Kapitel 3.

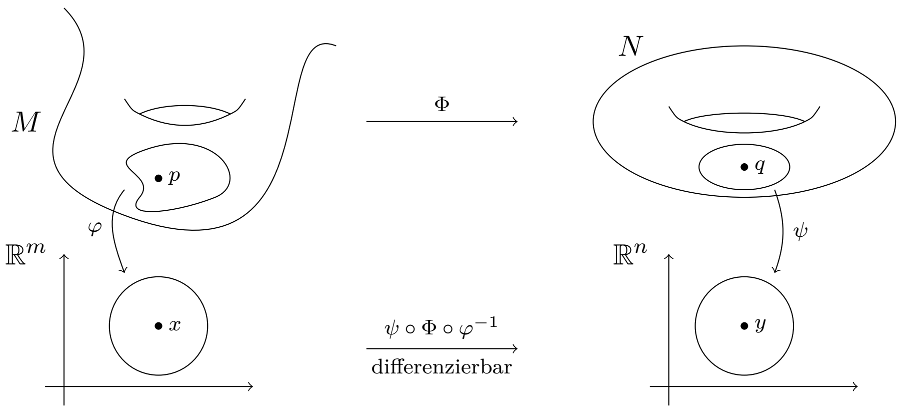
Differentiale

Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sind $p \in M$ und $X_p \in \mathrm{T}_p\, M$, so ist

$$\Phi_{*p} X_p\colon C^\infty(N) \to \mathbb{R} \qquad\qquad f \mapsto X_p(\underbrace{f \circ \Phi}_{\in C^\infty(N)}).$$

ein Tangentialvektor an N in $\Phi(p)$:

$$\begin{aligned}\Phi_{*p} X_p(fg) &= X_p((f\circ\Phi)(g\circ\Phi)) = X_p(f\circ\Phi)(g\circ\Phi)(p) + (f\circ\Phi)(p) X_p(g\circ\Phi)\\ &= \Phi_{*p}X_p(f) g(\Phi(p)) + f(\Phi(p))\Phi_{*p}X_p(g).\end{aligned}$$



Definition 3.1 *Die lineare Abbildung $\Phi_{*p}\colon \mathrm{T}_p\, M \to \mathrm{T}_{\Phi(p)}\, N$ heißt das **Differential** von Φ in p. Der Rang von Φ_{*p} bezeichnet man als den Rang von Φ in p.*

Lemma 3.2 (Differentiale in lokalen Koordinaten) *Sind φ und ψ Karten von M und N um p und $\Phi(p) = q$, sowie $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ und $\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_q$ die Standardbasen von $\mathrm{T}_p\, M$ und $\mathrm{T}_q\, N$ bezüglich der Karten φ und ψ, so gilt:*

$$\Phi_{*p}\, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \sum \partial_i \left(\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p))\, \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_q .$$

Die partielle Ableitung $\partial_i(\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ bezeichnet man auch kurz $\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(p)$.

Bemerkung Aus der Linearität von Φ_{*p} folgt, dass für $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \in \mathrm{T}_p\, M$ und $\Phi_{*p}X_p = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_q$ gilt:

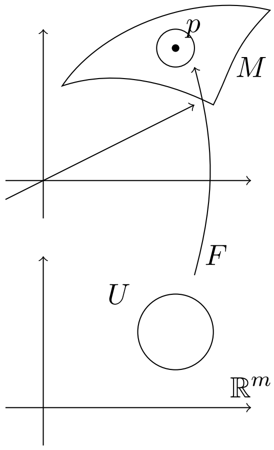
$$\eta^j = \sum \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \xi^i, \text{ beziehungsweise } \eta = \mathrm{D}(\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1})\xi.$$

Beweis

$$\underbrace{\left(\Phi_{*p}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)}_{\in \mathrm{T}_q N}(\psi^j) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (\psi^j \circ \Phi) = \partial_i(\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \frac{\partial \Phi^j}{\partial y^i}(p). \qquad \square$$

Bemerkung (Charakterisierung durch Kurven) Ist $[c] \in \mathrm{T}_p M$, so gilt für $f \in C^\infty(N)$:

$$\Phi_{*p}[c](f) = [c](f \circ \Phi) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\underbrace{f \circ \Phi \circ c}_{\substack{\text{glatte Kurve} \\ \text{auf } N}}) = [\Phi \circ c](f)$$



also $\Phi_{*p}[c] = [\Phi \circ c]$.

