1. Mannigfaltigkeiten

1.1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Erinnerung (LA/Analysis)

Euklidischer Raum	$\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle$
Norm	$\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle}$
Metrik	$d(a,b) := \|a-b\|$
Winkel	$\cos\angle(a,b) := \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|}$

Die Funktion $f : U(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ist glatt (oder C^∞) falls in jedem Punkt $p \in U$ alle gemischten partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.[1]

Die C^∞-Funktion

$$u^i : \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ p = (p_1, \ldots, p_n) \mapsto p_i = u^i(p) \end{array}$$

heißt i-te Koordinatenfunktion ($i = 1, \ldots, n$). Eine Abbildung $\phi : U(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ heißt glatt falls jede der reellen Funktionen $u^i \circ \phi$ glatt ist ($i = 1, \ldots, n$).

Karten und Atlanten

Sei M ein topologischer Raum, der hausdorff'sch ist und eine abzählbare Basis hat.

Ein Koordinatensystem (oder Karte) in M ist ein Homöomorphismus

$$\varphi : U(\overset{\circ}{\subset} M) \to \varphi(U)(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n)$$

Schreibt man $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$, dann heißen die Funktionen $x^i := u^i \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ Koordinatenfunktionen von φ. n heißt Dimension von (φ, U).

Ein n-dimensionaler, differenzierbarer Atlas für M ist eine Kollektion $\mathcal{A}$ von n-dimensionalen Karten von M. Es gilt:

($\mathcal{A}1$) Jeder Punkt von M liegt im Definitionsbereich mindestens einer Karte, d.h. M ist lokal euklidisch.

($\mathcal{A}2$) Alle zu $\mathcal{A}$ gehörigen Kartenwechsel sind glatt, das heißt: Sind die Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ in $\mathcal{A}$ und $V \cap U \neq \emptyset$, so sind $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ sowie $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$, genannt Kartenwechsel, glatt.

[1] $A \overset{\circ}{\subset} B :=$ A offen und $A \subset B$

Eine Karte ψ von M heißt mit $\mathcal{A}$ verträglich, wenn auch $\mathcal{A} \cup \{\psi\}$ ein differenzierbarer Atlas für M ist.

$\mathcal{A}$ ist vollständig (oder maximal) wenn jede mit $\mathcal{A}$ verträgliche Karte zu $\mathcal{A}$ gehört.

Definition
Eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis versehen mit einem vollständigen differenzierbaren n-dimensionalen Atlas.

Bemerkung (Lokal euklidisch $\not\Rightarrow$ hausdorffsch): Sei $Y := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = \pm 1\}$ versehen mit Teilraum-Topologie. $(s,t) \sim (s',t') \;:\Longleftrightarrow\; s = s' > 0$, $X := {}^{Y}\!/\!_{\sim}$ mit Quotienten-Topologie.

- X ist lokal euklidisch (lokal homöomorph zu $\mathbb{R}$).
- X ist nicht hausdorffsch: $p = [(0,1)]$, $q = [(0,-1)]$ sind nicht durch offene Mengen trennbar.

Beispiele

(1) $\mathbb{R}^n$: $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$ ist ein Atlas. Durch Erweiterung zu einem vollständigen Atlas $\mathcal{A}$ erhalten wir die standard-differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Auf $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$, existiert bis auf Diffeomorphismus genau eine differenzierbare Struktur. Auf $\mathbb{R}^4$ existieren weitere, „exotische" differenzierbare Strukturen.

(2) Die Sphären $S^n := \big\{p = (p_1, \ldots, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1\big\}$. Wir behaupten: S^n ist eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Als Topologie wählen wir die Teilmengen-Topologie, d.h. $U \subset S^n$ offen $\iff \exists U' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, so dass $U = S^n \cap U'$. Daher folgt auch, dass die Sphären auch hausdorff'sch sind und eine abzählbare Basis haben.

Seien U_i^+ bzw. U_i^- die offenen Hemisphären, definiert durch

$$\begin{aligned} U_i^+ &:= \{p \in S^n \mid p_i > 0\} \\ U_i^- &:= \{p \in S^n \mid p_i < 0\}\,. \end{aligned}$$

Die Abbildungen $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$ (Projektion in Richtung i-te Koordinaten-Achse) für $i = 1, \ldots, n+1$ mit

$$\varphi_i^\pm(p) := \big(u^1(p), \ldots, u^{i-1}(p), u^{i+1}(p), \ldots, u^{n+1}(p)\big)$$

sind Karten mit glatten (C^∞) Kartenwechsel, was wir am Beispiel $n = 2$ überprüfen:

$$(u^1, u^2) \xmapsto{(\varphi_3^+)^{-1}} \left(u^1, u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}\right) \xmapsto{\varphi_1^+} \left(u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}\right) \quad \left(\left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 < 1\right)$$

(3) Kurven und Flächen in $\mathbb{R}^3$ sind 1- bzw. 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten

