4 Integralsätze

TODO: Einleitung

4.1 Etwas Differentialgeometrie

Definition 4.1. Eine beschränkte offene Menge $D \subset \mathbb{R}^d$ hat einen C^1-Rand ∂D, wenn es für jedes $x \in \partial D$ eine offene beschränkte Umgebung $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^d$, eine offene beschränkte Menge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^d$ und einen Diffeomorphismus $\psi : \tilde{V} \to \tilde{U}$ gibt, sodass $\psi(D \cap \tilde{V}) \subset \mathbb{R}^{d-1} \times (-\infty, 0)$ und $\psi(\partial D \cap \tilde{V}) \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$.
Wir nehmen ferner an, dass $(\psi^{-1})'$ beschränkt ist. Dann heißt $(\psi, \tilde{V})$ Karte und $V := \tilde{V} \cap \partial D$ Kartengebiet.
Setze $U \times \{0\} := \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\})$ und $F(t) = \psi^{-1}(t, 0)$ für $t \in U \subset \mathbb{R}^{d-1}$. Dann heißt $F : U \to V \subset \mathbb{R}^d$ Parametrisierung des Kartengebiets V. Wenn $\psi \in C^k(\tilde{V}, \mathbb{R}^d)$ für jedes $x \in \partial D$, dann heißt ∂D C^k-Rand ($k \in \mathbb{N}$). Man schreibt dann $\partial D \in C^k$ für $k \in \mathbb{N}$.

TODO: Bild

Bemerkung 4.2.

a) Wenn in Def 4.1 $\psi \in C^k(\tilde{V}, \mathbb{R}^d)$, dann gilt auch $\psi^{-1} \in C^k(\tilde{U}, \mathbb{R}^d)$. (Folgt aus $(\psi^{-1})'(y) = [\psi'(\psi^{-1}(y))]^{-1}$, siehe dazu Kettenregel und Umkehrsatz).

b) Da ∂D kompakt ist, kann man in Def 4.1 ∂D mit endlich vielen $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n$ überdecken.

c) Die Abblildung $F : U \to V$ ist homöomorph (d.h., bijektiv, stetig, F^{-1} stetig). Ferner sind die Spalten $\partial_k F(t)$ $(t = 1, \dots, d-1)$ der Jakobimatrix bei jedem $t \in U$ gleich $\partial \psi^{-1}(t, 0)$ und somit linear unabhängig. Daraus folgt

$$\operatorname{Rang} F'(r) = d - 1 \qquad (\forall t \in U) \tag{4.1}$$

d) $\partial D \subset \psi_1^{-1}(U_1 \times \{0\}) \times \cdots \times \psi_m^{-1}(U_m \times \{0\})$ ist eine Nullmenge nach Lem 3.33, da ψ_k^{-1} ein Diffeomorphismus ist und $\lambda_d(U_\times\{0\}) = 0$.

Beispiel 4.3.

a) (Sphäre) Sei $D = B(0, R)$, $\partial D = S(0, R)$ in $\mathbb{R}^3$. Wähle

$$\tilde{V} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{R}{2} < |x|_2 < \frac{3R}{2} \right\} \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}),$$
$$\tilde{U} = \left(-\frac{R}{2}, \frac{R}{2} \right) \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

und

$$\psi^{-1}(r,\varphi,\Theta) = (r+R)\cdot\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\cdot\cos(\Theta)\\ \sin(\varphi)\cdot\cos(\Theta)\\ \sin(\Theta)\end{pmatrix} : \tilde{U} \to \tilde{V}.$$

Dann folgt, dass

$$F(\varphi,\Theta) = \psi^{-1}(0,\varphi,\Theta) = R\cdot\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\cdot\cos(\Theta)\\ \sin(\varphi)\cdot\cos(\Theta)\\ \sin(\Theta)\end{pmatrix}$$

die geschlitze Sphäre $\partial B(0,R)\backslash(\mathbb{R}_+\times\{0\}\times\mathbb{R})$ parametrisiert.
Beachte dabei, dass für $-\frac{R}{2}<r<0$ $\psi^{-1}(r,\varphi,\Theta)\in B(0,R)$ gilt.
Für den Schlitz braucht man noch eine rotierte Variante der obigen Karte.

Ana III, 09.01.2009

b) Sei ∂D lokal ein Graph oberhalb von D, d.h., dass ein offenes beschränktes $U\subset\mathbb{R}^d$ und ein beschränktes $h\in C^1(U,\mathbb{R})$ mit beschränkter Ableitung ∇h existieren und $a<0<b$, sodass mit

$$\tilde{U} = U\times(a,b), \qquad \tilde{V} = \{(t,s)\subset U\times\mathbb{R} : s\in(a+h(t), b+h(t))\}$$

gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{V}\cap D &= \{(t,s)\in U\times\mathbb{R} : s\in(a+h(t),h(t))\},\\ \tilde{V}\cap\partial D &= \{(t,h(t)) : t\in U\}.\end{aligned}$$

$<$ Setze hier $\psi(t,s) := \left(\begin{smallmatrix} t\\ s-h(t)\end{smallmatrix}\right)$ für $(t,s)\in\tilde{V}$. Dann folgt $\psi:\tilde{V}\to\tilde{U}$ ist bijektiv und C^1 mit inverser $\psi^{-1}:\tilde{U}\to\tilde{v}$, $\psi^{-1}(t,\tau) = \left(\begin{smallmatrix} t\\ \tau+h(t)\end{smallmatrix}\right)$. Hier gilt $\psi'(t,s) = \left(\begin{smallmatrix} I_{d-1} & 0\\ h'(t) & 1\end{smallmatrix}\right)$, also gilt $\det\psi'(t,s) = 1$. Damit sind ψ und ψ^{-1} diffeomorph mit beschränkter Ableitung.
Ferner gilt $\psi(\tilde{V}\cap D) = U\times(a,0)$, $\psi(\tilde{V}\cap\partial D) = U\times\{0\}$. Demnach ist $(\psi,\tilde{V})$ eine Karte (Def 4.1). Hier gilt $F(t) = \left(\begin{smallmatrix} t\\ h(t)\end{smallmatrix}\right)$ für $t\in U$.

