den  $a_i$  und den  $b_i$  erzeugt.
- $I_1 \cdot I_2$  wird von den  $a_i b_i$  erzeugt.
- $\bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap I_2) \cap R_d) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} ((I_1 \cap R_d) \cap (I_2 \cap R_d)) = \bigoplus_d (I_1 \cap R_d) \cap \bigoplus_d (I_2 \cap R_d) = I_1 \cap I_2$

Sei  $I$  homogen,  $x \in \sqrt{I}$ , schreibe  $x = \sum_{d=0}^n x_d$ .

Zu zeigen:  $x_d \in \sqrt{I}$  für alle  $d$

$x \in \sqrt{I} \Rightarrow \exists m \geq 1$  mit  $x^m \in I$

$$x^m = \left( \sum_{d=0}^n x_d \right)^m = x_n^m + \text{Terme niedrigeren Grades}$$

$$\Rightarrow x_n^m \in I \Rightarrow x_n \in \sqrt{I} \Rightarrow x - x_n \in \sqrt{I}$$

$$\xRightarrow{\text{Ind.}} x_d \in \sqrt{I} \text{ für jedes } d$$

□

### Bemerkung + Definition 10.6

- a) Für jede Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  ist  $I(V)$  ein Radikalideal.
- b) Die projektiven Varietäten in  $\mathbb{P}^n(k)$  bilden die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf  $\mathbb{P}^n(k)$ . Diese heißt **Zariski-Topologie**.
- c) Eine projektive Varietät  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $I(V)$  Primideal ist.
- d) Jede projektive Varietät besitzt eine eindeutige Zerlegung in endlich viele irreduzible Komponenten.

**Beweis**

a) Zu zeigen:  $\sqrt{I(V)} \subseteq I(V)$

Sei  $f \in \sqrt{I(V)}$  homogen,  $m \geq 1$  mit  $f^m \in I(V)$

$$\Rightarrow f^m(x) = 0 \forall x \in V$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \forall x \in V$$

$$\Rightarrow f \in I(V)$$

$$\sqrt{I} \xrightarrow{\text{homogen}} \sqrt{I(V)} \subseteq I(V)$$

□

**Definition + Bemerkung 10.7**

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  projektive Varietät,  $V \neq \emptyset$

a)  $\tilde{V} := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k) \mid (x_0 : \dots : x_n) \in V\} \cup \{(0, \dots, 0)\}$  heißt **affiner Kegel** über  $V$ .

b)  $\tilde{V}$  ist affine Varietät.

Genauer: ist  $V = V_{\text{proj}}(I)$  für ein homogenes Ideal  $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ , so ist  $\tilde{V}$  die Nullstellenmenge von  $I$  in  $\mathbb{A}^{n+1}(k)(V_{\text{aff}}(I))$

c)  $I(\tilde{V}) = I(V)$ , falls  $k$  unendlich

**Beweis**

c) Für homogene Polynome  $f \in k[X_0, \dots, X_n]$  gilt:

$$f \in I(V) \Leftrightarrow f \in I(\tilde{V})$$

Zu zeigen:  $I(\tilde{V})$  ist homogenes Ideal

Sei also  $f \in I(\tilde{V})$ ,  $f = \sum_{i=0}^d f_i$ ,  $f_i$  homogen vom Grad  $i$ . Für jedes  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \tilde{V}$  und jedes  $\lambda \in k$  ist  $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \in \tilde{V} \Rightarrow 0 = f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \sum_{i=0}^d \lambda^i f_i(x)$  für jedes  $\lambda \in k$

$\xrightarrow{k \text{ unendl.}}$  dieses LGS ist nur durch  $f_i(x) = 0$  für alle  $i$  lösbar  $\Rightarrow f_i \in I(\tilde{V})$

□

**Proposition 10.8 (Projektiver Nullstellensatz)**

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen,  $n \geq 0$ ,  $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$  homogenes Radikalideal. Ist  $I \neq (X_0, \dots, X_n)$ , so ist  $I(V(I)) = I$ .

**Beweis**

Ist  $I = k[X_0, \dots, X_n]$ , so ist  $V(I) = \emptyset$ , also  $I(V(I)) = k[X_0, \dots, X_n]$ . Ist  $I \neq k[X_0, \dots, X_n]$  homogen, so ist  $I \subseteq (X_0, \dots, X_n)$ .

Sei  $V_{\text{aff}}(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$  die affine Nullstellenmenge, und  $V = V_{\text{proj}}(I) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  die projektive Nullstellenmenge von  $I \Rightarrow \tilde{V} = V_{\text{aff}}(I)$

Dann ist  $(0, \dots, 0) \in V_{\text{aff}}(I)$ , aber  $\{(0, \dots, 0)\} \neq V_{\text{aff}}(I)$ . Für  $(x_0, \dots, x_n) \in V_{\text{aff}}(I) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  ist  $(x_0, \dots, x_n) \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$ . Nach Bemerkung 10.7 c) ist  $I(V) = I(\tilde{V}) = I(V_{\text{aff}}(I)) \stackrel{\text{HNS}}{=} I$  □

**Definition 10.9**

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  projektive Varietät,  $I(V) \subset k[X_0, \dots, X_n]$  das Verschwindungsideal. Dann heißt  $K[V] := k[X_0, \dots, X_n]/I(V)$  **homogener Koordinatenring** zu  $V$ .