(4a) Der n-dimensionale reell-projektiver Raum $P^n\mathbb{R}$

Definition
Auf $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ betrachte die Äquivalenz-Relation

$$x \sim y \iff \exists t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ y = tx, \text{ also } \left(y^1, \ldots, y^n\right) = \left(tx^1, \ldots, tx^{n+1}\right)$$

Die Äquivalenzklassen sind also Geraden durch den Ursprung. Nun definieren wir:

$$P^n\mathbb{R} := {}^{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}\!\big/_{\sim}$$

Wir behaupten nun dass $P^n\mathbb{R}$ eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Die Topologie erhalten wir aus dem topologischen Raum $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ über die Quotienten-Topologie, für die wir die surjektive Abbildung π verwenden:

$$\pi : \begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\to P^n\mathbb{R} \\ x &\mapsto [x]_\sim \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Die Quotiententopologie ist allgemein:

$$U \subset {}^{X}\!\big/_{\sim} \text{ offen} \iff \pi^{-1}(U) \subset X \text{ offen}$$

Um zu zeigen, dass $P^n\mathbb{R}$ eine abzählbare Basis hat, genügt es nach Lemma 1 des verteilten Blattes „Einige Grundbegriffe der Topologie“ zu zeigen, dass $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n\mathbb{R}$ offen ist. (π ist offen wenn π-Bilder offener Mengen offen sind.) Dazu betrachten wir die Streckung $\alpha_t : X \to X;\ x \mapsto tx$ $(t \neq 0)$. α_t ist ein Homöomorphismus mit $\alpha_t^{-1} = \alpha_{\frac{1}{t}}$.

Sei nun $U \subset X$ offen, so ist $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{t\neq 0} \alpha_t(U)$. Da jedes $\alpha_t(U)$ offen ist, ist $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen. Nach der Definition der Quotiententopologie also ist $\pi(U)$ offen.

Weiter müssen wir zeigen, dass $P^n\mathbb{R}$ hausdorff'sch ist. Anschaulich heißt das, um zwei „Geraden“ $[x]$ und $[y]$ je einen offenen „Kegel“ zu finden, welche disjunkt sind. Wir zeigen dies über das Lemma 2 des Blattes „Einige Grundbegriffe der Topologie“, wozu wir zeigen müssen: $R := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ ist abgeschlossen.

Die Idee ist, auf $X \times X \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ die reelle Funktion f zu betrachten:

$$f(x, y) = f\left(x^1, \ldots, x^{n+1}, y^1, \ldots, y^{n+1}\right) := \sum_{i\neq j} \left|x^i y^j - x^j y^i\right|$$

f ist stetig und $f(x, y) = 0 \iff y = tx$ für ein $t \neq 0 \iff x \sim y$. Also ist $R = f^{-1}(\{0\})$. Da f stetig ist, ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen, also ist R abgeschlossen. Damit ist gezeigt, dass ${}^{X}\!\big/_{\sim}$ hausdorff'sch ist.

Also ist $P^n\mathbb{R}$ ein topologischer Raum mit den gewünschten Eigenschaften. Es bleibt zu zeigen, dass für diese Menge ein vollständiger Atlas existiert.

Wir definieren also $n + 1$ Karten (U_i, φ_i) $(i = 1, \ldots, n + 1)$. Es ist $\bar{U}_i := \{x \in X \mid x^i \neq 0\}$ und $U_i := \pi(\bar{U}_i) \subset P^n\mathbb{R}$. Damit ist $P^n\mathbb{R}$ abgedeckt ($\bigcup_{i=1,\ldots,n+1} U_i = P^n\mathbb{R}$). Weiter ist:

$$\varphi_i : \begin{aligned} U_i &\to \mathbb{R}^n \\ [x] &\mapsto \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^n}{x^i}\right) \end{aligned}$$

Diese Definition ist representanten-unabhängig und injektiv:

$$\begin{aligned}\varphi_i([x]) = \varphi_i([y]) &\implies \frac{y^1}{y^i} = \frac{x^1}{x^i} =: t \\ &\implies y^1 = tx^1 \\ &\implies y = tx \\ &\implies [y] = [x]\end{aligned}$$

Auch ist φ_i stetig, und surjektiv: $\varphi_i^{-1}\left(z^1, \ldots, z^n\right) = \pi\left(z^1, \ldots, z^{i-1}, 1, z^{i+1}, \ldots, z^n\right)$.

Die Koordinatenwechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sind affin, also C^∞ (Übungsaufgabe).

Diese Karten lassen sich zu einem vollständigen Atlas für $P^n\mathbb{R}$ erweitern, also liegt eine differenzierbare Mannigfaltigkeit vor.

(4b) $P^n\mathbb{C}$ ist eine $2n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, was sich ähnlich zeigen lässt. Die doppelte Dimension kommt von der 2-dimensionalität von $\mathbb{C}$.