c) Seien $w\in\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$, $a\in\mathbb{R}$ fest. Setze $D := \{x\in\mathbb{R}^d : (x|w)<a\}$ (Halbraum). Dann ist $\partial D = \{x\in\mathbb{R}^d : (x|w) = a\}$. Wähle Basis $v_1,\dots,v_{d-1}$ von $\{w\}^\perp$ und $p = \frac{a}{|w|_2^2}w$. Daraus folgt $(p|w) = a$. Setze $\psi^{-1}(t,\tau) := \sum_{j=1}^{d-1} t_j\cdot v_j + \tau w + p$ für $t\in\mathbb{R}^{d-1}$, $\tau\in\mathbb{R}$. Also ist $\psi^{-1}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ diffeomorph.
Mit $x = \psi^{-1}(t,\tau)$ gilt $(x|w) = 0 + \tau|w|_2^2 + a \lesseqqgtr a$ für $\tau \lesseqqgtr a$. Damit gilt $\psi^{-1}(\mathbb{R}^{d-1}\times(-\infty,0)) = D$, $\psi^{-1}(\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\} = \partial D$. Also ist ψ eine "Karte". Hier ist $F(t) = t_1v_1+\dots+t_{d-1}v_{d-1}+p$.

Zur Tangentialgleichung

Sei $x \in \partial D$, F sei eine Parametrisierung wie in Def 4.1 mit $F(t) = x$. Sei $\phi \in C^1((-1,1), \mathbb{R}^{d-1})$ mit $\phi(0) = t,\ \phi'(0) = w \in \mathbb{R}^{d-1}\ \{0\}$. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
\gamma &= F \circ \phi \in C^1((-1,1), \mathbb{R}^d) \\
\gamma(0) &= F(t) = v,\ \gamma(\tau) \in \partial D\ \forall t \in (-1,1) \\
\gamma'(0 &= F'(\phi(0))w = F'(t)w \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}.
\end{aligned}
$$

TODO: Bild

Betrachte v als Tangentialrichtung an ∂D bei x.

Definition 4.4. Sei $\partial D \subset C^1$. Der Tangentialraum $T_x\partial D$ an ∂D bei $x \in \partial D$ ist der Bildraum $F'(t)(\mathbb{R}^{d-1})$ einer Parametrisierung (Def 4.1) mit $F(t) = x$.
Die Tangentialhyperebene ist $x + T_x\partial D$. Das orthogonale Komplement von $T_x\partial D$ in $\mathbb{R}^d$ heißt Normalenraum $N_x\partial D$.
Ein $w \in N_x\partial D$ heißt äußere Normale, wenn ein $\delta > 0$ existiert, sodass $x + \tau w \in D$ für alle $t \in (-\delta, 0)$ und $x + \tau w \notin D$ für alle $t \in (0, \delta)$.

Bemerkung 4.5.

a) Die Spalten $\partial_1 F'(t), \ldots, \partial_{d-1} F'(t)$ spannen $T_x\partial D$ auf. Mit Def 4.1 folgt $\dim T_x\partial D = d-1$ und daraus $\dim N_x\partial D = 1$.

b) Sei $G : W \to \mathbb{R}^d$ eine weitere Parametrisierung von ∂D bei $x = F(t)$ mit $G(s) = x$. Sei $(\psi, \tilde{V})$ die Karte bei x zu F (aus Def 4.1). Wähle W so klein, dass $s \in W,\ G(W) \subset \tilde{V}$. Setze $\phi \in C^1(W, \mathbb{R}^{d-1})$ durch $\phi = P \circ \psi \circ G$ mit $P(t', \tau) = t'$ für $t' \in \mathbb{R}^{d-1}, \tau \in \mathbb{R}$.
Dann folgt $F \circ \phi = G$ und $\phi(s) = t$. Da $G'(s) = F'(t)\phi'(s)$ und $G'(s)$ injektiv (siehe (4.1) für G), folgt $\phi'(s)$ ist injektiv. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass $\phi'(s)$ als lineare Abbildung damit auch bijektiv ist. Daraus folgt $G'(s)\mathbb{R}^{d-1} = F'(s)\mathbb{R}^{d-1}$. Also sind $T_x\partial D$ und $N_x\partial D$ unabhängig von der der Wahl der Parametrisierung.

Beispiel 4.6 (vergleiche Bsp 4.3)**.**

a) Seien $D = B(0,R)$ und $d = 3$. Die Menge $\partial D \backslash (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$ hat die Parametrisierung

$$
F(\varphi, \Theta) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\Theta) \\ \sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) \\ \sin(\Theta) \end{pmatrix}
$$

für $(\varphi, \Theta) \in U = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Sei $x = F(\varphi, \Theta)$. Dann folgt

$$
F'(\varphi, \Theta) = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) & -\cos(\varphi) \cdot \sin(\Theta) \\ \cos(\varphi) \cdot \cos(\Theta) & -\sin(\varphi) \cdot \sin(\Theta) \\ 0 & \cos(\Theta) \end{pmatrix}.
$$

Damit wird $T_x\partial D$ von $v_1 = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cdot\cos(\Theta) \\ -\sin(\varphi)\cdot\cos(\Theta) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\cdot\sin(\Theta) \\ -\sin(\varphi)\cdot\sin(\Theta) \\ \cos(\Theta) \end{pmatrix}$ aufgespannt. Eine äußere Normale ist $x = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cdot\cos(\Theta) \\ \sin(\varphi)\cdot\cos(\Theta) \\ \sin(\Theta) \end{pmatrix}$, denn es gelten $(v_2|x) = 0$ und $|x + \tau x|_2 = |1+\tau| \cdot |x|_2 = |1+\tau| \cdot R =: J$. Es gilt nun $J > R$, wenn $\tau > 0$ und $J < R$, wenn $\tau \in (-1, 0)$. Also gilt auch $x + \tau \cdot x \in D$ für $\tau > 0$ und $x + \tau \notin D$ für $\tau \in (-1, 0)$.