# § 11 Homogenisieren und Dehomogenisieren

## Definition + Bemerkung 11.1

Sei  $k$  ein Körper,  $n \geq 1$

- a)  $H : \begin{cases} k[X_1, \dots, X_n] & \rightarrow k[X_0, \dots, X_n] \\ f = \sum_{i=0}^d f_i & \mapsto \sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i} \end{cases}$  ( $f_i$  homogen vom Grad  $i$ ,  $f_d \neq 0$ ) heißt **Homogenisierung**.
- b)  $D : \begin{cases} k[X_0, \dots, X_n] & \rightarrow k[X_1, \dots, X_n] \\ f & \mapsto f(1, X_1, \dots, X_n) \end{cases}$  heißt **Dehomogenisierung**.
- c)  $D \circ H = \text{id}$
- d) Für jedes homogene  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  sei  $\nu = \nu_{x_0}(F)$  mit  $F = X_0^\nu \cdot \tilde{F}$  wobei  $X_0 \nmid \tilde{F}$ .
- e)  $D$  ist  $k$ -Algebren-Homomorphismus. Im Allgemeinen:

$$\begin{aligned} H(f+g) &\neq H(f) + H(g) \\ H(f \cdot g) &= H(f) \cdot H(g) \end{aligned}$$

## Beweis

- c) Sei  $f = \sum_{i=0}^d f_i \in k[X_1, \dots, X_n] \Rightarrow H(f) = \sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i} \Rightarrow D(H(f)) = \sum_{i=0}^d f_i = f$
- d)  $\tilde{F}$  ist homogen. Schreibe  $\tilde{F} = \sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i}$  mit  $f_i \in k[X_1, \dots, X_n]$  homogen vom Grad  $i$ .  
 $f_d \neq 0$ , weil  $X_0 \nmid \tilde{F} \Rightarrow D(F) = D(\tilde{F}) = \sum_{i=0}^d f_i \Rightarrow H(D(F)) = \sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i} = \tilde{F}$
- e) Sei  $f = \sum_{i=0}^d f_i, g = \sum_{i=0}^e g_i \Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{d+e} (\sum_{i=0}^k f_i g_{k-i}) \Rightarrow H(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{i=0}^k f_i g_{k-i} X_0^{d+e-k}$   
 $H(f) \cdot H(g) = (\sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i}) \cdot (\sum_{i=0}^e g_i X_0^{e-i}) = \sum_{k=0}^{d+e} (\sum_{i=0}^k f_i X_0^{d-i} g_{k-i} X_0^{e-(k-i)}) = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{i=0}^k f_i g_{k-i} X_0^{d+e-k}$   
 $\square$

## Proposition 11.2

Sei  $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i, U_i = D(X_i)$ . Mit der Zariski-Topologie von  $\mathbb{P}^n(k)$  ist  $U_i$  homomorph zu  $\mathbb{A}^n(k)$ .

## Beweis

☞  $i = 0$

Zeige:

$$\varrho := \varrho : \begin{cases} U_0 & \rightarrow k^n \\ (x_0, \dots, x_n) & \mapsto (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) \end{cases} \text{ und } \varphi : \begin{cases} k^n & \rightarrow U_0 \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n) \end{cases}$$

sind stetig

$\varrho$  stetig:

Zeige:  $\varrho^{-1}(V) = \varphi(V)$  ist abgeschlossen für jedes abgeschlossene  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$

Sei  $V = V(I)$  für ein Ideal  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ , seien  $f_1, \dots, f_r$  Erzeuger von  $I \Rightarrow V = \bigcap_{i=1}^r V(f_i) \Rightarrow \varphi(V) = \bigcap_{i=1}^r \varphi(V(f_i))$

Also ☞  $r = 1$ , d. h.  $V = V(f)$  für ein  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$

Behauptung:  $\varphi(V(f)) = V(H(f)) \cap U_0$

denn: Sei  $f = \sum_{i=0}^d f_i, x = (x_1, \dots, x_n) \in V(f) \Leftrightarrow$  für  $\varphi(x) = (1 : x_1 : \dots : x_n)$  gilt  
 $0 = H(f)(\varphi(x)) = \sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i} (1 : x_1 : \dots : x_n) = \sum_{i=0}^d f_i(x) = f(x)$

$\varphi$  stetig:

Wie oben genügt es zu zeigen, dass  $\varrho(V(F) \cap U_0) = V(D(F))$  für jedes homogene  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ .

denn:  $(x_0 : \dots : x_n) \in \varrho(V(F) \cap U_0)$

$$\Leftrightarrow x_0 \neq 0 \text{ und } F(x_0 : \dots : x_n) = 0$$

$$0 = F(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$$

$$0 = D(F)(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) = D(F)(\varrho(x_0 : \dots : x_n))$$

□

### Definition + Proposition 11.3

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen.

a) Für ein Radikalideal  $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$  sei  $I^*$  das von den  $H(f), f \in I$  erzeugte Ideal.

b) Es gilt  $\varphi(V(I)) = V(I^*) \cap U_0$

c)  $\overline{\varphi(V(I))} = V(I^*)$  (Zariski-Abschluss von  $\mathbb{P}^n(k)$ )

alternativ:  $\overline{V(I)} = V(I^*)$

$\overline{V(I)}$  Zariski-Abschluss in  $\mathbb{P}^n(k)$ , identifiziere dabei  $\mathbb{A}^n(k)$  mit  $\varphi(\mathbb{A}^n(k)) = U_0 \subset \mathbb{P}^n(k)$

