5 Lebesguesche Räume und Fourier-Reihen

Sei stets $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$ versehen mit $\mathcal{B}(X)$ und λ.

Ana III, 30.01.2009

5.1 Die L^p-Räume

Für $p \in [1, \infty)$ setze

$$\mathcal{L}^p(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar} : \int_X |f|^p dx < \infty \right\},$$
$$\mathcal{L}^\infty(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar}, \ \textit{(f.a.)} \text{ beschränkt} \},$$

sowie für messbare $f : X \to \mathbb{R}$

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf\{c > 0 : \exists \text{ NM } N_c \text{ mit } |f(x)| \leq c \ \forall x \in X \backslash N_c\}.$$

Bemerkung. Für stetige $f : X \to \mathbb{R}$ gilt $\sup_{x \in X} |f(x)| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$. Denn sei N_c wie in der obigen Definition. Dann ist $N_c^0 = \emptyset$ (anderenfalls existiert ein $B \subset N_c$ mit $\lambda(B) > 0$, was ein Widerspruch ist). Aus $|f(x)| \leq c$ für alle $x \notin N_c$ folgt mit der Stetigkeit von f, dass $|f(x)| \leq c \ \forall x \in X$. Durch inf-Bildung erhält man $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$. Die andere Abschätzung ist klar mit $N_c = \emptyset$.

Wenn $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty, \ 1 \leq p < \infty)$, dann sagt man "$f_n$ gegen f im p-ten Mittel".

TODO: Bild

Interpretation der 1-Norm in Bsp 4.21. Man kann $u(t, x) \geq 0$ als Konzentration eines Stoffes zur Zeit $t \geq 0$ am Ort $x \in X$ interpretieren. Dann folgt, dass

$$\int_X |u(t, x)| dx = \int_X u(t, x) dx$$

die Gesamtmenge des Stoffes zur Zeit t beschreibt.

Beachte: $\mathcal{L}^1(X)$ ist nach Kapitel 2 ein Vektorraum. Ebenso ist $\mathcal{L}^\infty(X)$ ein Vektorraum, denn wenn $|f_j(x)| \le c_j$ $(\forall x \notin N_j)$, wobei N_j Nullmengen sind, und $\alpha_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2)$, dann gilt

$$|\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)| \le |\alpha_1| c_1 + |\alpha_2| c_2 =: c \quad \forall x \notin N := N_1 \cup N_2 \text{ (NM)}. \tag{$*$}$$

Dann folgt $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{L}^\infty(X)$.

Zu $\mathcal{L}^p$: Wenn $f \in \mathcal{L}^p(X),\ \alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt $\alpha f \in \mathcal{L}^p(X),\ \|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$. (Folgt aus der Definition).

Setze wie in Ana2 $p' := \frac{p}{p-1}$, wenn $1 < p < \infty,\ 1' := \infty,\ \infty' = 1$. Dann gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ $\forall p[1, \infty]$.

$$p' = p \Leftrightarrow p = 2, \quad p \in [1, 2) \Leftrightarrow p' \in (2, \infty],\ p'' = p.$$

Satz 5.1. *Sei $p \in [1, \infty]$. Dann gelten*

a) Höder-Ungleichung: Für $f \in \mathcal{L}^p(X),\ g \in \mathcal{L}^{p'}(X)$ gelten $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ und

$$\|fg\|_1 = \int |fg| dx \le \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'} \overset{p\in(1,\infty)}{=} \left(\int |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

(Für $p = p' = 2$ ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.)

b) Minkowski-Ungleichung: Für $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt $f + g \in \mathcal{L}^p(X)$ und

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Ferner ist $\mathcal{L}^p(X)$ ein Vektorraum.

Beweis. $fg,\ |f + g|^p$ sind messbar $(p < \infty)$.

a) $p = 1$: Dann folgt $g \in \mathcal{L}^\infty(X) \Rightarrow \exists$ Nullmenge $N,\ c > 0$ mit $|g(x)| \le c$ $(\forall x \notin N)$. Setze $\tilde{g} := \mathbf{1}_{X\setminus N} \cdot g$. Dann gilt

$$\int |fg| dx \overset{\text{Lem 3.5}}{=} \int |f| \cdot \underbrace{|\tilde{g}|}_{\le c} dx \le c \cdot \|f\|_1.$$

Infimumbildung über alle c liefert die Behauptung. Genauso für $p = \infty$.

