

2 Der Integralsatz von Cauchy

2.1 Das komplexe Kurvenintegral

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig (d.h. für alle $t \in [a, b]$ existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte und diese sind bis auf endlich viele $t_k \in [a, b]$ ($k = 1, \dots, m$) gleich).

$\leadsto f$ hat endlich viele (oder keine) Sprungstellen.

$\implies \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$ sind beschränkt und messbar.

$$\implies \exists \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f \, dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) \, dt.$$

Setze $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt$.

Eigenschaften: Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen (vgl. Analysis 3):

$$(a) \operatorname{Re} \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t) \, dt, \operatorname{Im} \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Im} f(t) \, dt, \overline{\int_a^b f(t) \, dt} = \int_a^b \overline{f(t)} \, dt$$

(folgt direkt aus der Definition)

$$(b) \left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt \leq (b-a) \|f\|_\infty \quad (\text{zum Beweis: setze } h = e^{-i\varphi} f)$$

$$(c) \int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) \, dt = \alpha \int_a^b f(t) \, dt + \beta \int_a^b g(t) \, dt, \int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt$$

Beweis. Für $\alpha = \gamma + i\delta$, $g = 0$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha f(t) \, dt &= \int_a^b (\gamma u(t) - \delta v(t)) \, dt + i \int_a^b (\delta u(t) + \gamma v(t)) \, dt \\ &= \gamma \int_a^b u(t) \, dt - \delta \int_a^b v(t) \, dt + i\delta \int_a^b u(t) \, dt + i\gamma \int_a^b v(t) \, dt \\ &= (\gamma + i\delta) \int_a^b (u(t) + iv(t)) \, dt \\ &= \alpha \int_a^b f(t) \, dt. \end{aligned}$$

□

(d) Seien $f, f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig, $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig ($n \rightarrow \infty$). Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt - \int_a^b f_n(t) \, dt \right| \leq (b-a) \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar* in $t_0 \in [a, b]$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} =: f'(t_0)$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ bei t_0 differenzierbar sind. Dann gilt $f'(t_0) = u'(t_0) + i v'(t_0)$. Wenn f bei allen $t \in [a, b]$ differenzierbar ist und die Ableitung $f': [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, so schreiben wir $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f'(t) \, dt = \int_a^b u'(t) \, dt + i \int_a^b v'(t) \, dt = u(t)|_a^b + i v(t)|_a^b = f(b) - f(a). \quad (2.1)$$

Genauso zeigt man: Falls $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, so existiert

$$\frac{d}{dt} \int_a^t g(s) \, ds = g(t) \quad (2.2)$$

für jedes $t \in [a, b]$.

Seien $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$ und $\phi \in C^1([\alpha, \beta])$ mit $\phi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. Dann gilt die Substitutionsregel

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) \, dt = \int_a^b f(\phi(s)) \phi'(s) \, ds \quad (2.3)$$

(Beweis wie im reellen Fall).

Beispiel 2.1. Es gilt $\int_a^b e^{zt} \, dt = \int_a^b \left(\frac{1}{z} e^{zt} \right)' \, dt = \frac{1}{z} e^{zt} \Big|_a^b = \frac{1}{z} (e^{zb} - e^{za})$ für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definition 2.2. Sei $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$. Dann heißt $\Gamma = \gamma([a, b])$ *stetige Kurve* oder *Weg* von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ mit Parametrisierung γ . Die Kurve heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ und *einfach*, wenn γ auf $[a, b]$ injektiv ist. Die Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ heißt *stückweise C^1* , wenn $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ und es Zahlen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ gibt, sodass die Einschränkung γ_k von γ auf $[t_{k-1}, t_k]$ stetig differenzierbar für jedes $k = 1, \dots, m$ ist. Wir setzen dann $\gamma'(t) = \gamma'_k(t)$ für $t \in [t_{k-1}, t_k]$ und $k \in \{1, \dots, m\}$, $\gamma'(b) = \gamma'_m(b)$. Wenn zusätzlich jedes γ_k eine affine Funktion ist, so heißt Γ *Streckenweg*.

Im Folgenden bezeichnet Γ stets eine Kurve, die stückweise C^1 ist, und γ ist eine Parametrisierung (soweit nichts anderes gesagt wird).

Beispiel 2.3. (a) Die einfach im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie $\Gamma = \partial B(c, r)$ hat z.B. die Parametrisierungen $\gamma = c + re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $\gamma_1 = c + re^{2it}$ mit $t \in [0, \pi]$. Sie ist einfach und geschlossen.

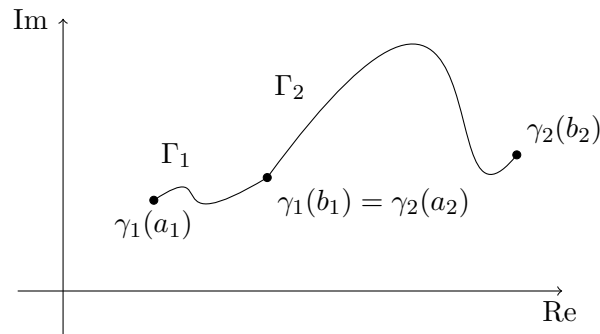
(b) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Die m -fach durchlaufene Kreislinie $\Gamma = \partial B(c, r)$ hat die Parametrisierung $\gamma = c + re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi m]$. Sie ist geschlossen, aber nicht einfach.

(c) Die Strecke \overrightarrow{wz} von w nach $z \neq w$ hat die Parametrisierung $\gamma(t) = w + t(z - w)$ mit $t \in [0, 1]$. Sie ist einfach, aber nicht geschlossen.

(d) Seien Γ_1, Γ_2 stückweise C^1 -Kurven mit Parametrisierungen $\gamma_j \in C([a_j, b_j], \mathbb{C})$ ($j = 1, 2$) und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Dann hat der Summenweg $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ die Parametrisierung

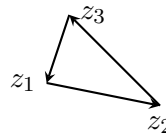
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a_1 \leq t \leq b_1, \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$

Er ist auch stückweise C^1 und verläuft von $\gamma_1(a_1)$ nach $\gamma_2(b_2)$.

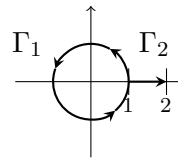


Beispiel:

- Dreiecksweg $\overrightarrow{z_1 z_2} + \overrightarrow{z_2 z_3} + \overrightarrow{z_3 z_1}$:



- Kreis mit Griff $\partial B(c, r) \cup [1, 2]$:



- (e) Der Rückwärtsweg $-\Gamma$ wird durch $\hat{\gamma}(t) = \gamma(b - t + a)$ mit $t \in [a, b]$ parametrisiert. Dabei sind $\hat{\gamma}(a) = \gamma(b)$ und $\hat{\gamma}(b) = \gamma(a)$. Er ist auch stückweise C^1 und verläuft von $\gamma(b)$ nach $\gamma(a)$.

Definition 2.4. Seien Γ eine stückweise C^1 -Kurve mit Parametrisierung $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ und $f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$. Dann heißt

$$\int_{\Gamma} f \, dz = \int_{\Gamma} f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt$$

komplexes Kurvenintegral.

Bemerkung 2.5. Aus den Eigenschaften des komplexen Integrals folgt sofort für $f, g \in C(\Gamma, \mathbb{C})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

- (a) $\int_{\Gamma} (\alpha f + \beta g)(z) \, dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z) \, dz + \beta \int_{\Gamma} g(z) \, dz.$
- (b) $\left| \int_{\Gamma} f(z) \, dz \right| \leq l(\gamma) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$, wobei $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$ die Kurvenlänge von Γ ist (vgl. Analysis 2/3).
- (c) Sei $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ wie in Bsp. 2.3(d). Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \int_{\Gamma_1} f(z) \, dz + \int_{\Gamma_2} f(z) \, dz.$$

Speziell folgt mit den Bezeichnungen aus Def. 2.2

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt.$$

(d) Für den Rückwärtsweg $-\Gamma$ aus Bsp. 2.3(e) gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\Gamma} f(z) \, dz &= \int_a^b f(\hat{\gamma}(t)) \hat{\gamma}'(t) \, dt \\ &= - \int_a^b f(\gamma(b-t+a)) \gamma'(b-t+a) \, dt \\ &= \int_b^a f(\gamma(s)) \gamma'(s) \, ds \quad (\text{Substituiere } s = b-t+a) \\ &= - \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) \, ds \\ &= - \int_{\Gamma} f(z) \, dz. \end{aligned}$$

(e) Das Kurvenintegral ist invariant unter orientierungserhaltenden Transformationen ϕ von Γ . Das heißt: Wenn $\phi \in C([a, b])$ strikt wachsend und auf jedem der Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ aus Definition 2.2 stetig differenzierbar ist, dann ist $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi^{-1}$ auf $[\alpha, \beta] := \phi([a, b])$ stückweise C^1 , $\tilde{\gamma}([a, b]) = \gamma([a, b]) = \Gamma$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \, dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(s)) \tilde{\gamma}'(s) \, ds = \sum_{k=1}^m \int_{\phi(t_{k-1})}^{\phi(t_k)} f(\gamma(\phi^{-1}(s))) \gamma'(\phi^{-1}(s)) \, d(\phi^{-1}(s)) \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_{\Gamma} f(z) \, dz. \end{aligned}$$

(f) Seien $\gamma = \alpha + i\beta$, $f = u + iv$, $\alpha, \beta, u, v \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \, dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))) (\alpha'(t) + i\beta'(t)) \, dt \\ &= \int_a^b u(\gamma(t)) \alpha'(t) - v(\gamma(t)) \beta'(t) \, dt + i \int_a^b u(\gamma(t)) \beta'(t) + v(\gamma(t)) \alpha'(t) \, dt \\ &= \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d(x, y) + i \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