### Beweis

c) „ $\subseteq$ “: ✓

„ $\supseteq$ “: Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  abgeschlossen mit  $V(I) \subset V$ . Sei  $V = V(\mathcal{J})$  für ein homogenes Ideal  $\mathcal{J} \subset k[X_0, \dots, X_n]$

Behauptung:  $\mathcal{J} \subseteq I^*$  (denn dann ist  $V = V(\mathcal{J}) \supseteq V(I^*)$ )

denn: Sei  $F \in \mathcal{J}$  homogen,  $x = (y_1, \dots, y_n) \in V(I)$ . Dann ist Dehomogenisierung bezüglich  $x_0$ :  $D_0(F)(x) = 0$  (weil  $\varphi(x) \in V \subseteq V(F)$ )

$$\Rightarrow D_0(F) \in I(V(I)) \stackrel{\text{HNS}}{=} I$$

$$\tilde{F} = H_0(D_0(F)) \in I^* \stackrel{F = X_0^y \cdot \tilde{F}}{\Rightarrow} F \in I^* \Rightarrow \mathcal{J} \subseteq I^*$$

□

### Beispiel

$$V = \{(x, x^2, x^3) \in \mathbb{A}^3(k) : x \in k\} = V(y - x^2, z - x^3)$$

$$\overline{V} \neq V(x_0 y - x^2, x_0^2 z - x^3) \text{ (Übung)}$$

### Definition + Bemerkung 11.4

a) Eine Teilmenge  $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  heißt **quasi-projektive Varietät**, wenn  $W$  offene Teilmenge einer projektiven Varietät ist.

b)  $W$  quasi-projektiv  $\Leftrightarrow$  es gibt  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  abgeschlossen und  $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  offen, sodass  $W = V \cap U$

c) Die Zariski-Topologie auf einer quasi-projektiven Varietät besitzt eine Basis aus (abstrakt) affinen Varietäten.

d) Jede quasi-projektive Varietät ist quasikompakt.

### Beweis

c) Sei  $U \subseteq W$  offen. Für  $i = 0, \dots, n$  ist  $U \cap U_i$  offen in  $U_i \cap W$  und damit in der affinen Varietät  $\overline{U_i \cap W}$  (Zariski-Abschluss in  $\mathbb{A}^n(k) = \varrho_i(U_i)$ ).

Nach Bemerkung 3.6 ii) bilden die  $D(f), f \in k[V_i]$ , eine Basis der Zariski-Topologie auf  $V_i$ .  $D(f)$  ist (abstrakt) affin nach Bemerkung 7.8.

d)  $W \cap U_i$  ist quasi-kompakt für jedes  $i$  nach Bemerkung 7.5 b)  $\Rightarrow W$  ist auch quasi-kompakt.

□

## § 12 Reguläre Funktionen

### Bemerkung 12.1

Sind  $F, G \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen,  $\deg(F) = \deg(G)$ , so ist  $\frac{F}{G}$  wohldefinierte Funktion auf  $D(G) = \mathbb{P}^n(k) - V(G)$ .

### Beweis

klar! □

### Definition 12.2

Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  quasiprojektive Varietät,  $f : W \rightarrow k$  Abbildung.

- $f$  heißt **regulär in**  $x \in W$ , wenn es eine Umgebung  $U_x \subseteq W$  von  $x$  gibt und homogene Polynome  $F, G \in k[X_0, \dots, X_n]$  mit  $f(y) = \frac{F}{G}(y)$  für alle  $y \in U_x$  (insbesondere  $U_x \subseteq D(G)$ ).
- $f$  heißt **regulär**, wenn es in jedem  $x \in W$  regulär ist.

### Bemerkung 12.3

Eine Funktion  $f : W \rightarrow k$  ( $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  quasiprojektiv) ist regulär  $\Leftrightarrow f|_{U_i \cap W} = f \circ \varphi_i$  regulär für  $i = 0, \dots, n$  wobei

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad \mathbb{A}^n(k) &\rightarrow U_i \subset \mathbb{P}^n(k) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_i : \dots : x_n) \\ (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) &\mapsto (x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n) \end{aligned}$$

### Beweis

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $x \in W \cap U_i$ ,  $f = \frac{F}{G}$  in Umgebung  $U_x$  von  $x$ ,  $\emptyset \neq U_x \subset U_i$ .

$$\Rightarrow f \circ \varphi_i = \frac{F \circ \varphi_i}{G \circ \varphi_i} = \frac{D_i(F)}{D_i(G)} \text{ auf } U_x \Rightarrow f \circ \varphi_i \text{ regulär im Sinne von Definition 7.2.}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $x \in W \cap U_i$ ,  $f = \frac{g}{h}$  in einer Umgebung  $U_x \subseteq U_i$  von  $x$ ,  $g, h \in k[X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n]$ .

Sei  $G = H_i(g)$ ,  $H = H_i(h)$ . Ist  $\deg(G) < \deg(H)$ , ersetze  $G$  durch  $\tilde{G} = G \cdot X_i^{\deg(H) - \deg(G)}$

$\Rightarrow \frac{\tilde{G}}{H}$  ist reguläre Funktion im Sinne von Definition 12.2 auf  $U_x$  und  $f = \frac{\tilde{G}}{H}$  auf  $U_x$ . □

### Definition + Bemerkung 12.4

Sei  $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  quasiprojektive Varietät.