TODO: Bild

b) ∂D liege bei x_0 unterhalb vom Graph von h. Dann folgt, dass es ein offenes $U \subset \mathbb{R}^{d-1}$, $t_0 \in U$ und ein $h \in C^1(U, \mathbb{R})$ gibt, sodass $F(t) = \binom{t}{h(t)}$ und $F(t_0) = x_0$ gelten. Damit sind die Tangentialvektoren bei x_0 gerade $v_j = \binom{e_j}{\partial_j h(t_0)}$, $j = 1, \ldots, d-1$, wobei $e_j \in \mathbb{R}^{d-1}$. Weiter ist $w = \binom{-\nabla h(t_0)}{1}$ eine äußere Normale, denn es gelten $(v_j|w) = 0 \ \forall j = 1, \ldots, d-1$ und $x_0 + tw = \underbrace{\binom{t_0 - \tau\cdot\nabla h(t_0)}{h(t_0)+\tau}}_{=:(t,s)^T}$.

Somit folgt die Existenz eines $\delta > 0$, sodass für $|\tau| < \delta$ gilt: $t \in U$ und

$$\begin{aligned}
\psi_d(t) &= s - h(t) \\
&\overset{\text{Taylor}}{=} h(t_0) + \tau - (h(t_0) + \nabla h(t_0) \underbrace{(t - t_0)}_{=-\tau\nabla h(t_0)} + \sigma(|t - t_0|_2) \\
&= \text{TODO: Hier macht einiges in meinem Mitschrieb keinen Sinn...}
\end{aligned}$$

(siehe dazu Bsp 4.3).

c) In Bsp 4.3c) ist ∂D die Tangentialhyperebene für alle $x \in \partial D$ und w ist eine äußere Normale.

Lemma 4.7. *Sei $\partial D \in C^1$ und $x_0 \in \partial D$. Nach eventueller Rotation und Spiegelung des Koordinatensystems gibt es eine offene Umgebung $\tilde{V}$ von x_0, sodass ∂D eine Karte $(\psi, \tilde{V})$ wie in Bsp 4.3b) hat. Insbesondere gibt es eine eindeutig bestimmte äußere Normale $\nu(x_0)$, die durch*

$$\nu(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h(t)|_2^2}} \begin{pmatrix} -\nabla h(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dabei ist $x = \binom{t}{h(t)}$ für $t \in U$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Def 4.4 und $\dim N_{x_0}\partial D = 1$. Sei $(\psi, \tilde{V})$ eine Karte von ∂D bei x_0 mit zugehöriger Parametrisierung $F : U_0 \to \mathbb{R}^d$ mit $F(t_0) = x_0$. Da $\text{Rang} F'(t_0) = d - 1$, gibt es eine Rotation des $\mathbb{R}^d$, sodass $\nabla F_1(t_0), \ldots, \nabla F_2(t)$ linear unabhängig sind. (Wir behalten auch nach der Rotation die alten Bezeichnungen.)
Sei $f = (F_1, \ldots, F_{d-1})^T$. Aus dem Umkehrsatz folgt: $\exists$ offenes $U_1 \subset U_0$, $t_0 \in U_1$ mit $f : U_1 \to f(U_1) =: W$ offen und f diffeomorph.

Setze $h(s) := F_d(f^{-1}(s))$, $G(s) := (s, h(s))^T$. Damit ist $h \in C^1(W, \mathbb{R})$ und (nach eventueller Verkleinerung von U_1) sind h und ∇h beschränkt und $G(s) = (f(t), F_d(t))^T = F(t)$, $t := f^{-1}(s)$, $s \in U_1$. Also ist G eine Parametrisierung.
$V_1 = G(U_1) = F(W) \subset V$. Aus Bsp 4.6b) folgt: haben $(-\nabla h(s_0), 1)^T$ (TODO: WTF?!). Nach weiterer Rotation wird dieser Vektor zu $\alpha \cdot e_d \in \mathbb{R}^d$ für ein $\alpha > 0$. Demnach wird $T_{x_0}\partial D$ von $\{e_1, \ldots, e_{d-1}\}$ aufgespannt und ebenfalls von $\partial_j \psi^{-1}(t_0, 0) = \partial_j F(t_0)$ ($j = 1, \ldots, d-1$) (Bem 4.5). Da $(\psi^{-1})'(t_0, 0)$ invertierbar ist, ist $\partial_d(\psi^{-1})(t_0, 0)$ linear unabhängig zu $\partial_1 F(t_0), \ldots, \partial_{d-1} F(t_0)$. Folgt gilt $\partial_d \psi_d^{-1}(t_0, 0) \neq 0$.

Ana III, 12.01.2009

Wir können annehmen, dass $(\partial_d \psi^{-1})_d(t_0, 0) > 0$. (Andernfalls ersetze τ durch $-\tau$, was einer Spiegelung an der Ebene $\{t_d = 0\}$ entspricht.) Daraus folgt: $\exists U_2 \subset U_1$, U_2 offen mit $t_0 \in U_2$, $\delta, \eta > 0$, sodass $(\partial_d \psi^{-1})_d(t, 0) > 0$, $\forall t \in U_2$, $|\delta| \leq \eta$.
Sei $t \in U_2, \tau \in (-\eta, 0)$. Mit dem Mittelwertsatz folgt dann

$$\exists \sigma \in (\tau, 0) \text{ mit } (\psi^{-1})_d(t, \tau) - \underbrace{(\psi^{-1})_d(t, 0)}_{=F(t)=h(f(t))} = (\partial_d \psi^{-1})_d(t, \sigma) \cdot \tau \leq \delta \cdot \tau < 0.$$

Damit liegt D für diese Punkte unterhalb von ∂D. Mit Bsp 4.6b) und Bem 4.5b) folgt der Ausdruck für ν. $\square$

4.2 Das Oberflächenintegral

Idee: Sei $d = 3$, $F : U \to V$ eine Parametrisierung, $U \subset \mathbb{R}^3$. Dann sind $\partial_1 F(s, t)$, $\partial_2 F(s, t)$ linear unabhängig $\forall (s, t) \in U$.