Beispiel 2.6. (a) Sei $\Gamma = \partial B(c, r)$ m -fach durchlaufen, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ gilt mit $\gamma(t) = c + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi m]$:

$$\int_{\Gamma} (z - c)^k \, dz = \int_0^{2\pi m} (c + re^{it} - c)^k (c + re^{it})' \, dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi m} e^{(k+1)it} \, dt.$$

Mit Beispiel 2.1 erhalten wir:

$$\int_{\Gamma} (z - c)^k \, dz = \frac{r^{k+1}}{k+1} (e^{2\pi m(k+1)i} - 1) = 0.$$

Nun sei $k = -1$. Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - c} = \int_0^{2\pi m} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} \, dt = \int_0^{2\pi m} i \, dt = 2\pi im.$$

(b) Seien $\Gamma = \overrightarrow{0w}$ und $w \in \Sigma_{\pi}$. Mit $\gamma(t) = tw$, $t \in [0, 1]$, gilt:

$$\int_{\Gamma} z^{\frac{1}{2}} \, dz = \int_0^1 \sqrt{t} w^{\frac{1}{2}} w \, dt = w^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}}.$$

Satz 2.7. Seien Γ stückweise C^1 , $f_n \in C(\Gamma, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

(a) Wenn $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig für $n \rightarrow \infty$, dann folgt

$$\left| \int_{\Gamma} f_n(z) \, dz - \int_{\Gamma} f(z) \, dz \right| \leq l(\gamma) \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

(b) Sei $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$. Dann ist die Abbildung

$$z \mapsto \int_{\Gamma} h(z, w) \, dw$$

von D nach \mathbb{C} stetig.

(c) Wenn $\sum_{n \geq 1} f_n(z)$ gleichmäßig in $z \in \Gamma$ konvergiert, dann gilt:

$$\int_{\Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) \, dz.$$

(d) Sei $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$, sodass für jedes $w \in \Gamma$ die Abbildung $z \mapsto h(z, w)$ von D nach \mathbb{C} differenzierbar ist und $\frac{\partial}{\partial z} h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$. Dann existiert

$$\frac{d}{dz} \int_{\Gamma} h(z, w) \, dw = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} h(z, w) \, dw.$$

Beweis. (a)
$$\left| \int_{\Gamma} f_n(z) \, dz - \int_{\Gamma} f(z) \, dz \right| = \left| \int_a^b (f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))) \gamma'(t) \, dt \right|$$
$$\leq \int_a^b |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \, dt \leq \|f - f_n\|_{\infty} \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \|f - f_n\|_{\infty} l(\gamma) \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

(b) Seien $z_n, z_0 \in D$ mit $z_n \rightarrow z_0$. Sei $r > 0$, so dass $B = \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $z_n \in B$. Da $(z, w) \mapsto h(z, w)$ auf der kompakten Menge $B \times \Gamma$ gleichmäßig stetig ist, konvergiert $f_n(w) = h(z_n, w)$ gleichmäßig in $w \in \Gamma$ gegen $f(w) := h(z_0, w)$ für $n \rightarrow \infty$. Mit (a) folgt die Behauptung.

(c) Folgt aus (a) mit $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ statt f_n .

(d) Seien $z_0 \in D$, $r > 0$, $z_n \in B := \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ mit $z_n \neq z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \rightarrow z_0$ für $n \rightarrow \infty$. Sei $w \in \Gamma$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{h(z_n, w) - h(z_0, w)}{z_n - z_0} \right| &\stackrel{(2.1)}{=} \left| \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \frac{d}{dt} h(z_0 + t(z_n - z_0), w) \, dt \right| \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} \left| \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \cdot (z_n - z_0) \, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|z_n - z_0|} \int_0^1 \left| \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \right| \cdot |z_n - z_0| \, dt \\ &\leq \int_0^1 \left| \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \right| \, dt \leq \max_{z \in B, w \in \Gamma} \left| \frac{\partial h}{\partial z} (z, w) \right| =: c_1 < \infty. \end{aligned}$$

Weiter ist für eine Parametrisierung $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ von Γ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_n - z_0} \left(\int_{\Gamma} h(z_n, w) \, dw - \int_{\Gamma} h(z_0, w) \, dw \right) &= \int_{\Gamma} \frac{h(z_n, w) - h(z_0, w)}{z_n - z_0} \, dw \\ &= \int_0^1 \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \gamma'(t) \, dt. \end{aligned}$$

Es gilt für $t \in [0, 1]$:

$$\left| \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \cdot \gamma'(t) \right| \leq c_1 \cdot \|\gamma'\|_{\infty} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$$

und die Funktion $c_1 \|\gamma'\| \mathbb{1}_{[0,1]}$ ist auf $[0, 1]$ integrierbar. Außerdem gilt:

$$\frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \rightarrow \frac{\partial h}{\partial z}(z_0, \gamma(t))$$

für $n \rightarrow \infty$.

Majorisierte Konvergenz liefert die Existenz von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n - z} \left(\int_{\Gamma} h(z_n, w) \, dw - \int_{\Gamma} h(z_0, w) \, dw \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{\Gamma} h(\cdot, w) \, dw \right) (z_0)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{\Gamma} h(\cdot, w) \, dw \right) (z_0) &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z - z_0} \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z}(z_0, \gamma(t)) \gamma'(t) \, dt \\ &= \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial h}{\partial z}(\cdot, w) \, dw \right) (z_0). \end{aligned} \quad \square$$

Erinnerung: Sei X ein Vektorraum. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt *zusammenhängend*, wenn aus $M \subseteq O_1 \cup O_2$, $M \cap O_1 \neq \emptyset$, $M \cap O_2 \neq \emptyset$ für alle offenen Teilmenge $O_1, O_2 \subseteq X$ stets folgt, dass

$$M \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt *Gebiet*.

Bemerkung. Aus Analysis 2 wissen wir: Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend. Alle zusammenhängenden Intervalle in \mathbb{R} sind zusammenhängend. Also sind stetige Kurven in X zusammenhängend. (Dabei definieren wir stetige Kurven und Streckenzüge im normierten Vektorraum genau wie in \mathbb{C} , vgl. Def. 2.2.)

Satz 2.8. Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subseteq X$. Dann gelten:

- (a) Für alle $x, y \in M$ gebe es eine stetige Kurve in M von x nach y . Dann ist M zusammenhängend.
- (b) Wenn $M = D$ offen und zusammenhängend ist, dann gibt es für alle $x, y \in D$ einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y .

Beweis. (a) Seien $O_1, O_2 \subseteq X$ offen mit $M \subseteq O_1 \cup O_2$, $M \cap O_1 \neq \emptyset$, $M \cap O_2 \neq \emptyset$. ANNAHME: $M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Wähle ein $x \in M \cap O_1$, $y \in M \cap O_2$. Nach Voraussetzung existiert eine stetige Kurve $\Gamma \subseteq M$ von x nach y . Damit gilt $\Gamma \subseteq M \subseteq O_1 \cup O_2$, $x \in \Gamma \cap O_1$, also ist $\Gamma \cap O_1 \neq \emptyset$. Ebenso ist $\Gamma \cap O_2 \neq \emptyset$. Ferner ist $\Gamma \cap O_1 \cap O_2 \subseteq M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \implies \Gamma$ ist unzusammenhängend: WIDERSPRUCH zur obigen Bemerkung. Also ist M zusammenhängend.

(b) Sei D offen und zusammenhängend und $x \in D$ beliebig. Setze

$$D(x) := O_1 := \{y \in D \mid \exists \text{ Streckenzug } \Gamma(y) \subseteq D \text{ von } x \text{ nach } y\}.$$

Dann ist $x \in O_1 \subseteq D$.

- Sei $y \in O_1$. Dann existiert ein $r > 0$ mit $B(y, r) \subseteq D$ (da D offen). Sei $z \in B(y, r)$. Dann ist $\overrightarrow{yz} \subseteq B(y, r) \subseteq D$. Somit ist $\Gamma(y) + \overrightarrow{yz} \subseteq D$ ein Streckenzug von x nach $z \implies z \in O_1 \implies B(y, r) \subseteq O_1 \implies O_1$ ist offen in D .
- Seien $y_n \in O_1$ mit $y_n \rightarrow y \in D$ ($n \rightarrow \infty$). Dann existiert ein $r > 0$ mit $B(y, r) \subseteq D$. Wähle (großes) N mit $y_N \in B(y, r) \subseteq O_1$. Dann ist $\Gamma(y_N) + \overrightarrow{y_N y} \subseteq D$ ein Streckenzug von x nach $y \implies y \in O_1 \implies O_1$ ist in D abgeschlossen. Also ist $D \setminus O_1 =: O_2$ in D offen, also auch in X offen (da D offen).

ANNAHME: $O_2 \neq \emptyset \iff O_1 \neq D$. Dann: $D = O_1 \dot{\cup} O_2$, $D \cap O_1 \neq \emptyset$, $D \cap O_2 = O_2 \neq \emptyset$, $D \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \implies D$ ist unzusammenhängend WIDERSPRUCH zur Voraussetzung. $\implies O_2 = \emptyset \implies O_1 = D(x) = D$. \square

Bemerkung 2.9. Sei X ein normierter Vektorraum, $D \subseteq X$ offen, $x, y \in D$. Die Menge $D(x)$ aus dem Beweis von Satz 2.8(b) ist in D offen und abgeschlossen (gleicher Beweis, auch wenn D nicht zusammenhängend). Satz 2.8(a) angewendet auf $D(x)$ liefert, dass $D(x)$ zusammenhängend ist. Ferner gilt entweder

(a) $D(x) = D(y) \iff$ es existiert ein Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y

oder

(b) $D(x) \cap D(y) = \emptyset \iff$ es existiert kein Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y .