- Für  $U \subseteq W$  sei  $\mathcal{O}_W(U) := \{f : U \rightarrow k \mid f \text{ regulär}\}$ .
- $\mathcal{O}_W(U)$  ist  $k$ -Algebra.
- $U \mapsto \mathcal{O}_W(U)$  ist Garbe von  $k$ -Algebren.

### Satz 7

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen,  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  projektive Varietät.

- Ist  $V$  zusammenhängend, so ist  $\mathcal{O}_V(V) = k$ .
- Sei  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogen,  $\deg(F) \geq 1$ ,  $F \notin I(V)$ . Dann gilt

$$\mathcal{O}_V(D(F)) \cong k[V]_{(F)} := \left\{ \frac{G}{F^r} : G \in k[V] \text{ homogen, } \deg(G) = r \deg(F) \right\}$$

(homogene Lokalisierung)

### Beweis

- Definiere:  $\psi : k[V]_{(F)} \rightarrow \mathcal{O}_V(D(F))$ ,  $\frac{G}{F^r} \mapsto (x \mapsto \frac{G}{F^r}(x))$



$\psi$  ist wohldefinierter  $k$ -Algebren-Homomorphismus.

$\psi$  injektiv: Ist  $\frac{G}{F^r}(x) = 0$  für alle  $x \in D(F)$ , so ist  $D(F) \subseteq V(G) \Rightarrow F \cdot G = 0$  auf ganz  $V$ , das heißt  $F \cdot G \in I(V) \Rightarrow \frac{G}{F^r} = 0$  in  $k[V]_{(F)}$

$\psi$  surjektiv: Sei  $h \in \mathcal{O}_V(D(F))$

Für  $i = 0, \dots, n$  mit  $D(F) \cap U_i \neq \emptyset$  ist  $h \circ \varphi_i$  regulär auf  $D(F) \cap U_i = D(f_i)$ , wobei  $f_i = D_i(F) \xrightarrow{\text{Satz 5b}} h \circ \varphi_i = \frac{g_i}{f_i^{r_i}}$  für ein  $g_i \in k[X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n]$  und ein  $r_i > 0$ .

Homogenisiere bezüglich  $X_i$ : erhalte  $\frac{G_i}{F^{r_i} X_i^{e_i}}$ ,  $\forall r_i = 1$  (sonst ersetze  $F$  durch  $F^{r_i}$ )  $\Rightarrow$  Auf  $D(F) \cap U_i \cap U_j$  ist  $\frac{G_i}{F \cdot X_i^{e_i}} = \frac{G_j}{F \cdot X_j^{e_j}}$ , also  $G_i F X_j^{e_j} = G_j F X_i^{e_i} = 0$

$$G_i F X_j^{e_j+1} X_i - G_j F X_i^{e_i+1} X_j = 0 \text{ in } k[V] \quad (*)$$

$F \in (X_0, \dots, X_n)$

$\Rightarrow \exists m \geq 1$  mit  $F^m \in (X_0^{e_0+1}, \dots, X_n^{e_n+1})$

Das heißt  $F^{m+1} = \sum_{i=0}^n H_i F X_i^{e_i+1}$ ,  $H_i \in k[X_0, \dots, x_n]$  homogen. Setze  $G := \sum_{i=0}^n H_i G_i X_i$

$\Rightarrow F^{m+1} G_j X_j = \sum_{i=0}^n H_i F X_i^{e_i+1} G_j X_j \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=0}^n H_i F X_j^{e_j+1} G_i X_i = G \cdot F X_j^{e_j+1}$

$\Rightarrow$  Auf  $D(F) \cap U_j$  ist  $\frac{G}{F^{m+1}} = \frac{G_j}{F \cdot X_j^{e_j}} = h \circ \varphi_j \Rightarrow h = \psi\left(\frac{G}{F^{m+1}}\right)$

a)  $\mathcal{O}_V$  irreduzibel

denn: Sei  $V = \bigcup_{j=1}^r V_j$ ,  $V_j$  irreduzibel. Ist  $h|_{V_j} = c_j$  konstant für jedes  $j$ , so ist  $c_i = c_j$  falls  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ . Da  $V$  zusammenhängend ist, ist  $h$  konstant.

Sei also  $V$  irreduzibel,  $f \in \mathcal{O}_V(V) \xrightarrow{10.6} I(V)$  ist Primideal, also  $k[V]$  nullteilerfrei, sei also  $L := \text{Quot}(k[V])$

Sei  $f_i = f|_{V \cap U_i} \in \mathcal{O}_V(U \cap U_i)$ . Falls  $V \cap U_i \neq \emptyset$ , so ist  $f_i = \frac{G_i}{X_i^{d_i}}$  (nach Teil b)) für ein homogenes  $G_i \in k[X_0, \dots, X_n]$  vom Grad  $d_i$ .

Ist für  $j \neq i$  auch  $V \cap U_j \neq \emptyset$ , so ist  $V \cap U_i \cap U_j$  dicht in  $V$  und  $\frac{G_i}{X_i^{d_i}} = \frac{G_j}{X_j^{d_j}} =: f \in L$ .