TODO: Bilder

T_{jk} ist ein Parallelogramm in $T_{x jk}$, das von $v_{jk} = \partial_1 F(s_k, t_j)\Delta s_j$ und $v_{jk} = \partial_2 F(s_k, t_j)\Delta t_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\text{“vol}_2(V)\text{“} &= \sum_{s,k} \text{vol}_2(v_{jk}) \approx \sum_{j,k} |v_{jk} \times w_{jk}|_2 \\
&= \sum_{j,k} |\partial_1 F(s_j, t_k) \times \partial_2 F(s_j, t_k)|_2 \Delta s_j \Delta t_k \\
&\text{“} \xrightarrow{\Delta s_j, \Delta t_k \to 0} \text{“} \int_U \underbrace{|\partial_1 F(s,t) \times \partial_2 F(s,t)|_2}_{=:\sqrt{g_F(s,t)}} ds dt.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
g_F &\overset{\text{LA}}{=} |\partial_1 F|_2^2 \cdot |\partial_2 F|_2^2 - (\partial_1 F | \partial_2 F)^2 = \det \begin{pmatrix} |\partial_1 F|_2^2| & (\partial_1 F | \partial_2 F) \\ (\partial_1 F | \partial_2 F) & |\partial_2 F|_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \det \underbrace{\left((F')^T \cdot F'\right)}_{\text{symm. } 2\times 2 \text{ Matrix}} .
\end{aligned}$$

Definition 4.8. Sei $F : U \to \mathbb{R}^d$ eine Parametrisierung. Dann ist die Gramsche Determinante von F durch

$$g_F(t) = \det\left(F'(t)^T \cdot F'(t)\right)$$

für alle $t \in U$ gegeben.
Im Spezialfall $d = 3$ gilt

$$g_F(t) = |\partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t)|_2^2 = \left|\begin{pmatrix} \partial_1 F_2(t) \cdot \partial_2 F_3(t) - \partial_1 F_3(t) \cdot \partial_2 F_2(t) \\ \partial_1 F_3(t) \cdot \partial_2 F_1(t) - \partial_1 F_1(t) \cdot \partial_2 F_3(t) \\ \partial_1 F_1(t) \cdot \partial_2 F_2(t) - \partial_1 F_2(t) \cdot \partial_2 F_1(t) \end{pmatrix}\right|_2^2.$$

Bemerkung. Für $d = 3$ ist $\partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t)$ eine Normale an V bei $F(t) = x$, da sie senkrecht auf $\partial_1 F(t)$ und $\partial_2 F(t)$ steht.

Beispiel 4.9. a) Sei $V = \partial B(0,R) \backslash (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$ parameterisiert durch die sphärischen Koordinaten (siehe Bsp 4.3a), Bsp 4.6a)). Dann gilt für $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\Theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$F'(\varphi, \Theta) = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) & -\cos(\varphi) \cdot \sin(\Theta) \\ \cos(\varphi) \cdot \cos(\Theta) & -\sin(\varphi) \cdot \sin(\Theta) \\ 0 & \cos(\Theta) \end{pmatrix}$$

und

$$F'(\varphi, \Theta)^T \cdot F'(\varphi, \Theta) = R^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos^2(\Theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\sqrt{g_F(\varphi, \Theta)} = R^2 \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} \cos^2(\Theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = R^2 \cdot \cos(\Theta).$$

b) V als Graph (Bsp 4.6b)). Hier gilt $F(t) = (t, h(t))^T$ für $t \in U \subset \mathbb{R}^{d-1}$, $h \in C^1(U, \mathbb{R})$. Damit folgt

$$G(t) := F'(t)^T \cdot F'(t) = [I_{d-1} \ \nabla h(t)] \cdot \begin{bmatrix} I_{d-1} \\ \nabla h(t)^T \end{bmatrix} = I_{d-1} + \underbrace{\nabla h(t) \cdot \nabla h(t)^T}_{=:H(t)}$$

und damit

$$\begin{aligned} G(t)\nabla h(t) &= \nabla h(t) + \nabla h(t) \cdot |\nabla h(t)|_2^2 = (1 + |\nabla h(t)|_2^2) \cdot \nabla h(t) \\ H(t) &= \nabla h(t) \cdot (\nabla h(t)|v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^{d-1}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\text{Rang } H(t) = \begin{cases} 1, & \nabla h(t) \neq 0 \\ 0, & \nabla h(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \dim \text{Kern } H(t) = \begin{cases} d-2, & \nabla h(t) \neq 0 \\ d-1, & \nabla h(t) = 0 \end{cases}.$$

Also hat $G(t)$ die Eigenwerte $1 + |\nabla h(t)|_2^2$ und 1 ($d-2$ fach). Schließlich gilt dann

$$\sqrt{g_F(t)} = \sqrt{\det G(t)} = \sqrt{1 + |\nabla h(t)|_2^2}.$$

c) Die geschlitzte d-dimensionale Sphäre $\partial B(0,R)\backslash H_d$ (vgl. Bsp 3.35) wird durch

$$
\begin{aligned}
F(\varphi,\Theta_1,\dots,\Theta_{d-2}) &= \phi_d(R,\phi,\Theta)\\
&= R\cdot\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & \cos(\Theta_1) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2})\\ \sin(\varphi) & \cos(\Theta_1) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2})\\ & \sin(\Theta_1) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2})\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \sin(\Theta_{d-2})\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

mit $(\varphi,\Theta)\in(0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) =: U$ parameterisiert. Hierbei gilt

$$\sqrt{g_F(\varphi,\Theta)} = R^{d-1}\cdot\cos^1(\Theta_1)\cdots\cos^{d-2}(\Theta_{d-2})$$

(Ohne Beweis)

Es seien stets ∂D und die Kartengebiete V mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\partial D)$, $\mathcal{B}(V)\subset\mathcal{B}_d$ versehen. Da $F:U\to V,\ F^{-1}:V\to U$ stetig sind, gilt

$$f = f\circ F\circ F^{-1} : V\to\overline{\mathbb{R}} \text{ messbar} \Leftrightarrow f\circ F : U\to\overline{\mathbb{R}} \text{ messbar} \tag{4.2}$$

