

# 5 Differentialrechnung

Stets sei  $I$  ein Intervall das stets mehr als einen Punkt enthält.

## 5.1 Rechenregeln

*Ziel:* Finde beste lineare Approximation für  $f$  nahe bei  $x_0$ . *Idee:* Betrachte Tangente bei  $(x_0, f(x_0))$

$t(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ , wobei  $m =$  Tangentensteigung in  $x_0 =$  Grenzwert der Steigung

der Sekante in  $x_0, x_1$  also  $s(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{m(x_1)}(x - x_0)$

**Definition 5.1.**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0 \in I$  differenzierbar (diff'bar), falls  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0)$   $f'(x_0)$  heißt Ableitung von  $f$  an  $x$ .  $f$  heißt diff'bar (auf  $I$ ), wenn  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  diff'bar ist. Dann definiert man iterativ  $f'' = (f')'$ ,  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) die  $n$ -te Ableitung. Entsprechend def. man die rechts/linksseite Ableitung:

$$\frac{d \pm f}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (5.1)$$

*Beweis.* a) Die Fkt.  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ist für  $I \setminus \{x_0\}$  definiert

b) Wenn  $I = [a, b]$  und  $x_0 = a, b$ , dann stimmen überein soweit existent.

c) Sei  $f$  in  $x$  diff'bar. Sei  $g(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$  mit  $a \neq f'(x_0)$  eine weitere Gerade durch  $(x_0, f(x_0))$ . *Beh.*  $\exists \delta > 0 : |f(x) - g(x)| > |f(x) - t(x)|$  für alle  $x \in I \setminus \{x_0\}$ ,  $|x - x_0| < \delta$

*Beweis.*  $\left| \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \right| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right| \rightarrow |f'(x_0) - a| \neq 0, x \rightarrow x_0$  genauso:  $\left| \frac{f(x) - t(x)}{x - x_0} \right| \rightarrow 0, x \rightarrow x_0 \implies \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \delta : \left| \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \right| \geq \frac{1}{2} |f'(x_0) - a| > \frac{1}{4} |f'(x_0) - a| \geq \left| \frac{f(x) - t(x)}{x - x_0} \right| \implies$   
Beh.  $\square$

d) Andere Interpretation:

Sei  $u(t) \in \mathbb{R}$  eine Größe zur Zeit  $t \in \mathbb{R}$  (z.B. Stoffmenge, Ort) und  $h > 0$ . Dann ist  $\frac{1}{h}u(t+h) - u(t)$  der mittlere Zuwachs der Größe im Zeitintervall  $[t, t+h]$ . Somit

ist  $n'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t))$  die momentane Änderungsgeschwindigkeit der Größe.  $u''(t)$  ist die Beschleunigung.

□

**Beispiel 5.2.** a) Seien  $a, m \in \mathbb{R}$  fest gegeben. Setzte  $f(x) = mx + a$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m(\forall x \neq x_0)$ .  $\implies \exists f'(x_0) = m$

b)  $f(x) = |x|$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Dann  $\exists f'(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$  Ferner  $\exists \frac{d^+ f}{dx}(0) =$

c) ...

**Satz 5.3.**

*Beweis.*

□

**Satz 5.4.** ...

a) ...

b) ...

c) ...

*Beweis.* a) ...

b) ...

c) ...

□

**Korollar 5.5.**

**Satz 5.6.**

*Beweis.*

□

**Satz 5.7.**

*Bemerkung.*

*Beweis.*

□

**Beispiel 5.8.** a) ...

b) ...

**Theorem 5.9.**

*Beweis.* a) ...

b) ...

□

**Beispiel 5.10.** a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

e) ...

**Beispiel 5.11.**

**Definition 5.12.**

*Bemerkung.*

## 5.2 Qualitative Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

**Definition 5.13.**

**Satz 5.14.** a) ...

b) ...

c) ...

*Beweis.*

□

*Bemerkung.*

**Beispiel.**

*Beweis.*

□

**Theorem 5.15.**

*Beweis.*

□

**Satz 5.16.**

*Beweis.*

□

**Definition 5.17.**

*Bemerkung 5.18.* a) ...

b) ...

c) ...

**Korollar 5.19.**

*Beweis.*

□

**Satz 5.20.**    a) ...

b) ...

*Bemerkung.*

*Beweis.*

□

**Beispiel 5.21.**

*Beweis.*

□

**Korollar 5.22.**    a) ...

b) ...

*Bemerkung.*

*Beweis.*    a) ...

b) ...

□

**Definition 5.23.**

*Bemerkung.*

**Satz 5.24.**

**Beispiel 5.25.**    a) ...

*Beweis.*

□

**Beispiel 5.26.**    a) ...

*Beweis.*

□

**Theorem 5.27.**    a) ...

b) ...

*Beweis.*

□

**Beispiel 5.28.**    a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

## 5.3 Der Satz von Taylor

**Theorem 5.29.**

*Beweis.*

□

**Definition 5.30.**

*Bemerkung 5.31.*    a) ...

      b) ...

**Theorem 5.32.**    a) ...

      b) ...

      c) ...

**Beispiel.**

*Beweis.*

□

**Definition 5.33.**

**Beispiel 5.34.**    a) ...

      b) ...

      c) ...

## Newton-Verfahren

**Theorem 5.35.**

*Beweis.*

□

**Beispiel 5.36.**