

# Kapitel 1

## Schemata

### § 1 Garben

#### Definition 1.1

Sei  $X$  ein **topologischer Raum**,  $\mathcal{C}$  eine **Kategorie**. Eine **Prägarbe**  $\mathcal{F}$  auf  $X$  mit Werten in  $\mathcal{C}$  besteht aus einer Abbildung  $\text{Off}(X) \rightarrow \text{Ob } \mathcal{C}$ ,  $U \mapsto \mathcal{F}(U)$  und **Morphismen**  $\rho_U^{U'} : \mathcal{F}(U') \rightarrow \mathcal{F}(U)$  für alle  $U \subseteq U'$  offen, sodass gilt:

- i)  $\rho_U^U = \text{id}_U$  für alle  $U \in \text{Off}(X)$
- ii)  $\rho_U^{U''} = \rho_U^{U'} \circ \rho_{U'}^{U''}$  für alle  $U \subseteq U' \subseteq U''$  in  $\text{Off}(X)$

#### Bemerkung 1.2

Eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  mit Werten in  $\mathcal{C}$  ist dasselbe wie ein kontravarianter **Funktor**  $\mathcal{F} : \text{Off}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ .

#### Definition 1.3

Eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  mit Werten in  $\mathcal{C}$  heißt **Garbe**, wenn für jedes  $U \in \text{Off}(X)$ , jede offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $U$  und jede Familie  $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$  mit  $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$  für alle  $i, j \in I$  gilt:

Es gibt *genau ein*  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$  für alle  $i \in I$ . Dieses  $s$  wird als **Amalgam** bezeichnet.

#### Beispiele

- 1)  $X$  quasi-**projektive Varietät** über einem Körper  $k$ ,  $\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{A}^1(k) : f \text{ regulär}\}$   
Ring der **regulären Funktionen** auf  $U$ .  
 $\Rightarrow \mathcal{O}_X$  ist Garbe von Ringen auf  $X$  ( $k$ -Algebren)
- 2)  $X$  topologischer Raum,  $\mathcal{C}_X(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$   
 $\mathcal{C}_X$  ist Garbe von Ringen
- 3) Sei  $X$  topologischer Raum,  $G$  Gruppe,  $\mathcal{G}(U) := G$  für alle  $U \subseteq X$  offen,  $\rho_U^{U'} = \text{id}_G$ . Seien  $U, U'$  offen in  $X$  mit  $U \cap U' = \emptyset$   
 $\tilde{U} = U \cup U'$  ?!

Finde kein  $g \in \mathcal{G}(\tilde{U}) = G$  mit  $g = \begin{cases} \rho_{\tilde{U}}^U(g) &= g_1 \neq g_2 \\ \rho_{\tilde{U}}^{U'}(g) &= g_2 \neq g_1 \end{cases}$

#### Bemerkung 1.4

Sei  $X$  topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  Garbe auf  $X$ . Dann ist  $\mathcal{F}(\emptyset)$  einelementig.

**Beweis**

Überdecke  $\emptyset$  durch eine leere Menge von offenen Teilmengen! Jedes  $s \in \mathcal{F}(\emptyset)$  erfüllt  $\rho_{\emptyset}^{U_i}(s_i) = s$  für alle  $i \in \emptyset$ ,  $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} U_i$ . Also gibt es genau ein  $s \in \mathcal{F}(\emptyset)$ .  $\square$

**Definition 1.5**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  Prägarben auf  $X$ .

Ein **Morphismus**  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ist eine natürliche Transformation der Funktoren  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \text{Off}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ , das heißt  $\varphi$  besteht aus Morphismen (in  $\mathcal{C}$ )  $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  für jedes  $U \in \text{Off}(X)$ , die die folgenden Diagramme kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U') & \xrightarrow{\varphi_{U'}} & \mathcal{G}(U') \\ \rho_U^{U'} \downarrow & \quad \quad \quad \Downarrow & \downarrow \rho_U^{U'} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \end{array} \quad \text{für alle } U \subseteq U' \text{ in } \text{Off}(X)$$

**Definition + Bemerkung 1.6**

Sei  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe auf  $X$ .

a) Für ein  $x \in X$  sei ein **Halm** definiert als

$$\mathcal{F}_x = \lim_{x \in U \in \text{Off}(X)} \mathcal{F}(U) = \{(U, s) : x \in U \in \text{Off}(X), s \in \mathcal{F}(U)\} / \sim$$

wobei  $(U, s) \sim (U', s') \Leftrightarrow \exists x \in U'' \subseteq U \cap U'$  mit  $\rho_{U''}^U(s) = \rho_{U''}^{U'}(s')$ .  $\mathcal{F}_x$  heißt **Halm** von  $\mathcal{F}$  in  $x$ .

b) Für  $x \in U \in \text{Off}(X)$  sei  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x, s \mapsto (U, s)_{\sim} =: s_x$  der **natürliche Morphismus**.

c) (UAE)

Für jedes  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  und jede konsistente Familie  $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow C$  von Morphismen in  $\mathcal{C}$  gibt es genau einen Morphismus  $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow C$  mit  $\varphi_x \circ \sigma_x = \varphi_U$  für alle  $U$

$$(U, s)_{\sim} \mapsto \varphi_U(s)$$

d) Jeder Morphismus  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induziert für jedes  $x \in X$  einen Morphismus

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{\varphi_x} & \mathcal{G}_x \end{array}$$

**Bemerkung 1.7**

Sei  $\mathcal{F}$  Garbe von abelschen Gruppen auf  $X$ ,  $U \subseteq X$  offen,  $s \in \mathcal{F}(U)$ . Dann gilt:

$$s = 0 \Leftrightarrow s_x = 0 \text{ für alle } x \in U$$

**Beweis**

„ $\Rightarrow$ “:  $\checkmark$

„ $\Leftarrow$ “: Für jedes  $x \in U$  gibt es Umgebung  $U_x$  mit  $s|_{U_x} = 0$ . ( $s|_{U_x} = \rho_{U_x}^U$ ). Die  $(U_x)_{x \in U}$  bilden offene Überdeckungen, die  $s|_{U_x}$  bilden konsistente Familie,  $s$  und  $0$  sind beides Amalgam  $\xrightarrow[\text{eigenschaft}]{\text{Gruppen-}}$   $s = 0$   $\square$

### Proposition 1.8

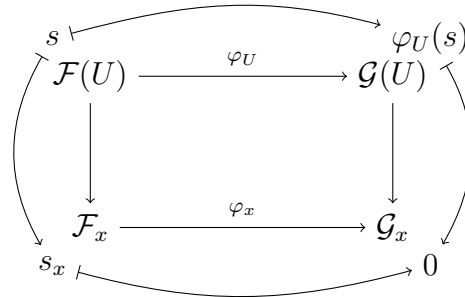
Seien  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  Garben von abelschen Gruppen auf  $X$ ,  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  Morphismus.

- a)  $\varphi_U$  injektiv für jedes  $U \in \text{Off}(X) \Leftrightarrow \varphi_x$  injektiv für alle  $x \in X$
- b)  $\varphi_U$  surjektiv für jedes  $U \in \text{Off}(X) \Rightarrow \varphi_x$  surjektiv für alle  $x \in X$
- c)  $\varphi_U$  bijektiv für jedes  $U \in \text{Off}(X) \Leftrightarrow \varphi_x$  bijektiv für alle  $x \in X$

### Beweis

- a) „ $\Rightarrow$ “: Sei  $x \in X, s_x \in \mathcal{F}$  mit  $\varphi_x(s_x) = 0$ .

$\exists$  Umgebung von  $x$  und  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $s_x = \text{Keim}$  von  $s$  in  $x$  mit  $\varphi_x(s_x) = \text{Keim}$  von  $\varphi_U(s)$  in  $x = \varphi_U(s)_x$

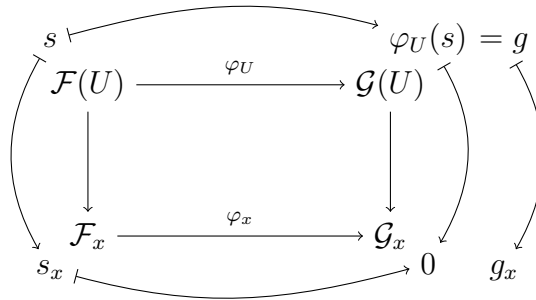


$$\Rightarrow \text{OE } \varphi_U(s) = 0 \xrightarrow[\text{injektiv}]{\varphi_U} s = 0$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $U \subset \text{Off}(X), s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $\varphi_U(s) = 0$

$$\Rightarrow \text{für alle } x \in U \text{ ist } \varphi_x(s_x) = \varphi_U(s)_x = 0 \xrightarrow{\varphi \text{ injektiv}} s_x = 0 \xrightarrow{1.7} s = 0$$

- b) „ $\Rightarrow$ “: Sei  $g_x \in \mathcal{G}_x, (U, g)$  Repräsentant  $\Rightarrow \exists s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $\varphi_U(s) = g \Rightarrow \varphi_x(s_x) = g$



### Beispiel

Sei  $X = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}$  die Garbe der **holomorphen Funktionen** auf  $\mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}^\times$  die Garbe der invertierbaren holomorphen Funktionen.  $\varphi = \exp$ , das heißt für  $f \in \mathcal{O}(U)$  sei  $\varphi(f) = e^{2\pi i f}$ .

$\varphi$  ist Garbenhomomorphismus ( $e^{f+g} = e^f \cdot e^g$ ).  $\varphi_x$  ist surjektiv für jedes  $x \in X$  (lokal gibt es zu jeder holomorphen Funktion ohne Nullstellen einen Logarithmus).  $\varphi_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$  ist nicht surjektiv! (zum Beispiel gibt es keine holomorphe Funktion  $\log z$  auf ganz  $\mathbb{C}$ )

Schlimmer noch:  $\varphi_U$  ist nicht injektiv für jedes  $U \in \text{Off}(\mathbb{C})$ , das nicht einfach zusammenhängend ist.

c) „ $\Rightarrow$ “: ✓

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $U \subseteq X$  offen,  $g \in \mathcal{G}(U)$ .

Für jedes  $x \in U$  gibt es  $s_x \in \mathcal{F}_x$  mit  $\varphi_x(s_x) = g_x$ . Wähle Repräsentanten  $(U_x, s^{(x)})$  von  $s_x$ , sodass  $\varphi_{U_x}(s^{(x)}) = g|_{U_x}$  (das geht!) (denn: Sei  $(U, \tilde{s})$  Repräsentant von  $s_x \Rightarrow \varphi_U(\tilde{s}) \sim_x g|_U \Rightarrow \exists x \in U_x \subset U : \varphi_U(\tilde{s})|_{U_x} = g|_{U_x}$ )

Die  $U_x$  bilden offene Überdeckungen von  $U$ , die  $s^{(x)}$  bilden konsistente Familie (\*)  
 $\Rightarrow$  Es gibt ein Amalgam  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $\varphi_U(s)|_{U_x} = \varphi_{U_x}(s^{(x)}) = g|_{U_x} \Rightarrow \varphi_U(s) = g$ .

(\*) zu zeigen:  $s^{(x)}|_{U_x \cap U_y} = s^{(y)}|_{U_x \cap U_y}$

denn:  $\varphi_{U_x \cap U_y}(s^{(x)}|_{U_x \cap U_y}) = \varphi_{U_x \cap U_y}(s^{(y)}|_{U_x \cap U_y})$ ,  $\varphi_{U_x \cap U_y}$  injektiv nach Voraussetzung und a)  $\Rightarrow$  Behauptung  $\square$

### Proposition + Definition 1.9

Sei  $X$  topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  Prägarbe auf  $X$  (mit Werten in  $\mathcal{C}$ )

a) Es gibt genau eine Garbe  $\mathcal{F}^+$  auf  $X$  und einen Morphismus  $\vartheta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ , sodass  $\vartheta_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^+$  für jedes  $x \in X$  ein **Isomorphismus** ist.

b)  $\mathcal{F}^+$  heißt **zu  $\mathcal{F}$  assoziierte Garbe**.

c) (UAE)

Für jeden Morphismus  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  in eine Garbe  $\mathcal{G}$  gibt es genau einen Morphismus  $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  mit  $\varphi = \varphi^+ \circ \vartheta$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\vartheta} & \mathcal{F}^+ \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

### Beweis

a) Für  $U \in \text{Off}(X)$  sei

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^+(U) &:= \{s : U \rightarrow \dot{\bigcup}_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid s(x) \in \mathcal{F}_x \forall x \in U, \text{ zu jedem } x \in U \\ &\quad \text{gibt es Umgebung } U_x \text{ und } f \in \mathcal{F}(U) \text{ mit } s(y) = f_y \\ &\quad \text{für jedes } y \in U_x\} \end{aligned}$$

$\mathcal{F}^+$  ist Garbe ✓

Sei  $\vartheta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  gegeben durch

$$\boxed{\vartheta_U(f)(x) = f_x \quad (U \in \text{Off}(X), f \in \mathcal{F}(U))}$$

$\vartheta$  ist Morphismus: ✓

$\vartheta$  ist Isomorphismus: ✓  $\square$

### Definition + Bemerkung 1.10

Sei  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  Morphismus von Garben abelscher Gruppen auf  $X$ .