(5) Wir wollen aus gegebenen Mannigfaltigkeiten neue Mannigfaltigkeiten erhalten.

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit vollständigem Atlas $\mathcal{A}$. Sei $\mathcal{A}'$ die Menge aller Koordinatensysteme mit Definitionsbereich in einer offenen Teilmenge $O \subset M$. $\mathcal{A}'$ ist ein Atlas für O. Die entsprechende differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt offene Untermannigfaltigkeit.

Beispiel
Die allgemeine lineare Gruppe

$$GL_n\mathbb{R} := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$$

ist eine n^2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit: $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{R}^{n^2}$ ist eine n^2-differenzierbare Mannigfaltigkeit und $GL_n\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{\det A = 0\}$ ist offen, da die Determinantenfunktion stetig ist, also $\{\det A = 0\}$ abgeschlossen ist.

(6) Die Produkt-Mannigfaltigkeit: Sind M^m und N^n m- bzw. n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, so ist das topologische Produkt $M \times N$ eine $(n+m)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Atlas besteht aus den Karten $\varphi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+m}$ für Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N.

Beispiel
(S^1 ist der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} \\ \mathbb{T}^n &= \overbrace{S^1 \times \cdots \times S^1} \quad n\text{-dimensionaler Torus}\end{aligned}$$

(7) Eine Lie-Gruppe G ist eine Gruppe die zugleich eine Mannigfaltigkeitsstruktur besitzt und zwar so, dass die Gruppenoperationen i und m differenzierbare Abbildungen (siehe nächster Abschnitt) sind.

$$\begin{aligned} m &: G \times G \to G, & m(g_1, g_2) &= g_1 g_2 \\ i &: G \to G, & i(g) &= g^{-1}\end{aligned}$$

Beispiele

(i) Die eindimensionalen Gruppen $GL_n\mathbb{R}$, $GL_1\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}^+, \cdot)$

(ii) Die null-dimensionale Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

(iii) Die spezielle Orthogonale Gruppe

$$SO(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

welche homöomorph zu S^1 ist.

(iv) Die spezielle unitäre Gruppe

$$SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \right\}$$

welche homöomorph zu S^3 ist.

(8) Ein Kegel ist keine differenzierbare Mannigfaltigkeit ("die Spitze ist nicht differenzierbar").

1.2. Differenzierbare Abbildungen

Definition (differenzierbare Abbildung)
Eine Abbildung $f : M^m \to N^n$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt differenzierbar (oder glatt) im Punkt $p \in M$ falls für eine (und damit jede) Karte $\varphi : U \to U' = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ um p und $\psi : V \to V' = \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ mit $f(U) \subset V$ die Darstellung von f in lokalen Koordinaten $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U' \to V'$ glatt (oder C^∞) ist.

Die Unabhängigkeit der Aussage von der Wahl der Karte folgt aus der Definition des Atlasses. Seien $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ andere Karten um p bzw. $f(p)$.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} &= \tilde{\psi} \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \tilde{\varphi}^{-1} \\ &= \underbrace{(\tilde{\psi} \circ \psi^{-1})}_{C^\infty\text{, da Kartenwechsel}} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \underbrace{(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})}_{C^\infty\text{, da Kartenwechsel}} \end{aligned}$$

Also $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ ist $C^\infty \iff \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist C^∞.

Spezialfälle sind:

- Falls $n = 1$ heißt $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion
- Falls $m = 1$ heißt $f : \mathbb{R} \to N$ heißt differenzierbare Kurve

Definition
$C^\infty(M)$ ist die Menge aller C^∞-Funktionen auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M.

Bemerkung: $C^\infty(M)$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra bezüglich Addition, Multiplikation, skalare Multiplikation: ($p \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}(f+g)(p) &\coloneqq f(p)+g(p)\\ (f\cdot g)(p) &\coloneqq f(p)\cdot g(p)\\ (\lambda f)(p) &\coloneqq \lambda f(p)\end{aligned}$$

Definition (Diffeomorphismus)
Eine differenzierbare Abbildung $f: M \to N$ heißt Diffeomorphismus falls f bijektiv und f sowie f^{-1} glatt sind.

Beispiele

(1) Identität auf M

(2) Kartenwechsel

Die Menge $\mathrm{Diff}(M)$ aller (Selbst-)Diffeomorphismen von M bilden eine Gruppe.

☠ Ein differenzierbarer Homöomorphismus ist im allgemeinen **kein** Diffeomorphismus! So ist etwa $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ ein differenzierbarer Homöomorphismus, aber $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist zwar stetig aber nicht glatt.