Dann heißen $D(x)$ mit $x \in D$ *Zusammenhangskomponenten* von D . Diese sind also entweder gleich oder disjunkt.

Beweis. • $\exists w \in D(x) \cap D(y) \implies$ es gibt einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y über w . Dies liefert „ \implies “ in a), „ \impliedby “ in b)

- Es gebe einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von x nach y . Dann gibt es für alle $z \in D(x)$ eine Streckenzug in D von y nach z über $x \implies z \in D(y)$. Dies liefert schon „ \implies “ in b). Somit: $D(x) \subseteq D(y)$. Genauso zeigt man $D(y) \subseteq D(x)$. Dies liefert „ \impliedby “ in a). \square

Satz 2.10. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$ mit $f' = 0$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wähle $z_0 \in D$ fest.

(a) Sei $z \in D$ mit $\overrightarrow{z_0 z} \subseteq D$ und $z \neq z_0$. Dann:

$$0 = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f'(w) dw = \int_0^1 f'(\underbrace{z_0 + t(z - z_0)}_{=\gamma(t)})(z - z_0) dt = (f(z) - f(z_0))(z - z_0),$$

also ist $f(z) = f(z_0)$.

- (b) Sei nun $w \in D$ beliebig. Nach Satz 2.8 gibt es einen Streckenzug $\Gamma \subseteq D$ von z_0 nach w . Aus endlicher Anwendung von (a) folgt $f(w) = f(z_0)$. \square

Bemerkung. Dieser Satz ist falsch für unzusammenhängendes D .

Definition 2.11. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C(D, \mathbb{C})$. Eine Funktion $F \in H(D)$ mit $F' = f$ heißt *Stammfunktion* von f auf D .

Beispiel. Polynome, \exp , \sin , \cos haben Stammfunktionen auf \mathbb{C} . $f(z) = \frac{1}{z}$ hat die Stammfunktion \log auf Σ_π .

Bemerkung 2.12. Sei F eine Stammfunktion von f auf einem Gebiet D . Dann sind alle anderen Stammfunktionen von f auf D von der Form $F + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$, denn: Sei $F_1 \in H(D)$ eine weitere Stammfunktion. Dann: $(F - F_1)' = f - f = 0$. Also ist $F - F_1$ konstant nach Satz 2.8. \implies es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $F_1 = F + c$.

Satz 2.13 (vgl. Satz 3.12 Analysis 2). Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C(D, \mathbb{C})$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f besitzt eine Stammfunktion F .
 (b) Für alle Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq D$, die beide von einem beliebigen $z \in D$ zu einem beliebigen $w \in D$ laufen, gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(z) \, dz = \int_{\Gamma_2} f(z) \, dz.$$

- (c) Für alle geschlossenen Kurven $\Gamma \subseteq D$ gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 0.$$

In diesem Fall folgt für jede Kurve $\Gamma \subseteq D$ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$, dass

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis. a) \implies c): Sei $\Gamma \subseteq D$ eine Kurve von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Dann:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) \, dz &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma_k(t)) \gamma'_k(t) \, dt \stackrel{(2.1)}{=} \\ &\sum_{k=1}^m (F(\gamma_k(t_k)) - F(\gamma_k(t_{k+1}))) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Also gilt die letzte Behauptung im Falle der Existenz einer Stammfunktion. Wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$, folgt hiermit c) aus a).

- c) \implies b): Seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq D$ wie in b). Dann ist $\Gamma := \Gamma_1 + (-\Gamma_2)$ eine geschlossene Kurve von $\gamma_1(a)$ nach $\gamma_1(a)$ (über $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$) und es gilt

$$0 \stackrel{\text{c)}}{=} \int_{\Gamma} f \, dz \stackrel{\text{Bem. 2.5}}{=} \int_{\Gamma_1} f \, dz - \int_{\Gamma_2} f \, dz.$$

Daraus folgt b).

b) \Rightarrow a): Sei $z_0 \in D$ fest, $z \in D$ beliebig. Nach Satz 2.8 gibt es einen Streckenzug $\Gamma(z) \subseteq D$ von z_0 nach z . Setze

$$F(z) = \int_{\Gamma(z)} f(w) \, dw.$$

Wähle $r > 0$ mit $B(z, r) \subseteq D$. Sei $0 < |h| < r$. Dann sind $-\Gamma(z) + \Gamma(z+h)$ und $\overrightarrow{z(z+h)}$ Kurven in D von z nach $z+h$. Damit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) &\stackrel{\text{Bem. 2.5}}{=} \frac{1}{h} \int_{-\Gamma(z) + \Gamma(z+h)} f(w) \, dw \\ &\stackrel{\text{b)}}{=} \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z(z+h)}} f(w) \, dw \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h \, dt \\ &= \int_0^1 f(z+th) \, dt \rightarrow \int_0^1 f(z) \, dt = f(z) \quad (h \rightarrow 0) \quad (\text{nach Satz 2.7}). \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 2.14. (a) Sei Γ ein Weg von z_1 nach z_2 . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} \cos z \, dz = \sin z_2 - \sin z_1.$$

(b) Sei $\varepsilon \in (0, \pi)$ und Γ_ε eine Kurve in Σ_π von $e^{i(-\pi+\varepsilon)}$ nach $e^{i(\pi-\varepsilon)}$. Dann gilt

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \log e^{i(\pi-\varepsilon)} - \log e^{i(-\pi+\varepsilon)} = i(\pi-\varepsilon) - i(-\pi+\varepsilon) = 2i(\pi-\varepsilon).$$

Ferner gilt

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} \, dt = 2\pi i \neq 0,$$

obwohl \mathbb{D} eine geschlossene Kurve ist. Also besitzt die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definition 2.15. Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Dann heißt

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z}$$

Windungszahl (oder Index) von Γ bei z .

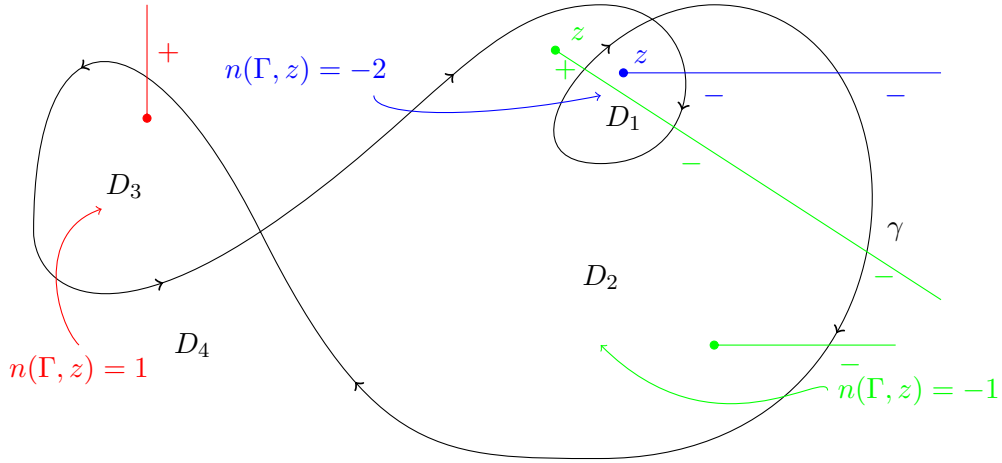
Bemerkung. Da $\Gamma \subseteq B(0, r)$ für ein $r > 0$ ist, gibt es genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Satz 2.16. Seien $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $z \in D := \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Dann gelten:

- (a) $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$.
- (b) $z \mapsto n(\Gamma, z)$ ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von D .
- (c) Es gilt $n(\Gamma, z) = 0$ für alle z in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von D .
- (d) $n(-\Gamma, z) = -n(\Gamma, z)$
- (e) Seien Γ_1, Γ_2 geschlossene Kurven mit $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, dann gilt

$$n(\Gamma, z) = n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z).$$

Bild:



D_k sind Zusammenhangskomponenten von $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Beweis. d), e) folgen aus Bem. 2.5.

b) folgt aus a), denn: $z \mapsto n(\Gamma, z)$ ist stetig auf D nach Satz 2.7. Nach Ana II ist dann $n(\Gamma, D(z)) \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend für jede Zusammenhangskomponente $D(z)$ von $D \ni z$ (vgl. Bem. 2.9).