Sei ferner f positiv oder $f\circ F\cdot\sqrt{g_F}$ integrierbar, dann definieren wir das Oberflächenintegral auf dem Kartengebiet V durch

$$\int_V f d\sigma = \int_V f(x)d\sigma(x) =: \int_M f(F(t))\cdot\sqrt{g_F(t)}dt, \tag{4.3}$$

wobei $F:U\to V$ eine Parametrisierung ist.
Für $B\in\mathcal{B}(V)$ gilt $A := F^{-1}(B)\subset\mathcal{B}(U)$ und wir definieren das Oberflächenmaß auf V durch

$$\sigma(B) := \int_V \mathbf{1}_B d\sigma = \int_U \underbrace{\mathbf{1}_B(F(t))}_{=\mathbf{1}_A(t)}\cdot\sqrt{g_F(t)}dt. \tag{4.4}$$

Beispiel 4.10. a) (Hintere Halbsphäre) Es sei

$$M = \{x\in\partial B(0,R)\subset\mathbb{R}^3 : x_2>0\} = F\left((0,\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

(sphärische Koordinaten). Aus Bsp 4.9 folgt $\sqrt{g_F(\varphi,\Theta)} = R^2\cdot\cos(\Theta)$. Dann folgt

$$\int_M f d\sigma \overset{(4.3)}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_0^\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(F(\varphi,\Theta))\cdot R^2\cdot\cos(\Theta)d\Theta d\varphi.$$

Beispiel.
- Fall $f=1$.

$$\sigma(M) = \int_M 1 d\sigma = R^2\cdot\int_0^\pi d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\Theta)d\Theta = 2\pi R^2.$$

- Fall $f(x) = |x_3| = R \cdot |\sin(\Theta)| = f(F(\varphi, \Theta))$. Dann gilt

$$\int_M f d\sigma = \int_0^\pi d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3 |\sin(\Theta)| \cos(\Theta) d\Theta d\varphi$$
$$= R^3 \cdot \int_0^\pi d\varphi \cdot \underbrace{2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=\frac{1}{2}\sin^2(\Theta)|_0^{\frac{\pi}{2}}} = \pi R^3.$$

b) (Paraboloidoberfläche). Wir betrachten den Graph von

$$h(s,t) = b\left(1 - \frac{s^2}{R^2} - \frac{t^2}{R^2}\right)$$

mit $\underline{(s,t)} \in U := \underline{B(0,R)} \subset \mathbb{R}^2$. Hier gilt $F(s,t) = (s,t,h(s,t))^T$, $\sqrt{g_F(s,t)} = \sqrt{1 + |\nabla h(s,t)|_2^2}$ mit $\nabla h(s,t) = (-\frac{2bs}{R^2}, \frac{2bt}{R^2})$. Damit folgt

$$\sigma(M) = \int_M d\sigma = \int_{B(0,R)} \sqrt{1 + |\nabla h(s,t)|_2^2} ds dt$$
$$= \int_{B(0,R)} \left(1 + \frac{4b^2}{R^4}(s^2+t^2)\right)^{\frac{1}{2}} ds dt$$
$$\overset{\text{Polarkoord.}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{1 + \frac{4b^2}{R^4} r^2} \cdot r dr d\varphi$$
$$= 2\pi \frac{2b}{R^2} \cdot \int_0^R \sqrt{\frac{R^4}{4b^2} + r^2} \cdot r dr$$
$$\underset{dx = 2rdr}{\overset{x=r^2}{=}} \frac{4\pi b}{R^2} \int_0^R \sqrt{\frac{R^4}{4b^2} + x} \frac{dx}{2} = \left[\frac{2\pi b}{R^2} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{R^4}{4b^2} + x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R^2}.$$
$$= \frac{4\pi b}{3} \cdot R \cdot \left(\left(\frac{R^2}{4b^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{R^2}{4b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

c) Sei $\underline{\text{Spezialfall } d = 2}$: $F : (a,b) \to V \subset \mathbb{R}^2$. Dann ist $g_F(t) = F'(t)^T \cdot F'(t) = |F'(t)|_2^2$. Dann gilt

$$\int_V f d\sigma = \int_a^b f(F(t)) \cdot |F'(t)|_2 dt.$$

Sei $\partial D \in C^1$, $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

$$\text{Dann gibt es Karten } (\psi_k, \tilde{V}_k) \text{ mit Parametrisierungen } F_k : U_k \to V_k,\ U_k \subset \mathbb{R}^{d-1}\ (k = 1, \ldots, m) \text{ mit } \partial D \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m. \tag{4.5}$$

Wir haben also auf V_k Oberflächenmaße σ_k wie in (4.4) mit Gramscher Determinante $g_k = g_{F_k}$.

Lemma 4.11. *Seien $V_1, \dots, V_n$ wie in (4.5). Dann existieren messbare $\varphi_k : \partial D \to \mathbb{R}$ mit $0 \le \varphi_k \le 1$, $\varphi_k = 0$ auf $\partial D \backslash V_k$ $(k = 1, \dots, m)$ und $\sum_{k=1}^m \varphi_k(x) = 1,\ \forall x \in \partial D$.*

Ana III, 16.01.2009

Beweis. Definiere $W_1 = V_1$, $W_k = V_k \backslash (V_1 \cup \dots \cup V_{k-1})$ für $k = 2, \dots, m$. Dann gilt $W_k \in \mathcal{B}(\partial D)$. Setze $\varphi_k = \mathbf{1}_{W_k}$. Aus $\partial D = W_1 \dot\cup \dots \dot\cup W_m$ folgt die Behauptung. □

Lemma 4.12. *Sei $\partial D \in C^1$, $(\psi_k, \tilde{V}_k)$, F_k wie in (4.5) und φ wie in Lem 4.11. Dann definiert*

$$\sigma(B) := \sum_{k=1}^m \int_{V_k} \mathbf{1}_B \cdot \varphi_k d\sigma_k := \sum_{k=1}^m \int_{U_k} \mathbf{1}_B(F_k(t)) \cdot \varphi(F_k(t)) \cdot \sqrt{g_k(t)} dt$$

für $B \in \mathcal{B}(\partial D)$ ein endliches Maß auf $\mathcal{B}(\partial D)$. Es heißt Oberflächenmaß (O-Maß). Wenn $B \subset V_i$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt $\sigma(B) = \sigma_i(B)$ (mit dem Oberflächenmaß σ_i auf V_i aus (4.4)). Weiter hängt σ nicht von der Wahl der Karten $(\psi_k, \tilde{V}_k)$ und der Wahl der φ_k wie in Lem 4.11 ab.