1.3. Tangentialvektoren und -räume

Erinnerung

$v \in T_p\mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n$ und $f: U(p)(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ sei C^∞. Dann ist die Richtungsableitung von f in Richtung v:

$$\partial_v f \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(p+tv)$$

Für $v = e_i$ erhält man die i-te partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_{e_i} f$$

Es gilt: ($a, b \in \mathbb{R},\ f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$)

$$\begin{aligned}\partial_v(af+bg) &= a\partial_v f + b\partial_v g\\ \partial_v(f\cdot g) &= f(p)\cdot\partial_v g + g(p)\cdot\partial_v f\end{aligned}$$

Definition (Funktionskeim)
Zwei Funktionen $f, g: M \to \mathbb{R}$, die auf offenen Umgebungen von $p \in M$ differenzierbar sind, heißen äquivalent, falls sie auf einer Umgebung übereinstimmen. Die Äquivalenzklassen heißen Funktionskeime in $p \in M$. Die Menge aller Funktionskeime in p schreiben wir als $C^\infty(p)$.

Definition (Tangentialvektor)
Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein Tangentialvektor an M in p ist eine Funktion $v : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ so dass gilt: $(a, b \in \mathbb{R},\ f, g \in C^\infty(p))$

(T1) v ist $\mathbb{R}$-linear: $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$

(T2) Leibniz-Regel: $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$

Sei T_pM die Menge aller Tangentialvektoren von M im Punkt p

Beispiel
$v(f) \coloneqq 0$

Wie rechnet man mit Funktionskeimen? Praktisch genügt es mit Repräsentanten, also in p differenzierbaren Funktionen zu rechnen.

Lemma 1.1

a) $v : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ erfülle (T1) und (T2) für Funktionen, die in p differenzierbar sind. Falls f und g in einer Umgebung von p übereinstimmen (d.h. $f \sim g \iff [f] = [g]$) so ist $v(f) = v(g)$. Also insbesondere: $\tilde{v}([f]) \coloneqq v(f)$.

b) Falls h in einer Umgebung von p konstant ist, so ist $v(h) = 0$.

Beweis

a) Da v linear ist, genügt es zu zeigen: Falls $f = 0$ in einer Umgebung U von p, so ist $v(f) = 0$ $(v(g - h) = 0 \implies v(g) = v(h))$. Dazu betrachte die „Abschneidefunktion“ $\tilde{g}$ mit

(1) Träger von $\tilde{g} \coloneqq \{q \in M \mid \tilde{g}(q) \neq 0\} \subset U$

(2) $0 \leq \tilde{g} \leq 1$ auf M

(3) $\tilde{g} = 1$ in einer Umgebung V von p, $V \subset U$.

Es ist dann $f\tilde{g} = 0$ auf M. Nun folgt aus den Axiomen (T1) und (T2) dass wegen $v(0) = v(0 + 0) = v(0) + v(0)$ gilt: $v(0) = 0$. Somit ist

$$0 = v(0) = v(f\tilde{g}) \overset{(T2)}{=} v(f)\,\underbrace{\tilde{g}(p)}_{=1} + \underbrace{f(p)}_{=0}\,v(\tilde{g}) = v(f)\,.$$

b) Nach a) können wir annehmen dass h konstant c auf M ist. Es ist dann $v(h) = v(c \cdot 1) = c \cdot v(1)$. Aus $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1)$ folgt $v(1) = 0$ und damit die Behauptung.
■

T_pM ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum: $(v, w \in T_pM,\ f \in C^\infty(p),\ a \in \mathbb{R})$

$$(v + w)\,(f) \coloneqq v(f) + w(f)$$
$$(a \cdot v)\,(f) \coloneqq a \cdot v(f)$$

Weitere Beispiele von Tangentialvektoren via Karten:

Sei $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ ein Koordinatensystem (eine Karte) von M im Punkt p. (d.h. $x^i = u^i \circ \varphi$).
Für $f \in C^\infty(p)$ setze:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

Eine direkte Rechnung zeigt:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : \begin{array}{l} C^\infty p \to \mathbb{R} \\ \quad f \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \end{array}$$

ist ein Tangentialvektor in p.

Satz 1.1 (Basis-Satz)
Sei M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\varphi = (x^i, \dots, x^n)$ eine Karte um $p \in M$. Dann bilden die Tangentialvektoren $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, $i = 1, \dots, n$, eine Basis von T_pM und es gilt für alle $v \in T_pM$:

$$v = \sum_{i=1}^m v(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

Insbesondere ist $\dim T_pM = m = \dim M$.

Für diesen Satz benötigen wir noch das

Lemma 1.2 (Analysis)
Sei g eine C^∞-Funktion in einer bezüglich o sternförmigen offenen Umgebung von $o \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $g = g(0) + \sum_{j=1}^n u^j g_j$ für C^∞-Funktionen g_j, $j = 1, \dots, n$.