Da $n(\Gamma, D(z)) \subseteq \mathbb{Z}$ (nach a)), enthält $n(\Gamma, D(z))$ genau einen Punkt.

c) $|n(\Gamma, z)| \leq \frac{l(\Gamma)}{2\pi} \max_{w \in \Gamma} \frac{1}{|w - z|} \rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty$. Mit b) folgt daraus c).

a) Seien t_k ($k = 0, \dots, m$) wie in Def. 2.2, $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Setze

$$\varphi(t) = \exp \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \quad \text{für } a = t_0 \leq t \leq t_m = b.$$

Beachte:

$$n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z} \xLeftrightarrow{(1.10)} 1 = \exp(2\pi i \cdot n(\Gamma, z)) \stackrel{\text{Def.}}{=} \exp \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - z} = \varphi(b).$$

Es gelten: $\varphi(a) = 1$, $\varphi \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{C})$ und $\varphi' = \varphi \frac{\gamma'}{\gamma - z}$. (*)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} \stackrel{(*)}{=} \frac{\varphi\gamma' - \varphi\gamma'}{(\gamma - z)^2} = 0$$

für $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 0, \dots, m$.

$$\xRightarrow{\int dt} \frac{\varphi(t_k)}{\gamma(t_k) - z} = \frac{\varphi(t_{k-1})}{\gamma(t_{k-1}) - z} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(b) &= \varphi(t_{m-1}) \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} \stackrel{(**)}{=} \varphi(t_{m-2}) \frac{\gamma(t_{m-1}) - z}{\gamma(t_{m-2}) - z} \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} \\ &= \dots = \varphi(a) \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z} = 1, \end{aligned}$$

da $\gamma(a) = \gamma(b)$, da Γ geschlossen. □

Beispiel 2.17. Sei $\Gamma = \partial B(c, r)$ m -fach im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Dann:

- $$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & n(\Gamma, z) = 0 \text{ für } z \notin \overline{B}(c, r) \text{ (Satz 2.16(c)).} \\ \text{(b)} \quad & n(\Gamma, z) \stackrel{2.16(c)}{=} n(\Gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi m} \frac{i r e^{it}}{\underbrace{c + r e^{it}}_{=\gamma(t)} - c} dt = m, \text{ für alle } z \in B(c, r). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.18. Sei Γ ein geschlossener Weg und L ein Halbstrahl der Form $w = z + te^{i\varphi}$ ($\forall t \geq 0$), für feste $c \in \mathbb{C}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, der Γ endlich oft in $\gamma(\tau_1), \dots, \gamma(\tau_n)$ schneidet.

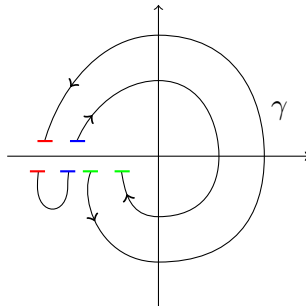
Zähle Berührungspunkte τ_j nicht (Γ bleibt auf gleicher Seite von L), zähle die anderen τ_j mit „+1“ falls Γ den Strahl mit wachsendem Argument schneidet und mit „−1“ falls mit fallendem Argument. Dabei sei $z \notin \Gamma$. Dann ist $n(\Gamma, z)$ die Summe der so mit ± 1 gewichteten echten Schnittpunkte (wobei „fallen“ und „wachsen“ bzgl. L gemeint ist).

Beweis. Nach Verschieben, Drehen und Umparametrisieren (falls nötig) von Γ können wir annehmen, dass $z = 0 \notin \Gamma$, $L = \mathbb{R}_-$, $\tau_j \neq a, b$ ($\forall j = 1, \dots, n$) gilt. Weiter sei $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{C})$. Wähle $\varepsilon > 0$, so dass alle $(\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ disjunkt sind, $j = 1, \dots, n$. Sei

$$I_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^n (\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon), \quad \Gamma_\varepsilon = \gamma([a, b] \setminus I_\varepsilon),$$

also die disjunkte Vereinigung aller Teilkurven von Γ , die alle in Σ_π liegen.

Bild:



Damit:

$$n(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{[a,b] \setminus I_{\varepsilon}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{[a,b] \setminus I_{\varepsilon}} (\log \gamma(t))' dt$$

(beachte $\gamma(t) \in \Sigma_\pi$ für $t \in [a, b] \setminus I_\varepsilon$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} (\log \gamma(b) - \log \gamma(\tau_n + \varepsilon) + \log \gamma(\tau_n - \varepsilon) \\ &\quad - \log \gamma(\tau_{n-1} + \varepsilon) + \cdots + \log \gamma(\tau_1 - \varepsilon) - \underbrace{\log \gamma(a)}_{=\gamma(b)}) \\ &\stackrel{(1.11)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \left[\underbrace{\ln |\gamma(\tau_j - \varepsilon)| - \ln |\gamma(\tau_j + \varepsilon)|}_{\rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} + i(\arg \gamma(\tau_j - \varepsilon) - \arg \gamma(\tau_j + \varepsilon)) \right]. \end{aligned}$$

Dabei gilt für den Imaginärteil:

$$\operatorname{Im} n(\Gamma, 0) \rightarrow \begin{cases} \pm\pi - (\pm\pi) = 0 & \text{— Berührungspunkt,} \\ +\pi - (-\pi) = 2\pi & \text{— arg wächst,} \\ -\pi - \pi = -2\pi & \text{— arg fällt.} \end{cases} \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\Rightarrow n(\Gamma, 0) = \frac{2\pi i}{2\pi i} |\# \text{Schnittstellen mit wachsendem Arg.} - \# \text{Schnittstellen mit fallendem Arg.}|$$

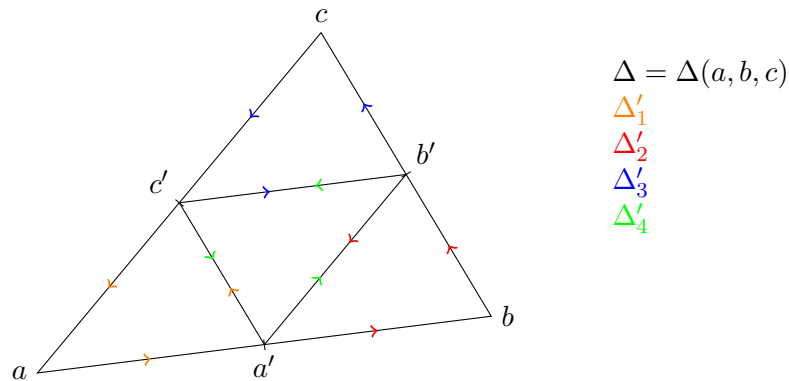
(Falls γ stückweise C^1 : füge $(t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon)$ (siehe Def. 2.2) zu I_ε hinzu). \square

2.2 Integralsatz und -formel von Cauchy für sternförmige Gebiete

Satz 2.19 (Lemma von Goursat). *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w_0 \in \mathbb{C}$, $f \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$. Sei $\Delta \subseteq D$ eine abgeschlossene Dreiecksfläche. Dann:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0.$$

Beweis. (1) Sei $w_0 \notin \Delta$. Dann gibt es ein offenes $U \subseteq D$ mit $\Delta \subseteq U$, $f \in H(U)$.



Seitenhalbierung liefert Δ'_1 mit Kante $\overrightarrow{a'c'}$ und Ecke a , Δ'_2 mit Kante $\overrightarrow{b'a'}$ und Ecke b , Δ'_3 mit Kante $\overrightarrow{c'b'}$ und Ecke c , sowie das innere $\Delta'_4 = \Delta(a', b', c')$, dessen Rand wir entgegengesetzt mit $\overrightarrow{a'b'} + \overrightarrow{b'c'} + \overrightarrow{c'a'}$ parametrisieren können. Damit:

$$J = \int_{\partial\Delta} f \, dz = \sum_{k=1}^4 \underbrace{\int_{\partial\Delta'_k} f \, d\tau}_{=: J'_k}$$

Die Integrale über innere Kanten treten doppelt mit verschiedenen Vorzeichen auf, kürzen sich also.

Sei J_1 dasjenige der J'_1, \dots, J'_4 mit größtem Betrag und sei Δ_1 das zugehörige Dreieck. Damit:

$$|J_1| \geq \frac{1}{4} |J|, \quad l(\partial\Delta_1) = \frac{1}{2} l(\partial\Delta).$$

Iteriere dies. Erhalte Dreiecke Δ_n und

$$J_n = \int_{\partial\Delta_n} f \, dz \quad \text{mit} \quad l(\partial\Delta_n) = 2^{-n}l(\partial\Delta), \quad |J_n| \geq 4^{-n}|J|. \quad (*)$$

Wenn $z, w \in \Delta_n$, dann

$$|z - w| \leq l(\partial\Delta_n) = 2^{-n}l(\partial\Delta). \quad (**)$$

Da $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$ ($\forall n$) ist die Folge der Mittelpunkte z_n der Δ_n eine Cauchyfolge (wegen (**)).

$$\implies \exists z_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n.$$

Wenn $\hat{z}_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$, dann:

$$|z_0 - \hat{z}_0| \stackrel{(**)}{\leq} 2^{-n}l(\partial\Delta) \quad (\forall n)$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt $z_0 = \hat{z}_0$, also $\{z_0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \subseteq \Delta \subseteq U$.

Setze $g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$. Da f bei z_0 differenzierbar ist (wegen $f \in H(U)$), folgt $g(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow z_0$ ($z \in \Delta$).

Ferner: $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$. Mit $\int_{\partial\Delta_n} \cdots \, dz$ folgt:

$$\begin{aligned} J_n &= \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f(z_0) \, dz}_{=0 \text{ nach 2.13}} + \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0) \, dz}_{=0 \text{ nach Satz 2.13}} + \int_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0) \, dz \\ \implies 4^{-n}|J| &\stackrel{(*)}{\leq} |J_n| = \left| \int_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0) \, dz \right| \leq \max_{z \in \partial\Delta_n} |g(z)| |z - z_0| l(\partial\Delta_n) \\ &\stackrel{(*),(**)}{\leq} (2^{-n}l(\partial\Delta_n))^2 \max_{z \in \partial\Delta_n} |g(z)| \\ \implies |J| &\leq l(\partial\Delta_n)^2 \max_{z \in \partial\Delta_n} |g(z)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt $J = 0$, also die Behauptung im Fall $w_0 \notin \Delta$.

(2) Sei $w_0 \in \Delta$.