- a) Sei  $\text{Kern}(\varphi)$  die Prägarbe  $\text{Kern}(\varphi)(U) := \text{Kern}(\varphi_U)$ .  
b)  $\text{Kern}(\varphi)$  ist Garbe.  
c)  $\varphi$  heißt **injektiv** (oder **Monomorphismus**) : $\Leftrightarrow \text{Kern}(\varphi) = 0$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \\ \mathcal{E}_2 & \xrightarrow{\psi_2} & \end{array}$$

$$\varphi \text{ Monomorphismus} \Leftrightarrow \varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2 \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$$

- d) Sei  $\mathcal{B}_\varphi$  die Prägarbe  $\mathcal{B}_\varphi(U) := \text{Bild}(\varphi_U)$

$$\text{Bild}(\varphi_U) := \mathcal{B}_\varphi^+$$

- e)  $\varphi$  heißt **surjektiv** (oder **Epimorphismus**) : $\Leftrightarrow \text{Bild}(\varphi) = \mathcal{G}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{H}_1 \\ & \xrightarrow{\psi_2} & \mathcal{H}_2 \end{array}$$

$$\varphi \text{ Epimorphismus} \Leftrightarrow \psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$$

### Beweis

a)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U') & \xrightarrow{\varphi_{U'}} & \mathcal{G}(U') \\ \rho_U^{U'} \downarrow & & \downarrow \rho_U^{U'} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

- b) Sei  $(U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $U \in \text{Off}(X)$ ,  $s_i \in \text{Kern}(\varphi_{U_i}) \subseteq \mathcal{F}(U_i)$  konsistente Familie.

Es gibt ein Amalgam  $s \in \mathcal{F}(U)$ .  $\varphi_x(s_x) = 0$  für jedes  $x \in U \xrightarrow{1.8a)} \varphi_U(s) = 0$

- e)  $\text{Bild}(\varphi) = \mathcal{G} \Leftrightarrow \underbrace{\text{Bild}(\varphi)_x}_{=\text{Bild}(\varphi_x)} = \mathcal{G}_x$  für alle  $x$

$\varphi$  Epimorphismus  $\Leftrightarrow$  für jedes  $x \in X$  ist  $\varphi_x$  surjektiv, das heißt  $\text{Bild}(\varphi_x) = \mathcal{G}_x$ . □

### Definition 1.11

Seien  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  Garben abelscher Gruppen auf  $X$ ,  $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  Monomorphismus.

- a)  $\mathcal{G}$  heißt **Untergarbe** von  $\mathcal{F}$ .

- b)  $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$  ist Prägarbe auf  $X$ , die assoziierte Garbe  $\mathcal{F}/\mathcal{G}$  heißt **Quotientengarbe**.

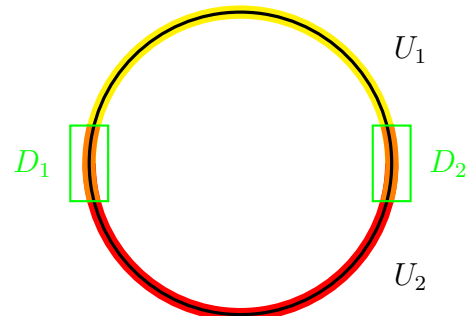
### Beispiel

Sei  $X = S^1$  (Einheitskreislinie)

$\mathcal{F} = \mathcal{C}$  (stetige Funktionen  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ )

$\mathcal{G}$  = konstante Garbe  $\mathbb{Z}$

$U = x, U_1, U_2$  wie im Bild



$$U_1 \cap U_2 = D_1 \cup D_2$$

Sei  $f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$  mit  $f_1|_{D_1} = 0, f_1|_{D_2} = 1, 0 = f_2 \in \mathcal{F}(U_2) \Rightarrow f_1|_{U_1 \cap U_2} \in \mathcal{G}(U_1 \cap U_2)$  (!)  
 $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$  in  $\mathcal{F}(U_1 \cap U_2)/\mathcal{G}(U_1 \cap U_2) \Rightarrow (\bar{f}_i \in \mathcal{F}(U_i)/\mathcal{G}(U_i))_{i=1,2}$  ist konsistente Familie.  
 Aber: Es gibt kein  $f \in \mathcal{F}(U)$  mit  $f|_{U_1} = f_1, f|_{U_2} = f_2$

### Proposition 1.12

Sei  $X$  topologischer Raum,  $U \subseteq X$  offen,  $x \in X$ .

- a) Die Zuordnung  $\Phi : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$  induziert exakten kovarianten Funktor von der Kategorie  $\underline{\text{Sh}}(X)$  der Garben abelscher Gruppen auf  $X$  in die Kategorie  $\underline{\text{Ab}}$  der abelschen Gruppen. Dabei ist  $\Phi_x(\varphi) = \varphi_x$  für  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  Morphismus.
- b) Die Zuordnung  $\Phi_U : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(U)$  induziert linksexakten kovarianten Funktor  $\underline{\text{Sh}}(X) \rightarrow \underline{\text{Ab}}$  (mit  $\Phi_U(\varphi) = \varphi_U$ )

### Beweis

(\*) Sei  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  exakte Sequenz in  $\underline{\text{Sh}}(X)$ . *Achtung:* Das bedeutet *nicht*, dass für jedes  $\tilde{U} \in \text{Off}(X)$  die Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{F}'(\tilde{U}) \rightarrow \mathcal{F}(\tilde{U}) \rightarrow \mathcal{F}''(\tilde{U}) \rightarrow 0$  exakt sein muss.

Aber: (\*) ist äquivalent zu:  $0 \rightarrow \mathcal{F}'_y \xrightarrow{\varphi_y} \mathcal{F}_y \xrightarrow{\psi_y} \mathcal{F}''_y \rightarrow 0$  ist exakt für jedes  $y \in X$

$\Rightarrow$  a)

b)  $\Phi_U$  linksexakt bedeutet:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{F}''(U) \rightarrow 0 \text{ ist exakt}$$

□

Das stimmt nach 1.8 und ...

### Definition + Bemerkung 1.13

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig.

a) Sei  $\mathcal{F}$  Garbe auf  $X$ .

Dann ist die Prägarbe  $U \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(U))$  auf  $Y$  eine Garbe, sie heißt (direkte) **Bildgarbe** von  $\mathcal{F}$  (unter  $f$ ). Bezeichnung:  $f_*\mathcal{F}$

b) Sei  $\mathcal{G}$  Garbe auf  $Y$ .

Die zur Prägarbe  $U \mapsto \lim_{\substack{f(U) \subseteq V \\ V \in \text{Off}(Y)}} \mathcal{G}(V)$  assoziierte Garbe heißt **Urbildgarbe** von  $\mathcal{G}$ .

Bezeichnung:  $f^{-1}(\mathcal{G})$

c)  $f_*$  und  $f^{-1}$  sind kovariante Funktoren.

### Beweis

a) Sei  $U \subseteq Y$  offen,  $(U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $U$ , also  $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $f^{-1}(U)$ .  $s_i \in \underbrace{f_*\mathcal{F}(U_i)}_{=\mathcal{F}(f^{-1}(U_i))}$ ,  $i \in I$ , konsistente Familie.

$\Rightarrow \exists$  Amalgam  $s \in \underbrace{\mathcal{F}(f^{-1}(U))}_{=f_*\mathcal{F}(U)}$  mit  $s|_{f^{-1}(U_i)} = s_i$  für alle  $i \in I$ .

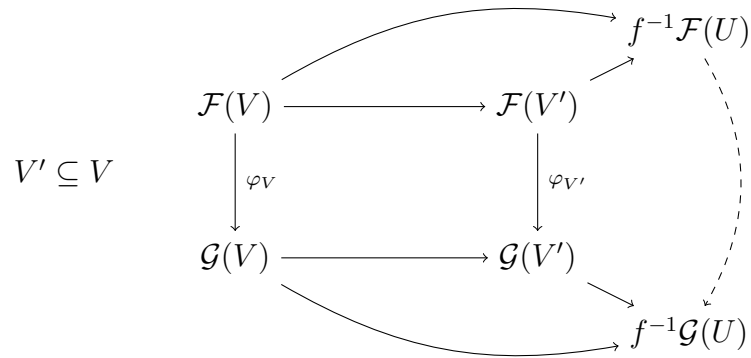
c) Sei  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  Morphismus von Garben auf  $X$ .

i) Definiere  $\varphi_* : f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$  durch

$$(\varphi_*)_U = \varphi_{f^{-1}(U)} : f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \rightarrow f_*\mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(f^{-1}(U))$$

□

ii) Definiere  $f^{-1}\varphi : f^{-1}\mathcal{F} \rightarrow f^{-1}\mathcal{G}$  durch  $(f^{-1}\varphi)_U = \lim_{f^{-1}(U) \subseteq V \in \text{Off}(Y)} \varphi_V$



### Proposition 1.14

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $X$ ,  $\mathcal{G}$  Garbe auf  $Y$ . Dann gibt es eine (natürliche) Bijektion

$$\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Das bedeutet:  $f^{-1}$  ist linksadjungiert zu  $f_*$ .

### Beweis

Definiere  $\varphi_{\mathcal{F}} : f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  und  $\psi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$

Dann:

$$T_1 : \begin{cases} \text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \\ \alpha & \mapsto & f_*(\alpha) \circ \psi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f_*\alpha} f_*\mathcal{F} \end{cases}$$

Analog:  $T_2 : \beta \mapsto \varphi_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}(\beta)$

Rest: Übung

□

## § 2 Affine Schemata

**Behauptung:**  $\alpha : R \rightarrow R'$  Ringhomom,  $\mathfrak{p} \subset R'$  **Primideal**  $\Rightarrow \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$  Primideal in  $R$

**Beweis:** Seien  $f, g \in R$  mit  $f \cdot g \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha(f \cdot g)}_{=\alpha(f) \cdot \alpha(g)} \in \mathfrak{p} \xrightarrow{\text{OE}} \alpha(f) \in \mathfrak{p} \Rightarrow f \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$$

### Definition + Bemerkung 2.1

Sei  $R$  ein Ring (das heißt kommutativer Ring mit Eins)

- a)  $\text{Spec } R := \{\mathfrak{p} \subset R : \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$  heißt **Spektrum** von  $R$ .
- b) Für  $I \subseteq R$  sei  $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R : I \subseteq \mathfrak{p}\}$ .  $V(I)$  heißt **Nullstellenmenge** (vanishing set) von  $I$ , es ist  $V(I) = V((I))$ .
- c) Die  $V(I)$ ,  $I \subseteq R$  Ideal, bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf  $\text{Spec } R$ , der **Zariski Topologie**.
- d) Für  $V \subseteq \text{Spec } R$  heißt  $I(V) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$  **Verschwindungsideal** von  $V$ .

### Beweis

c)  $\emptyset = V(R)$

$$\text{Spec } R = V(0)$$

$$\bigcap_{i \in I} V(I_i) = \bigcap_{i \in I} \{\mathfrak{p} \in I_i \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} : I_i \subseteq \mathfrak{p} \forall i\} = V\left(\bigcup_{i \in I} I_i\right) = V\left(\sum_{i \in I} I_i\right)$$

$$V(I_1) \cup V(I_2) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R : I_1 \subseteq \mathfrak{p} \text{ oder } I_2 \subseteq \mathfrak{p}\} = V(I_1 \cdot I_2) \stackrel{?}{=} V(I_1 \cap I_2)$$

$$I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2 \Rightarrow V(I_1 \cdot I_2) \supseteq V(I_1 \cap I_2)$$

$$\mathfrak{p} \in V(I_1 \cdot I_2) \Rightarrow I_1 \cdot I_2 \subseteq \mathfrak{p} \xrightarrow{\text{OE}} I_1 \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow I_1 \cap I_2 \subseteq \mathfrak{p}$$

$$\Rightarrow V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$$

□

### Bemerkung 2.2

- a)  $V(I(V)) = \bar{V}$  für jedes  $V \subseteq \text{Spec } R$
- b)  $I(V(I)) = \sqrt{I}$  für jedes ideal  $I \subseteq R$

### Beweis

a) „ $\supseteq$ “:  $V \subseteq V(I(V)) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } R : \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$

„ $\subseteq$ “: Es ist  $\bar{V} = \bigcap_{V \subseteq V(I)} V(I)$  Ist  $I$  Ideal in  $R$  mit  $V \subseteq V(I)$ , so ist  $I \subseteq I(V) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$ .

$$\Rightarrow V(I) \supseteq V(I(V))$$

$$\Rightarrow V(I(V)) \subseteq \bigcap_{I: V \subseteq V(I)} V(I) = \bar{V}$$

b)  $I(V(I)) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \bigcap_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} \stackrel{!}{=} \sqrt{I}$  (Übung)

□

### Proposition 2.3

Sei  $V \subseteq \text{Spec } R$  abgeschlossen,  $V \neq \emptyset$ . Dann gilt:  $V$  irreduzibel  $\Leftrightarrow I(V)$  Primideal

### Beweis

Wie in Algebraische Geometrie I, Proposition 4.4

□



**Bemerkung 2.4**

Jeder Ringhomomorphismus  $\alpha : R \rightarrow R'$  induziert stetige Abbildung  $f_\alpha : \text{Spec } R' \rightarrow \text{Spec } R$  durch  $\mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$ , das heißt  $\text{Spec} : \left\{ \begin{array}{ccc} \text{Ringe} & \rightarrow & \text{Top} \\ R & \mapsto & \text{Spec } R \end{array} \right.$  ist kontravarianter Funktor.

**Beweis**

Noch zu zeigen:  $f_\alpha$  stetig.