*Behauptung 1:*  $f$  ist ganz über  $k[V]$

Dann gibt es ein  $m \geq 1$  und  $a_0, \dots, a_{m-1} \in k[V]$ , so dass

$$\begin{aligned} f^m - \sum_{j=0}^{m-1} a_j f^j &= 0 \quad | \cdot X^{d_i \cdot m} \\ \underbrace{G_i^m}_{\deg=d_i \cdot m} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot \underbrace{G_i^j \cdot X_i^{d_i(m-j)}}_{\deg=d_i j + d_i m - d_i j = d_i m} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall a_j \in k$  für alle  $j$

$\Rightarrow f$  algebraisch über  $k \xrightarrow{k \text{ alg. abg.}} f \in k$

*Bew. von Beh. 1:* Sei  $d := \sum_{i=1}^n d_i$  und  $k[V]_d$  die homogenen Elemente vom Grad  $d$ .

*Behauptung 2:*  $k[V]_d \cdot f^j \subseteq k[V]_d$  für alle  $j \geq 0$

Dann ist insbesondere  $X_0^d \cdot f^j \in k[V]$  für jedes  $j \geq 0$

$\Rightarrow k[V][f]$  ist in einem endlich erzeugbaren  $k[V]$ -Modul enthalten  $\Rightarrow k[V][f]$  ist selbst endlich erzeugter  $k[V]$ -Modul (da  $k[V]$  noethersch ist)

$\Rightarrow f$  ist ganz über  $k[V]$

Bew. von Beh. 2:  $k[V]_d$  wird erzeugt von den  $X_0^{j_0} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n}$  mit  $\sum_{i=1}^n j_i = d = \sum_{i=1}^n d_i$ .

Es gibt also ein  $i$  mit  $j_i \geq d_i$

$\Rightarrow X_0^{j_0} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n} \cdot \frac{G_i}{X_i^{d_i}} = X_0^{j_0} \cdot \dots \cdot X_i^{j_i - d_i} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n} G_i \in k[V]_d \xRightarrow[\text{Ind. über } j]{\quad} \text{Beh. 2} \quad \square$

## § 13 Morphismen

### Definition + Bemerkung 13.1

Seien  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ,  $W \subseteq \mathbb{P}^m(k)$  quasiprojektive Varietäten.

- Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt **Morphismus**, wenn es zu jedem  $x \in V$  eine offene Umgebung  $U_x \subset V$  und homogene Polynome  $F_0, \dots, F_m \in k[X_0, \dots, X_n]$  vom gleichen Grad gibt, sodass  $f(y) = (F_0(y) : \dots : F_m(y))$  für jedes  $y \in U_x$
- $f$  ist genau dann Morphismus, wenn für alle  $i = 0, \dots, n$  und  $j = 0, \dots, m$  mit  $U_{ij} := f^{-1}(W \cap U_j) \cap U_i$  gilt:  $f|_{U_{ij}} : U_{ij} \rightarrow W \cap U_j$  ist Morphismus von quasiaffinen Varietäten
- Die Morphismen  $V \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  entsprechen bijektiv den regulären Funktionen auf  $V$ .
- Morphismen sind stetig
- Die quasiprojektiven Varietäten über  $k$  bilden mit den Morphismen eine Kategorie  $\underline{\text{Var}}(k)$

### Beispiel 13.2

- Sei  $k$  unendlicher Körper.

$$\text{Sei } f : \mathbb{P}^2(k) \setminus \{(0 : 0 : 1)\} \rightarrow \mathbb{P}^1(k) \\ (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1)$$

$f$  ist Morphismus.

*Behauptung:*  $f$  lässt sich nicht fortsetzen zu Morphismus  $\tilde{f} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$

denn:  $\tilde{f}^{-1}(1 : 1)$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{P}^2$ , enthält alle  $(\lambda : \lambda : 1) \in \mathbb{P}^2 : \lambda \neq 0$  Das ist unendliche, also dichte Teilmenge von  $V(X_0 \pm X_1)$

$$(0 : 0 : 1) \in V(X_0 - X_1) \cap V(X_0 + X_1) \nsubseteq$$

- Sei  $E = V(X_0X_2^2 - X_1^3 + X_0^2X_1)$

$$E \cap U_0 = V(y^2 - x^3 + x) \text{ mit } y = \frac{x_2}{x_0}, x = \frac{x_1}{x_0}$$

$$\text{Sei } f : E \setminus \{P_2\} \rightarrow \mathbb{P}^1(k), (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1) :$$

$$P_2 = (0 : 0 : 1) \in E$$

*Behauptung:*  $f$  lässt sich in  $P_2$  fortsetzen.

$$\text{Sei } f(x_0 : x_1 : x_2) := \begin{cases} (x_0 : x_1) & , (x_0 : x_1 : x_2) \neq (0 : 0 : 1) = P_2 \\ (x_1^2 : x_2^2 + x_1x_0) & , (x_0 : x_1 : x_2) \neq (1 : 0 : 0) = P_0 \end{cases}$$

$f$  ist wohldefiniert, denn für  $\overbrace{(x_0 : x_1 : x_2)}^{=:P} \in E \setminus \{P_0, P_2\}$

$\neq 0$ , weil aus  $x_2^2 + x_1x_0 = 0$  folgt:  $x_1 = 0$   
also muss auch  $x_2 = 0$ , d.h.  $P = P_2$

$$(x_0 : x_1) = (x_0(x_2^2 + x_1x_0) : x_1(x_2^2 + x_1x_0)) \stackrel{P \in E}{=} (x_1^3 : x_1(x_2^2 + x_1x_0)) = (x_1^2 : x_2^2 + x_1x_0), x_1 \neq 0$$

da sonst  $P = P_2$  oder  $P = P_0$

### Beweis (Beweis von Bemerkung 13.1)

- $i = 0, x \in U_{0j}$

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $f(y) = (F_0(y) : \dots : F_m(y))$  in einer Umgebung  $U_x \subseteq U_0$  von  $x$ .