Beweis. Es gelten $\sigma(\emptyset) = 0$ und

$$\begin{aligned}\sigma(\partial D) &= \sum_{k=1}^m \int_{U_k} \underbrace{\varphi_k(F_k(t))}_{\le 1} \cdot \sqrt{g_k(t)} dt \\ &\le \sum_{k=1}^m \lambda_{d-1}(U_k) \cdot \max_{t \in U_k} (\det F_k'(t)^T \cdot \underbrace{F'(t))}_{=:A}{}^{\frac{1}{2}} < \infty.\end{aligned}$$

Dabei ist $\|A\| \le c \in \mathbb{R}$ nach Def 4.1.
Seien $B_j \in \mathcal{B}(\partial D)$ disjunkt für $j \in \mathbb{N}$ und $B := \biguplus_{j \in \mathbb{N}} B_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sigma(B) &\overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=1}^m \int_{U_k} \underbrace{\mathbf{1}_{\biguplus_{j \in \mathbb{N}} B_j}(F_k(t))}_{=\sum_{j=1}^\infty \mathbf{1}_{B_j}(F_k(t))} \cdot \varphi_k(F_k(t)) \cdot \sqrt{g_k(t)} dt \\ &\overset{\text{Kor 2.20}}{=} \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^m \int_{U_k} \mathbf{1}_{B_j}(F_k(t)) \cdot \varphi_k(F_k(t)) \cdot \sqrt{g_k(t)} dt \overset{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^\infty \sigma(B_j).\end{aligned}$$

Somit ist σ eine endliches Maß. Seien $(\kappa_l, \tilde{D}_l)$ weitere Karten von D mit $\partial D \subset D_1 \cup \dots \cup D_n$, $D_l = \tilde{D}_l \cap \partial D$, $l = 1, \dots, n$ und $G_l : W_l \to D_l$ die zugehörigen Parametrisierungen mit offenen $W_l \subset \mathbb{R}^{d-1}$, sowie $\tilde{\sigma}_l$ das zu G_l gehörende Oberflächenmaß auf D_l, $l = 1, \dots, n$. Weiter sollen $\chi_1, \dots, \chi_n$ Lem 4.11 für $D_1, \dots, D_n$ erfüllen. Definiere dann $\tilde{\sigma}$ zu $\tilde{\sigma}_l$, χ_l wie in Lem 4.12. Sei $B \in \mathcal{B}(\partial D)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(B) &= \sum_{l=1}^{m} \int_{D_l} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \varphi_k}_{=1} \cdot \chi_l \cdot \mathbf{1}_B d\tilde{\sigma}_l \\ &\overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \int_{W_l} \underbrace{\varphi_k(G_l(s))}_{=0, \text{ da } \sigma_l(s) \notin V_k} \cdot \chi_l(G_l(s)) \cdot \mathbf{1}_B(G_l(s)) \cdot \sqrt{g_{G_l}(s)} ds\end{aligned} \tag{$*$}$$

Betrachte ein Paar k, l, sodass $D_l \cap V_k = G_l(W_l) \cap F_k(U_k) \neq \emptyset$. Setze $W_{kl} := P\kappa_l(D_l \cap V_k)$, $D(t,0) = t$ für $t \in \mathbb{R}^{d-1}$ und $\phi_{kl} = P_{\psi_k} G_l : W_{kl} \to \mathbb{R}^{d-1}$. Wie in Bem 4.5 sieht man, dass ϕ_{kl} injektiv ist und $\phi_{kl} \in C^1(W_{kl}, \mathbb{R}^{d-1})$ als Komposition solcher Abbildungen. Ferner ist $\phi_{kl}'(s)$ invertierbar (vgl. Bem 4.5) und $F_k(\phi_{kl}(s)) = G_l(s)$ $(\forall s \in W_{kl})$. Da W_{kl} offen in $\mathbb{R}^{d-1}$ ist, liefert der Umkehrsatz: $\phi_{kl} : W_{kl} \to \underbrace{\phi_{kl}(W_{kl})}_{\subset U_k}$ ist diffeomorph. Damit gelten

$$\begin{aligned}G_l'^T \cdot G_l' &\overset{\substack{\text{Ketten-} \\ \text{regel}}}{=} \big((F_k \circ \phi_{kl})\phi_{kl}'\big) \cdot (F_k' \circ \phi_{kl})\phi_{kl}' \\ &= \phi_{kl}'(F_k \circ \phi_{kl})^T \cdot (F_k' \circ \phi_{kl})\phi_{kl}'\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}g_{G_l} &= \det G_l'^T \cdot G_l \overset{\text{LA}}{=} \det(\phi_{kl}'^T) \cdot \det\big((F_k' \circ \phi_{kl})^T \cdot (F_k' \circ \phi_{kl})\big) \cdot \det(\phi_{kl}') \\ &\overset{\text{LA}}{=} (\det \phi_{kl})^2 \cdot g_{F_k} \circ \phi_{kl}\end{aligned}$$

auf W_{kl}. (Zur Übersicht wurde $s \in W_{kl}$ weggelassen). Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(B) &\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \int_{W_{kl}} \underbrace{\varphi_k(F(_k(\phi_{kl}(s)))}_{=0,\ s \in W_l \setminus W_{kl}} \cdot \chi_l(F_k(\phi_{kl}(s))) \cdot \mathbf{1}_B(F_k(\phi_{kl}(s))) \\ &\qquad \cdot |\det \phi_{kl}'(s)| \cdot \sqrt{g_{F_k}(\phi_{kl}(s))} ds \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \int_{\phi_{kl}(W_{kl})} \varphi_k(F_k(t)) \cdot \chi_l(F_k(t)) \cdot \mathbf{1}_B(F_k(t)) \cdot \sqrt{g_{F_k}(t)} dt \\ &= \sum_{k=1} \int_{U_k} \varphi(F_k(t)) \cdot \underbrace{\sum_{l=1}^{n} \chi_l(F_k(t))}_{=1} \cdot \mathbf{1}_B(F_k(t)) \cdot \sqrt{g_{F_k}(t)} dt = \sigma(B).\end{aligned}$$