$1 < p < \infty$: Wenn $\|f\|_p = 0$. oder $\|g\|_{p'} = 0$, dann $|f|^p = 0$ *(f.ü.)* oder $|g|^{p'} = 0$ *(f.ü.)* (Lem 2.18). Dann folgt $f = 0$ *(f.ü.)* oder $g = 0$ *(f.ü.)*. Also $fg = 0$ *(f.ü.)*, womit wir fertig sind.

Anderenfalls liefert die Young'sche Ungleichung (Ana2 Beweis von Satz 1.19) für festes $x \in X$:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g(x)\|_{p'}} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g(x)\|_{p'}^{p'}}.$$

Integralbildung auf beiden Seiten liefert

$$\int |f| \cdot |g| dx = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|f\|_p^p} \cdot \underbrace{\int |f(x)|^p dx}_{=\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'}} \cdot \|g\|_{p'}^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Daraus folgt $fg \in \mathcal{L}^1(X)$, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$.

b) $\underline{p = 1}$: Kapitel 2. $p = \infty$: Die Behauptung folgt mit Infimumbildung über c_1, c_2 in $(*)$ mit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Sei $\underline{p \in (1, \infty)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int |f+g|^p dx = \|f+g\|_p^p &= \int |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} dx \\
&\leq \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} dx + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1} dx \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \cdot \left(\int |f+g|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\quad + \|g\|_p \cdot \left(\int |f+g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

Damit folgt $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Dass $f+g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt, folgt aus $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \overset{\text{Hölder}}{\leq} 2^p \cdot (|f|^p + |g|^p)$, was integrierbar ist.

□

Beispiel 5.2. Sei $X = [1, \infty)$ und $f(x) = x^{-\alpha}$, $g(x) = x^{-\beta}$ für Konstanten $\alpha, \beta > 0$. Dann $f \in \mathcal{L}^p(X) \Leftrightarrow \int_1^\infty x^{-\alpha p} dx < \infty \Leftrightarrow \alpha p > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}$, $g \in \mathcal{L}^{p'}(X) \Leftrightarrow \beta > \frac{1}{p'}$, $fg \in \mathcal{L}^1(X) \Leftrightarrow \alpha + \beta > 1$, wobei $p \in (1, \infty)$.

Korollar 5.3. *Sei $\lambda(X) < \infty$. Dann $\mathcal{L}^q(X) \subset \mathcal{L}^p(X)$ für alle $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und $\|f\|_p \leq \lambda(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q$ $(\forall f \in \mathcal{L}^q(X))$. Mit $p = 1$ folgt*

$$\left(\frac{1}{\lambda(X)} \cdot \int_X |f| dx \right)^q \leq \frac{1}{\lambda(X)} \cdot \int_X |f|^q dx.$$

Also folgt aus $f_n \to f$ bezüglich der q-Norm, dass auch $f_n \to f$ bezüglich der p-Norm. (Ersetze f durch $f_n - f$)

Beweis. Für $q = p$ und $p = \infty$ ist die Aussage klar. Sei $p < q < \infty$, $f \in \mathcal{L}^q(X)$. Dann gilt für $r := \frac{p}{q} \in (1, \infty) \Rightarrow r' = \frac{q}{q-p}$, $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{p}{q}$ $(*)$:

$$\int_X |f|^p dx = \int_X 1 \cdot |f|^p \underset{\text{mit } r\ (*)}{\overset{\text{Hoelder}}{\leq}} \left(\int_X \left(1^{r'}\right) dx \right)^{\frac{1}{r'}} \cdot \left(\int_X |f|^{pr} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Damit folgt

$$\int_X |f|^p dx \leq \lambda(X)^{1-\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_X |f|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} \underset{\text{Vor.}}{\overset{\text{nach}}{<}} \infty.$$

Durch die Abschätzung mit der p-ten Wurzel folgt dann die Behauptung. $\square$

Beispiel 5.4. a) Sei $X = (0,1]$, $f(x) = x^{-\alpha}$ für eine Konstante $\alpha > 0$. Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^p((0,1]) \Leftrightarrow \int_0^1 x^{-\alpha p} dx < \infty \Leftrightarrow \alpha p < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{p}.$$

Damit gilt $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ und mit $p < q$ liegt f in $\mathcal{L}^p(X)$, aber nicht in $\mathcal{L}^q(X)$. Also gilt $\mathcal{L}^q \subsetneqq \mathcal{L}^p(X)$.

b) Wenn $\lambda(X) < \infty$, dann gibt es keine Inklusion zwischen $\mathcal{L}^p(X)$ und $\mathcal{L}^q(X)$ (bezüglich λ).