$$\Rightarrow f(y) = (F_0(1 : y_1 : \dots : y_n) : \dots : F_m(1 : y_1 : \dots : y_n)) = (f_0(y) : \dots : f_m(y)) = \\ \left( \frac{f_0(y)}{f_j(y)}, \dots, \frac{f_{j-1}(y)}{f_j(y)}, \frac{f_{j+1}(y)}{f_j(y)}, \dots, \frac{f_n(y)}{f_j(y)} \right)$$

$f_i := D_0(F_i) \Rightarrow f$  ist Morphismus von quasiaffinen Varietäten.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $f(y) = (f_1(y), \dots, f_m(y))$  (für  $y \in U_x$ ) mit  $f_i = \frac{g_i}{h_i}, g_i, h_i \in k[X_1, \dots, X_n]$

Sei  $G_i := H_0(g_i), H_i = H_0(h_i)$  (Homogenisierung bezüglich  $X_0$ )

Für geeignete Exponenten ist dann:

$$f(y) = (H_1(y) \cdot \dots \cdot H_n(y) \cdot X_0^{e_0} : G_1(y) \cdot H_1(y) \cdot \dots \cdot H_n(y) \cdot X_0^{e_1} : \dots : G_n(y) \cdot H_1(y) : \dots : H_{n-1}(y) \cdot X_0^{e_n}) \quad \square$$

### Bemerkung 13.3

Seien  $V, W$  quasiprojektive Varietäten,  $f : V \rightarrow W$  Abbildungen. Dann gilt:  $f$  Morphismus  $\Leftrightarrow f$  stetig und für jedes  $U \subset W$  offen und jedes  $g \in \mathcal{O}_W(U)$  ist  $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$

### Beweis

„ $\Rightarrow$ “:  $f$  stetig nach Bemerkung 13.1 d)

Nach 13.1 c) ist  $g : U \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  Morphismus.

$\Rightarrow g \circ f : f^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  Morphismus  $\xrightarrow{13.1 c)} g \circ f$  regulär

„ $\Leftarrow$ “: Folgt aus 13.1 b) und Bemerkung 7.7.  $\square$

### Bemerkung 13.4

Sei  $f : \mathbb{P}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^m(k)$  Morphismus. Dann gibt es homogene Polynome  $F_0, \dots, F_m$  in  $k[X_0, \dots, X_n]$  mit  $f(x) = (F_0(x) : \dots : F_m(x))$  für alle  $x \in \mathbb{P}^n(k)$

### Beweis

Übung?  $\square$

### Beispiel 13.5

Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(k)$

Dann ist die Abbildung  $\varphi_A : \begin{matrix} \mathbb{P}^1(k) & \rightarrow & \mathbb{P}^1(k) \\ (x_0 : x_1) & \mapsto & (cx_1 + dx_0 : ax_1 + bx_0) \end{matrix}$  ein Isomorphismus, Umkehrabbildung  $\varphi_{A^{-1}}$

### Definition + Bemerkung 13.6

Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  quasiprojektive Varietät,  $k$  algebraisch abgeschlossen.

- Eine **rationale Funktion** auf  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f)$ , wobei  $U \subseteq V$  offen, dicht,  $f \in \mathcal{O}_V(U)$ . Dabei ist  $(U, f) \sim (U', f') :\Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$
- Ist  $V$  irreduzibel, so bilden die rationalen Funktionen auf  $V$  einen Körper, den **Funktionskörper**  $k(V)$ .
- Ist  $V$  irreduzibel, so ist  $k(V) = \text{Quot}(k[U])$  für jede offene, dichte, affine Teilmenge  $U \subseteq V$ .
- Ist  $V$  irreduzibel und projektiv mit homogenem Koordinatenring  $k[V]$ , so ist  $k(V) = \{ \frac{f}{g} \in \text{Quot}(k[V]) : f, g \text{ homogen vom gleichen Grad} \} =: \text{Quot}_0(k[V])$ .

### Beweis

c) Sei  $U \subseteq V$  offen, dicht, affin.

$$\alpha : \text{Rat}(V) \rightarrow \text{Rat}(U), [(U', f)] \mapsto [(U' \cap U, f|_{U' \cap U})]$$

$\alpha$  ist injektiv nach Definition der Äquivalenzrelation.

$\alpha$  ist surjektiv, weil  $U$  dicht in  $V$  ist.

Nach 8.1 d) ist  $\text{Rat}(U) \cong \text{Quot}(k[U])$ .

- d)  $\text{Quot}_0(k[V]) \rightarrow \text{Rat}(V)$   
 $\frac{f}{g} \mapsto [(D(g), x \mapsto \frac{f}{g}(x))]$  ist bijektiver Homomorphismus von  $k$ -Algebren.  $\square$

### Definition + Bemerkung 13.7

Seien  $V, W$  quasiprojektive Varietäten

- a) Eine **rationale Abbildung**  $f : V \dashrightarrow W$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f)$  wo  $U \subset V$  offen, dicht und  $f : U \rightarrow W$  Morphismus.  
 b) Eine rationale Abbildung  $f$  heißt **dominant**, wenn  $f(U) \subset W$  dicht ist für einen Vertreter  $(U, f)$  der Klasse (und damit für jeden).  
 c) Die Zuordnung  $V \mapsto k(V)$  induziert eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{irred. quasi-proj. Var.}/k \\ + \text{dominante rat. Abb.} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{endl. erz. Körpererw. } K|k \\ + k\text{-Alg-Hom.} \end{array} \right\}$$

## § 14 Graßmann-Varietäten

### Definition + Bemerkung 14.1

Sei  $k$  ein Körper,  $n \geq 1$ ,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $k$ -Vektorraum. Für  $0 \leq d \leq n$  sei  $G(d, n)(V) := \{U \subseteq V : U \text{ Untervektorraum, } \dim U = d\}$ . Speziell  $G(d, n) := G(d, n)(k^n)$

Jeder Isomorphismus  $V \rightarrow k^n$  induziert eine Bijektion  $G(d, n)(V) \rightarrow G(d, n)$

### Beispiel

1)  $G(0, n)$  und  $G(n, n)$  sind einelementig.

