

Kapitel 1

Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

In der Stochastik werden zufallsabhängige Phänomene mathematisch modelliert und analysiert. (z.B. würfeln)

Ω = Ergebnisraum (z.B. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

$A \subset \Omega$ Ereignis (z.B. $A = \{2, 4, 6\} \hat{=}$ gerade Zahl fällt)

Ist $\omega \in \Omega$, so heißt $\{\omega\}$ Elementarereignis

Beispiel 1.1

- a) Zuerst wird eine Münze geworfen. Fällt Kopf, wird mit einem Würfel geworfen, fällt Zahl so wird nochmal mit der Münze geworfen.
 $\Omega = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6, ZZ, ZK\}$

- b) Rotierender Zeiger
 $\Theta = 2\pi x$, $0 \leq x < 1$ sei der Winkel beim Stillstand
 $\Omega = [0, 1)$
 $A = (0, \frac{1}{4})$ ist das Ereignis: "Zeiger stoppt im I. Quadranten"

Verknüpfungen von Ereignissen werden durch mengentheoretische Operationen beschrieben.

Definition 1.1

- a) Seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse. So heißt
 $A \cap B = AB = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ und } \omega \in B\} = \{\omega \in \Omega | \omega \in A, \omega \in B\}$ **Durchschnitt von A und B.**
 $A \cup B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ oder } \omega \in B\}$ **Vereinigung von A und B.**
Sind A und B disjunkt, dh. $A \cap B = \emptyset$ dann schreiben wir auch $A + B$
 $A \setminus B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A, \omega \notin B\}$
Gesprochen: A ohne B. Spezialfall $A = \Omega$ Dann ist $\Omega \setminus B = B^c$
 B^c heißt **Komplement von B.**

- b) Sind $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ Ergebnisräume, so ist
 $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n = \{(a_1, \dots, a_n) | a_i \in \Omega_i, i = 1, \dots, n\}$ das **Kartesische Produkt**.

Beispiel 1.2 2x würfeln

$$\Omega = \{(i, j) \in \{1 \dots 6\}\}$$

$$A = \text{Erster Würfel ist eine 6} = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} = \{(6, j) | j \in \{1 \dots 6\}\}$$

$$B = \text{Augensumme ist max 4} = \{(i, j) | i + j \leq 4\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$B^c = \text{Augensumme ist mindestens 5}$$

Mit $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnen wir die **Potenzmenge von Ω** , d.h. die Menge aller Teilmengen von Ω . (dazu gehören auch Ω und \emptyset). Wir wollen nun Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnen.

Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ die Menge aller Mengen (Ereignisse) denen wir Wahrscheinlichkeiten zuordnen wollen. Um eine sinnvolle math. Theorie zu bekommen, können wir im Allgemeinen nicht $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ wählen. Jedoch sollte das Mengensystem \mathcal{A} gewisse Eigenschaften haben.

Definition 1.2

- a) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Algebra über Ω** , falls gilt:

$$(i) \Omega \in \mathcal{A}$$

$$(ii) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$(iii) A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$$

- b) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **σ -Algebra über Ω** , falls \mathcal{A} eine Algebra ist und

$$(iv) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Bemerkung 1.1

- a) Das Paar (Ω, \mathcal{A}) mit \mathcal{A} σ -Algebra über Ω heißt **Messraum**
- b) $\mathcal{P}(\Omega)$ ist stets eine σ -Algebra. Ist Ω endlich oder abzählbar unendlich, so kann $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt werden. Ist Ω nicht abzählbar (siehe Beispiel 1.1), so muss eine kleinere σ -Algebra betrachtet werden. (Kapitel 4).

Wir wollen noch die folgenden Mengenverknüpfungen betrachten.

Definition 1.3 Seien $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$ Dann heißt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

der **Limes Superior** der Folge $\{A_n\}$ und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

heißt der **Limes Inferior** der Folge $\{A_n\}$

Bemerkung 1.2 Es gilt:

$$\omega \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \exists n \geq k : \omega \in A_n \Leftrightarrow |\{n \in \mathbb{N} | \omega \in A_n\}| = \infty$$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ ist das Ereignis “unendlich viele A_n ’s treten ein“

$$\omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall n \geq k \omega \in A_n$$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ ist also das Ereignis “alle bis auf endlich viele der A_n ’s treffen ein;“

Lemma 1.1 Seien $A_1, A_2, \dots, \subset \Omega$.

a) Falls $\{A_n\}$ wachsend ist, d.h. $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, dann gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

b) Falls $\{A_n\}$ fallend ist, d.h. $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, dann gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Bemerkung 1.3

a) Für $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ schreiben wir $A_n \uparrow$, für $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ schreiben wir $A_n \downarrow$

b) Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \text{ schreiben wir kurz: } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

Beweis a) Sei

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Es gilt

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

Andererseits:

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = A_k, \text{ d.h. } \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

b) analog ■

Ereignissen ordnen wir jetzt Zahlen zwischen 0 und 1 zu, die wir als Wahrscheinlichkeiten interpretieren. Damit dies sinnvoll ist, soll die Zuordnung gewissen AXIOMEN genügen.