Sei  $V = V(I) \subseteq \text{Spec } R \Rightarrow f_\alpha^{-1}(V) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R' : \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq I\} = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \supseteq \alpha(I)\} = V(\alpha(I))$   $\square$

**Bemerkung 2.5**

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossener Körper,  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  affine Varietät.

Dann ist  $m : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & \text{Spec } k[V] \\ x & \mapsto & m_x \end{array} \right.$  injektiv und stetig.

**Beweis**

injektiv:  $\checkmark$

$m$  stetig: Sei  $V(I) \subseteq \text{Spec } k[V]$  abgeschlossen.

$\Rightarrow m^{-1}(V(I)) = \{x \in V : m_x \in V(I)\} = \{x : I \subseteq m_x\} = \{x : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I\} = V(I)$   $\square$

**Beispiel**

Seien  $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ . Dann ist  $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$

**Definition + Bemerkung 2.6**

- Ein Punkt  $x \in X$  ( $X$  topologischer Raum) heißt **generisch**, wenn  $\overline{\{x\}} = X$  ist.
- Jede irreduzible Teilmenge von  $\text{Spec } R$  hat genau einen generischen Punkt.
- Die irreduziblen Komponenten von  $\text{Spec } R$  entsprechen bijektiv den minimalen Primidealen in  $R$ .

**Bemerkung 2.7**

Für jedes  $f \in R$  ist  $D(f) = \text{Spec } R \setminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R : f \notin \mathfrak{p}\}$  offen in  $\text{Spec } R$ . Die  $D(f), f \in R$  bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

**Beweis**

Sei  $U \subseteq \text{Spec } R$  offen,  $V = \text{Spec } R - U \Rightarrow \exists I \subseteq R$  Ideal mit  $V = V(I)$ . Für  $f \in I$  ist  $f \in \mathfrak{p}$  für jedes  $\mathfrak{p} \in V$ , das heißt  $V(I) \subseteq V(f) \Rightarrow D(f) \subseteq U$   $\square$

**Bemerkung 2.8**

$\text{Spec } R$  ist quasikompakt.

**Beweis**

Sei  $(U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $\text{Spec } R$ .  $\exists U_i = D(f_i)$  für ein  $f_i \in R$ .

Dann gilt:  $\bigcup_{i \in I} D(f_i) = \text{Spec } R \Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} V(f_i) = \emptyset \Leftrightarrow$  Die  $f_i, i \in I$ , erzeugen  $R$

$\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_k$  mit  $1 = \sum_{\nu=1}^k a_\nu f_{i_\nu}$  für gewisse  $a_\nu \in R$

$\Rightarrow \bigcup_{\nu=1}^k D(f_{i_\nu}) = \text{Spec } R$   $\square$

**Definition + Bemerkung 2.9**

Sei  $R$  ein Ring,  $X = \text{Spec } R$

- Für  $f \in R$  sei  $\mathcal{O}_X(D(f)) := R_f$
- Die Zuordnung  $D(f) \mapsto R_f$  ist eine  $\mathcal{B}$ -Garbe von Ringen auf  $X$  für die Basis  $\mathcal{B} = \{D(f) : f \in R\}$  der Zariski-Topologie auf  $X$ .
- Es gibt eine eindeutig bestimmte Garbe  $\mathcal{O}_X$  von Ringen auf  $X$  mit  $\mathcal{O}_X(D(f)) = R_f$  für jedes  $f \in R$ .  $\mathcal{O}_X$  heißt **Strukturgarbe** auf  $X$ .
- Für beliebiges  $U \subseteq X$  offen ist  $\mathcal{O}_X(U) = \{s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}} \mid s(\mathfrak{p}) \in R_{\mathfrak{p}} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U\}$ ; für jedes  $\mathfrak{p} \in U$  gibt es Umgebung  $U_{\mathfrak{p}} \subseteq U$  von  $\mathfrak{p}$  und  $f, g \in R$  mit  $g \notin \mathfrak{q}$  für alle  $\mathfrak{q} \in U_{\mathfrak{p}}$  sodass  $s(\mathfrak{q}) = \frac{f}{g}(\mathfrak{q})$  für alle  $\mathfrak{q} \in U_{\mathfrak{p}}$   
 $g \notin \mathfrak{q}$  bedeutet  $\mathfrak{q} \in D(g)$ ;  $\frac{f}{g}(\mathfrak{q}) := \text{Bild von } \frac{f}{g} \text{ in } R_{\mathfrak{q}}$
- $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}$  für jedes  $\mathfrak{p} \in X$ .

**Beweis**

- Seien  $f, g \in R$  mit  $D(f) \subseteq D(g)$ .

$$\Rightarrow V(g) \subseteq V(f) \Rightarrow f \in \bigcap_{(g) \in \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{(g)}$$

$$\Rightarrow \exists d \geq 1 \text{ mit } f^d \in (g), \text{ das heißt } \exists h \in R \text{ mit } f^d = g \cdot h$$

$$\Rightarrow \text{erhalte Homomorphismus } \begin{array}{ccc} R_g & \rightarrow & R_f \\ \frac{a}{g^k} & \mapsto & \frac{a \cdot h^k}{f^{d \cdot k}} \end{array}$$

Wohldefiniertheit:  $\frac{g}{1} \cdot \frac{h}{f^d} = 1$  in  $R_f$ , da  $g \cdot h - f^d = 0$  in  $R_f$ .

Zeige:  $D(f) \mapsto R_f$  ist  $\mathcal{B}$ -Garbe.

Sei also  $f \in R$ ,  $(D(f_i))_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $D(f)$ ,  $g_i \in R_{f_i}$  konsistente Familie (das heißt  $g_i = g_j$  in  $\mathcal{O}_X(D(f_i) \cap D(f_j)) = \mathcal{O}(D(f_i f_j)) = R_{f_i f_j}$ ).

Zu zeigen:  $\exists! g \in R_f$  mit  $g = g_i$  in  $R_{f_i}$  für jedes  $i$ :

- $\mathcal{O} f = 1$ ,  $I = \{1, \dots, n\}$  ( $X$  ist quasikompakt)
- *Eindeutigkeit:* Ist  $g = h$  in  $R_{f_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so ist  $(g - h) \cdot f_i^d = 0$  für ein  $d \geq 1$ . Die  $f_i^d$ ,  $i = 1, \dots, n$ , erzeugen  $R$  (!)

$$(f_1, \dots, f_n)^{n \cdot d} \subseteq (f_1^d, \dots, f_n^d)$$

$$\Rightarrow g = h$$

- *Existenz:* Schreibe  $g_i = \frac{h_i}{f_i^N}$ ,  $h_i \in R$ ,  $N \geq 1$ . Nach Voraussetzung ist  $\overbrace{f_i^N f_j^N}^{=f_j^N h_i} g_i = \overbrace{f_j^N f_i^N}^{f_i^N h_j} g_j$  für ein (anderes)  $N \geq 1$ .

$$(f_1^N, \dots, f_n^N) = R \Rightarrow \exists b_i \in R \text{ mit } 1 = \sum_{i=1}^n b_i f_i^N$$

$$\text{Setze } g := \sum_{i=1}^n b_i h_i$$

Dann ist für  $j = 1, \dots, n$

$$f_j^N g = f_j \sum_{i=1}^n b_i h_i = \sum_{i=1}^n b_i f_j^N h_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{b_i f_i^N}_{=1} h_j = h_j = f_j^N g_j \text{ in } R_{f_j}$$

$$\Rightarrow g = g_j \text{ in } R_{f_j}$$

□

**Definition 2.10**

Sei  $R$  ein Ring,  $X = \operatorname{Spec} R$ ,  $\mathcal{O}_X$  die Strukturgarbe. Dann heißt  $(X, \mathcal{O}_X)$  **affines Schema**.

**Beispiele**

1)  $R = k$  Körper  $\Rightarrow X = \operatorname{Spec} k = \{(0)\}$ ,  $\mathcal{O}_X(X) = k$

2)  $R = k[X]$ ,  $k$  Körper. Ist  $\{(0)\}$  offen? Nein!

$k = \mathbb{Q}$ :  $\mathfrak{p} = (X^2 + X + 1)$  ist abgeschlossener Punkt

$$R_{\mathfrak{p}}/m_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2 + X + 1) = \mathbb{Q}(\zeta_3)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{q} = (X - a), a \in k, R_{\mathfrak{q}}/m_{\mathfrak{q}} \cong k[X]/(X - a) \cong k$$

**Bemerkung 2.11**

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  affines Schema,  $X = \operatorname{Spec} R$ . Dann ist für jedes  $f \in R$  auch  $(D(f), \mathcal{O}_X(f))$  affines Schema. *Genauer:*  $(D(f), \mathcal{O}_X(D(f))) = (\operatorname{Spec} R_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f})$

**Beweis**

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal} : f \notin \mathfrak{p}\}$$

$$\operatorname{Spec} R_f = \{\mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal}\}$$

$$\begin{array}{ccc} R & \rightarrow & R_f \\ a & \mapsto & \frac{a}{1} \end{array}$$

$$\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q} \not\ni f, \mathfrak{p} \cdot R_f = \mathfrak{q} \cdot R_f$$

$$\text{Sei } x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p} \xrightarrow{!} \frac{x}{1} \notin \mathfrak{p} \cdot R_f$$

$$\text{Sei } x = \frac{a}{f^d}, a \in \mathfrak{p}, d \geq 1 \Rightarrow f^d \cdot x \in \mathfrak{p} \not\subset$$

$$\text{Sei } h = \frac{g}{f^d} \in R_f. \text{ Zu zeigen:}$$

$$\underbrace{\mathcal{O}_x|_{D(f)}(D(h))}_{\mathcal{O}_X(D(f) \cap D(g) = R_{f \cdot g})} \cong \underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f}(D(h))}_{(R_f)_h = R_{f \cdot g}}$$

□

## § 3 (Allgemeine) Schemata

### Definition 3.1

- a) Ein **geringter Raum** ist ein topologischer Raum  $X$  zusammen mit einer Garbe  $\mathcal{O}_X$  von Ringen.
- b) Ein geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt **lokal** geringter Raum, wenn für jedes  $x \in X$  der **Halm**  $\mathcal{O}_{X,x}$  ein **lokaler Ring** ist.

### Bemerkung 3.2

Jedes affine Schema  $(\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R})$  ist ein lokal geringter Raum.

### Definition 3.3

- a) Ein **Morphismus**  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  ist eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zusammen mit einem Morphismus  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  von Garben.
  - b) Ein Morphismus zwischen lokal geringten Räumen  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  ist ein Morphismus  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  wie in a) sodass für jedes  $x \in X$  der auf den Halmen induzierte Homomorphismus  $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  die Bedingung  $f_x^\#(m_{f(x)}) \subseteq m_x$  erfüllt ( $f_x^\#$  heißt dann **lokaloer Homomorphismus**).
- $$(f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} = \lim_{f(x) \in U} \mathcal{O}_X(\underbrace{f^{-1}(U)}_{x \in}) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

### Beispiel

Sei  $R$  lokaler Ring, nullteilerfrei,  $K = \text{Quot}(R) \neq R$ . Dann ist die Inklusion  $R \hookrightarrow K$  *nicht* lokal.

### Proposition 3.4

Die Kategorie der affinen Schemata mit Morphismen aus Definition 3.3 b) ist (anti-)äquivalent zur Kategorie der Ringe.

### Beweis

- (i) Sie Zuordnung  $R \rightarrow (\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R})$  ist Funktor. Sei  $\alpha : R \rightarrow S$  Ringhomomorphismus,  $f_\alpha : \text{Spec } S \rightarrow \text{Spec } R, \mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$ . Nach Bemerkung 2.4 ist  $f_\alpha$  stetig und  $f_\alpha^{-1}(D(g)) = D(\alpha(g))$ .

Definiere  $f_\alpha^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } R} \rightarrow (f_\alpha)_*\mathcal{O}_{\text{Spec } S}$  durch

$$\underbrace{\mathcal{O}_{\text{Spec } R}(D(g))}_{= R_g \ni \frac{a}{g^d}} \rightarrow \underbrace{(f_\alpha)_*\mathcal{O}_{\text{Spec } S}(D(g))}_{\frac{\alpha(a)}{\alpha(g)^d}} = \mathcal{O}_{\text{Spec } S}(f_\alpha^{-1}(D(g))) = \underbrace{\mathcal{O}_{\text{Spec } S}(D(\alpha(g)))}_{= S_{\alpha(g)}} \in$$

Noch zu zeigen:  $(f_\alpha^\#)_\mathfrak{q}$  ist lokal für jedes  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } S$

Sei  $\mathfrak{p} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q}) \in \text{Spec } R$ , das heißt  $\mathfrak{p} = f_\alpha(\mathfrak{q})$ .

Das maximale Ideal  $m_\mathfrak{p}$  (beziehungsweise  $m_\mathfrak{q}$ ) in  $\mathcal{O}_{\text{Spec } R, \mathfrak{p}} (= R_\mathfrak{p})$  (beziehungsweise  $\mathcal{O}_{\text{Spec } S, \mathfrak{q}}$ ) ist  $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$  (beziehungsweise  $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$ ).