Beweis (Lemma 1.2)
Taylorintegralformel:

$$g(u) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(tu) dt = \sum_{j=1}^n u^j \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^j}(tu) dt$$

■

Beweis (Satz 1.1)

(a) $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ ist ein Tangentialvektor in p. (Rechnung hier ausgelassen) und für die k-te Koordinatensystem $x^k := u^k \circ \varphi$ gilt:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (x^k) = \frac{\partial \left(x^k \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \frac{\partial u^k}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \delta_{ik}\,.$$

(b) Die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, $i = 1, \dots, n$, sind linear unabhängig: Sei

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = 0 \qquad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

Dann ist für $k = 1, \dots, m$:

$$0 = 0(x^k) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underbrace{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (x^k)}_{\delta_{ik}} = \lambda_k$$

(c) Die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, $i = 1, \dots, n$, bilden ein Erzeugendensystem. Ohne Einschränkung gelte $\varphi(p) = 0$ $((*))$. Sei $v \in T_pM$ und $a_k \coloneqq v(x^k)$, $k = 1, \dots, m$. Setze

$$w \coloneqq v - \sum_{k=1}^{m} a_k \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \in T_pM\,.$$

Dann ist für alle $k = 1, \dots, m$:

$$w(x^k) = v(x^k) - \sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (x^k) = a_k - \sum_{i=1}^{m} a_i \delta_{ik} = 0 \quad (**)$$

Nun wollen wir zeigen: $w = 0$, d.h. $w(f) = 0$ für alle $f \in C^\infty(p)$. Sei $f \in C^\infty(p)$. Dann ist $g \coloneqq f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(p))$.

$$\begin{aligned}
w(f) &= w\left(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi\right) \\
&= w(g \circ \varphi) \\
&\overset{\text{Lemma 1.2}}{=} w\left(g(0) + \sum_{j=1}^{m} (u^j \circ \varphi) \cdot (g_j \circ \varphi)\right) \\
&\overset{\text{(T1),(T2)}}{=} 0 + \sum_{j=1}^{m} \underbrace{w(x^j)}_{\overset{(**)}{=}0} \cdot (g_j \circ \varphi)(p) + \underbrace{x^j(p)}_{\overset{(*)}{=}0} \cdot w(g_j \circ \varphi)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

1.4. Tangentialabbildungen

In diesem Abschnitt verwendete Notation: $\Phi : M \to N$ differenzierbar, $f \in C^\infty(M)$ oder $f \in C^\infty(p)$, $\varphi : U \to U'$ eine Karte.

Sei $\Phi : M^m \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Das Ziel ist Φ in jedem Punkt von $p \in M$ durch lineare Abbildungen $d\Phi_p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$ zu „approximieren“.

Definition
Das Differential (oder die Tangentialabbildung) von Φ in p ist: $d\Phi_p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$ mit $d\Phi_p(v) : C^\infty(\Phi(p)) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d\Phi_p(v)(f) \coloneqq v(f \circ \Phi)\,.$$

Nun ist zu zeigen dass $d\Phi_p(v) \in T_{\Phi(p)}N$:

(T1)

$$\begin{aligned} d\Phi_p(v)(a \cdot f + b \cdot g) &= v((a \cdot f + b \cdot g) \circ \Phi) \\ &= v(a \cdot f \circ \Phi + b \cdot g \circ \Phi) \\ &= a \cdot v(f \circ \Phi) + b \cdot v(g \circ \Phi) \\ &= a \cdot d\Phi_p(v)(f) + b \cdot d\Phi_p(v)(g) \end{aligned}$$

(T2)

$$\begin{aligned} d\Phi_p(v)(fg) &= v((fg) \circ \Phi) \\ &= v((f \circ \Phi) \cdot (g \circ \Phi)) \\ &= v(f \circ \Phi)(g \circ \Phi)(p) + v(g \circ \Phi)(f \circ \Phi)(p) \\ &= d\Phi_p(v)(f) + \cdots \end{aligned}$$

Beachte, dass aus der Definition direkt folgt: Ist $\Phi = \mathrm{id}_M : M \to M$, $p \mapsto p$, so gilt $d\Phi_p(v) = d(\mathrm{id})_p(v) = v$ für alle $v \in T_pM$.

Lemma 1.3
Sei $\Phi \in C^\infty(M, N)$, $\xi = (x^1, \ldots, x^m)$ eine Karte um $p \in M$ und $\eta = (y^1, \ldots, y^n)$ eine Karte um $\Phi(p) \in N$. Dann gilt:

$$d\Phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ \Phi)}{\partial x^j}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\Phi(p)} \qquad (*)$$

Beweis
Sei $w \in T_{\Phi(p)}N$ die linke Seite von $(*)$. Dann gilt nach dem Basis-Satz (Satz 1.1) ist

$$w = \sum w(y^i) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\Phi(p)} .$$

Nach der Definition des Differentials ist

$$w(y^i) = d\Phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)(y^i) = \frac{\partial\left(y^j \circ \Phi\right)}{\partial x^i}(p) .$$

■

Definition
Die Matrix

$$\left(\frac{\partial(y^i \circ \Phi)}{\partial x^j}(p)\right) = \left(\frac{\partial\left(y^i \circ \Phi \circ \xi^{-1}\right)}{\partial u^j}(\xi(p))\right) \qquad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

heißt Jacobi-Matrix von Φ bezüglich ξ und η.