Beispiel. $p = 1,\ X = [1, \infty)$. Dann ist $f(x) = \frac{1}{x}$ in $\mathcal{L}^q(X)\ \forall q > 1$, aber $f \notin \mathcal{L}^1(X)$. Ferner liegt $g(x) = \mathbf{1}_{[1,2)}(x) \cdot (2-x)^{-\frac{1}{q}}$ nicht in $\mathcal{L}^q(X)$, aber in $\mathcal{L}^1(X)$.

Satz 5.5 (Majorisierte Konvergenz)**.** *Seien $1 \leq p < \infty$, $f_n \in \mathcal{L}^p(X)$, $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ (f.ü.), $|f_n|^p \leq g$ (f.ü.) für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $\underline{g \in \mathcal{L}^p(X)}$. Dann gelten $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $\|f - f_n\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$.*

Beweis. $p = 1$: Satz von Lebesgue. Sei also $p > 1$. Dann gilt $|f|^p \leq g$ *(f.ü.)* und $|f(x) - f_n(x)|^p \leq (f(x) + g(x))^p \leq (2 \cdot g(x)^{\frac{1}{p}})^p = 2^p \cdot g(x)$ *(f.a.)* x. Ferner gilt $|f - f_n|^p \xrightarrow{n\to\infty} 0$, *(f.ü.)*. Lebesgue angewendet auf $|f - f_n|^p$ liefert $\|f - f_n\|_p^p = \int_X |f - f_n|^p dx \to 0$. Dass $f \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt, folgt aus $|f|^p \leq g$ *(f.ü.)*. $\square$

Beispiel. Sei $f_n = n \cdot \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n})}$, $X = \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty)$. Dann folgt $f_n \in \mathcal{L}^p(X)$ und $f_n \to 0$ punktweise. Aber es gilt $\|f_n\|_p = n^{1-\frac{1}{p}} \nrightarrow 0$. (Vergleiche Bem 3.11)

Ana III, 02.02.2009

Ab jetzt sei stets $1 \leq p < \infty$.

Es ergibt sich folgendes Problem:

$$\left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow |f|^p = 0 \text{ (f.ü.)} \Leftrightarrow f = 0 \text{ (f.ü.)}.$$

Also ist die Normeigenschaft (N1) verletzt ((N2) und (N3) gelten allerdings in $\mathcal{L}^p$). Damit ist $\|\cdot\|_p$ ist <u>keine</u> Norm auf $\mathcal{L}^p$.

<u>Ausweg</u>: Definiere

$$\mathcal{N} := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ messbar},\ f = 0 \text{ (f.ü.)}\}.$$

Dann ist $\mathcal{N}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$. Wir setzen

$$L^p := \mathcal{L}^p \diagup \mathcal{N}\text{TODO} = \{\hat{f} = f + \mathcal{N} : f \in \mathcal{L}^p(X)\}. \tag{5.1}$$

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass auch L^p ein Vektorraum ist (bezüglich der kanonischen Verknüpfungen.) Beachte:

$$\hat{f} = \hat{g} \Leftrightarrow f = g \text{ (f.ü.) } \forall f \in \hat{f},\ g \in \hat{g}.$$

Für $\hat{f} \in L^1$ definiere

$$\int_X \hat{f} dx := \int_X f(x) dx \tag{5.2}$$

für einen beliebigen Repräsentanten $f \in \hat{f}$. Mit Lem 3.5 folgt, dass (5.2) repräsentantenunabhängig ist, denn sei g ein weiterer Repräsentant von $\hat{f}$, d.h. $\hat{f} = \hat{g}$, dann gilt $f = g$ *(f.ü.)*.

Für das Integral in (5.2) gelten die bekannten Regeln. Somit ist $\|\hat{f}\|_p := \|f\|_p$ für ein beliebiges $f \in \hat{f}$ wohldefiniert. Vorsicht: $\hat{f} \mapsto f(x)$ für einen Repräsentanten $f \in \hat{f}$ und ein $x \in X$ definiert keine Abbildung von $L^p(X)$ nach $\mathbb{R}$!.

Nun: $\|\hat{f}\|_p = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{N}$ für jeden Repräsentanten $f \in \hat{f} \Rightarrow \hat{f} = 0$. Weiter seien $\hat{f}, \hat{g} \in L^p(X)$ mit Repräsentanten f, g, sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten

- $\|\alpha\hat{f}\|_p \overset{\text{Def.}}{=} \|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \overset{\text{Def.}}{=} |\alpha| \cdot \|\hat{f}\|_p$
- $\|f + g\|_p \overset{\text{Def.}}{=} \|f + g\|_p \overset{\text{Satz 5.1b)}}{\leq} \|f\|_p + \|g\|_p \overset{\text{Def}}{=} \|\hat{f}\|_p + \|\hat{g}\|_p$.