Bemerkung (Tangentialräume an Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$) Ist U eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften

(i) $F\colon U \to M \cap F(U)$ ist ein Homöomorphismus,

(ii) $\mathrm{D}\, F|_x \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+k}$ ist injektiv für alle $x \in U$.

Dann ist $\psi = F^{-1}$ eine Karte von M. Es bezeichnen $\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$ die Standardbasis bezüglich ψ und $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ die Standardbasis bezüglich der kanonischen Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ des $\mathbb{R}^m$.

Dann gilt für $g \in C^\infty(M)$ beliebig:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p (g) = \partial_i(g \circ \psi^{-1})(\underbrace{\psi(p)}_{=x}) = \partial_i(g \circ F)(x) = F_{*x}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)(f)$$

$$\begin{aligned} F_{*x}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) &= F_{*x}[t \mapsto x + te_i] = [t \mapsto F(x + te_i)] \\ &\sim \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} F(x + te_i) = \mathrm{D}\, F|_x(e_i) = \partial_i F|_x \end{aligned}$$

$\mathrm{T}_p M$ „=“ $\langle \partial_1 F|_x, \ldots, \partial_m F|_x \rangle$

Eigenschaften des Differentials

(i) (*Kettenregel*) Sind $\Phi\colon M \to N$ und $\Psi\colon N \to P$ glatt, so gilt:

$$(\Psi \circ \Phi)_{*p} = \Psi_{*\Phi(p)} \circ \Phi_{*p}.$$

(ii) Ist $\Phi\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus, so ist Φ_{*p} ein Vektorraumisomorphismus.

(iii) (*Satz von der Umkehrabbildung*) Ist $\Phi\colon M \to N$ glatt und Φ_{*p} bijektiv, so existieren Umgebungen U von p und V von $\Phi(p)$, so dass $\Phi|_U \colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Definition 3.3 (Reguläre Punkte, Submersion, Immersion) *Es sei $\Phi\colon M \to N$ glatt.*

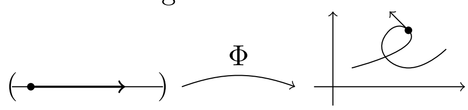
*(i) Es Punkt $p \in M$ heißt **regulärer Punkt** von Φ, wenn Φ_{*p} surjektiv ist. Ein Punkt $q \in N$ heißt **regulärer Wert**, wenn jeder Punkt $p \in \Phi^{-1}(q)$ regulär ist.*

*(ii) Die Abbildung Φ heißt **Submersion**, wenn Φ surjektiv ist und alle $p \in M$ reguläre Punkte sind.*

*(iii) Die Abbildung Φ heißt **Immersion**, wenn für alle $p \in M$ Φ_{*p} injektiv ist.*

*(iv) Die Abbildung Φ heißt **Einbettung**, wenn Φ Immersion und Homöomorphismus auf sein Bild ist.*

Beispiel 1) Betrachte eine Abbildung Φ

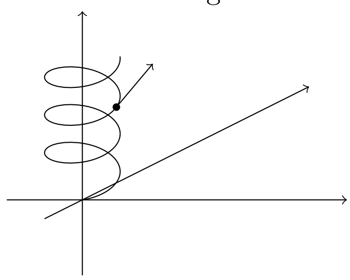


Immersion: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ Basis von $\mathrm{T}_x\,\mathbb{R}$, $\Phi_{*x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ „=“ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi$

2) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ ist eine Immersion aber ebenfalls nicht injektiv.

3) $\mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ ist Immersion und Submersion.

4) $\mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}, t \mapsto (e^{it}, t)$ ist eine Einbettung.



5) Ist $M \subset N$ Untermannigfaltigkeit, so ist $\imath \colon M \hookrightarrow N$ eine Einbettung.