Lemma 1.4 (Kettenregel)
Falls $\Phi \in C^\infty(M, N)$ und $\Psi \in C^\infty(N, L)$, so gilt

$$d(\Psi \circ \Phi)_p = d\Psi_{\Phi(p)} \circ d\Phi_p \,.$$

Beweis
Mit einer Testfunktion g überprüfen wir:

$$d(\Psi \circ \Phi)(v)(g) = v(g \circ \Psi \circ \Phi) = d\Phi(v)(g \circ \Psi) = d\Psi(d\Phi(v))(g)$$ ■

Bemerkung: Falls $\Phi : M \to N$ ein Diffeomorphismus ist, so folgt wegen

$$\mathrm{id} = d(\mathrm{id})_p = d(\Phi \circ \Phi^{-1})|_p \overset{\text{Lemma 1.4}}{=} d\Phi_p \circ d\Phi^{-1}_{\Phi(p)}$$

dass

$$(d\Phi_p)^{-1} = d\Phi^{-1}_{\Phi(p)} \,.$$

Das heißt insbesondere, dass $d\Phi_p$ ein Vektorraum-Isomophismus ist, und $\dim M = \dim N$.

Satz 1.2 (Inverser Funktionensatz für Mannigfaltigkeiten)
Ist $\Phi \in C^\infty(M, N)$ und $d\Phi_p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$ ein Vektorraum-Isomorphismus für ein Punkt $p \in M$, dann existiert eine Umgebung V von p und eine Umgebung W von $\Phi(p)$ so dass $\Phi|_V$ ein Diffeomorphismus von V auf $\Phi(V) = W$ ist. $\Phi|_V$ nennen wir einen lokalen Diffeomorphismus.

Beweis
Wähle eine Karte ξ um $p \in M$ und eine Karte η um $\Phi(p) \in N$. Nach dem Satz über inverse Funktionen (Analysis II) ist $\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}$ ein lokaler Diffeomorphismus (da $d\left(\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}\right) = d\eta \circ d\Phi \circ (d\xi)^{-1}$, was jeweils reguläre lineare Abbildungen sind). ■

1.5. Tangentialvektoren an Kurven

Die bisherige Herangehensweise an die Tangentialvektoren war sehr abstrakt, was Vor- und Nachteile hat. Ein weiterer Ansatz ist der Zugang über Kurven, den wir im Folgenden untersuchen.

Eine Kurve ist eine C^∞-Abbildung $c : I \to M$, wobei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ (meist mit $0 \in I$) und M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Die erste (und einzige) Koordinatenfunktion der trivialen Karte von $I \subset \mathbb{R}$ schreiben wir als $u := u^1$. Der Tangentialvektor ist dann $\frac{d}{du}\big|_t := \frac{\partial}{\partial u^1}\big|_t \in T_tI = T_t\mathbb{R}$.

Definition
Der Tangentialvektor an c in $c(t)$ ist

$$c'(t) := dc_t\left(\left.\frac{d}{du}\right|_t\right) \in T_{c(t)}M\,.$$

Diese Tangentialvektoren haben interessante Eigenschaften:

(1) Für $f \in C^\infty(M)$ ist $c'(t)(f) = \frac{d(f\circ c)}{du}(t)$ (Richtungsableitung)

(2) Falls $v \in T_pM$ und c eine Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$, dann gilt:

$$v(f) = \frac{d}{dt}\left(f \circ c\right)(0)$$

(3) Ist $c : I \to M$ eine glatte Kurve und $\Phi : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, so ist $\Phi \circ c : I \to N$ eine glatte Kurve in N und es gilt dass

$$d\Phi_{c(t)}\left(c'(t)\right) = \left(\Phi \circ c\right)'(t)$$

Beweis
$d\Phi\left(c'\right)(f) = c'(f \circ \Phi) = \frac{d}{du}\left(f \circ \Phi \circ c\right)(t) = \left(\Phi \circ c\right)'(t)(f)$ ■

(4) Ist φ eine Karte um p und $c_i(t) : \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$, $i = 1, \ldots, n$ die i-te Koordinatenline um p bezüglich φ, so gilt

$$c_i'(0) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Beweis
Sei $f \in C^\infty(p)$.

$$\begin{aligned} c_i\left(p\right)\left(f\right) &= \frac{d}{dt}\left(f \circ c_i\right)(0) \\ &= \frac{d}{dt}\left(f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)\right)(0) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\left(\varphi(p)\right) \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) \end{aligned}$$ ■

1.6. Untermannigfaltigkeiten und spezielle differenzierbare Abbildungen

Eine C^∞-Abbildung $\Phi : M^m \to N^n$ heißt

- Immersion, falls $d\Phi_p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$ injektiv ist für alle $p \in M$.