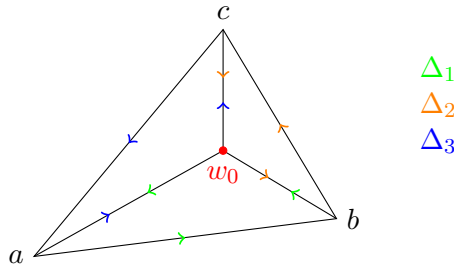
(a) Sei w_0 eine Ecke von Δ . Sei $\varepsilon > 0$. Zerlege Δ wie in (1) per Seitenhalbierung. Wähle dabei stets das Teildreieck mit Ecke w_0 . Erhalte Dreiecke $\Delta_1^*, \dots, \Delta_m^*$ mit disjunktem Inneren, sodass $w_0 \in \Delta_1^*$, $l(\partial\Delta_1^*) \leq \varepsilon$, $w_0 \notin \Delta_k^*$ für $k \geq 2$. Wie in (1) erhalten wir

$$\left| \int_{\partial\Delta} f \, dz \right| = \left| \sum_{k=1}^m \int_{\partial\Delta_k^*} f \, dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_1^*} f \, dz \right| \leq \varepsilon \underbrace{\sup_{z \in \Delta} |f(z)|}_{< \infty}.$$

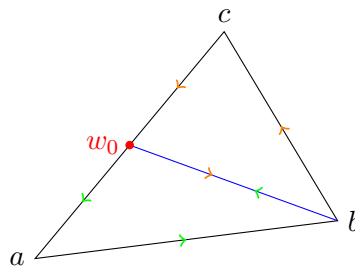
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\int_{\partial\Delta} f \, dz = 0$.

- (b) Sei $w_0 \in \Delta \setminus \partial\Delta$. Zerlege Δ in $\Delta_1 = \Delta(a, b, w_0)$, $\Delta_2 = \Delta(b, c, w_0)$ und $\Delta_3 = \Delta(c, a, w_0)$. Damit erhalten wir nach (a)

$$\int_{\partial\Delta} f \, dz = \sum_{k=1}^3 \int_{\partial\Delta_k} f \, dz = 0.$$

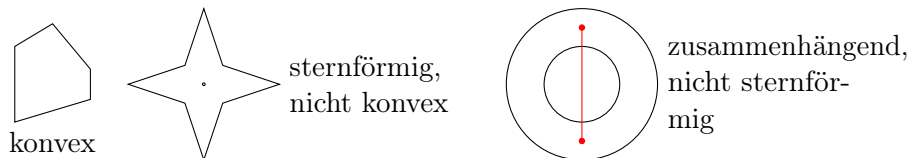


- (c) Sei $w_0 \in \partial\Delta$, w_0 keine Ecke. Wie in (b) zerlegen wir Δ in zwei Teildreiecke:

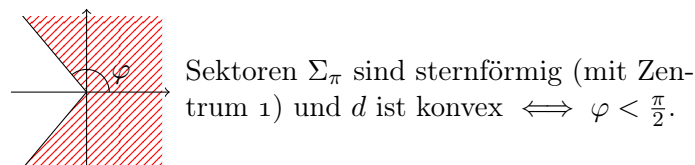


Daraus erhalten wir wieder $\int_{\partial\Delta} f \, dz = 0$. □

Definition 2.20. Sei $M \subseteq \mathbb{C}$. Die Menge M heißt *konvex*, wenn für alle $w, z \in M$ auch \overline{wz} in M liegt. Die Menge M heißt *sternförmig* mit Zentrum $z_0 \in M$, wenn für alle $w \in M$ auch $\overline{z_0 w}$ in M liegt.



Klar ist: M konvex $\implies M$ sternförmig und M sternförmig $\implies M$ zusammenhängend (nach Satz 2.8).



Theorem 2.21 (Cauchys Integralsatz für sternförmige Gebiete). Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f \in H(D)$ und $\Gamma \subseteq D$ eine geschlossene Kurve. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f \, dz = 0.$$

Bemerkung. Nach Satz 2.13 ist die Aussage von Theorem 2.21 äquivalent zu: Jedes $f \in H(D)$ besitzt auf D eine Stammfunktion, wenn D sternförmig ist.

Beweis. Sei z_0 das Zentrum von D . Setze für alle $z \in D$

$$F(z) = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(w) \, dw = - \int_{\overrightarrow{zz_0}} f(w) \, dw.$$

Sei $r > 0$ mit $B(z, r) \subseteq D$, $z \in D$ fest, sowie $0 < |h| < r$. Dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) &= \frac{1}{h} \left(\int_{\overrightarrow{z_0(z+h)}} f \, dw + \int_{\overrightarrow{zz_0}} f \, dw + \int_{\overrightarrow{(z+h)z}} f \, dw \right) + \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z(z+h)}} f \, dw \\ &= \underbrace{\frac{1}{h} \int_{\partial \Delta(z_0, z+h, z)} f \, dw}_{=0 \text{ (Satz 2.19)}} + \underbrace{\frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h \, dt}_{\rightarrow f(z), \, h \rightarrow 0 \text{ nach (2.7)}}. \end{aligned}$$

Also ist $F'(z) = f(z)$. □

Beispiel 2.22. (a) $\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z+2} = 0$, denn $f(z) = \frac{1}{z+2}$ liegt in $H(D)$ für

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -\frac{3}{2}\}.$$

Beachte: D ist sternförmig und offen, $\partial \mathbb{D} \subseteq D$.

(b) Cauchy ist im Allgemeinen falsch für Gebiete mit Löchern, z.B. $\mathbb{C} \setminus \{0\} =: D$. Siehe Bsp. 2.14: $f(z) = \frac{1}{z}$, $f \in H(D)$, $\Gamma = \partial \mathbb{D}$. Dann

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Bemerkung. Theorem 2.21 gilt auch, wenn $f \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$ für ein $w_0 \in D$. Denn Satz 2.19 wurde für solche f bewiesen.

Theorem 2.23 (Cauchys Integralformel für sternförmige Gebiete). *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f \in H(D)$, $\Gamma \subseteq D$ eine geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$n(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} \, dw, \quad \forall z \in D \setminus \Gamma. \quad (\text{CIF})$$

Speziell mit $\Gamma = \partial B(z, r) \subseteq D$ für $B(z, r) \subseteq D$ und $z \in B(z, r)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, r)} \frac{f(w)}{w-z} \, dw \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \, dt. \quad (2.5)$$

Beweis. Sei $z \in D \setminus \Gamma$ fest. Setze $g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \in D \setminus \{z\} \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$.

Dann ist $g \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{z\})$. Die Bemerkung nach Bsp. 2.22 liefert dann

$$0 = \int_{\Gamma} g(w) \, dw \stackrel{z \notin \Gamma}{=} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} \, dw - f(z) \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z}}_{=2\pi i n(\Gamma, z)}.$$

Daraus folgt (CIF) und der Spezialfall (2.4). Mit $c = z$ und der Parametrisierung $\gamma(t) = z + re^{it}$ folgt aus (2.4)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{z + re^{it} - z} i r e^{it} \, dt,$$

also (2.5). □

Beispiel. Es gilt $\int_{\partial B(2,1)} \frac{\sqrt{w}}{w - \frac{3}{2}} \, dw = 2\pi i \sqrt{\frac{3}{2}}.$

Wähle hier $D = B(2, \frac{3}{2})$, $f(w) = \sqrt{w}$. Dann ist D konvex, $f \in H(D)$, $\partial B(2, 1) \subseteq D$.

Definition 2.24. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, wenn es für jedes $z \in D$ eine $r(z) > 0$ gibt, sodass $B(z, r(z)) \subseteq D$ und f auf $B(z, r(z))$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z und Koeffizienten $a_n(z)$ besitzt.

Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ heißt *ganz*.

Theorem 2.25 (Entwicklungssatz). *Sei $f \in H(D)$. Dann ist f analytisch auf D .*

Sei ferner $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Seien $n \in \mathbb{N}$, $z \in B(z_0, r)$. Dann gelten die Cauchyformeln

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, dw \quad (2.6)$$

und die Cauchy-Abschätzungen

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z_0|=r} |f(w)|. \quad (2.7)$$

Sei $R(z_0) = \sup \{s > 0 \mid B(z_0, s) \subseteq D\}$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (2.8)$$

für alle $z \in B(z_0, r)$ mit $0 < r < R(z_0)$. Die Reihe in (2.8) konvergiert absolut und gleichmäßig für $z \in B(z_0, r')$ mit $0 < r' < r < R(z_0)$. Wenn f ganz ist, dann gibt es $a_n \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$), sodass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Beweis. Seien $z_0 \in D$, $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Seien $w \in \Gamma := \partial B(z_0, r)$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in B(z_0, r)$. Dann existiert

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{f(w)}{w - z} = n! \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}$$

und

$$(w, z) \mapsto \frac{\partial^n f(w)}{\partial z^n w - z}$$

ist stetig für $w \in T$, $z \in B(z_0, r)$. Somit folgt aus der (CIF) und Satz 2.7(d) (mit „ $D = B(z_0, r)$ “), dass f auf D beliebig oft differenzierbar ist und (2.6) gilt. Da $l(\Gamma) = 2\pi r$ und $(w - z_0)^{-n-1} = r^{-n-1}$, folgt (2.7) aus (2.6) (mit $z = z_0$).