2)  $G(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}(k)$

### Bemerkung 14.2

Für jedes  $d = 0, \dots, n$  gibt es eine „natürliche“ Bijektion  $G(d, n) \rightarrow G(n-d, n)$

### Beweis

Sei  $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$  der Dualraum von  $V$ .

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} G(d, n) &\rightarrow G(n-d, n)(V^*) \\ U &\mapsto \{l \in V^* : U \subseteq \text{Kern}(l)\} \\ \bigcap_{l \in U^*} \text{Kern}(l) &\leftarrow U^* \end{aligned}$$

sind zueinander invers. □

### Einschub 14.3

$\Lambda^d$  sei  $k$ -Vektorraum mit Basis  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$  für alle  $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$  wobei  $e_1, \dots, e_n$  einen Basis von  $V$  sei.  $\Lambda^d V$  ist  $\binom{n}{d}$ -dimensionaler  $k$ -Vektorraum.

Die Abbildung  $\wedge = \wedge_d : V^d \rightarrow \Lambda^d V$  ist multilinear und alternierend.

Dann:  $(v_1, \dots, v_n) \mapsto ?$

$$\begin{aligned} (v_1, \dots, v_d) &\mapsto \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n \\ \sigma \in S_d}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \cdot \lambda_{1i_1} \cdot \lambda_{2i_2} \cdot \dots \cdot \lambda_{di_d} \\ v_j &= \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} e_i \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \cdot \sum_{\sigma \in S_d} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \lambda_{\sigma(1)i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{\sigma(d)i_d} \end{aligned}$$

a)  $\Lambda^d V$  ist  $\binom{n}{d}$ -dimensionaler  $k$ -Vektorraum mit Basis

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} : 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n\}$$

b)  $V^d \rightarrow \Lambda^d V, (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_d$  ist multilinear und alternierend.

### Bemerkung 14.4

Die Abbildung  $\Psi : G(d, n)(V) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^d V), U \mapsto [u_1 \wedge \dots \wedge u_d]$  ist wohldefiniert und injektiv, dabei sei  $u_1, \dots, u_d$  eine Basis von  $U$ .

### Beweis

Sei  $v_1, \dots, v_d$  weitere Basis von  $U$ . Dann gibt es  $A \in \text{GL}_d(k)$  mit  $A \cdot u_i = v_i, i = 1, \dots, d$ .

$$\Rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_d = \sum_{i=1}^d a_{1i} u_i \wedge \dots \wedge \sum_{i=1}^d a_{di} u_i \stackrel{\text{s.o.}}{=} \det(A) u_1 \wedge \dots \wedge u_d$$

$\Rightarrow \Psi$  wohldefiniert

$\Psi$  injektiv:

Behauptung:  $U = \{v \in V : v \wedge \overbrace{(u_1 \wedge \dots \wedge u_d)}^{\in \Lambda^{d+1}V} = 0\}$

Beweis der Behauptung:

$$v \wedge (u_1 \wedge \dots \wedge u_d) = 0 \Leftrightarrow vu_1, \dots, u_d \text{ lin. unabh.} \Leftrightarrow v \in \langle u_1, \dots, u_d \rangle = U \quad \square$$

### Definition + Bemerkung 14.5

Sei  $d \geq 2$  und  $\omega \in \Lambda^d V$

- a)  $\omega$  heißt **total zerlegbar**, wenn es linear unabhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_d$  in  $V$  gibt mit  $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ .
- b)  $[\omega] \in \text{Bild}(\Psi) \Leftrightarrow \omega$  total zerlegbar
- c) Die Abbildung  $\varphi_\omega : V \rightarrow \Lambda^d V, v \mapsto v \wedge \omega$  ist linear.
- d) Für  $v \in V$  gilt:  $v \in \text{Kern}(\varphi_\omega) \Leftrightarrow \exists \omega' \in \Lambda^d V$  mit  $\omega = v \wedge \omega'$
- e) Für unabhängige  $v_1, \dots, v_k \in V$  gilt:

$$v_1, \dots, v_k \in \text{Kern}(\varphi_\omega) \Leftrightarrow \exists \omega' \in \Lambda^{d-k} V \text{ mit } \omega \in v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge u\omega'$$

- f)  $\dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) \leq d$
- g)  $\dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) = d \Leftrightarrow \omega$  total zerlegbar

### Beweis

- b) und c) klar
- d) ist Spezialfall von e)
- f) und g) folgen aus e)
- e) Ergänze zur Basis  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$  von  $V$ . Schreibe  $\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n \\ \underline{i} = (i_1, \dots, i_d)}} \lambda_{\underline{i}} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d}$