- Submersion, falls $d\Phi_p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$ surjektiv ist für alle $p \in M$.
- Einbettung, falls Φ eine Immersion ist und M homöomoph zu $\Phi(M) \subset N$ (versehen mit der Teilraum-Topologie) ist.

Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt (reguläre) Untermannigfaltigkeit, falls die Inklusionsabbildung $i : M \hookrightarrow N$, $i(p) := p$, eine differenzierbare Einbettung ist.

Manchmal definiert man eine (allgemeine) Untermannigfaltigkeit als injektive Immersion $\Phi : M \to N$, so dass M und $\Phi(M)$ diffeomorph sind. Dabei hat $\Phi(M)$ nicht notwendigerweise die Teilraum-Topologie.

Beispiele

(1) Immersion:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R}^{k+l} \\ \left(x^1, \dots, x^k\right) &\mapsto \left(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0\right) \end{aligned}$$

Man kann zeigen: Lokal sieht jede Immersion so aus.

(2) Submersion:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{k+l} &\to \mathbb{R}^k \\ \left(x^1, \dots, x^{k+l}\right) &\mapsto \left(x^1, \dots, x^k\right) \end{aligned}$$

Auch hier kann man zeigen, dass jede Submersion lokal so aussieht.

(3) Die Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \left(t^3, t^2\right)$ ist differenzierbar, aber keine Immersion, denn

$$c'(o) = dc_0 \left(\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\neq 0} \right) = (0,0) \,.$$

(4) Die Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \left(t^3 - 4t, t^2 - 4\right)$ ist eine Immersion, aber keine Einbettung.

(5) $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Äquivalenzrelation

$$(x,y) \sim (u,v) \iff \begin{array}{ll} x \equiv u & \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \\ y \equiv v & \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \end{array}$$

ergibt den zweidimensionalen Torus $T^2 := {}^{\mathbb{R}^2}\!/\!_{\sim}$. Wir betrachten nun die Kurve $c_\alpha : \mathbb{R} \to T^2$, $t \mapsto (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t})$.

Satz (Kronecker)

- $\alpha \in 2\pi\mathbb{Q} \implies c_\alpha(\mathbb{R})$ geschlossene Kurve.
- $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q} \implies c_\alpha(\mathbb{R})$ dicht in $\mathbb{R}^2$

Beweis

Siehe V.I. Arnold: Gewöhliche Differenzialgleichungen ■

Daraus folgt: Für $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$ ist c_α eine injektive Immersion, aber keine Einbettung, da $c_\alpha(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ mit der Teilraumtopologie nicht homöomoph zu $\mathbb{R}$ ist.

Bemerkungen: (1) Jede Immersion ist lokal eine Einbettung.

(2) Einbettungs-Satz von Whitney (1936): Jede differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit kann in $\mathbb{R}^{2n+1}$ eingebettet werden:

$$\Phi : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$$

(Beweis: L.Führer: Topologie)

1.7. Tangentialbündel und Vektorfelder

Satz 1.3 (Tangentialbündel)
Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\} \; .$$

TM ist eine $2n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

TM heißt Tangentialbündel und ist ein Spezialfall eines Vektorraumbündels. In der Physik entspricht dies dem Phasenraum (Ort, Geschwindigkeit).

Beweis
(Skizze) Sei $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Atlas für M. Ist $\varphi_\alpha = (x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$, so gilt nach Basis-Satz (Satz 1.1), dass $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \mid i = 1, \ldots, n \right\}$ eine Basis von T_pM für alle $p \in U_\alpha$ ist. Für $v \in T_pM$ gilt also $v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$.

Somit erhalten wir für jedes $\alpha \in A$ eine bijektive Abbildung

$$h_\alpha : \begin{aligned} V_\alpha := TU_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_pM &\to \mathbb{R}^{2n} \\ (p, v) &\mapsto \big(x^1(p), \ldots, x^n(p), v(x^1), \ldots, v(x^n)\big) \end{aligned}$$

Ohne Beweis: $(V_\alpha, v_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist ein differenzierbarer Atlas für TM. ∎

Definition
Sei M eine differenzierbarere Mannigfaltigkeit, TM das Tangentialbündel von M und $\pi : TM \to M$, $(p, v) \mapsto p$ die natürliche (oder kanonische) Projektion.
Ein Vektorfeld (VF) auf M ist eine Abbildung $V : M \to TM$, $p \mapsto v_p$ mit $\pi \circ V = \mathrm{id}_M$, d.h. $v_p \in T_pM$.
Das Vektorfeld ist differenzierbar (C^∞, glatt), falls $V : M \to TM$ eine differenzierbare Abbildung ist. Äquivalent dazu: Für alle $f \in C^\infty(M)$ ist $Vf \in C^\infty(M)$ mit $(Vf)(p) := v_p(f)$.
Wir definieren für $p \in M$ und $f \in C^\infty(M)$:

- $(f \cdot V)(p) := f(p)v_p$ sowie
- $(V + W)(p) := v_p + w_p$.