Für  $a = \frac{b}{f} \in m_\mathfrak{p}$  ( $b \in \mathfrak{p}, f \notin \mathfrak{p}$ ) ist  $(f_\alpha^\#)_\mathfrak{q}(a) = \frac{\alpha(b)}{\alpha(f)} \in m_\mathfrak{q}$ , da  $b \in \mathfrak{q} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$ , also  $\alpha(b) \in \mathfrak{q}$  und  $f \notin \mathfrak{p} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$ , also  $\alpha(f) \notin \mathfrak{q}$ .  $\square$

**Beispiel (Fortsetzung des Beispiels)**

$\alpha : R \hookrightarrow K$ ,  $\dim R = 1$  (zum Beispiel diskreter Bewertungsring)

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} K = \{(0)\} & \rightarrow & \operatorname{Spec} R = \{(0), m\} \\ (0) & \mapsto & (0) \\ (f_\alpha^\#)_{(0)} : R_{(0)} = K & \rightarrow & K \end{array}$$

**Beweis (Fortsetzung des Beweises von Proposition 3.4)**

(ii) Ist  $(X, \mathcal{O}_X)$  affines Schema,  $X = \operatorname{Spec} R$ , so ist  $R = \mathcal{O}_X(X)$ . Ein Morphismus  $\operatorname{Spec} S \rightarrow \operatorname{Spec} R$  induziert Homomorphismus

$$f^\# : \underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R)}_{=R} \rightarrow \underbrace{f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(\operatorname{Spec} S)}_{\substack{= \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(f^{-1}(\operatorname{Spec} R))=S \\ f^{-1}(\operatorname{Spec} R)=\operatorname{Spec} S}}$$

*Nachrechnen:* Die Funktoren in (i) und (ii) sind zueinander invers.  $\square$

**Definition 3.5**

Ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt **Schema**, wenn es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $X$  gibt und affine Schemata  $(\operatorname{Spec} R_i, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_i})$  für jedes  $i \in I$ , sodass

$$(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \stackrel[\text{geringter Raum}]{\text{als lokal}} \cong (\operatorname{Spec} R_i, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_i})$$

**Bemerkung + Definition 3.6**

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  Schema,  $U \subseteq X$  offen.

Dann ist  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  auch ein Schema.  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  heißt **offenes Unterschema** von  $X$ .

**Beweis**

Sei  $X = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec} R_i$  eine offene Überdeckung von  $X$  durch affine Schemata.

$\Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(U \cap \operatorname{Spec} R_i)}_{\subset \operatorname{Spec} R_i \text{ offen}}$ , wobei  $U \cap \operatorname{Spec} R_i \subset \operatorname{Spec} R_i$  offen, also  $= \bigcup_{j \in J} D(f_{ij}), f_{ij} \in R_i$

$(D(f_{ij}), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_i}|_{D(f_{ij})})$  ist affines Schema nach Bemerkung 2.11  $\square$

**Proposition 3.7 (Verkleben)**

Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  Schemata,  $U \subseteq X$  und  $V \subseteq Y$  offen und  $\varphi : (U, \mathcal{O}_X|_U) \rightarrow (V, \mathcal{O}_Y|_V)$  Isomorphismus von Schemata (das heißt von lokal geringten Räumen). Sei  $Z = (X \cup Y)/\sim$  der topologische Raum, der durch Verkleben von  $X$  und  $Y$  längs  $\varphi$  entsteht.

Dann gibt es genau eine Garbe  $\mathcal{O}_Z$  auf  $Z$  mit  $\mathcal{O}_Z|_X = \mathcal{O}_X$  und  $\mathcal{O}_Z|_Y \cong \mathcal{O}_Y$ .

**Beweis**

Die offenen Teilmengen von  $X$  und von  $Y$  bilden eine Basis der Topologie auf  $Z$ .  $\square$

**Beispiel**

$$\begin{array}{l} X = \mathbb{A}^1, U = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \\ Y = \mathbb{A}^1, V = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \end{array} \quad \varphi = \operatorname{id} \quad \begin{array}{c} \textcolor{blue}{U} \text{---} \bullet \text{---} X \\ \textcolor{blue}{V} \text{---} \bullet \text{---} Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \text{---} Z$$

## Beispiele

1) Quasiprojektive Varietäten:

$V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ,  $k$  Körper quasi-projektiver Varietäten.  $V$  besitzt endliche Überdeckung durch affine Varietäten  $V = \bigcup_{i=1}^r X_i$ .

$V$  ist „Verklebung“ dieser affinen Varietäten. Jedes  $X_i$  bestimmt affines Schema  $\text{Spec } k[X_i]$ . Verklebe die  $\text{Spec } k[X_i]$  zu Schema  $(X, \mathcal{O}_X)$ .  $X$  hat dieselben abgeschlossenen Punkte wie  $V$  (falls  $k$  algebraisch abgeschlossen).

**Beobachtung:**  $(X, \mathcal{O}_X)$  hängt (bis auf Isomorphie) nicht von der gewählten affinen Überdeckung ab.

## Proposition 3.8

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossener Körper. Dann gilt:

- Die Zuordnung  $V \mapsto \text{Spec } k[V]$  ist ein volltreuer, auf Objekten injektiver Funktor  $t$  von der Kategorie der affinen Varietäten/ $k$  in die Kategorie der affinen Schemata.
- $t$  setzt sich fort zu volltreuem, auf Objekten injektivem Funktor

$$\text{quasiprojektive Varietäten}/k \rightarrow \text{Schemata}$$

## Bezeichnung 3.9

$\mathbb{A}_k^n := \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]$  (vergleiche  $\mathbb{A}^n(k)$ )

## Beispiele

2)  $X = Y = \mathbb{A}_k^1$ ,  $U = V = D(T) = \mathbb{A}_k^1 \setminus \{(T)\}$ ,  $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[T]$ . Verklebe  $X$  und  $Y$  längs  $\text{id} : U \rightarrow V$ .

Erhalte Schema  $Z$  mit offenen Einbettungen  $i_X : X \rightarrow Z$ ,  $i_Y : Y \rightarrow Z$  sodass  $Z - \{0_X, 0_Y\}$  isomorph zu  $U = V$  ist.

$$i_X((T)) =: 0_X, i_Y((T)) =: 0_Y$$

**Es gilt:**

- $Z$  ist irreduzibel.
- Sei  $W \subseteq Z$  offen,  $0_X \in W$ ,  $0_Y \in W$ ,  $f \in \mathcal{O}_Z(W)$ . Dann ist  $f(0_X) = f(0_Y)$ .
- Die Diagonale  $\Delta = \{(z_1, z_2) \in Z \times Z : z_1 = z_2\}$  ist nicht abgeschlossen.

**Folgerung:**  $Z$  ist nicht isomorph zu einem affinen Schema. Beweis in der Übung.

## Definition + Bemerkung 3.10

Sei  $S := \bigoplus_{d \geq 0} S_d$  graduierter Ring ( $S_d \cdot S_e = S_{d+e}$ )

- $\text{Proj}(S) := \{\mathfrak{p} \subset S : \mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal}, S_+ \not\subseteq \mathfrak{p}\}$   
 $(S_+ := \bigoplus_{d > 0} S_d)$  heißt **homogenes Spektrum** von  $S$ .
- Für ein homogenes Ideal  $I \subseteq S$  sei  $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } S, I \subseteq \mathfrak{p}\}$ . Die  $V(I)$  bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf  $\text{Proj } S$  (**Zariski Topologie**).
- Für homogenes  $f \in S$  sei  $D_+(f) := \text{Proj } S - V(f)$ . Die  $D_+(f)$ ,  $f \in S$  homogen, bilden Basis.

d) Für  $f \in S$  homogen sei

$$\mathcal{O}_{\text{Proj } S}(D_+(f)) := S_f^{\text{hom}} = \left\{ \frac{a}{f^d} : a \text{ homogen vom Grad } d \cdot \deg(f) \right\}$$

e) Es gibt genau eine Garbe  $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}$  von Ringen auf  $\text{Proj } S$  mit  $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}(D_+(f)) = S_f^{\text{hom}}$ .

f) Für  $\mathfrak{p} \in \text{Proj } S$  ist

$$\mathcal{O}_{\text{Proj } S, \mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \text{ homogen, } \deg a = \deg b, b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

(lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{p} \cdot S_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}} := \{ \frac{a}{b} \in S_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}} : a \in \mathfrak{p} \}$ )

g)  $(\text{Proj } S, \mathcal{O}_{\text{Proj } S})$  ist Schema.

### Beweis

g)  $D_+(f), \underbrace{\mathcal{O}_{\text{Proj } S}(D_+(f))}_{\ni \mathfrak{p} \mapsto \{ \frac{a}{f^d} \in S_f^{\text{hom}} : a \in \mathfrak{p} \}} \cong \text{Spec } S_f^{\text{hom}}$

□

### Beispiel

$$S = k[X_0, \dots, X_n]$$

Dann:  $\text{Proj } S = t(\mathbb{P}^n(k)) =: \mathbb{P}_k^n$ , denn  $D_+(X_i) = \text{Spec } k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]$

## § 4 Abgeschlossene Unterschemata

### Bemerkung + Definition 4.1

Sei  $R$  Ring,  $I \subseteq R$  Ideal

- a) Die Abbildung  $V(I) \rightarrow \text{Spec}(R/I), \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \bmod I$  ist ein Homöomorphismus.
- b)  $(V(I), \mathcal{O}_{\text{Spec}(R/I)})$  heißt **abgeschlossenes Unterschema** von  $\text{Spec } R$ .
- c) Die abgeschlossenen Unterschemata von  $\text{Spec } R$  entsprechen bijektiv den Idealen in  $R$ .
- d) Für abgeschlossene Unterschemata  $Z_i \in \text{Spec } R/I_i$  gilt:  $Z_2$  ist abgeschlossenes Unterschema von  $Z_1$  („ $Z_2 \leq Z_1$ “)  $\Leftrightarrow I_1 \subseteq I_2$ .  
Es ist dann  $Z_2 = V(I_2) \subseteq V(I_1) = Z_1$

### Beispiel

$X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}[X]$ ,  $Z_1 = \text{Spec } k[X]/(X^2)$ ,  $Z_2 = \text{Spec } k[X]/(X^2 - X)$ . Dann ist  $Z_1 \subseteq Z_2$  als topologische Räume aber nicht als abgeschlossene (Unter-) Schemata.

### Definition + Bemerkung 4.2

Sei  $I \subseteq R$  Ideal,  $Z = \text{Spec } R/I$  das zugehörige abgeschlossene Unterschema von  $X = \text{Spec } R$ .

- a) Für  $U \subseteq X$  offen sei  $I(U) := I \cdot \mathcal{O}_X(U)$ , das Bild von  $I$  unter Restriktion.  $\mathcal{I}$  ist Garbe von Idealen auf  $X$ .
- b) Sei  $j : Z \rightarrow X$  die Inklusion. Dann ist  $j_* \mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$

### Beweis

- b) Für  $f \in R$  ist  $j_* \mathcal{O}_Z D(f) = \mathcal{O}_Z j^{-1} D(f) = \mathcal{O}_Z (D(f) n\mathbb{Z}) = \mathcal{O}_Z (D(\bar{f})) = (R/I) \bar{f} = R_f / I R_f = \mathcal{O}_X / \mathcal{I} (D(f))$  □

### Folgerung 4.3

In der Situation 4.2 wird  $j : Z \rightarrow X$  zum Schemamorphismus, wobei

$$\begin{array}{ccc} j^\# \mathcal{O}_X & \longrightarrow & j_* \mathcal{O}_Z \\ & \searrow & \nearrow \sim \text{ b) } \\ & \mathcal{O}_X / \mathcal{I} & \end{array}$$

die Quotientenabbildung  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$  ist.

### Definition 4.4

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema

- a) Eine Garbe  $\mathcal{I}$  (von abelschen Gruppen) auf  $X$  heißt **Idealgarbe**, wenn für jedes offene  $U \subseteq X$   $\mathcal{I}(U)$  ein Ideal in  $\mathcal{O}_X(U)$  ist und die Restriktionshomomorphismen  $\mathcal{O}_X(U)$ -linear sind.
- b) Ist  $X = \text{Spec } R$  affines Schema, so heißt eine Idealgarbe  $\mathcal{I}$  auf  $X$  **quasikohärent**, wenn es ein Ideal  $I$  in  $R$  gibt mit  $\mathcal{I}(U) = I \mathcal{O}_X(U)$  für jedes offene  $U \subseteq X$ .
- c) Eine Idealgarbe  $\mathcal{I}$  auf  $X$  heißt **kohärent**, wenn für jedes offene affine Unterschema  $U \subseteq X$  die Einschränkung  $\mathcal{I}|_U$  quasikohärent ist.

### Proposition 4.5

Eine Idealgarbe  $\mathcal{I}$  auf  $X$  ist genau dann quasikohärent, wenn es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  gibt durch affine Unterschemata  $U_i$  gibt, sodass  $\mathcal{I}|_{U_i}$  quasikohärent ist für jedes  $i$ .  
(Beweis Übung)



**Definition + Bemerkung 4.6**

- a) Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema. Ein abgeschlossenes Unterschema von  $X$  ist ein Schema  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ , wobei  $Y \subseteq X$  abgeschlossen und  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$  für eine quasikohärente Untergarbe  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ .
- b) Ist  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  abgeschlossenes Unterschema, so gilt für jedes offene  $U \subseteq X$ :  $U \cap Y$  ist das abgeschlossene Unterschema von  $U$ , das zu  $\mathcal{I}/U$  gehört. Ist  $U$  affin, so ist  $\mathcal{I}/U$  die von  $\mathcal{I}(U)$  induzierte Idealgarbe.