Seien nun $0 < r' < r$, $z \in \overline{B}(z_0, r')$. Dann gilt:

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} \leq \frac{r'}{r} =: q < 1.$$

Damit:

$$\frac{f(w)}{w - z} = \frac{f(w)}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n. \quad (*)$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für $w \in \Gamma$ und $z \in \overline{B}(z_0, r')$. Dann gilt:

$$f(z) \stackrel{(CIF)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \stackrel{(*)}{\underset{\text{Satz 2.7(c)}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw}_{\stackrel{(2.6)}{=} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)}.$$

Damit folgt (2.8). Wenn $D = \mathbb{C}$, wähle $z = 0$, r beliebig groß und erhalte so letzte Bedingung. \square

Beispiel 2.26. (a) Das Theorem ist falsch im Reellen, Beispiel aus Analysis 1:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \implies f \text{ ist differenzierbar auf } \mathbb{R} \text{ (mit } f'(0) = 0) \text{ aber } f' \text{ ist unbeschränkt für } x \rightarrow 0_+, \text{ also unstetig und } \nexists f''.$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \rightsquigarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ aber } f^{(n)}(0) = 0 \ (\forall n \in \mathbb{N}), \text{ als Taylorreihe von } f \text{ in } 0 \text{ ist konstant } 0, \text{ also ungleich } f.$$

- (b) Sei $f(z) = (1 + z)^\alpha$ (wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest, $z \in D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$) $\rightsquigarrow f$ ist holomorph auf D . Aus Theorem 2.25 folgt: f hat Potenzreihe in $z_0 = 0$. Diese ist gleich der Binomialreihe aus Analysis 1. Nach Theorem 2.25 ist der Konvergenzradius $\rho \geq 1$. Falls $\rho < 1$ hätten alle Ableitungen von f eine stetige Fortsetzung auf $\partial B(0, 1)$. Das widerspricht der Definition von $f \implies \rho = 1$.

Korollar 2.27. Gegeben sei eine Borelmenge $X \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Funktion $h: D \times X \rightarrow \mathbb{C}$, wobei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, mit:

- (a) $\forall z \in D$ ist $x \mapsto h(z, x)$ integrierbar auf X .
- (b) $\forall x \in X$ ist $z \mapsto h(z, x)$ holomorph auf D .
- (c) Es existiert ein integrierbares $g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $|h(z, x)| \leq g(x) \ (\forall z \in D, x \in X)$.

Dann ist

$$z \mapsto H(z) := \int_X h(z, x) dx$$

holomorph auf D und es gilt:

$$H^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k}{\partial z^k} h(z, x) dx \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Beweis. Sei $z_0 \in D$, $r > 0$ fest (aber beliebig) mit $B(z_0, r) \subseteq D$. Sei $z \in B(z_0, r) \implies \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. (2.7) für z und $k \in \mathbb{N}$ liefert

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} h(z, x) \right| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{|w-z|=r} |h(w, x)| \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} \frac{h!}{r^k} g(x) \quad (\text{für jedes feste } x \in X.) \quad (*)$$

Seien nun $z_n \rightarrow z_0$, mit $z_n \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Dann:

$$\begin{aligned} D_n &:= \frac{1}{z_n - z_0} (H(z_n) - H(z_0)) = \int_X \frac{1}{z_n - z_0} (h(z_n, x) - h(z_0, x)) \, dx \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \int_X \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z} h \right) (z_0 + t(z_n - z_0), x)}_{=: \varphi_n(t, x)} \cdot (z_n - z_0) \, dt \, dx \end{aligned}$$

(Vergleiche hierzu das Vorgehen im Beweis zu Satz 2.7(d)).

Es gilt: $\varphi_n(t, x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x)$ ($n \rightarrow \infty$) gleichmäßig in $t \in [0, 1]$, für jedes feste $x \in X$, da

$$z \mapsto \frac{\partial}{\partial z} h(z, x)$$

stetig ist nach Theorem 2.25. Also:

$$\int_0^1 \varphi_n(t, x) \, dt = \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x) \quad (n \rightarrow \infty, \, x \in X).$$

Ferner:

$$\left| \int_0^1 \varphi_n(t, x) \, dt \right| \stackrel{*}{\underset{(k=1)}{\leq}} \frac{1}{r} g(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \, x \in X),$$

wobei $g(x)$ integrierbar ist. Majorisierte Konvergenz liefert:

$$D_n \longrightarrow \int_X \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x) \, dx \quad (n \rightarrow \infty).$$

$\implies H$ ist bei z_0 differenzierbar $\implies H \in H(D)$. Ferner:

$$H'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} h(z, x) \, dx \quad (\forall z \in D).$$

Beachte: $\frac{\partial}{\partial z} h(z, x)$ ist in x messbar, also liefern Theorem 2.25 und (*) eine iterative Formel für $H^{(k)}$. \square

Beispiel 2.28 (Laplacetransformation). Sei $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, so dass für gewisse $w \in \mathbb{R}$, $c > 0$ gilt:

$$|f(t)| \leq ce^{wt} \quad (\forall t \geq 0).$$

Dann:

$$\exists \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) \, dt$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda > w$ und ist dort holomorph mit

$$\hat{f}(\lambda)^{(n)} = (-1)^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n f(t) \, dt \quad (\forall \lambda \text{ mit } \operatorname{Re} \lambda > w, \, n \in \mathbb{N}).$$

Beweis. Setze

$$h(\lambda, t) = e^{-\lambda t} f(t) \quad \text{für } t \geq 0, \operatorname{Re} \lambda > w.$$

Klar: h ist in λ holomorph ($\forall t \geq 0$).

Sei $\varepsilon > 0$ fest aber beliebig, $\operatorname{Re} \lambda \geq w + \varepsilon > w$. Dann:

$$|h(\lambda, t)| = e^{-\operatorname{Re} \lambda t} |f(t)| \leq e^{-wt} e^{-\varepsilon t} |f(t)| \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} c e^{-\varepsilon t} =: g(t),$$

wobei $g(t)$ integrierbar und unabhängig von λ ist.

Korollar 2.27 liefert Holomorphie von $\hat{f}(\lambda)$ für $\operatorname{Re} \lambda \geq w + \varepsilon$, folglich die Holomorphie für $\operatorname{Re} \lambda > w$, da $\varepsilon > 0$ beliebig. Weiter gilt:

$$\hat{f}(\lambda)^{(n)} = \int_0^\infty \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^n e^{-\lambda t} f(t) dt = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} f(t) dt \quad (\operatorname{Re} \lambda > w). \quad \square$$

Korollar 2.29 (Morera). Sei $f \in C(D, \mathbb{C})$ so dass

$$\int_{\partial \Delta} f dz = 0$$

für alle Dreiecke $\Delta \subseteq D$. Dann: $f \in H(D)$.

Beweis. Sei $z \in D$. Wähle $r > 0$ mit $B(z, r) \subseteq D$. Nach dem Beweis von Theorem 2.21 impliziert die Voraussetzung, dass f auf $B(z, r)$ (sternförmig) eine Stammfunktion $F \in H(B(z, r))$ besitzt. Nach Theorem 2.25 ist $F \in C^2$ und somit ist $f = F'$ differenzierbar auf $B(z, r)$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Theorem 2.30 (Liouville). Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis. Sei f eine beschränkte ganze Funktion und $z \in \mathbb{C}$. (2.7) mit $n = 1$ liefert:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{r} \max_{|z-w|=r} |f(w)| \leq \frac{1}{r} \|f\|_\infty,$$

wobei hier $r > 0$ beliebig ist, da $f \in H(\mathbb{C})$. Mit $r \rightarrow \infty$ folgt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Satz 2.10 ist f konstant. \square

Korollar 2.31 (Fundamentalsatz der Algebra). Ein Polynom $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ (mit $a_k \in \mathbb{C}$ ($k = 1, \dots, n$), $a_n \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$) hat genau n (eventuell mehrfach gezählte) Nullstellen.

Beweis. Sei $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir zeigen, dass p konstant ist. Setze dazu $f = \frac{1}{p} \in H(\mathbb{C})$. Wähle $r > 0$, sodass

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \geq r.$$

Sei $|z| \geq r$. Dann gilt

$$|p(z)| \geq |a_n| |z|^n - (|a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_0|) = |a_n| |z|^n \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n} \right) \geq \frac{1}{2} |a_n| r^n.$$

Also ist $f(z) \leq \frac{2}{|a_n|r^n}$, wenn $|z| \geq r$. Ferner ist f auf $\overline{B}(0, r)$ beschränkt als stetige Funktion auf einer kompakten Menge. Damit ist f beschränkt auf ganz \mathbb{C} . Mit Liouville (Theorem 2.30) folgt, dass f und damit auch p konstant ist.

Damit hat jedes nichtkonstante Polynom, d.h. jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mindestens eine Nullstelle. Mit Polynomdivision folgt induktiv die Behauptung. \square

Definition 2.32. Sei $U \subseteq \mathbb{K}^l$ offen (wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) und $f, f_n: U \rightarrow \mathbb{K}^k$ Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$. Man sagt, dass $f_n \rightarrow f$ für $n \rightarrow \infty$ *kompakt konvergiert* (oder „gleichmäßig auf kompakten Mengen“), wenn für jede kompakte Menge $K \subseteq U$ gilt:

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)|_2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bemerkung 2.33. (a) Sei $f_n \rightarrow f$ (kompakt) und f_n stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Analysis 2 ist dann f stetig auf K für jedes kompakte K , z.B. $K = \overline{B}(x, r) \subseteq U$. Also ist $f \in C(U, \mathbb{K}^k)$. Im Reellen folgt aber selbst aus $f_n \in C^\infty$ nicht, dass $f \in C^1$. Gegenbeispiel aus Analysis 2: $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ für $x \in (-1, 1)$. Hier ist $f_n \in C^\infty((-1, 1))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) gleichmäßig auf $(-1, 1)$ mit $f(x) = |x|$. Aber f ist bei 0 nicht differenzierbar.

(b) Die Partialsummen einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius ρ konvergieren kompakt auf $B(z_0, \rho)$ gegen f . Im Allgemeinen haben wir aber keine gleichmäßige Konvergenz auf $B(z_0, \rho)$.