Also definiert $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $L^p(X)$.

Seien $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h} \in L^2(X)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nach Hoelder existiert für beliebige Repräsentanten $f \in \hat{f}, g \in \hat{g}$

$$(\hat{f}|\hat{g}) = \int_X f(x) \cdot g(x) dx. \tag{5.3}$$

Es gelten

$$|(\hat{f}|\hat{g})| \leq \int_X |fg| dx \overset{\text{Hoelder}}{\leq} \|f\|_2 \cdot \|f\|_2 \overset{\text{Def.}}{=} \|\hat{f}\|_p \cdot \|\hat{g}\|_p, \tag{5.4}$$

$$(\hat{f}|\hat{g}) = (\hat{g}|\hat{f}),$$
$$(\alpha\hat{f} + \beta\hat{h}|\hat{g}) = \alpha(\hat{f}|\hat{h}) + \beta(\hat{h}|\hat{g}) \tag{5.5}$$

und

$$(\hat{f}|\hat{f}) = \int_X |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2. \tag{5.6}$$

Damit ist $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum $L^2(X)$ mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|_2 = \sqrt{(\cdot|\cdot)}$.

Definition. Ein Banachraum, dessen Norm wie in (5.6) von einem Skalarprodukt induziert wird, heißt Hilbertraum.

Bemerkung. Setze $\infty^p := \infty$. Dann ist die Abbildung $\varphi : [0, \infty] \to [0, \infty], x \mapsto x^p$ messbar, da $\varphi^{-1}([a, \infty]) = [a^{\frac{1}{p}}, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}_1$ $(\forall a \geq 0)$.

Theorem 5.6 (Riesz/Fischer)**.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(X)$, $1 \leq p < \infty$ eine Cauchy-Folge bezüglich der p-Norm. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und eine Teilfolge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$, sodass $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $f_{n_j} \xrightarrow{j\to\infty} f$ (f.ü.). Ferner ist $L^p(X)$ ein Banachraum und $L^2(X)$ ist ein Hilbertraum.*

Beweis. 1) Zweite Behauptung: Wenn $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(X)$ ist, dann gilt für Repräsentanten $f_n \in \hat{f}_n$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_p = \|f_n - f_m\|_p \leq \epsilon \ (\forall n, m \geq N_\epsilon).$$

Damit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(X)$. Nach der ersten Behauptung existiert dann ein $f \in \mathcal{L}^p(X)$, sodass

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p = \|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also ist $L^p(X)$ ein Banachraum und $L^2(X)$ ist ein Hilbertraum.

2) Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(X)$. Wähle (mittels $e_j := 2^{-j}$) eine Teilfolge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|f_l - f_{n_j}\|_p \leq \epsilon = 2^{-j}, \ \ \forall l \geq n_j \qquad (*)$$

Setze $g_j := f_{n_j+1} - f_{n_j}$ für $j \in \mathbb{N}$. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$s_N := \left(\int_X \left(\sum_{j=1}^N |g_j(x)|\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\sum_{j=1}^N |g_j|\right\|_p \overset{\text{Satz 5.1b)}}{\leq} \sum_{j=1}^N \|g_j\|_p$$

$$\overset{(*)}{\leq} \sum_{j=1}^N 2^{-j} \leq 1 \quad (\forall N \in \mathbb{N}).$$

Damit gilt

$$\int_X \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^\infty |g_j(X)|}_{=:g(x) \text{ messbar}}\Big)^p dx = \int_X \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=1}^N |g_j(x)|\right)^p dx$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \varliminf_{N\to\infty} \underbrace{\int_X \left(\sum_{j=1}^N |g_j|\right)^p dx}_{=s_N^p} \leq 1.$$

Also liegt $g \in \mathcal{L}^p(X)$ und somit existiert eine Nullmenge N mit $g(x)^p < \infty\ \forall x \notin N$ ($\Leftrightarrow g(x) < \infty\ \forall x \notin N$) (wegen Kor 2.24). Mit unserem Wissen aus Ana1 folgt

$$\exists \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) \in \mathbb{R} \quad (\forall x \notin N).$$

Weiter gilt

$$\sum_{j=1}^{m-1} g_j = f_{n_m} - f_{n_1} \quad (\forall m \in \mathbb{N}). \tag{$**$}$$

Daraus folgt

$$\exists \lim_{m\to\infty} f_{n_m}(x) =: f(x) \in \mathbb{R},\ \forall x \notin N.$$

Setze $f(x) := 0\ \forall x \in N$. Dann ist $f : X \to \mathbb{R}$ messbar und $f_{n_m} \xrightarrow{m\to\infty} f$ *(f.ü.)*. Ferner gilt

$$|f_{n_m}| \overset{(**)}{\leq} |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{m-1} |g_j| \leq |f_{n_1}| + g =: h,$$

wobei $h \in \mathcal{L}^p(X)$, $m \in \mathbb{N}$.