Definition 1.4 (Axiomensystem von Kolmogorov 1933)

Gegeben sei ein Messraum (Ω, \mathcal{A}) . Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{A} , falls

(i) $P(\Omega) = 1$ “Normiertheit“

(ii)

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \forall \text{ paarweise disjunkten } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$$

(d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$) “ σ -Additivität“

(Ω, \mathcal{A}, P) heißt **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Beispiel 1.3

Ist $\Omega \neq \emptyset$ eine endliche Menge und $\mathcal{A} = P(\Omega)$, so wird durch $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \forall A \subset \Omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{A}) definiert.

(Ω, \mathcal{A}, P) nennt man Laplace’schen Wahrscheinlichkeitsraum. Jedes Elementarereignis hat hier die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{|\Omega|}$.

Wir betrachten den gleichzeitigen Wurf zweier Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 11 bzw. 12 ist?

2 Würfel

$$\Omega = \{(i, j) | i, j = \{1 \dots 6\}\}$$

$$|\Omega| = 36$$

A = Augensumme 11

B = Augensumme 12

$$P(A) = P(\{(5,6), (6,5)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(B) = P(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}$$

Satz 1.2

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

a) $P(A^c) = 1 - P(A)$

b) Monotonie: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

c)

Endliche Additivität $P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (P(A_k))$ für paarweise disjunkte $A_1 \dots A_n$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \overbrace{P(A \cap B)}^{=AB}$

e) Boole'sche Ungleichung:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis a) Es gilt:

$$1 = P(\Omega) = P(A + A^c) = P(A + A^c + \emptyset + \emptyset \dots) \stackrel{(ii)}{=} P(A) + P(A^c) + P(\emptyset) + P(\emptyset) \dots$$

$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$ und $P(A^c) = 1 - P(A)$

$$b) P(B) = P(A + B \setminus A) = P(A) + \underbrace{P(\overbrace{B \setminus A}^{=B \cap A^c \in \mathcal{A}})}_{\geq 0} \geq P(A)$$

c) Setze $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ und verwende die σ -Additivität.

d) Es gilt: $A \cup B = A + B \setminus A \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$

$$B = B \setminus A + A \cap B \Rightarrow P(B) = P(B \setminus A) + \underbrace{P(A \cap B)}_{=AB}$$

Es folgt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

e) Für $n=2$ folgt die Aussage aus Teil d), da $P(AB) \geq 0$

Induktion: $n \rightarrow n+1$:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cup A_{n+1}\right) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P(A_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k) + P(A_{n+1})$$

■

Satz 1.3 (Siebformel)

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, dann gilt für $A_1 \dots A_n \in \mathcal{A}$:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Bemerkung 1.4

a) Die Formel ist auch unter dem Namen: Formel von Poincare-Sylvester oder Formel des Ein- und Ausschließens bekannt.

$$b) n=2 \quad P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Die σ -Additivität ist äquivalent zu einer gewissen Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Satz 1.4 Sei (Ω, \mathcal{A}) ein Messraum und sei $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ eine beliebige additive Mengenfunktion, d.h. $P(A + B) = P(A) + P(B)$ gelte für disjunkte $A, B \in \mathcal{A}$. Außerdem sei $P(\Omega) = 1$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) P ist σ -additiv (und damit ein Wahrscheinlichkeitsmaß)

b) P ist stetig von unten, d.h. für $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

c) P ist stetig von oben, d.h. für $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

d) P ist stetig in \emptyset , d.h. für $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$$

Beweis a) \Rightarrow b) Es sei $A_0 := \emptyset$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) &\stackrel{L.1.1}{=} P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1})) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

b) \Rightarrow c) $A_n \downarrow \Rightarrow A_n^c \uparrow$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - P(A_n^c) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^c) \stackrel{b)}{=} 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) \stackrel{\text{d'Morgan}}{=} P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

Mit Lemma 1.1 folgt die Behauptung

c) \Rightarrow d) klar (d) Spezialfall von c))

d) \Rightarrow a) Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \downarrow \emptyset \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Also

$$P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k) \stackrel{\text{P endl. Add.}}{=} \sum_{k=1}^n P(A_k) + P(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k)$$

Für $n \rightarrow \infty$ gilt: $P(\underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k}_{B_n}) \rightarrow 0$ und die Behauptung folgt. ■