Damit ist $\mathcal{V}M$ (die Menge aller Vektorfelder auf M) ein $C^\infty(M)$-Modul.

Die lokale Darstellung der Vektorfelder liefert uns Basisfelder: Sei $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ für $U \subset M$. Dann ist für $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \begin{array}{l} U \to TU \\ p \mapsto \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \end{array}$$

ein Vektorfeld auf U, nämlich das i-te Koordinaten-Vektorfeld von φ oder „begleitendes n-Bein".

Nach dem Basissatz (Satz 1.1) gilt: Jedes Vektorfeld $V \in \mathcal{V}M$ kann auf U geschrieben werden als

$$V = \sum_{i=1}^{n} V(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Definition
Eine Derivation von $C^\infty M$ ist eine Abbildung $\mathcal{D} : C^\infty M \to C^\infty M$ mit

(D1) $\mathcal{D}$ ist $\mathbb{R}$-linear: $\mathcal{D}(af + bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g)$

(D2) Leibnitz: $\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cdot g + f\mathcal{D}(g)$

Aus den Axiomen (T1), (T2) für Tangentialvektoren folgt, dass $V \in \mathcal{V}M$ eine Derivation ist.

Umgekehrt gilt, dass jede Derivation von einem Vektorfeld kommt: Sei $\mathcal{D}$ eine Derivation. Definiere für jeden Punkt $p \in M$: $v_p(f) := \mathcal{D}(f)(p)$. Aus (D1), (D2) folgt: $v_p \in T_pM$ und $V : M \to TM$, $p \mapsto v_p$ ist ein Vektorfeld.

Weiter gilt für alle $p \in M$: $(Vf)(p) = v_p(f) = (\mathcal{D}f)(p)$, also ist $Vf = \mathcal{D}f$, insbesondere ist V glatt. Also entspricht $\mathcal{V}M$ den Derivationen auf $C^\infty M$.

Warum also führen wir Derivationen ein? Die entscheidende Eigenschaft ist dass das Produkt zwei Vektorfelder V und W

$$(V \cdot W)(f) := V(Wf)$$

keine Derivation ist, da (D2) nicht erfüllt ist, also $(V \cdot W)$ kein Vektorfeld ist!

Dies korrigieren wir mit der Lie-Klammer

$$[V, W] := V \cdot W - W \cdot V$$

welche eine Derivation liefert! Insbesondere ist also $[V,W]$ wieder ein Vektorfeld.

Also

$$[\cdot,\cdot]: \begin{aligned} \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M &\to \mathcal{V}M \\ (V,W) &\mapsto [V,W] \end{aligned}$$

Lemma 1.5
$\mathcal{V}M$ versehen mit der Lie-Klammer $[\cdot,\cdot] : \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \to \mathcal{V}M$ ist eine Lie-Algebra.

Definition
Eine reelle Lie-Algebra ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum L mit einer Verknüpfung $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ mit

(L1) $\mathbb{R}$-Linearität: $[ax+by,z] = a[x,z]+b[y,z]$ sowie $[x,ay+bz] = a[x,y]+b[x,z]$ für $a,b \in \mathbb{R}$

(L2) Schiefsymetrie: $[x,y] = -[y,x]$

(L3) Jacobi-Identität: $\big[[x,y],z\big] + \big[[z,x],y\big] + \big[[y,z],x\big] = 0$

Vektorfelder und Differentialgleichungen

Sei $V \in \mathcal{V}M$. Eine Integralkurve von V ist eine differenzierbare Kurve $\alpha : I \to M$ mit $\alpha'(t) = V(\alpha(t))$ für alle $t \in I$.

In einem Koordinatensystem $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$ gilt:

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(x^i \circ \alpha\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\alpha(t)} \quad \text{sowie } V(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^{n} V\left(x^i \circ \alpha\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\alpha(t)}$$

Also gilt für $i = 1,\dots,n$

$$\alpha'(t) = V(\alpha(t)) \iff \frac{d}{dt}\left(x^i \circ \alpha\right) = V\left(x^i \circ \alpha\right)$$

Dies ist ein System von n gewöhnlichen Differenzialgleichungen erster Ordnung. Aus Existenz- und Eindeutigkeitssätzen für solche Systeme (zum Beispiel Königsberger II, 4.2) folgt

Satz 1.4 (Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurven)
Sei $V \in \mathcal{V}M$. Dann existiert für jeden Punkt $p \in M$ ein Intervall $I = I(p)$ um 0 und eine eindeutige Integralkurve $\alpha : I \to M$ von V mit $\alpha(0) = p$.

Korrolar
Ist $v \in T_pM$, dann existiert eine differenzierbare Kurve $\alpha : I \to M$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = v$.

Beweisidee: Ergänze v zu einem Vektorfeld in einer Umgebung von p und wende Satz 1.4 an.