Beweis. Sei $K \subseteq B(z_0, \rho)$ kompakt. Nach Satz vom Maximum existiert ein $z_1 \in K$ mit

$$|z_0 - z_1| = \max_{z \in K} |z_0 - z| =: r < \rho,$$

da $z_1 \in K \subseteq B(z_0, \rho)$. Also gilt $K \subseteq \overline{B}(z_0, r) \subseteq B(z_0, \rho)$. Ferner:

$$\max_{z \in \overline{B}(z_0, r)} |a_n| |z - z_0|^n \leq |a_n| r^n =: b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = r \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{\rho} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium gilt dann $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$. Satz 1.13 (Weierstraß) aus Analysis 2 impliziert, dass die Potenzreihe gleichmäßig und absolut auf $\overline{B}(z_0, r)$ konvergiert, und somit auf K . \square

Theorem 2.34 (Konvergenzsatz von Weierstraß). Seien $f_n \in H(D)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \rightarrow f$ (kompakt) für ein $f \in C(D, \mathbb{C})$ ($n \rightarrow \infty$). Dann gilt $f \in H(D)$ und $f_n^{(j)}$ konvergiert kompakt gegen $f^{(j)}$ für $n \rightarrow \infty$ und jedes $j \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $\Delta \subseteq D$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt $f_n \rightarrow f$ (gleichmäßig) auf $\partial\Delta \subseteq D$ ($n \rightarrow \infty$). Damit:

$$0 \stackrel{2.19}{=} \int_{\partial\Delta} f_n \, dz \stackrel{2.7}{\rightarrow} \int_{\partial\Delta} f \, dz \quad (n \rightarrow \infty) \implies \int_{\partial\Delta} f \, dz = 0.$$

Nach Morera (Kor. 2.29) gilt dann $f \in H(D)$.

Sei $r > 0$, $z_0 \in D$ mit $\overline{B}(z_0, 2r) \subseteq D$. Sei $z \in \overline{B}(z_0, r)$. Dann gilt $\overline{B}(z, r) \subseteq \overline{B}(z_0, 2r)$. Da $f - f_n \in H(D)$, folgt mit (2.7), dass

$$\begin{aligned} \max_{z \in \overline{B}(z_0, r)} |f^{(j)}(z) - f_n^{(j)}(z)| &\leq \max_{z \in \overline{B}(z_0, r)} \max_{|w-z|=r} \frac{j!}{r^j} |f(w) - f_n(w)| \\ &\leq \frac{j!}{r^j} \max_{|w-z| \leq 2r} |f(w) - f_n(w)| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ nach Voraussetzung,} \end{aligned} \quad (*)$$

also $f_n^{(j)} \rightarrow f^{(j)}$ auf $\overline{B}(z_0, r)$ ($n \rightarrow \infty$, $j \in \mathbb{N}$).

Sei $K \subseteq D$ kompakt. Dann gibt es für jedes $z_0 \in K$ ein $r(z_0) > 0$ mit $B(z_0, 2r(z_0)) \subseteq D$, da D offen. Klar:

$$K \subseteq \bigcup_{z_0 \in K} B(z_0, r(z_0)).$$

Da K kompakt ist, existieren endlich viele $z_1, \dots, z_m \in K$ und $r_1, \dots, r_m > 0$ mit $B(z_k, 2r_k) \subseteq D$ ($k = 1, \dots, m$) und $K \subseteq B(z_1, r_1) \cup \dots \cup B(z_m, r_m)$. (*) angewandt auf $\overline{B}(z_k, r_k)$ liefert die Behauptung. \square

2.3 Weitere Hauptsätze über holomorphe Funktionen

Theorem 2.35 (Identitätssatz). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$. Dann sind äquivalent:

- (a) $f = 0$ auf D .
- (b) Es gibt ein $z_0 \in D$ mit $f^{(m)}(z_0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
- (c) $N = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$ hat einen Häufungspunkt $z_0 \in D$, d.h. es gibt eine Folge $z_n \in D \setminus \{z_0\}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $z_n \rightarrow z_0$ und $z_n \in N$.

Somit sind zwei Funktionen $g, h \in H(D)$ schon gleich, sobald $g(z_n) = h(z_n)$ auf einer Folge $z_n \rightarrow z_0$ mit $z_n, z_0 \in D$ und $z_n \neq z_0$ ($n \in \mathbb{N}$) oder sobald für ein $z_0 \in D$ gilt: $g^{(m)}(z_0) = h^{(m)}(z_0)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere sind die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Der Satz ist falsch, wenn D nicht zusammenhängend ist.

Beweis. Die letzte Behauptung folgt mit $f = g - h$ aus „(c) \Rightarrow (a)“ bzw. „(b) \Rightarrow (a)“.

a) \Rightarrow c): klar.

c) \Rightarrow b): Seien $z_n, z_0 \in D$, $z_n \neq z_0$, $f(z_n) = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), $z_n \rightarrow z_0$ ($n \rightarrow \infty$). Dann ist $f(z_0) = 0$.

ANNAHME: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Theorem 2.25 liefert ein $r > 0$ mit

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}_{=: a_n} (z - z_0)^k \quad (\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D),$$

wobei $a_m \neq 0$. Damit:

$$g(z) := (z - z_0)^{-m} f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-m} \stackrel{l=k-m}{=} \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+m} (z - z_0)^l \quad (z \in B(z_0, r)).$$

Also ist $g \in H(B(z_0, r))$ und $g(z_0) = a_m \neq 0$. Aber $g(z_n) = (z_n - z_0)^{-m} f(z_0) = 0$, wobei $z_n \neq z_0$, $z_n, z_0 \in B(z_0, r)$ und $z_n \rightarrow z_0$ ($n \rightarrow \infty$). WIDERSPRUCH zu c). \implies b) gilt.

b) \implies a): Sei $D_1 := \{z \in D \mid f^{(m)}(z) = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}_0\}$. Nach Voraussetzung ist $D_1 \neq \emptyset$.

D_1 offen in D : Sei $z \in D_1$. Nach Theorem 2.25 hat f auf einer Kugel $B(z, r)$ eine Potenzreihendarstellung mit Koeffizienten

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0),$$

wegen $z \in D_1$. Daraus folgt $f = 0$ auf $B(z, r)$, also $B(z, r) \subseteq D_1$, also ist D_1 offen.

$D_2 := \{D \setminus D_1\}$ offen: Sei $w \in D_2$. Dann gibt es $l \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(l)}(w) \neq 0$. Nach Theorem 2.25 ist $f^{(l)}$ stetig. Also gibt es ein $r_1 > 0$ mit $B(w, r_1) \subseteq D$ und $f^{(l)}(z) \neq 0$ für alle $z \in B(w, r_1)$. Also gilt $B(w, r_1) \subseteq D_2$, folglich ist D_2 offen.

ANNAHME: $D_2 \neq \emptyset$. Dann ist $D = D_1 \dot{\cup} D_2$, D_1, D_2 offen, nichtleer. WIDERSPRUCH zu D zusammenhängend.

$$\implies D_2 = \emptyset \implies D_1 = D \implies \text{(a)}. \quad \square$$

Bemerkung. Bei (c) muss $z_0 \in D$ vorausgesetzt werden, *Beispiel:*

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad z \in D = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dann ist $f(\frac{1}{n\pi}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\frac{1}{n\pi} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

aber $f \neq 0$.

Korollar 2.36 (Nullstellensatz). Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(D)$, $f \neq 0$ und $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in D$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq D$, sowie eine Funktion $g \in H(B(z_0, r))$, sodass

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0), \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0, \quad g(z_0) \neq 0$$

und $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ für alle $z \in B(z_0, r)$. (Dabei heißt $m \in \mathbb{N}$ die Ordnung oder Vielfachheit der Nullstelle z_0 von f .)

Beweis. Die Behauptung über die Ableitung folgt aus Theorem 2.35. Die Existenz von g folgt aus dem Beweis von Theorem 2.35 „(c) \implies (b)“. \square

Bemerkung. Im reellen müssen so ein $m \in \mathbb{N}$ und ein g nicht existieren, *Beispiel:*

$$f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hier ist $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) = f'(0) = 0$, aber $f \notin C^2$ und

$$|x|^{-k} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \infty, & k \geq 2, \\ 0, & k = 0, 1, \end{cases}, \quad (x \rightarrow \infty).$$

Hier ist „ $m = \frac{3}{2}$ “.

Korollar 2.37. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(D)$, f nicht konstant und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die Menge $N_c = \{z \in D : f(z) = c\}$ diskret, d.h.: Für alle $z \in N_c$ gibt es ein $r(z) > 0$, sodass $B(z, r(z)) \cap N_c = \{z\}$.

Beweis. Wenn N_c nicht diskret ist, dann existiert ein $z_0 \in D$ mit $f(z_0) = c$ und $z_n \in D \setminus \{z_0\}$ mit $f(z_n) = c$ und $z_n \rightarrow z_0$ ($n \rightarrow \infty$). Dann liefert Theorem 2.35 „(c) \implies (a)“ für $h = f - c$ die Behauptung, da f nicht konstant ist, also $h \neq 0$ ist. \square

Korollar 2.38 (Holomorphe Fortsetzung).

Beispiel 2.39.

Lemma 2.40.

Theorem 2.41 (Gebietstreue).