**Definition + Bemerkung 4.7**

- a) Sei  $R$  ein Ring.  
 $N_R := \sqrt{(0)} = \{x \in R \mid \exists n \geq 1 : x^n = 0\}$  ist ein Ideal in  $R$ , das **Nilradikal**.
- b) Ein Ring  $R$  heißt **reduziert**, wenn  $N_R = (0)$  ist.
- c) Ist  $X = \operatorname{Spec} R$ , so heißt  $X_{\text{Red}} := \operatorname{Spec} R/N_R$  das zu  $X$  assoziierte **reduzierte Schema**.
- d)  $X_{\text{Red}}$  ist abgeschlossenes Unterschema von  $X$  und  $X_{\text{Red}} \hookrightarrow X$  ist Homöomorphismus.
- e) Sei  $X$  ein Schema,  $\mathcal{N}_X$  die durch  $\mathcal{N}_X(U) = \text{Nilradikal in } \mathcal{O}_X(U)$  definierte Idealgarbe. Dann gilt:  $\mathcal{N}_X$  ist quasikohärent.
- f) Das zu  $\mathcal{N}_X$  assoziierte abgeschlossene Unterschema von  $X$  heißt  $\mathcal{X}_{\text{red}}$ .  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt **reduziert**, wenn  $\mathcal{X}_{\text{red}} \cong X$  als Schema, das heißt  $\mathcal{N}_X = 0$ .

**Beweis**

- e) Zu zeigen: Für  $f \in R$ ,  $R$  Ring, gilt:  $\mathcal{N}_{(R_f)} = \mathcal{N}_R R_f$ .

„ $\supseteq$ “: Sei  $a \in \mathcal{N}_R$ , also  $a^n = 0$  für ein  $n \geq 1$ . Für  $x \in R_f$  ist  $ax \in \mathcal{N}_{R_f}$

„ $\subseteq$ “:  $x = \frac{a}{f^d} \in R_f, x^n = 0 \Rightarrow \frac{a^n}{f^{dn}} = 0 \Rightarrow a^n = 0$  □

## § 5 Faserprodukte

### Definition + Bemerkung 5.1

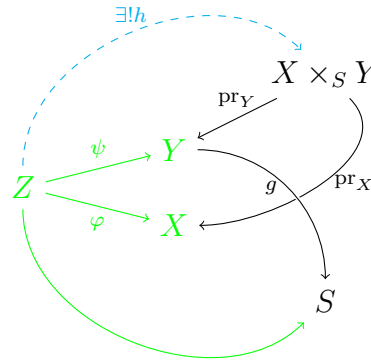
Seien  $X, Y, S$  Mengen,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow S$  Abbildungen.

a)  $X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$  heißt **Faserprodukt**.

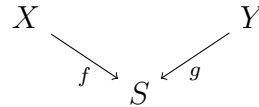
b) Es gilt:  $X \times_S Y = \bigcup_{s \in S} f^{-1}(s) \times g^{-1}(s)$

c) Das Faserprodukt erfüllt folgende UAE:

Für alle Mengen  $Z$ , Abbildungen  $\varphi : Z \rightarrow X$ ,  $\psi : Z \rightarrow Y$  mit  $f \circ \varphi = g \circ \psi$  gibt es genau eine  $h : Z \rightarrow X \times_S Y$  mit  $\varphi = \text{pr}_X \circ h$ ,  $\psi = \text{pr}_Y \circ h$ .



d) Das Faserprodukt ist der Limes des Diagramms



### Beweis

c) Setze  $h(z) := (\varphi(z), \psi(z))$

□

### Beispiele

- 1)  $S = \{s\} \Rightarrow X \times_S Y = X \times Y$
- 2)  $X \subseteq S, Y \subseteq S$ ,  $f, g$  die Inklusionen  $\Rightarrow X \times_S Y = X \cap Y$
- 3)  $Y \subseteq S$ ,  $g : Y \hookrightarrow S \Rightarrow X \times_S Y = f^{-1}(Y)$
- 4)  $X = Y \Rightarrow X \times_S Y = \text{Equalizer}(f, g)$

### Definition 5.2

Seien  $X, Y, S$  Schemata,  $f : X \rightarrow S$ ,  $g : Y \rightarrow S$  Morphismen.

Dann heißt ein Schema  $X \times_S Y$  zusammen mit Morphismen  $\text{pr}_X : X \times_S Y \rightarrow X$  und  $\text{pr}_Y : X \times_S Y \rightarrow Y$ , sodass  $f \circ \text{pr}_X = g \circ \text{pr}_Y$  ist, **Faserprodukt** von  $X$  und  $Y$  über  $S$ , wenn die UAE aus 5.1 c) erfüllt ist.

### Definition + Bemerkung 5.3

Sei  $S$  ein Schema.

- a) Ein **S-Schema** ist ein Schema  $X$  zusammen mit einem Morphismus  $f : X \rightarrow S$ .
- b) Die  $S$ -Schemata bilden eine Kategorie  $\underline{\text{Sch}}/S$ .

c) Das Faserprodukt  $X \times_S Y$  ist das Produkt von  $f : X \rightarrow S$  und  $g : Y \rightarrow S$  in  $\underline{\text{Sch}}/S$ .

### Beispiel

$S = \text{Spec } k$ ,  $k$  Körper

Ein Morphismus  $X \rightarrow \text{Spec } k$  ist nach Übung 3, Aufgabe 1 vollständig bestimmt durch einen Ringhomomorphismus  $k \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ . Dieser macht  $\mathcal{O}_X(X)$  zur  $k$ -Algebra und  $\mathcal{O}_X$  zu einer Garbe von  $k$ -Algebren. Insbesondere sind  $k$ -Varietäten über den Funktor  $t$   $k$ -Schemata. Das Faserprodukt von  $k$ -Varietäten ist das Produkt der  $k$ -Varietäten (im Sinne von Algebraische Geometrie I) (siehe unten).

### Satz 1

Das Faserprodukt  $X \times_S Y$  existiert für alle  $S$ -Schemata  $f : X \rightarrow S$  und  $g : Y \rightarrow S$ . Es ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

### Beweis

(1)  $X = \text{Spec } A$ ,  $Y = \text{Spec } B$ ,  $S = \text{Spec } R$  affin.  $f$  und  $g$  machen  $A$  und  $B$  zu  $R$ -Algebren.

*Behauptung:* Das Tensorprodukt  $A \otimes_R B$  erfüllt  $\text{Spec}(A \otimes_R B) = X \times_S Y$ .

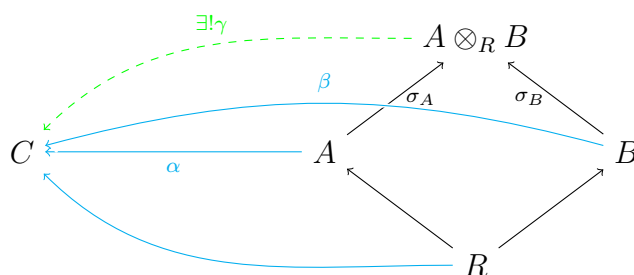
*Erinnerung:* Das Tensorprodukt  $M \otimes_R N$  von  $R$ -Moduln  $M, n$  „linearisiert“ die bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ (x, y) & \longmapsto & x \otimes y \\ \Phi \text{ bilinear} \searrow & & \swarrow \exists! \varphi \text{ linear} \\ & P & \end{array}$$

- Sind  $M = A$  und  $N = B$   $R$ -Algebren, so hat  $A \otimes_R B$  eine Struktur als  $R$ -Algebra:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

- $\sigma_A : A \rightarrow A \otimes_R B, a \mapsto a \otimes 1$   
 $\sigma_B : B \rightarrow A \otimes_R B, b \mapsto 1 \otimes b$  sind  $R$ -Algebren-Homomorphismen.
- $A \otimes_R B$  erfüllt die richtige UAE



„Beweis:“  $\tilde{\gamma} : A \times B \rightarrow C, (a, b) \mapsto \alpha(a) \cdot \beta(b)$  ist bilinear, induziert also  $\gamma : A \otimes B \rightarrow C$  linear. Nachrechnen:  $\gamma$  Ringhomomorphismus,  $\gamma$  eindeutig.

Also:  $\text{Spec}(A \otimes_R B)$  erfüllt die geforderte UAE für alle affinen Schemata  $Z$ .

Ist  $Z$  beliebiges Schema, so induzieren  $\varphi : Z \rightarrow X$  und  $\psi : Z \rightarrow Y$   $R$ -Algebrahomomorphismen  $\alpha : A \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ ,  $\beta : B \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ .

$\alpha$  und  $\beta$  induzieren  $\gamma : A \otimes_R B \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ , also (Übung 3, Aufgabe 1) Morphismus  $h : Z \rightarrow \text{Spec}(A \otimes_R B)$ .

(2)  $X, Y, Z$  nicht notwendig affin.

Überdecke  $S$  durch offene affine Schemata  $S_i = \text{Spec } R_i$  ( $i \in I$ ). Sei  $X_i := f^{-1}(S_i)$ ,  $Y_i := g^{-1}(S_i)$  (offen in  $X$  beziehungsweise  $Y$ ).

Überdecke  $X_i$  durch offene affine Schemata  $X_{ij} = \text{Spec } A_{ij}$

Überdecke  $Y_i$  durch offene affine Schemata  $Y_{ij} = \text{Spec } B_{ij}$

Nach (1) existiert  $X_{ij} \otimes_{S_i} Y_{ik}$  für alle  $i, j, k$

**Behauptung 1:** Sei  $T$  ein Schema,  $V, W$   $T$ -Schemata,  $(V_l)_{l \in L}$  offene Überdeckung von  $V$ . Existiert  $V_l \times_T W$  für jedes  $l$ , so existiert  $V \times_T W$ .

Wende Behauptung 1 an auf

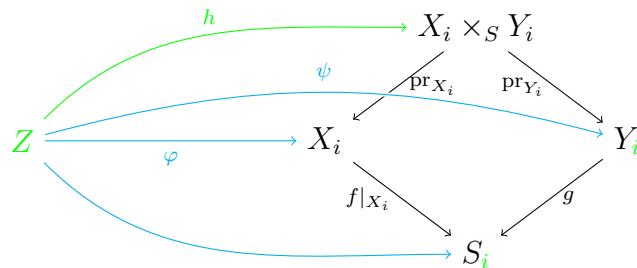
- $T = S_i, V = X_i, W = Y_{ik}, V_l = X_{il} \Rightarrow X_i \times_{S_i} Y_{ik}$  existiert  $\forall i, k$
- $T = S_i, V = Y_i, W = X_i, V_l = Y_{il} \Rightarrow X \times_{S_i} Y_{ik}$  existiert  $\forall i$

**Behauptung 2:** Für jedes  $i$  ist  $X_i \times_{S_i} Y_i = X_i \times_S Y$

Dann wende Behauptung an auf

$$T = S, V = X, W = Y, V_l = X_l \Rightarrow X \times_S Y \text{ existiert}$$

*Beweis 2:*



$$\Psi(Z) \subseteq g^{-1}\left(\underbrace{f\left(\underbrace{\varphi(Z)}_{\subseteq X_i}\right)}_{\subseteq S_i}\right) \subseteq Y_i$$

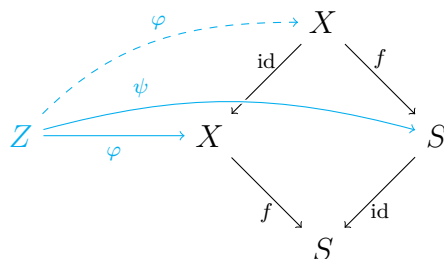
**Beweis 1:** Verklebe die  $V_l \times_T W$  längs  $U_{lm} = \text{pr}_l^{-1}(V_l \cap V_m) \subseteq V_l \times_T W$ . Es gilt:  $U_{lm} = (V_l \cap V_m) \times_T W$ . Dann ist  $U_{lm} = U_{ml}$ , lassen sich also verkleben zu Schema  $V$ . Zeige:  $\tilde{V} = V \times_T W$   $\square$

### Bemerkung 5.4

- $X \times_S S \cong X$  für jedes  $S$ -Schema
- $(X \times_S T) \times_T Y \cong X \times_S Y$  für alle...

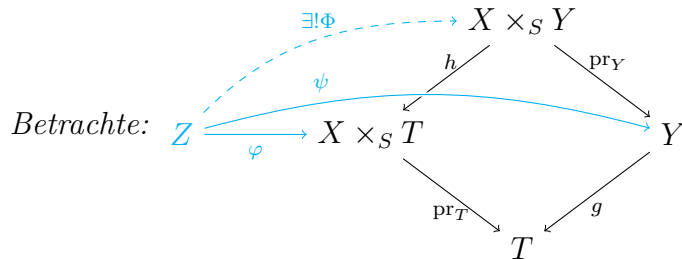
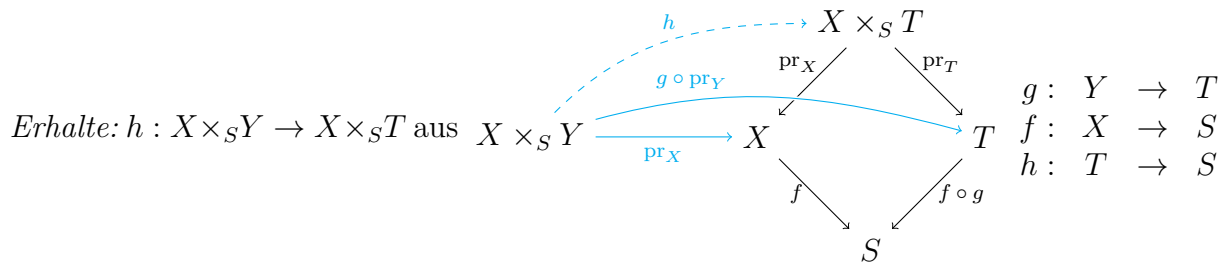
### Beweis

- Zeige:  $X$  erfüllt die UAE von  $X \times_S S$

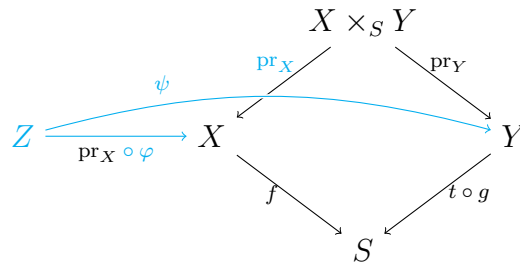


Es gilt  $\text{id}_S \circ \psi = f \circ \varphi$  im unteren Dreieck, also auch im Oberen.