Satz 3.4 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi \colon M \to N$ eine glatte Abbildung und $p \in M$, sowie $q = \Phi(p)$. Es bezeichnen m und n die Dimensionen von M und N und r den Rang von Φ in p. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Zu jeder Karte ψ von N um q mit $\psi(q) = 0$ existiert eine Karte α von M um p mit $\alpha(p) = 0$ und glatte Funktionen $f^{r+1}, \ldots, f^n$ mit

$$\left(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1}\right)\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^r, f^{r+1}(x), \ldots, f^n(x)\right).$$

(ii) Falls der Rang von Φ auf einer Umgebung von p konstant r ist, so existieren Karten α um p mit $\alpha(p) = 0$ und β um q mit $\beta(q) = 0$, so dass

$$\left(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1}\right)\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0\right).$$

Korollar 3.5 *(i) Falls Φ auf einer offenen Umgebung von $P = \Phi^{-1}(q)$ konstanten Rang r hat, so ist P eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension r.*

(ii) Ist q ein regulärer Wert von Φ, so ist $P = \Phi^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit von M der Kodimension n.
Beispiel: $\|\cdot\|^{-1}(1) = S^n \supset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$.

(iii) Ist Φ_{*p} injektiv, so existiert eine Umgebung U von p, so dass $\Phi(U) = Q \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit von N ist.

(iv) Ist Φ eine Einbettung, so ist $Q = \Phi(M)$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M und $\Phi \colon M \to Q$ ist ein Diffeomorphismus.

Beweis (i) Sei $p \in P = \Phi^{-1}(q)$. Nach Satz 3.4 (ii) existieren Karten $(\alpha, U), (\beta, V)$ mit

$$(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0)$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(P \cap U) &= (\alpha \circ \Phi^{-1} \circ \beta^{-1})(0) \\ &= \{x \in \alpha(U) \mid x^1 = \ldots = x^r = 0\} = \alpha(U) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{m-r} . \end{aligned}$$

(ii) Ist q ein regulärer Wert von Φ, so existieren nach Satz 3.4 (i) Karten ψ, α mit

$$(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^n) \qquad (m \geq n = r)$$

für alle $x \in \alpha(U)$. Es gilt also für alle $u \in U$:

$$\operatorname{Rang} \Phi_{*u} = \operatorname{Rang} \mathrm{D}(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})|_x = \operatorname{Rang} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \end{array} \right) = n$$

Damit folgt die Behauptung aus (i).

(iii) Φ_{*p} ist injektiv $\Rightarrow r = m \leq n$. Nach Wahl von Karten wie in (ii):

$$(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^m, f^{m+1}(x), \ldots, f^n(x))$$

$$\operatorname{Rang} \Phi_{*u} = \operatorname{Rang} \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & 0 & \end{array} \right) = m$$

Nach der ersten Aussage des letzten Satzes erhalten wir spezielle Karten:

$$(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m \times \{0\},$$

wobei β eine adaptierte Karte für $\Phi(U) = Q$ ist.

(iv) folgt aus (iii). $\square$

Beweis (von Satz 3.4) (i) Es sei (ψ, V) eine Karte von N um q mit $\psi(q) = 0$. Ist dann (φ, U) eine Karte von M um p mit $\varphi(p) = 0$, so kann man ohne Einschränkung annehmen, dass

$$\partial_i(\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \right)_{i,j \leq r}$$

invertierbar ist. Es sei $\alpha \colon U \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch

$$\alpha^j = \begin{cases} \psi^j \circ \Phi & \text{für } j \leq r \\ \varphi^j & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte nun den Kartenwechsel

$$\left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial x^i}\right)_{i,j} = \Big(\partial_i(\alpha^j \circ \varphi^{-1})(0)\Big)_{i,j} = \left(\begin{array}{c|ccc} \left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}\right)_{i,j\leq r} & & * & \\ \hline & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

Der Rang von α in p ist damit gleich m. Nach dem Umkehrsatz ist α ein lokaler Diffeomorphismus, also eine Karte von M. Ferner gilt für $j \leq r$:

$$\Big((\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m)\Big)^j = (\psi^j \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(\alpha(U)) = (\psi^j \circ \Phi)(U) = \alpha^j(U) = x^j.$$

Damit hat $\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1}$ die gesuchte Darstellung.

