

19. Der Riemannsche Abbildungssatz

Definition

Zwei Gebiete $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ heissen **konform äquivalent** ($G_1 \sim G_2$) : $\iff \exists f \in H(G_1): f(G_1) = G_2, f$ ist auf G_1 injektiv.

„ \sim “ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Gebiete in \mathbb{C} .

Satz 19.1 (Riemannscher Abbildungssatz)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Dann: $G \sim \mathbb{D} \iff G \neq \mathbb{C}$ und G ist ein Elementargebiet.

Beweis

„ \implies “:

10.2 (Satz von Liouville) $\implies G \neq \mathbb{C}$

11.13 $\implies G$ ist ein Elementargebiet.

„ \impliedby “: nach 19.5.

Definition

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. G hat die Eigenschaft (W) : $\iff \forall f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset \exists g \in H(G) : g^2 = f$ auf G .

Beachte: Elementargebiete haben die Eigenschaft (W) (siehe 11.4)

Lemma 19.2

$G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ seien Gebiete, es gelte $G_1 \sim G_2$ und G_1 habe die Eigenschaft (W). Dann: G_2 hat die Eigenschaft (W).

Beweis

Übung. ■

Lemma 19.3

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet mit der Eigenschaft (W) und es sei $G \neq \mathbb{C}$. Dann existiert ein Gebiet G^* :

$$0 \in G^* \subseteq \mathbb{D} \text{ und } G \sim G^* \text{ (} G^* \text{ hat also die Eigenschaft (W))}$$

Beweis

$G \neq \mathbb{C} \implies \exists c \in \mathbb{C} : c \notin G$. Dann: $f(z) = z - c$ hat keine Nullstelle in G . ($f \in H(G)$)

(W) $\implies \exists g \in H(G) : g^2 = f$ auf G . Für $z_1, z_2 \in G$:

(+) aus $g(z_1) = \pm g(z_2)$ folgt $f(z_1) = f(z_2)$, also $z_1 = z_2$.

Insbesondere: g ist injektiv auf G . $G_1 := g(G)$. Also $G_1 \sim G$.

Sei $a \in G_1$. $\exists r > 0 : U_r(a) \in G_1$.

Sei $\omega \in G_1$.

Annahme: $-\omega \in G_1$.

$\exists z_1, z_2 \in G : g(z_1) = \omega = -g(z_2)$. (+) $\implies z_1 = z_2 \implies \omega = 0 \implies g(z_1)^2 = 0 \implies f(z_1) = 0$. Widerspruch.

Also: $-\omega \notin G_1$

Insbesondere: $0 \notin G_1, -a \notin G_1$.

Definiere $\varphi \in H(G_1)$ durch $\varphi(w) = \frac{1}{w+a}$. (Wohl definiert und holomorph)

Übung: φ injektiv.

$G_2 := \varphi(G_1) \implies G_2 \sim G_1$, also: $G \sim G_2$.

Sei $\nu \in G_2 \implies \exists \omega \in G_1 : \nu = \varphi(\omega) = \frac{1}{\omega+a}$.

Annahme: $|\omega + a| < r$. Dann: $|\omega - a| < r \implies -\omega \in U_r(a) \subseteq G_1$. Widerspruch.

Also: $|\omega + a| \geq r$.

$\implies |r| \leq \frac{1}{r}$. G_2 also beschränkt.

Mit einer Abbildung $z \mapsto z + \alpha$: (Translation)

\exists Gebiet $G_3 : G_2 \sim G_3, 0 \in G_3, G_3$ beschränkt. Somit: $G \sim G_3$.

Mit einer geeigneten Abbildung $z \mapsto \delta z$ ($\delta > 0$): \exists Gebiet $G^* : G^* \sim G_3, 0 \in G^*, G^* \subseteq \mathbb{D}$.

Somit $G \sim G^*$. ■

Lemma 19.4

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit der Eigenschaft (W). Es gelte $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$ und es sei $G \neq \mathbb{D}$.

Dann existiert $\varphi \in H(G) : \varphi(0) = 0$, φ ist auf G injektiv. $\varphi(G) \subseteq \mathbb{D}^1$ und $|\varphi'(0)| > 1$.

Beweis

$G \neq \mathbb{D} \implies \exists a \in \mathbb{D} : a \notin G$. $f(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$.

$f \in H(G)$, 12.4 $\implies f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. $a \notin G$. $f(a) = 0$ (einzige Nullstelle). f hat in G keine Nullstelle.

(W) $\implies \exists g \in H(G) : g^2 = f$ auf G . $|g|^2 = |f| \stackrel{12.4}{<} 1$, also $|g| < 1$ auf G . D.h.: $g(G) \subseteq \mathbb{D}$. Dann: $c = g(0) \in \mathbb{D}$. $h(z) := \frac{z-c}{\bar{c}z-1}$, $\varphi := h \circ g$. Klar: $\varphi \in H(G)$, $\varphi(0) = h(g(0)) = h(c) = 0$, φ ist injektiv auf G , $\varphi(G) = h(\underbrace{g(G)}_{\subseteq \mathbb{D}}) \subseteq h(\mathbb{D}) \stackrel{12.4}{=} \mathbb{D}$. Nachrechnen: $|\varphi'(0)| = \frac{|a|+1}{2\sqrt{|a|}} > 1$. ■

Lemma 19.5

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit der Eigenschaft (W). Es gelte $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$ und $\mathcal{F} := \{\varphi \in H(G) : \varphi(0) = 0, \varphi \text{ ist injektiv auf } G \text{ und } \varphi(G) \subseteq \mathbb{D}\}$.