Für  $j = 1, \dots, k$  ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_\omega(v_j) &= \omega v_j = \sum_{\underline{i}} \lambda_{\underline{i}} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d} \wedge v_j \\ &= \sum_{\substack{\underline{i} \\ j \in \underline{i}}} \lambda_{\underline{i}} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d} \wedge v_j \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_{\underline{i}} \neq 0$  höchstens wenn  $\{1, \dots, k\} \subseteq \{i_1, \dots, i_d\}$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\substack{\underline{i} = (1, \dots, k, i_{k+1}, \dots, i_d) \\ k < i_{k+1} < \dots < i_d \leq n}} \lambda_{\underline{i}} v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge v_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge v_{i_d} \\ &= v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge \underbrace{\sum_{k < i_{k+1} < \dots < i_d \leq n} \lambda_{\underline{i}} v_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge v_{i_d}}_{=: \omega' \in \Lambda^{d-k} V} \end{aligned} \quad \square$$

### Proposition 14.6

$\text{Bild}(\Psi)$  ist Zariski-abgeschlossen in  $\mathbb{P}(\Lambda^d V)$ , das heißt  $\Psi$  ist eine Bijektion von  $G(d, n)$  auf eine projektive Varietät.

**Beweis**

Für  $\omega \in \Lambda^d V$  ist  $\varphi_\omega : V \rightarrow \Lambda^d V$  linear. Sei  $L_\omega$  die Abbildungsmatrix von  $\varphi_\omega$  bezüglich der Basen  $e_1, \dots, e_n$  und  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$ . Sei  $L_\omega = \left( l_{ij}^{(\omega)} \right)_{\substack{j=1, \dots, n \\ i=1, \dots, \binom{n}{d+1}}}$ ,  $l_{ij} : \Lambda^d V \rightarrow k$  ist linear (!)

(Die  $l_{ij}$  heißen **Plücker Koordinaten** auf  $\Lambda^d V$ )

$$[\omega] \in \text{Bild}(\Psi) \Leftrightarrow \dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) \geq d \Leftrightarrow \text{Rang}(L_\omega) \leq n - d$$

$$\Leftrightarrow \text{Jede } (n - d + 1) \times (n - d + 1)\text{-Untermatrix von } L \text{ hat Determinante } 0$$

Diese Determinanten sind homogene Polynome  $f_{IJ}$  vom Grad  $n - d + 1$  in den  $l_{ij}(\omega)$  ( $|I| = |J| = n - d + 1, I \subset \{1, \dots, \binom{n}{d}\}, J \subset \{1, \dots, n\}$ )

$\Rightarrow \text{Bild}(\Psi) = V(f_{IJ} : |I| = |J| = n - d + 1)$  ist abgeschlossen.  $\square$

**Proposition + Definition 14.7**

Für  $n \geq 1$  und  $1 \leq d \leq n$  sei

$$\mathcal{F}_{d,n}(k) := \{(\omega, v) \in \mathbb{P}(\Lambda^d k^n) \times k^n : \omega = \Psi(U) \in \text{Bild}(\Psi), v \in U\}$$

- a)  $\mathcal{F}_{d,n}(k)$  ist quasiprojektive Varietät.
- b)  $\pi_{d,n} := \pi : \mathcal{F}_{d,n}(k) \rightarrow G(d, n), (\omega, v) \mapsto \omega$  ist surjektiver Morphismus.
- c) Für jedes  $\omega = \Psi(U) \in G(d, n)$  ist  $\pi^{-1}(\omega) = U \subset \{\omega\} \times k^n$
- d)  $\mathcal{F}_{d,n}(k)$  heißt **tautologisches Bündel**.

**Beweis**

- a) Es ist  $U = \{v \in k^n : v \wedge \overbrace{(u_1 \wedge \dots \wedge u_d)}^{=\omega} = 0\} = \text{Kern}(\varphi_\omega) = \{v \in k^n : L_\omega v = 0\}$   
 $\Rightarrow \mathcal{F}_{d,n}(k)$  ist die Menge aller Paare  $(\omega, v)$  mit  $f_{IJ}(\omega) = 0$  für alle  $I, J$  wie oben und  $\sum_{j=1}^n l_{ij}(\omega) v_j = 0$   $\square$

**Beispiel**

$d = 1$ :  $\mathcal{F}_{1,n}(k) = \{((x_1 : \dots : x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{P}^{n-1}(k) \times k^n : (y_1 : \dots : y_n) = (x_1 : \dots : x_n) \text{ oder } (y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)\}$

Gleichungen:  $y_i x_j = y_j x_i$  für alle  $i, j$ , konkret  $n = 3, \omega = (x_1 : x_2 : x_3)$

$$\varphi_\omega : \begin{matrix} k^3 & \rightarrow & \Lambda^2 k^3 \\ v & \mapsto & v \wedge \omega \end{matrix} \quad (\text{Basis } e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$$

$$\varphi_\omega(e_1) = e_1(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_2 e_1 \wedge e_2 + x_3 e_1 \wedge e_3$$

$$\varphi_\omega(e_2) = e_2(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = -x_1 e_1 \wedge e_2 + x_3 e_2 \wedge e_3$$

$$\varphi_\omega(e_3) = e_3(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = -x_1 e_1 \wedge e_3 + x_2 e_2 \wedge e_3$$

$$\Rightarrow L_\omega = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$$

$$L_\omega \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0 \\ x_3 y_2 - x_2 y_3 = 0 \end{matrix}$$