Sei $B \subset V_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$. Im Beweis von Lem 4.11 kann man erreichen, dass $\varphi_k = 0$ auf V_i, $\forall k \neq i$ und $\varphi_i = \mathbf{1}_{V_i}$. Damit gilt

$$\sigma(B) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=1}^{m} \int_{V_k} \varphi_k \cdot \mathbf{1}_B d\sigma_k = \int_{V_i} \underbrace{\varphi_i}_{=1} \cdot \mathbf{1}_B d\sigma = \sigma_i(B).$$

□

Definition 4.13. Sei $\partial D \in C^1$ wie in (4.5) und φ_k wie in Lem 4.11. Eine messbare Funktion $f : \partial D \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt integrierbar (bzgl. σ), wenn jede der Funktionen $f \circ F_k \cdot \sqrt{g_k} : U_k \to \overline{\mathbb{R}}$ $(k = 1, \ldots, m)$ integrierbar ist. Dann definiert man das Oberflächenintegral (O-Integral) durch

$$\int_{\partial D} f d\sigma := \int_{\partial D} f(x) d\sigma(x) := \sum_{k=1}^{m} \int_{U_k} \varphi_k(F_k(t)) \cdot f(F_k(t)) \cdot \sqrt{g_k(t)} dt.$$

Dieses Integral ist ferner für alle messbaren $f : \partial D \to [0, \infty]$ definiert. Man schreibt weiter $\mathcal{L}^1(\partial D, \sigma) = \{f : \partial D \to \mathbb{R} : f \text{ integrierbar}\}$. Für $A \in \mathcal{B}(\partial D)$ gilt

$$\int_A f d\sigma = \int_{\partial D} \mathbf{1}_A f d\sigma.$$

Satz 4.14. *Seien $\partial D \in C^1$, $f, g : \partial D \to \mathbb{R}$ integrierbar oder messbar und positiv. Dann gelten:*

a) Das Oberflächenintegral hängt nicht von der Wahl der $(\psi_k, \tilde{V}_k)$ in (4.5) und den φ_k in Lem 4.11 ab.

b) Wenn $f = 0$ auf $\partial D \setminus V_k$ für ein $k \in \{1, \ldots, m\}$. Dann gilt

$$\int_{\partial D} f d\sigma = \int_{V_k} f d\sigma_k. \qquad \text{(vgl. (4.3))}$$

c) Wenn f, g reellwertig sind und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\partial D} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) d\sigma = \alpha \cdot \int_{\partial D} f d\sigma + \beta \cdot \int_{\partial D} g d\sigma.$$

Diese Gleichheit gilt auch für messbare $f, g : \partial \to [0, \infty]$, $\alpha, \beta > 0$.

d) $f \leq g \Rightarrow \int_{\partial D} f d\sigma \leq \int_{\partial D} g d\sigma$.

e) $\left|\int_{\partial D} f d\sigma\right| \leq \int_{\partial D} |f| d\sigma$.

f) Sei $h : \partial D \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Dann ist h integrierbar und

$$\left|\int_{\partial D} h d\sigma\right| \leq \|h\|_\infty \sigma(\partial D).$$

g) Wenn $\partial D = A \dot{\cup} B$ für disjunkte $A, B \in \mathcal{B}(\partial D)$, dann gilt

$$\int_{\partial D} f d\sigma = \int_A f d\sigma + \int_B f d\sigma.$$

h) Wenn $B \subset F_k(N)$ für ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ und eine $(d-1)$-dimensionale Nullmenge $N \subset U_k$. Dann gilt $\int_B f d\sigma = 0$.

i) *Die Sätze von der monotonen Konvergenz (Thm 2.19) und der majorisierten Konvergenz (Thm 3.10) gelten für das Oberflächenintegral entsprechend.*

Entsprechende Aussagen gelten auch für das Integral in (4.3) für eine Parametrisierung $F : U \to V$.

Beweis. a) Wie in Lem 4.12.

b) Wie in Lem 4.12.

c) Nach Voraussetzung sind $(f \circ F_k) \cdot \sqrt{g_k}$, $(g \circ F_k) \cdot \sqrt{g_k}$ integrierbar auf U_k, $k = 1, \dots, m$, falls f, g integrierbar sind. Mit Satz 2.25 folgt dann $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) \circ F_k \cdot \sqrt{g_k} : U_k \to \overline{\mathbb{R}}$ ist integrierbar. Daraus folgt dann, dass $\alpha \cdot f + \beta \cdot g : \partial D \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) d\sigma &\overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=1}^{m} \int_{U_k} \varphi_k \cdot (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) \circ F_k \cdot \sqrt{g_k} dt \\
&\overset{\text{Satz 2.25}}{=} \sum_{k=1}^{m} (\alpha \cdot \int_{U_k} (\varphi_k \cdot f) \circ F_k \cdot \sqrt{g_k} dt \\
&\qquad + \beta \cdot \int_{U_k} (\varphi_k \cdot g) \circ F_k \cdot \sqrt{g_k} dt) \\
&= \alpha \cdot \int_{\partial D} f d\sigma + \beta \cdot \int_{\partial D} g d\sigma.
\end{aligned}$$

d) Geht analog zu c) unter Verwendung von Kapitel 2.

e) Geht analog zu c) unter Verwendung von Kapitel 2.

Ana III, 19.01.2009

f) Sei h messbar und beschränkt. Dann gilt $|h \circ F_k| \cdot \sqrt{g_k} \leq \|h\|_\infty \cdot \sqrt{g_k}$, wobei wegen Def 4.1 $\|h\|_\infty \cdot \sqrt{g_k}$ integrierbar ist, d.h. $h : \partial D \to \overline{\mathbb{R}}$ ist integrierbar. Ferner gilt

$$\left| \int_{\partial D} h d\sigma \right| \overset{\text{e)}}{\leq} \int_{\partial D} \underbrace{|h|}_{\leq \|h\|_\infty \cdot \mathbf{1}_{\partial D}} \overset{\text{d)}}{\leq} \int_{\partial D} \|h\|_\infty d\sigma = \|h\|_\infty \cdot \sigma(\partial D).$$