Weiter sei $\Psi \in \mathcal{F}$ und es gelte (*) $|\varphi'(0)| \leq |\Psi'(0)| \forall \varphi \in \mathcal{F}$. Dann: $\varphi(G) = \mathbb{D}$. Insbesondere $G \sim \mathbb{D}$.

Beweis

$\tilde{G} := \Psi(G)$. 19.2 $\implies \tilde{G}$ hat die Eigenschaft (W). Weiter: $0 = \Psi(0) \in \tilde{G} \subseteq \mathbb{D}$.

Annahme: $G \not\sim \mathbb{D}$. Wende 19.4 auf G an: $\exists \tilde{\varphi} \in H(\tilde{G})$: $\tilde{\varphi}(0) = 0$, $\tilde{\varphi}$ ist injektiv, $\tilde{\varphi}(\tilde{G}) \subseteq \mathbb{D}$ und $|\tilde{\varphi}'(0)| > 1$. $\varphi := \tilde{\varphi} \circ \Psi$. Dann: $\varphi \in H(G)$, $\varphi(0) = \tilde{\varphi}(\Psi(0)) = \tilde{\varphi}(0) = 0$. φ ist auf G injektiv, $\varphi(G) = \tilde{\varphi}(\Psi(G)) = \tilde{\varphi}(\tilde{G}) \subseteq \mathbb{D}$. Also $\varphi \in \mathcal{F}$. Aber:
 $|\varphi'(0)| = |\tilde{\varphi}'(\Psi(0))\Psi'(0)| = \underbrace{|\tilde{\varphi}'(0)|}_{>1} \underbrace{|\Psi'(0)|}_{\substack{11.11 \\ \neq 0}} > |\Psi'(0)|$, Widerspruch zu (*). ■

Beweis

Beweis „ \Leftarrow “ von 19.1:

Sei G ein Elementargebiet und $G \neq \mathbb{C}$. 11.4 $\implies G$ hat die Eigenschaft (W).

ObdA: $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$ (wg 19.3). Sei \mathcal{F} wie in 19.5. $\phi_0(z) := z$. Dann: $\phi_0 \in \mathcal{F}$. Wegen 19.5 genügt es zu zeigen:

$$\exists \Psi \in \mathcal{F} : |\varphi(0)| \leq |\Psi(0)| \forall \varphi \in \mathcal{F}$$

$s := \exists$ Folge (φ_n) in \mathcal{F} : $|\varphi'_n(0)| \rightarrow s$. $\varphi_n(G) \subseteq \mathbb{D} \forall n \in \mathbb{N}$

$\implies |\varphi_n(z)| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N} \forall z \in G$. Satz von Montel $\implies (\varphi_n)$ enthält eine auf G lokal gleichmäßig konvergierende Teilfolge.

ObdA: (φ_n) konvergiert auf G lokal gleichmäßig. $\Psi(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z)$ ($z \in G$). 10.5 \implies

$\Psi \in H(G)$ und $\varphi'_n(0) \rightarrow \Psi'(0)$. Also: $|\Psi'(0)| = s$. $\Psi(0) = \lim \varphi_n(0) = 0$. Es ist $|\varphi'(0)| =$

$1 \leq |\Psi'(0)|$. Insbesondere ist Ψ auf G nicht konstant. φ_n injektiv $\forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{17.6} \Psi$ ist injektiv.

$\varphi_n(G) \subseteq \mathbb{D} \forall n \in \mathbb{N} \implies |\Psi(z)| \leq 1 \forall z \in G$ Annahme: $\exists z_0 \in G$: $|\Psi(z_0)| = 1$. 11.6 $\implies \Psi$ konstant. Widerspruch! Also $\Psi(G) \subseteq \mathbb{D}$

Fazit: $\Psi \in \mathcal{F}$ und $|\varphi'(0)| \leq |\Psi'(0)| \forall \varphi \in \mathcal{F}$. ■

Satz 19.6 (Charakterisierung von Elementargebieten, I)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

$$G \text{ ist Elementargebiet} \iff G \text{ hat die Eigenschaft (W)}$$

Beweis

„ \implies “: 11.4.

„ \Leftarrow “:

Fall 1: $G = \mathbb{C}$. ✓

Fall 2: $G \neq \mathbb{C}$. Im Beweisteil „ \Leftarrow “ von 19.1 wurde nur die Eigenschaft (W) benutzt. Also $G \sim \mathbb{D}$. \mathbb{D} ist ein Elementargebiet $\xrightarrow{11.13} G$ ist ein Elementargebiet. ■