(ii) Der Rang von Φ sei auf U konstant gleich r. Dann gilt für alle $x \in \alpha(U)$.

$$r = \operatorname{Rang} \mathrm{D}(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})|_x = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & * & & \underbrace{\left(\frac{\partial f^{r+j}}{\partial x^{r+i}}\right)}_{\rightsquigarrow \operatorname{Rang} 0}. \end{array}\right)$$

Somit gilt auf einer Umgebung der 0 für alle $i, j > r$: $\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \equiv 0$. Es gibt also glatte Funktionen $g^{r+1}, \dots, g^n$ mit $g^{r+j}(x^1, \dots, x^r) = f^{r+j}(x^1, \dots, x^n)$.
Setzt man nun

$$\beta^j = \begin{cases} \psi^j & j \leq r \\ \psi^j - g^j \circ (\psi^1, \dots, \psi^r) & \text{sonst} \end{cases},$$

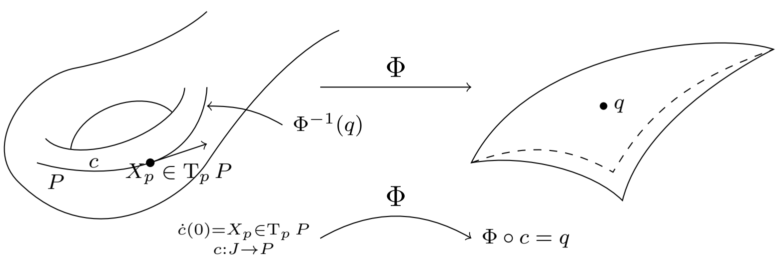
so gilt:

$$\left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y^i}(q)\right)_{i,j} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial y^i}\right)_{i,j\leq r} = \delta_i^j & 0 \\ \hline * & \underbrace{\left(\frac{\partial \psi^j}{\partial y^i}\right)}_{=\delta_i^j} - \underbrace{\left(\frac{\partial g^j}{\partial x^i}\right)}_{=0} \end{array}\right).$$

Damit gilt $\left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y^i}\right)_{i,j} = \delta_i^j$ und nach dem Umkehrsatz definiert β in einer Umgebung von q eine Karte von N. Wie oben rechnet man nach:

$$(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0). \qquad \square$$

Bemerkung Ist $\Phi \colon M \to N$ glatt mit konstantem Rang r auf einer Umgebung von $P = \Phi^{-1}(q)$, so ist P eine $(m-r)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M.
Der Tangentialraum $\mathrm{T}_p P$ in p an P ist ein Untervektorraum von $\mathrm{T}_p M$ und es gilt:



Ist $X_p = \dot{c}(0) \in \mathrm{T}_p\, P$, so ist c glatt als Abbildung $\mathcal{I} \to M$ und ebenso $\Phi \circ c \equiv q$. Damit gilt:

$$\Phi_{*p}(\dot{c}(0)) = \underbrace{\dot{\overline{\Phi \circ c}}}_{\equiv q}(0) = 0,$$

also $\mathrm{T}_p\, P \subseteq \operatorname{Kern} \Phi_{*p}$. Es gilt:

$$\dim \mathrm{T}_p\, P = \dim P = m - r = \dim \mathrm{T}_p\, M - \operatorname{Rang} \Phi_{*p} = \dim \operatorname{Kern} \Phi_{*p}.$$

Beispiel 3.6 Die n-dimensionale Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist das reguläre Urbild der glatten Abbildung $\Phi\colon\ \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \|x\|^2$; $S^n = \Phi^{-1}(1)$. Der Tangentialraum $\mathrm{T}_x\, \mathbb{R}^{n+1}$ ist vermöge der Abbildung

$$\mathbb{R}^{n+1} \ni V \mapsto [t \mapsto x + tv] \in \mathrm{T}_x\, \mathbb{R}^{n+1}\,.$$

gegeben. Damit gilt genau dann $v \in \mathrm{T}_x\, S^n$, wenn $[x + tv] \in \operatorname{Kern} \Phi_{*x}$.

$$0 = \Phi_{*x}[x + tv] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Phi(x + tv) = \partial_v \Phi(x) = \mathrm{D}\,\Phi|_x(v) = \langle \operatorname{grad} \Phi(x), v \rangle\,.$$

Es gilt $\operatorname{grad} \Phi(x) = (2x^1, \ldots, 2x^{n+1}) = 2x$, also gilt $v \in T_x S^n$, genau dann, wenn $v \perp x$.