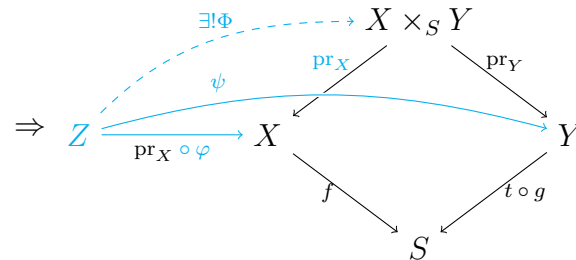
b) Zeige:  $X \times_S Y$  erfüllt die UAE von  $(X \times_S T) \times_T Y$



Es gilt:  $f \circ \text{pr}_X = t \circ g \circ \text{pr}_Y$



Zu zeigen:  $f \circ \text{pr}_X \circ \varphi = t \circ g \circ \psi = t \circ \text{pr}_T \circ \varphi$



Wir wissen:  $\text{pr}_T \circ \varphi = g \circ \psi$

Zu zeigen: (i)  $h \circ \Phi = \varphi$

(ii)  $\text{pr}_Y \circ \Phi = \psi$  ✓

Für (i) ist zu zeigen: (i<sub>1</sub>)  $\text{pr}_X \circ h \circ \Phi = \text{pr}_X \circ \varphi$  ✓

$$(i_2) \underbrace{\text{pr}_T \circ h \circ \Phi}_{\underbrace{g \circ \text{pr}_Y}_{g \circ \psi}} = \text{pr}_T \circ \varphi$$

Damit ist die Existenz von  $\Phi$  gezeigt. Eindeutigkeit in der Übung. □

## § 6 Punkte

### Definition + Bemerkung 6.1

Sei  $X$  ein Schema,  $x \in X$

a)  $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/m_x$  heißt **Restklassenkörper** von  $X$  im Punkt  $x$ .

#### Beispiele

1)  $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$

$$x = p \Rightarrow \kappa(x) = \mathbb{F}_p$$

$$x = (0) \Rightarrow \kappa(x) = \mathbb{Q}$$

2)  $X = \mathbb{A}_k^1$

$$x = (X - a) \ (a \in k) \Rightarrow \kappa(x) = k$$

$$x = (0) \Rightarrow \kappa(x) = k(X) = \operatorname{Quot}(k[X])$$

3)  $X = \mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec} k[X, Y]$

$$x = (f), \ f \text{ irreduzibel} \Rightarrow \kappa(x) = \operatorname{Quot}(k[V]) = k(V) \ (V = V(f))$$

b) Sei  $f : X \rightarrow S$  ein Morphismus,  $s := f(x)$ .  $f$  induziert Homomorphismus  $\kappa(s) \rightarrow \kappa(x)$ .

c) Für einen Körper  $k$  gibt es genau dann einen Morphismus  $\iota : \operatorname{Spec} k \rightarrow X$  mit  $\iota(0) = x$ , wenn  $\kappa(x)$  isomorph zu einem Teilkörper von  $k$  ist.

d) In der Situation c) heißt  $x$  ***k*-wertiger Punkt** von  $x$ .

#### Beweis

b)  $f$  induziert lokalen Homomorphismus  $f_x^\# : \mathcal{O}_{S,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ , das heißt  $f_x^\#(m_s) \subseteq m_x \Rightarrow f_x^\#$  induziert  $\kappa(s) \rightarrow \kappa(x)$ .

c) Sei  $U = \operatorname{Spec} R$  affine Umgebung von  $x$ .

$\iota$  existiert  $\Leftrightarrow \exists \alpha : R \rightarrow k$  mit  $\operatorname{Kern}(\alpha) = \mathfrak{p}$ , wobei  $\mathfrak{p}$  das zu  $x$  gehörige Primideal in  $R$  ist.

Es ist  $\mathcal{O}_{X,x} \cong R_{\mathfrak{p}}$ , also  $\kappa(x) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}}$

Also:  $\iota$  existiert  $\Leftrightarrow \exists \alpha : \begin{matrix} R & \rightarrow & k \\ \mathfrak{p} & \mapsto & (0) \end{matrix}$ , also  $\bar{\alpha} : \kappa(x) \rightarrow k$

„ $\Leftarrow$ “:  $\alpha : R \rightarrow R_{\mathfrak{p}} \rightarrow R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot R_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\bar{\alpha}} k$

□

### Bemerkung 6.2

Seien  $X, Y$   $S$ -Schemata.

Dann ist die Abbildung  $\begin{cases} X \times_S Y & \rightarrow & \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\} \\ z & \mapsto & (\operatorname{pr}_X(z), \operatorname{pr}_Y(z)) \end{cases}$  surjektiv.

$$\begin{array}{ccccc} & & X \times_S Y & & \\ & \swarrow \operatorname{pr}_X & & \searrow \operatorname{pr}_Y & \\ X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & S & & \end{array}$$

**Beweis**

Abbildung wohldefiniert: ✓

Seien  $x \in X, y \in Y$  mit  $f(x) = g(y) =: s \in S$ . Seien  $\kappa : \kappa(s), \kappa(x), \kappa(y)$  die Restklassenkörper.  $\mathbf{O_E} \kappa \subseteq \kappa(x), \kappa \subseteq \kappa(y)$ . Sei  $k$  ein Körper mit  $\kappa(x) \subseteq k, \kappa(y) \subseteq k$  (zum Beispiel Komposition). Sei  $Z := \text{Spec } k$ .

Nach 6.1 c) gibt es Morphismen  $\varphi : Z \rightarrow X, \varphi(0) = x, \psi : Z \rightarrow Y, \psi(0) = y$ . Es ist  $f \circ \varphi = g \circ \psi \Rightarrow \exists h : Z \rightarrow X \times Y$  mit  $\text{pr}_X \circ h = \varphi, \text{pr}_Y \circ h = \psi$ . Setze  $z := h(0)$ .  $\square$

**Definition + Bemerkung 6.3**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  Morphismus von Schemata,  $y \in Y$

- $X_y = f^{-1}(y) = X \times_Y \text{Spec } \kappa(y)$  heißt **Faser** von  $f$  über  $y$ . Dabei ist  $\iota : \text{Spec } \kappa(y) \rightarrow Y$  der zu  $y$  gehörige Morphismus aus 6.1.
- $\text{pr}_X : X_y \rightarrow X$  ist injektiv.
- $\text{pr}_X(X_y) \rightarrow \{x \in X : f(x) = y\}$  ist bijektiv.
- Ist  $y$  abgeschlossen, so ist  $X_y$  abgeschlossenes Unterschema.

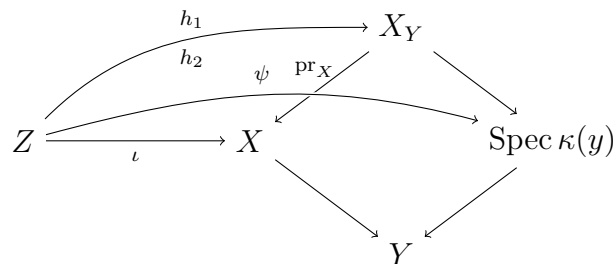
**Beweis**

c) Folgt aus b) und 6.2.

d) Folgt aus c).

- Seien  $x_1, x_2 \in X_y$  mit  $\text{pr}_X(x_1) = \text{pr}_X(x_2) =: x \in X \Rightarrow f(x) = y$ . Sei  $Z = \text{Spec } \kappa(x)$  und  $\iota : Z \rightarrow X$  mit  $\iota(0) = x$ . Sei  $\psi : Z \rightarrow \text{Spec } \kappa(y)$  der von  $f^\#$  induzierte Morphismus (6.1 b)).

Nach 6.1 b) ist  $\kappa(x) \subseteq \kappa(x_i), i = 1, 2$ .



$\xRightarrow{6.1c} \exists$  Morphismen  $h_i : Z \rightarrow X_y$  mit  $h_i(0) = x_i, i = 1, 2$

Es gilt:  $\text{pr}_Z \circ h_i = \psi, i = 1, 2$

$\text{pr}_X \circ h_i = \iota$  nach Definition von  $h_i$

$\xRightarrow{\text{Eindeutigkeit}} h_1 = h_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\square$

**Beispiele**

- $f : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1, x \mapsto x^2$ ;  $f$  werde induziert von  $\alpha : k[X] \rightarrow k[X], X \mapsto X^2$   
 $=_{\text{Spec } k[X]}$

$$\text{Sei } y = (X - a) \Rightarrow X_y = \mathbb{A}_k^1 \times_{\mathbb{A}_k^1} \text{Spec } k = \text{Spec}(\underbrace{k[X] \otimes_{k[X]} k}_{\cong k[X]/\alpha(X-a)})$$

$$k[X]/\alpha(X-a) = k[X]/(X^2 - a) = \begin{cases} k \oplus k & \text{falls } a \in (k^\times)^2 \\ k[X]/(X^2) & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

2)  $X = (x, y)$ -Ebene  $\cup (z, w)$ -Ebene in  $\mathbb{A}_k^4$

$$= V(z, w) \cup V(x, y) = V(xz, yz, xw, yw)$$

$f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^2, (x, y, z, w) \mapsto (x + z, y + w)$  wird induziert von  $\alpha : k[s, t] \rightarrow k[X, Y, Z, W] \rightarrow k[V], s \mapsto X + Z, t \mapsto Y + W$ .

Sei  $y = „(0, 0)“ = (s, t) \Rightarrow V_y = V \times_{\mathbb{A}_k^2} \text{Spec } k = \text{Spec}(k \otimes_{k[s, t]} k) \cong k[V] / \alpha(s, t) =$

$$k[V] / (X + Z, Y + W) = k[X, Y, Z, W] / (X + Z, Y + W, XZ, YZ, XW, YW)$$

$$= k[X, Y] / (-X^2, -XY, -Y^2) =: R$$

Beachte:  $\dim_k R = 3$

### Definition + Bemerkung 6.4

Sei  $X$  ein Schema,  $T$  ein weiteres Schema.

- Ein  **$T$ -wertiger Punkt** von  $X$  ist ein Morphismus  $T \rightarrow X$ .
- Der Funktor  $h_X : \underline{\text{Sch}} \rightarrow \underline{\text{Sets}}, T \mapsto \text{Hom}(T, X)$  heißt **Punktfunktor** zu  $X$ .  $h_X$  ist kontravarianter Funktor.
- Die  $h_X$  definieren Funktor  $h : \underline{\text{Sch}} \rightarrow \underline{\text{Fun}}(\underline{\text{Sch}}^{\text{op}}, \underline{\text{Sets}})$ . Dieser Funktor ist Kovariant.  $(\underline{\text{Fun}}(\underline{\text{Sch}}^{\text{op}}, \underline{\text{Sets}}))$  ist die Kategorie der kontravarianten Funktoren von Schemata nach Mengen; op steht für „opposite“)

### Beispiele

- Sei  $T = \text{Spec}(k[\varepsilon] / (\varepsilon^2))$  ( $k$  ein Körper),  $X = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec } k[X, Y]$ . Ein  $T$ -wertiger Punkt von  $X$  ist ein Ringhomomorphismus  $\alpha : k[X, Y] \rightarrow k[\varepsilon] / (\varepsilon^2)$ . Sei  $\alpha$  surjektiv,  $\alpha^{-1}((\varepsilon)) = (X, Y)$ .

Also  $\alpha(X) = a\varepsilon, \alpha(Y) = b\varepsilon$  ( $a, b \in k$ )  $\Rightarrow \alpha(bX - aY) = 0$ .  $\alpha$  bestimmt also nicht nur einen Punkt  $x$  von  $X$ , sondern auch eine „Richtung“ in  $x$ .

- $T = \text{Spec } R$ ,  $R$  diskreter Bewertungsring.

$$T = \{t_0, t_1\}, t_0 \in \overline{\{t_1\}}, K := \text{Quot } R, X \text{ ein Schema}, \kappa(t_0) = k, \kappa(t_1) = K$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T, X) = \{ & (x_0, x_1, x_2) : x_0, x_1 \in X, x_0 \neq x_1, x_0 \in \overline{\{x_1\}}, \iota : \kappa(x_1) \rightarrow K \\ & \text{Homomorphismus mit } \iota(\mathcal{O}_{\overline{\{x_1\}}, x_0}) \subseteq R \text{ und } \iota(m_{x_0}) \subseteq m \} \end{aligned}$$



## § 7 Endlichkeitseigenschaften

### Definition 7.1

Sei  $X$  ein Schema.