Mit Satz 5.5 folgt dann $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $\|f_{n_m} - f\|_p \xrightarrow{m\to\infty} 0$.
Für $\epsilon > 0$ wähle m mit $2^{-m} \leq \epsilon$ und $\|f - f_{n_m}\|_p \leq \epsilon$. Sei $l \geq n_m =: N_\epsilon$. Dann gilt

$$\|f_l - f\|_p \leq \|f_l - f_{n_m}\|_p + \|f_{n_m} - f\|_p \overset{(*)}{\leq} 2\epsilon.$$

□

Beispiel 5.7. Sei $X = [0,1]$, $I_n = [0,1], [0,\frac{1}{2}),\ [\frac{1}{2},1),\ [\frac{1}{4},\frac{1}{2}), \ldots$. Setze $f_n := \mathbf{1}_{I_n}$. Damit $\|f_n\|_p = \lambda(I_n)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Aber: $\forall x \in [0,1] \exists$ eine Teilfolge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_j}(x) = 1 \not\to 0$ $(j \to \infty)$. Also gilt $f_n(x) \not\to 0$ $(n \to \infty)$ für jedes $x \in [0,1]$.

Also folgt aus Konvergenz $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $\mathcal{L}^p(X)$ nicht die punktweise Konvergenz $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $\mathbb{R}$.

Korollar 5.8. *Seien $\hat{f}_n \in L^p(X) \cap L^q(X)$, $1 \leq p,q < \infty$ und $\hat{f}_n \xrightarrow{n\to\infty} \hat{f}$ in $L^p(X)$, $\hat{f}_n \xrightarrow{n\to\infty} \hat{g}$ in $L^q(X)$. Dann gilt $f = g$ (f.ü.) für alle Repräsentanten $f \in \hat{f}$ und $g \in \hat{g}$, also $\hat{f} = \hat{g} \in L^p(X) \cap L^q(X)$.*

Beweis. Seien f, g, h Repräsentanten von $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$. Dann folgt mit Thm 5.6, dass Teilfolgen (n_m), (n_{m_l}) und Nullmengen N_1, N_2 existieren, sodass
$f_{n_m}(x) \xrightarrow{m\to\infty} f(x)\ \forall x \notin N_1$, $f_{n_{m_l}} \xrightarrow{l\to\infty}\ \forall x \notin N_2$. Daraus folgt, dass $f(x) = g(x)\ \forall x \notin N_1 \cup N_2$ gilt, wobei $N_1 \cup N_2$ selbst auch eine Nullmenge ist. □

Bemerkung 5.9. Die Abbildung $J : \mathcal{L}^p(X) \cap C(X) \to L^p(X)$, $Jf = \hat{f}$ ist injektiv und linear. Wir identifizieren deshalb $\mathcal{L}^p(X) \cap C(X)$ mit dem neuen Teilraum $L^p(X)$.

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(X) \cap C(X)$ mit $\hat{f} = \hat{g}$. Dann folgt, dass eine Nullmenge N exsitiert, sodass $f(x) = g(x)\ \forall x \notin N$. Sei $y \in N$. Dann existiert $x_n \notin N$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ (da $N^0 = \emptyset$). Aus der Stetigkeit von f und g folgt $f(y) = g(y)$. $\square$

Im Folgenden schreiben wir f statt $\hat{f}$ und identifizieren $L^p(x)$ mit $\mathcal{L}^p(X)$.

Bemerkung 5.10. Stetig sind

a) $L^p(X) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \|f\|_p$. (Gilt in jedem normierten Vektorraum)

b) $L^1(X) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_X f(x)dx$, denn, wenn $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in L^1, dann gilt

$$\left| \int_X f_n dx - \int_X f dx \right| \leq \int_X |f_n - f| dx = \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

c) $L^2(X) \times L^2(X) \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto (f|g)$ (Beweis siehe Übung).