Beweis. Sei $U \subseteq D$ offen, $z_0 \in U$ fest, aber beliebig. Nach Korollar 2.37 (mit „ $c = f(z_0)$ “) existiert ein $r > 0$ mit $f(z) \neq f(z_0)$ für alle $z \in \overline{B}(z_0, r) =: B \subseteq U$ mit $z \neq z_0$. Da ∂B kompakt, folgt

$$\exists \frac{1}{2} \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(z_0)| =: \delta > 0.$$

Sei nun $w \in B(f(z_0), \delta)$ beliebig, aber fest. Dann ist zu zeigen: $w \in f(U)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\exists z_1 \in U : f(z_1) = w.$$

Für $z \in \partial B$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) - w| &\geq |f(z) - f(z_0)| - |f(z_0) - w| \geq 2\delta - \delta = \delta \\ \implies \min_{z \in \partial B} |f(z) - w| &\geq \delta. \end{aligned}$$

Lemma 2.40 für $g := f - w$ liefert $z_1 \in B(z_0, r) \subseteq U$ mit $g(z_1) = 0 \iff f(z_1) = w$. Also ist $f(U)$ offen. Wenn U zusammenhängend ist, dann ist $f(U)$ nach Theorem 1.68 (Ana 2) zusammenhängend. \square

Bemerkung. Seien X, Y normierte Vektorräume und $D \subseteq X$. Eine Abbildung $f: D \rightarrow Y$ heißt *offen*, wenn für jede in D offene Teilmenge $U \subseteq D$ die Bildmenge $f(U)$ in Y offen ist. Theorem 2.41 zeigt also die Offenheit aller nichtkonstanten, holomorphen Funktionen auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$.

Theorem 2.42 (Maximumsprinzip). Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$ nicht konstant.

(a) Dann hat die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ kein lokales Maximum auf D .

(b) Wenn ferner $f \in C(\overline{D}, \mathbb{C})$ und D beschränkt ist, dann gilt:

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Beweis. (a) ANNAHME: $\exists z_0 \in D, r > 0$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ ($\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D$).

Wähle $w_n \in \mathbb{C}$ mit $|w_n| > |f(z_0)|$ mit $w_n \rightarrow f(z_0)$ ($n \rightarrow \infty$). Nach Theorem 2.41 ist $f(B(z_0, r))$ offen, also

$$\exists \delta > 0 : B(f(z_0), \delta) \subseteq f(B(z_0, r)). \quad (*)$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $w_n \in B(f(z_0), \delta)$. Dann folgt mit (*):

$$\exists z \in B(z_0, r) \text{ mit } f(z) = w_n \implies |f(z)| = |w_n| > |f(z_0)| \quad \text{WIDERSPRUCH}$$

(b) Nach Voraussetzung gibt es $z_1 \in \overline{D}$ mit

$$|f(z_1)| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

Nach (a) gilt $z_1 \in \partial D$. □

Bemerkung. Theorem 2.42(b) ist im allgemeinen falsch für unbeschränkte Gebiete. *Beispiel:*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}, \quad f(z) = \exp(\exp(z)).$$

Dann ist $f \in H(\mathbb{C})$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \pm i\frac{\pi}{2} \in \partial D$,

$$\left| f\left(x \pm i\frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| \exp(\underbrace{e^x}_{=\pm i}) \right| = 1.$$

Aber $\exp(\exp(x))$ ist unbeschränkt!

Beispiel 2.43 (Potenzreihenentwicklung für gewöhnliche Differentialgleichungen). (allgemeines in Walter: Gewöhnliche DGL) Wir haben Lösungen von

$$\begin{cases} u''(x) + b(x)u'(x) + a(x)u(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u_1. \end{cases} \quad (*)$$

Frage: Hat u eine Potenzreihe? Einfache Antwort mittels Holomorphie!

Voraussetzung: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in D$, $a, b \in H(D)$ und $R > 0$ mit $\overline{B}(0, R) \subseteq D$. Setze

$$M := \max_{|z| \leq R} \{|a(z)|, |b(z)|\}. \quad (**)$$

Seien $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ gegeben, löse:

$$\begin{cases} u''(z) + b(z)u'(z) + a(z)u(z) = 0, & z \in D, \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u_1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Sei $f \in H(B(0, R))$, $r \leq R$. Setze

$$\int_0^z f(w) \, dw = \int_{\overrightarrow{DZ}} f(w) \, dw, \quad |z| < r.$$

Dann

$$\exists \frac{d}{dz} \int_0^z f(w) \, dw = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (h \neq 0, |z+h| < r)}} \frac{1}{h} \left(\int_0^{z+h} f \, dw - \int_0^z f \, dw \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f \, dw \stackrel{\text{vgl. Bew. von 2.13}}{=} f(z).$$

Damit und mit Satz 2.13 folgt:

$$(2.9) \iff \begin{cases} u(z) = u_0 + \int_0^z u'(w) \, dw \\ u'(z) = u_1 - \int_0^z (a(w)u(w) + b(w)u'(w)) \, dw. \end{cases}$$

Mit „ $v = u''$ “ definiere

$$\left(T(u, v)\right)(z) = \left(u_0 + \int_0^z v(w) \, dw, u_1 - \int_0^z (au + bv) \, dw\right)$$

für $r < \min\{R, 1, \frac{1}{2M}\}$, $z \in B(0, r)$, $(u, v) \in H(B(0, R))^2 \cap C(\overline{B}(0, R))^2 =: E$.

Setze $q = \min\{r, 2m\} < 1$. Dann: $T(u, v) \in E$ und E ist ein Vektorraum mit Norm

$$\|(u, v)\|_\infty = \max_{|z| \leq r} \{|u(z)|, |v(z)|\}.$$

Beh.: $(E, \|\cdot\|)$ ist vollständig.

Beweis. Sei (u_n, v_n) eine Cauchyfolge in E . $\implies (u_n), (v_n)$ sind Cauchyfolgen in $C(\overline{B}(0, r))$ bezüglich der Supremumsnorm. Dies ist ein Banachraum (Ana 2).

$$\implies \exists u, v \in C(\overline{B}(0, r)) \text{ mit } u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v \text{ gleichmäßig auf } \overline{B}(0, r).$$

Aus Theorem 2.34 folgt: $u, v \in H(B(0, r))$. Beachte:

$$\|(u_n, v_n) - (u, v)\|_\infty \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Seien $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in E$. Dann:

$$\begin{aligned} \|T(u, v) - T(\tilde{u}, \tilde{v})\|_\infty &= \max_{|z| \leq r} \left\{ \left| \int_0^z (v(w) - \tilde{v}(w)) \, dw \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| \int_0^z \left(a(w)(u(w) - \tilde{u}(w)) + b(w)(v(w) - \tilde{v}(w)) \right) \, dw \right| \right\} \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \max_{|w| \leq |z| \leq r} \left\{ |z| |v(w) - \tilde{v}(w)|, |z| (M |u(w) - \tilde{u}(w)| + M |v(w) - \tilde{v}(w)|) \right\} \\ &\leq \underbrace{r \max\{r, 2M\}}_{=q < 1} \|(u, \tilde{u}) - (v, \tilde{v})\|_\infty \end{aligned}$$

Banachscher Fixpunktsatz: $\exists! (u, v) = T(u, v) \implies u$ löst (2.9) auf $B(0, r)$.

Aus Theorem 2.25 folgt $\exists c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\begin{cases} u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, & \forall z \in B(0, r) \\ c_0 = u_0, & c_1 = u_1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ein Beispiel zur Berechnung von c_n : **Hermitesche DGL:**

Gegeben: $\lambda \in \mathbb{R}, u_0, u_1 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) = 0 \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Hier ist $a(z) = \lambda, b(z) = -2z$ ($z \in \mathbb{C}$). Dann folgt nach Satz 1.3

$$\begin{aligned} -2zu'(z) &= -2z \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2n c_n) z^n, \\ u'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} \stackrel{k=n-2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k \end{aligned}$$

für ein $z \in B(0, r)$, r aus (2.10). Dann folgt aus (2.11)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n] z^n = 0, \quad c_0 = u_0, \quad c_1 = u_1. \\ \xRightarrow{2.35} & \begin{cases} (n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n = 0, & n \in \mathbb{N}_0, \\ c_0 = u_0, \quad c_1 = u_1. \end{cases} \implies c_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} c_n \\ \implies & c_k = \begin{cases} \frac{1}{k!} (2(k-2) - \lambda)(2(k-4) - \lambda) \cdots (-\lambda) c_0, & k \text{ gerade}, \\ \frac{1}{k!} (2(k-2) - \lambda) \cdots (2 - \lambda) c_1, & k \text{ ungerade}. \end{cases} \end{aligned}$$

Zwei linear unabhängige Lösungen erhält man durch:

1) $c_0 = u_0 = 1, c_1 = u_1 = 0$; Lösung:

$$v_{1,\lambda}(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!} x^2 - \frac{4-\lambda}{4!} x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)}{6!} x^6 - \dots$$

2) $c_0 = 0, c_1 = 1$; Lösung:

$$v_{2,\lambda}(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!} x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} x^5 + \dots$$

Wenn $\lambda = 2m, m \in \mathbb{N}_0$: Abbruch der Rekursion wenn

Fall 1: m gerade, $u_0 = 1, u_1 = 0$,

Fall 2: m ungerade, $u_0 = 0, u_1 = 1$.

$$\lambda = 0, m = 0: u_0(x) = 1$$

$$\lambda = 2, m = 1: u_1(x) = x$$

$$\lambda = 4, m = 2: u_2(x) = 1 - 2x^2$$

$$\lambda = 6, m = 3: u_3(x) = x - \frac{2}{3}x^3$$

Diese Lösungen erfüllen

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} |u_n(x)|^2 dx < \infty \quad (+)$$

Man kann zeigen, dass alle anderen Lösungen von (2.11) (+) verletzen.