- a)  $X$  heißt **lokal noethersch**, wenn es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $X$  durch affine Schemata  $U_i = \operatorname{Spec} R_i$  gibt, sodass die  $R_i$  noethersch sind.
- b)  $X$  heißt **noethersch**, wenn es eine endliche Überdeckung wie in a) gibt.

### Beispiel

Quasiprojektive Varietäten sind noethersch.

### Proposition 7.2

- a) Ein affines Schema  $X = \operatorname{Spec} R$  ist genau dann noethersch, wenn  $R$  noethersch ist.
- b) Ein Schema  $X$  ist genau dann lokal noethersch, wenn für jedes offene affine Unterschema  $U = \operatorname{Spec} R$  gilt:  $R$  ist noethersch

### Beweis

- a) folgt aus b)
- b) Sei  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_i = \operatorname{Spec} R_i$  offen in  $X$ ,  $R_i$  noethersch. Sei  $U = \operatorname{Spec} R$  offen in  $X$ .

**Zu zeigen:**  $R$  ist noethersch

Es gilt:  $U \cap U_i$  ist offen in  $U_i$  für jedes  $i$ .  $\Rightarrow U \cap U_i = \bigcup_{j \in J_i} D(f_{ij})$  für geeignete  $f_{ij} \in R_i$ .

$D(f_{ij}) = \operatorname{Spec}(R_i)_{f_{ij}}$ ,  $R_{ij} := (R_i)_{f_{ij}}$  ist noethersch

$D(f_{ij})$  ist auch offen in  $U$ .

$\Rightarrow \exists g_{ijk} \in R$  mit  $D(f_{ij}) = \bigcup_k D(g_{ijk})$

Sei  $\varphi_{ij} : R \rightarrow R_{ij}$  der von  $D(f_{ij}) \hookrightarrow U$  induzierte Ringhomomorphismus

$\Rightarrow R_{g_{ijk}} \stackrel{(!)}{\cong} (R_{ij})_{\varphi_{ij}(g_{ijk})} \Rightarrow R_{g_{ijk}}$  ist noethersch

Die  $D(g_{ijk})$  überdecken  $U$ .

$U$  ist quasikompakt  $\Rightarrow$  endlich viele der  $g_{ijk}$  genügen zum Überdecken. Nenne sie  $g_1, \dots, g_r$ . Sei nun  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$  Kette von idealen in  $R$ . Für  $i = 1, \dots, r$  sei  $\varphi_i : R \rightarrow R_{g_i}$  der natürliche Homomorphismus  $\Rightarrow \varphi_i(I_1) \cdot R_{g_i} \subseteq \varphi_i(I_2) \cdot R_{g_i} \subseteq \dots$  wird stationär

**Behauptung:** Für jedes Ideal  $I \subseteq R$  gilt:

$$I = \bigcap_{i=1}^r \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I) \cdot R_{g_i})$$

### Beweis der Behauptung:

„ $\subseteq$ “: ✓

„ $\supseteq$ “: Sei  $b \in \bigcup_{i=1}^r \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I) \cdot R_{g_i})$

Für jedes  $i = 1, \dots, r$  gibt es  $a_i \in I$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\varphi_i(b) = \frac{b}{1} = \frac{a_i}{g_i^n}$  in  $R_{g_i}$ .  $\Rightarrow \exists m_i$  mit  $g_i^{m_i}(g_i^{n_i}b - a_i) = 0$  in  $R \Rightarrow g_i^{m_i+n_i}b = g_i^{m_i}a_i \in I \Rightarrow \exists M$  mit  $g_i^M b \in I$  für  $i = 1, \dots, r$

Nach Voraussetzung ist  $\left. \begin{aligned} (g_1, \dots, g_r) &= R \\ \Rightarrow (g_1^M, \dots, g_r^M) &= R \end{aligned} \right\} \Rightarrow b \in I \quad \square$

### Definition + Proposition 7.3

Sei  $f : X \rightarrow Y$  Morphismus von Schemata.

- a)  $f$  heißt **lokal von endlichem Typ**, wenn es eine offene affine Überdeckung  $(U_i = \text{Spec } A_i)_{i \in I}$  von  $Y$  gibt und für jedes  $i \in I$  eine offene affine Überdeckung  $(U_{ij} = \text{Spec } B_{ij})_{j \in J_i}$  von  $f^{-1}(U_i) \subseteq X$ , so dass  $B_{ij}$  (durch den von  $f$  induzierten Homomorphismus) endlich erzeugte  $A_i$ -Algebra ist  $\forall i \in I, j \in J_i$ .
- b)  $f$  heißt **von endlichem Typ**, wenn in a) jedes  $f^{-1}(U_i)$  eine endliche Überdeckung der gewünschten Art hat.
- c) Ist  $f$  (lokal) von endlichem Typ, so gibt es für jedes offene affine  $U = \text{Spec } A \subseteq Y$  eine endliche offene affine Überdeckung  $U_i = \text{Spec } B_i$  von  $f^{-1}(U)$ , so dass  $B_i$  endlich erzeugte  $A$ -Algebra ist.

### Beweis

c) Ähnlich 7.2 □

### Beispiele 7.4

- 1) Jeder Morphismus von quasiprojektiven Varietäten/ $k$  ist von endlichem Typ.
- 2) Insbesondere ist für jede quasiprojektive Varietät  $V/k$  der „Strukturmorphismus“  $V \rightarrow \text{Spec } k$  von endlichem Typ.
- 3)  $\text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Q}$  ist nicht lokal von endlichem Typ.

### Definition 7.5

Ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  von Schemata heißt **endlich**, wenn es eine offene affine Überdeckung  $(U_i = \text{Spec } A_i)_{i \in I}$  von  $Y$  gibt, so dass für jedes  $i \in I$   $f^{-1}(U_i)$  affin ist (also  $f^{-1}(U_i) = \text{Spec } B_i$ ) und dabei  $B_i$  als  $A_i$ -Modul endlich erzeugt ist.

### Bemerkung 7.6

Ist  $f : X \rightarrow Y$  endlich, so ist  $f^{-1}(y)$  endlich für jedes  $y \in Y$ .

### Beweis

Sei  $U = \text{Spec } A$  affine Umgebung von  $y \Rightarrow f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U) = \text{Spec } B$

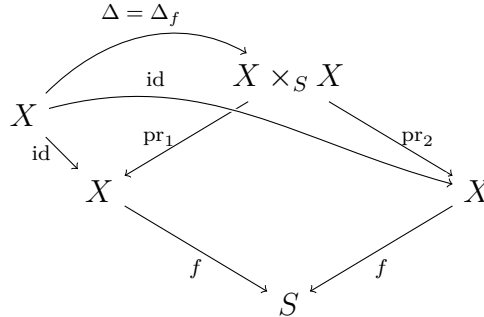
$B$  ist nach Voraussetzung endl. erzeugter  $A$ -Modul. Weiter ist  $f^{-1}(y) = \text{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$ .  $B \otimes_A \kappa(y)$  ist endlich-dimensionaler  $\kappa(y)$ -Vektorraum  $\Rightarrow B \otimes_A \kappa(y)$  hat nur endlich viele Primideale □

## § 8 Eigentliche Morphismen

### Definition 8.1

Sei  $f : X \rightarrow S$  ein Morphismus von Schemata.

- a) Der von  $\text{id}_X$  induzierte Morphismus  $\Delta = \Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$  heißt **Diagonalmorphismus** (oder Diagonale) zu  $f$ .



$$\text{Es ist } \text{pr}_1(\Delta(X)) = \text{pr}_2(\Delta(X))$$

- b)  $f$  heißt **separiert** (oder auch  $X$  heißt separiert über  $S$ ), wenn  $\Delta$  eine abgeschlossene Einbettung ist.

### Erinnerung 8.2

Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann hausdorffsch, wenn  $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$  abgeschlossene Teilmenge von  $X \times X$  ist.

### Beispiel

Sei  $X = \text{Spec } k[t]_{(0)} \rightarrow \text{Spec } k[t]_{(0)} = \mathbb{A}_k^1$  mit doppeltem Nullpunkt (§3 Beispiel 2),  $F : X \rightarrow \text{Spec } k$  der Strukturmorphismus.  $f$  ist nicht separiert, da  $\Delta(X)$  nicht abgeschlossen in  $X \times_k X$ , denn  $(0_1, 0_2) \notin \Delta$  aber  $\in \overline{\Delta}$ .

### Bemerkung 8.3

Jeder Morphismus affiner Schemata ist separiert.

### Beweis

Sei  $f : X = \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A = Y$  Morphismus, induziert von Ringhomomorphismus  $\alpha : A \rightarrow B$ . Dann ist  $X \times_Y X = \text{Spec}(B \otimes_A B)$ .

$$\Delta : X \rightarrow X \times_Y X \text{ wird induziert von } \mu : \begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \rightarrow & B \\ b_1 \otimes b_2 & \mapsto & b_1 \cdot b_2 \end{array}$$

$\mu$  ist surjektiv, also ist  $\Delta$  abgeschlossene Einbettung. □

### Bemerkung 8.4

Offene und abgeschlossene Einbettungen sind separiert.

### Beweis

Sei  $i : U \hookrightarrow X$  offene abgeschlossene Einbettung.  $\Rightarrow U \times_X U \cong U$  und für  $\Delta : U \rightarrow U \times_X U \cong U$  gilt  $\Delta = \text{id}_U$ . □

### Definition 8.5

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata.

- a)  $f$  heißt **universell abgeschlossen**, wenn für jeden Morphismus  $g : Y' \rightarrow Y$  gilt:  $f' : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  ist abgeschlossen.

- b)  $f$  heißt **eigentlich**, wenn es von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist.

### Beispiel

$\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec } k$  ist abgeschlossen, aber nicht universell abgeschlossen.

Denn:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_k^2 = \mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^1 \\ \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \\ \mathbb{A}_k^1 & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

$\text{pr}_1$  ist nicht abgeschlossen.

$$V = V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_k^2, \text{pr}_1(V) = ?$$

$$V = V(XY - 1) \Rightarrow \text{pr}_1(V) = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$$

$\Rightarrow \text{pr}_1(V) = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$  ist nicht abgeschlossen (CE  $k$  algebraisch abgeschlossen)

### Definition 8.6

- a) Ein nullteilerfreier Ring  $R$  heißt **Bewertungsring**, wenn für jedes  $x \in K = \text{Quot } R$  gilt:  $x \in R$  oder  $x^{-1} \in R$ .  $R$  ist lokaler Ring mit maximalem Ideal  $m = \{x \in R : x^{-1} \notin R\}$ ,  $(x + y)^{-1} = \text{Übung??}$
- b) Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata,  $R$  ein Bewertungsring,  $K = \text{Quot } R$ ,  $U = \text{Spec } K$ ,  $T = \text{Spec } R$ .

Ein kommutatives Diagramm  $\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h_0} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{h_1} & Y \end{array}$  heißt **Bewertungsdiagramm** für  $f$ .

### Satz 2

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata,  $X$  noethersch,  $f$  von endlichem Typ für „eigentlich“. Dann gilt:

- a)  $f$  ist genau dann  $\left\{ \begin{array}{l} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \end{array} \right\}$ , wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K = U & \xrightarrow{h_2} & X \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow f \\ \text{Spec } R = T & \xrightarrow{h_1} & Y \end{array} \quad (*)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{höchstens} \\ \text{genau} \end{array} \right\}$  einen Morphismus  $h : T \rightarrow X$  gibt sodass  $(*)$  kommutiert

Dabei sei  $R$  ein Bewertungsring und  $K = \text{Quot}(R)$ .

- b) Sind  $X$  und  $Y$  noethersch und  $f$  von unendlichem Typ, so genügt es, Bewertungsdiagramme zu diskreten Bewertungsringen zu betrachten.

### Erinnerung

$R$  Bewertungsring  $\Leftrightarrow R$  nullteilerfrei, für  $x \in \text{Quot}(R)^\times$  ist  $x \in R$  oder  $x^{-1} \in R$ .

**Bewertung:**  $G$  abelsche Gruppe,  $\leq$  Totalordnung auf  $G$ , sodass aus  $x \leq y$  folgt:  $x + a \leq y + a \forall a \in G$ ,  $v : k^\times \rightarrow G$  Homomorphismus mit  $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$ .

**Beispiel**

Sei  $X = \mathbb{A}_k^1$ ,  $Y = \operatorname{Spec} k$ ,  $f : X \rightarrow Y \dots$

$K = k(T)$ ,  $R = \{\frac{g}{h} : g, h \in k[T], \deg h \geq \deg g\}$ ,  $R$  diskreter Bewertungsring,  $K = \operatorname{Quot}(R)$

$$\begin{array}{ccccc}
 \operatorname{Spec} k(T) & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^1 & & k(T) \longleftarrow k[T] \\
 \downarrow & & \downarrow f & & \uparrow \quad \quad \quad \nearrow h? \\
 \operatorname{Spec} R & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k & & R \longleftarrow k
 \end{array}$$

Es gibt kein  $h$ , da  $k[T] \hookrightarrow k(T)$  nicht über  $R$  faktorisiert:  $T \notin R$

**Bemerkung****Beweisskizze**

I) „separiert“

„ $\Rightarrow$ “: Seien  $h, h'$  Fortsetzungen von  $h_0$ .

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\quad} & X \\
 \downarrow i & \nearrow h & \downarrow f \\
 T & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 & \nwarrow h' &
 \end{array}$$

Sei  $\tilde{h} : T \rightarrow X \times_Y X$  der von  $h$  und  $h'$  induzierte Morphismus.

$$\begin{array}{ccccc}
 T & \xrightarrow{\quad h' \quad} & & & X \\
 \searrow \tilde{h} & & X \times_Y X & \xrightarrow{\operatorname{pr}_2} & \downarrow f \\
 & & \downarrow \operatorname{pr}_1 & & X \\
 & & X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\
 \nearrow h & & & &
 \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist  $h(t_1) = h'(t_1) = h_0(t_1) =: x_1 \Rightarrow \tilde{h}(t_1) \in \Delta(X)$

$\Delta(X)$  ist nach Voraussetzung abgeschlossen  $\Rightarrow \tilde{h}(t_0) \in \overline{\{\tilde{h}(t_1)\}} \subseteq \Delta(X) \Rightarrow h(t_0) = h'(t_0) \Rightarrow h = h'$ , weil  $h^\#$  und  $h'^\#$  durch  $h_0$  festgelegt sind.

„ $\Leftarrow$ “: Genügt zu zeigen:  $\Delta(X)$  ist abgeschlossen in  $X \times_Y X$ . Weil  $X$  noethersch ist, können wir verwenden:

**Proposition 8.7**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein quasikompakter Morphismus von Schemata.

Dann gilt:  $f(X)$  ist abgeschlossen in  $Y \Leftrightarrow$  für jedes  $y_1 \in f(X)$  und jedes  $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$  ist  $y_0 \in f(X)$  („abgeschlossen unter Spezialisierung“)

**Beweis**

[Har77] Chapter II, Lemma 4.5 □

Sei also  $x_1 \in \Delta(X)$ ,  $x_0 \in \overline{\{x_1\}} \subseteq X \times_Y X$ . Sei  $Z := \overline{\{x_1\}}$  mit der reduzierten Struktur  $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{Z, x_0}$ ,  $K = \mathcal{O}_{Z, x_1} = \kappa(x_1) = \operatorname{Quot} \mathcal{O}$ .

**Proposition + Definition 8.8**

Sei  $K$  ein Körper,  $R \subset K$  ein lokaler Ring.

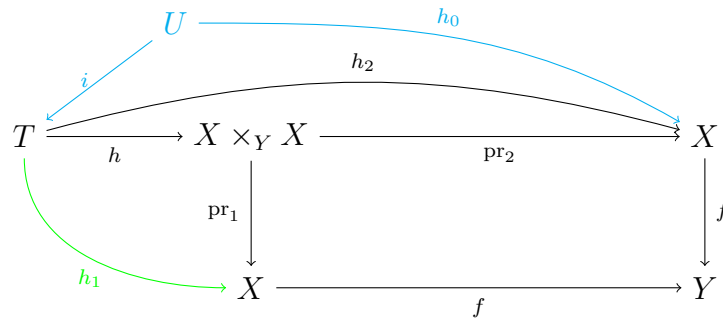
- a)  $(R_1, m_1)$  **dominiert**  $(R_2, m_2)$ , wenn  $R_2 \subseteq R_1$  und  $m_2 = m_1 \cap R_2$ .
- b)  $R$  ist Bewertungsring  $\Leftrightarrow R$  ist maximal bezüglich Dominanz
- c)  $R$  wird dominiert von einem Bewertungsring.

**Beweis**

[AM94] Chapter 5, Theorem 5.11 □

Sei also  $R \subset K$  Bewertungsring, der  $\mathcal{O}$  dominiert. Nach Vorüberlegung gibt es Morphismus  $h : T = \text{Spec } R \rightarrow X \times_Y X$  mit  $h(t_1) = x_1$ ,  $h(t_0) = x_0$ .

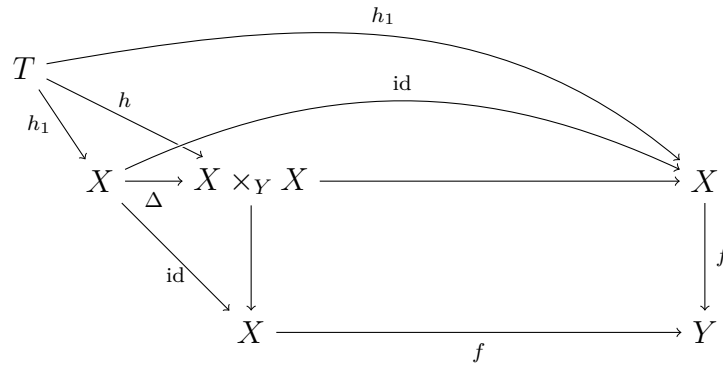
Sei  $h_i := \text{pr}_i \circ h$ ,  $i = 1, 2$



$$\Rightarrow f \circ h_1 = f \circ h_2$$

Da  $x_1 \in \Delta(X)$  ist  $h_1|_U = h_2|_U$ ,  $U = \text{Spec } K$ .

$\xRightarrow{\text{Vor.}} h_1 = h_2 \Rightarrow h$  faktorisiert über  $\Delta \Rightarrow x_0 \in \Delta(X)$ .



II) „eigentlich“

„ $\Rightarrow$ “: Eindeutigkeit von  $h$  folgt aus I

Existenz von  $h$ : Im Basiswechseldiagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y T & \longrightarrow & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{h_1} & Y \end{array}$$

ist  $f'$  nach Voraussetzung abgeschlossen.

Sei  $\varphi : U \rightarrow X \times_Y T$  der von  $h_0$  und  $i$  induzierte Morphismus

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h_0 & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 U & \xrightarrow{\varphi} & X \times_Y T & \longrightarrow & X \\
 \downarrow i & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 & & T & \xrightarrow{h_1} & Y
 \end{array}$$

Da  $i = f' \circ \varphi$  ist und  $i$  dominant, ist auch  $f'$  dominant  $\xrightarrow{f' \text{ abg.}} f'$  surjektiv

Sei  $z_1 = \varphi(t_1) \in X \times_Y T$ , also  $f'(z_1) = t_1$  (generischer Punkt),  $Z := \overline{\{z_1\}}$  mit reduzierter Struktur.

Auch  $f'|_Z$  ist surjektiv, also gibt es  $z_0 \in Z$  mit  $f'(z_0) = t_0$ .  $f'$  induziert lokalen Ringhomomorphismus  $R = \mathcal{O}_{T,t_0} \rightarrow \mathcal{O}_{Z,z_0}$  und Einbettung  $K = \kappa(t_1) \hookrightarrow \kappa(z_1)$ .  $\varphi$  induziert  $\kappa(z_1) \hookrightarrow \kappa(t_1) = K$ , also  $\kappa(z_1) \cong K$ .

$\xrightarrow{\text{Prop. 8.8}} R \cong \mathcal{O}_{Z,z_0} \xrightarrow{\text{§3 Bsp.2}} \exists h : t \rightarrow X$  mit  $h(t_i) = \text{pr}_X(z_i)$ ,  $i = 0, 1$

„ $\Leftarrow$ “: Zu zeigen: Wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm genau eine Fortsetzung  $h$  von  $h_1$  gibt, so ist  $f$  eigentlich.

Es genügt zu zeigen:  $f'$  ist universell abgeschlossen. Sei also Bewertungsdiagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X' = X \times_Y Y' & \longrightarrow & X \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 Y' & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

Zu zeigen:  $f'$  ist abgeschlossen. Sei dafür  $Z' \subseteq X'$  abgeschlossen,  $y_1 = f'(z_1) \in f'(Z')$  und  $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$ .

Zu zeigen:  $y_0 \in f'(Z')$  (das genügt nach Proposition 8.7)

Sei  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z,y_0}$ , wobei  $Z = \overline{\{y_1\}}$  (mit reduzierter Struktur)

$\text{Quot}(\mathcal{O}) = \kappa(y_1) \xrightarrow{(f')^\#} \kappa(z_1) =: K$

$K|\kappa(y_1)$  ist endliche Körpererweiterung (da  $f$  von endlichem Typ)  $\xrightarrow{\text{Prop.8.8}}$  Es gibt Bewertungsring  $R$  von  $K$ , der  $\mathcal{O}$  dominiert  $\Rightarrow$  Es gibt Morphismus  $h_1 : T = \text{Spec } R \rightarrow Y'$  mit  $h_1(t_i) = y_i$ ,  $i = 0, 1$ . Dann ist

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Spec } K = U & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 T & \xrightarrow{\quad} & Y' & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

$\nearrow h'$  (blau gestrichelt)     $\nearrow h$  (grün gestrichelt)

ein Bewertungsdiagramm für  $f$ . Nach Voraussetzung gibt es  $h : T \rightarrow X$  mit ...

Die UAE des Faserprodukts liefert  $h' : T \rightarrow X'$  mit  $f'(h'(t_0)) = h_1(t_0) = y_0 \Rightarrow y_0 \in f'(Z')$ .

$h'(t_0) := z_0 \in \overline{\{h'(t_1)\}} = \overline{\{z_1\}} \in Z'$  □

### Folgerung 8.9

Für Morphismen noetherscher Schemata gilt:

- a) Die Komposition  $\left\{ \begin{array}{c} \text{separierter} \\ \text{eigentlicher} \end{array} \right\}$  Morphismen ist  $\left\{ \begin{array}{c} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \end{array} \right\}$ .
- b)  $\left\{ \begin{array}{c} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \end{array} \right\}$  ist stabil unter Basiswechsel.
- c) Ist  $g \circ f \left\{ \begin{array}{c} \text{separiert} \\ \text{eigentlich und } g \text{ separiert} \end{array} \right\}$ , so ist  $f \left\{ \begin{array}{c} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \end{array} \right\}$ .

### Beweis

Bewertungskriterium anwenden

□

### Proposition 8.10

Der Strukturmorphismus  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n = \text{Proj } \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  ist eigentlich.

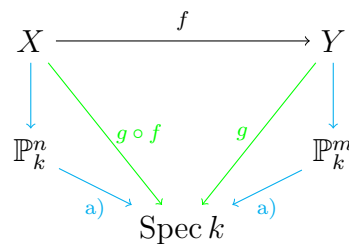
### Folgerung 8.11

Sei  $k$  ein Körper

- a)  $\mathbb{P}_k^n$  ist eigentlich über  $\text{Spec } k$ .
- b) Sind  $V, V'$  projektive Varietäten über  $k$ ,  $f : V \rightarrow V'$  Morphismus, so ist der induzierte Morphismus  $t(V) \rightarrow t(V')$  eigentlich.

### Beweis

- b) Sei  $X := t(V), Y := t(V')$  (abgeschlossene Unterschemata)

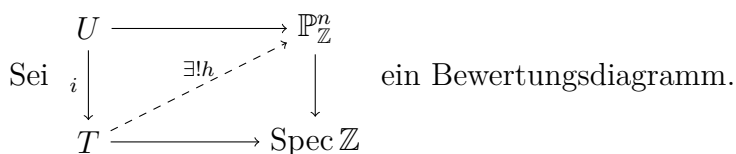


Aus 8.9 a) und 8.9 c) folgt:  $f$  ist eigentlich.

□

### Beweis (von Proposition 8.10)

$\mathbb{P}_k^n$  ist von endlichem Typ über  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  ✓



Zu zeigen:  $\exists! h : T \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$

Sei  $\xi_1 : h_0(t_1)$ ;  $\exists \xi_1 \in \bigcap_{i=0}^n U_i$  ( $U_i = D(X_i)$ ) (sonst ist  $\xi_1 \in \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{n-1}$  Induktion über  $n$ )  
 $\Rightarrow \frac{x_i}{x_j} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n, \xi_1}^\times$  für alle  $i, j \Rightarrow$  Das Bild  $\tilde{f}_{ij}$  von  $\frac{x_i}{x_j}$  in  $\underbrace{\kappa(\xi_1)}_{=\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n, \xi_1}/m_{\xi_1}}$  ist  $\neq 0 \Rightarrow f_{ij} := h_0^\#(\tilde{f}_{ij}) \in K^\times$

Sei  $v : K^\times \rightarrow G$  die zu  $R$  gehörige Bewertung. Wähle  $j \in \{1, \dots, n\}$ , sodass  $v(f_{j0}) = \min_{k=1}^n v(f_{kj}) \Rightarrow v(f_{ij}) = v(f_{i0}) - v(f_{j0}) \geq 0$  für  $i = 0, \dots, n \Rightarrow f_{ij} \in R$  für  $i = 0, \dots, n \Rightarrow \frac{X_i}{X_j} \mapsto f_{ij}$  definiert Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j}] \rightarrow R$ , also Morphismus  $h : T \rightarrow U_j \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$



*Eindeutigkeit von  $h$ :* Sei  $h' : T \rightarrow U_k$  eine weitere Fortsetzung von  $h_0$ .

Dann ist  $k \neq j$ , weil  $U_j \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$  separiert ist (8.3). Sei  $\beta : \mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_k}, \dots, \frac{X_n}{X_k}] \rightarrow R$  der zugehörige Ringhomomorphismus  $\Rightarrow \beta(\frac{X_i}{X_k}) = h_0^\#(\frac{X_i}{X_k}) = f_{ik} \in R^\times$

Es ist  $f_{ik} = f_{ij} \cdot f_{jk} \Rightarrow \beta$  induziert denselben Morphismus  $T \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$  wie  $\alpha$ .  $\square$