g) Sei $A \dot\cup B = \partial D$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f d\sigma = \int_{\partial D} (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B) \cdot f d\sigma &\overset{\text{c)}}{=} \int_{\partial D} \mathbf{1}_A \cdot f d\sigma + \int_{\partial D} \mathbf{1}_B \cdot f d\sigma \\
&\overset{\text{Def}}{=} \int_A f d\sigma + \int_B f d\sigma.
\end{aligned}$$

h) Sei N eine $(d-1)$-dimensionale Nullmenge mit $B \subset F_k(N)$ und $N \subset U_k$ für ein $k \in \{1,\ldots,m\}$. Dann folgt $\mathbf{1}_B \leq \mathbf{1}_{F_k(N)}$. Damit gilt

$$\left|\int_B f d\sigma\right| \overset{\text{b)}}{=} \left|\int_{V_k} \mathbf{1}_B \cdot f d\sigma\right| \underset{\text{d)}}{\overset{\text{e)}}{\leq}} \int_{U_k} \underbrace{\mathbf{1}_{F_k(N)}(F_k(t))}_{=\mathbf{1}_N(t)} \cdot |f(F_k(t))| \cdot \sqrt{g_k(t)} dt = 0,$$

da der Integrand fast überall den Wert 0 hat $(t \in N)$.

i) Sei $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise mit $|f_n| \leq g$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ für integrierbare $f_n : \partial D \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : \partial D \to [0,\infty]$. Setze $h_{n,k} := (\varphi \circ F_k) \cdot (f_n \circ F_k) \cdot \sqrt{g_k}$. Dann ist $|h_{n,k}| \leq |g \circ F_k| \sqrt{g_k} = g \circ F_k \cdot \sqrt{g_k}$ integrierbar. Außerdem gilt $h_{n,k} \xrightarrow{n\to\infty} h_k := (\varphi_k \circ F_k) \cdot (f \circ F_k) \cdot \sqrt{g_k}$ punktweise. Mit Thm 3.10 folgt dann $\int_{U_k} h_{n,k} dt \xrightarrow{n\to\infty} \int_{U_k} h_k dt$. Summenbildung für $k = 1,\ldots,m$ liefert

$$\int_{\partial D} f_n d\sigma \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\partial D} f d\sigma.$$

Den Satz von der monotonen Konvergenz (Thm 2.19) zeigt man analog.

□

Beispiel 4.15. a) Sei $D = B(0,R) \subset \mathbb{R}^d$, $H_d = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d-2}$ für $d \geq 2$. Mit Bsp 4.9 folgt $\partial D \backslash H_d = F(W_d)$ mit $W_d = (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{d-2}$, wobei $F(\varphi,\Theta) = \phi_d(R,\varphi,\Theta)$ (Polarkoordinaten).
Setze $\hat{F}(\varphi,\Theta) := Q \cdot F(\varphi,\Theta)$ für $(\varphi,\Theta) \in W_d$,
$Q(x_1,\ldots,x_d) := (-x_1, x_d, x_3, \ldots, x_{d-1}, x_2)$ $(d \geq 3)$. Dann folgt $\hat{F}(W_d) = \partial B(0,R) \backslash (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^d \times \{0\})$. Daraus folgt $\partial B(0,R) \subset F(W_d) \cup \hat{F}(W_d)$ und $\partial B(0,R) \cap H_d = \hat{F}(N)$ mit $N = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{d-3} \times \{0\}$, da $F(N) = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 < 0, x_d = 0\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\sigma(\partial B(0,R)) &\overset{\sigma \text{ ist Maß}}{=} \sigma(\partial D(0,R) \backslash H_d) + \underbrace{\sigma(\partial B(0,R) \cap H_d)}_{=0} \\
&\overset{\text{Satz 4.14}}{=} \int_{W_d} 1 \cdot \sqrt{G_F(\varphi,\Theta)} d(\varphi,\Theta) \\
&\underset{\text{Bsp 4.9}}{\overset{\text{Fub}}{=}} \int_0^{2\pi} \int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{d-2}} R^{d-1} \cdot \cos(\Theta_1) \cdots \cos(\Theta_{d-2}) d\Theta d\varphi \\
&\overset{\text{Bsp 3.35}}{=} R^{d-1} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \overset{(3.12)}{=} R^{d-1} \cdot \omega_d,
\end{aligned}$$

wobei $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$.

b) Sei $f(x,y,z) = |xyz|$, $D = B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$. Setze $J := \int_{\partial D} f d\sigma$. Seien O_j, $j = 1,\ldots 8$ die offenen Oktanten, H = Vereinigung der Koordinatenebenen. $\partial D =$

$\biguplus_{j=1}^{8}(\partial D\cap O_j)\dot{\cup}(\partial D\cap H)$, wobei $O_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x>0, y>0, z>0\} = F\left((0,\frac{\pi}{2})\times(0,\frac{\pi}{2})\right)$, $\sigma(\partial D\cap H)=0$, wie in a) mit Satz 4.14h). Damit folgt

$$J \overset{\text{Satz 4.14g)}}{=} \underbrace{\sum_{j=1}^{8}\int_{O_j\cap\partial D} f\,d\sigma}_{\text{alle Integrale gleich}} + \underbrace{\int_{H\cap\partial D} f\,d\sigma}_{\overset{\text{Satz 4.14h)}}{=}0} = 8\cdot\int_{O_1} xyz\;d\sigma(x,y,z)$$

$$\overset{\substack{\text{Sphären-}\\ \text{koord.}}}{=} 8\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\varphi\cos\Theta\cdot R\sin\varphi\cos\Theta\cdot R\sin\Theta\cdot R^2\cos\Theta d\Theta d\varphi$$

$$= 8R^5\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3(\Theta)\sin(\Theta)d\Theta$$

$$= 8R^5\cdot\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos^4(\Theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = R^5.$$

4.3 Die Sätze von Gauß und Stokes

Bemerkung 4.16. Sei $r>0,\ x_0\in\mathbb{R}^d$. Die Funktion

$$\phi_{r,x_0}(x) = \begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{r^2-|x-x_0|_2^2}\right), & x\in B(x_0,r)\\ 0, & x\in\mathbb{R}^d\setminus B(x_0,r)\end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}^d$ beliebig oft differenzierbar (vgl. Ana1, Aufgabe 12.7). Ferner gilt

$$\phi_{r,x_0}(x)>0 \Leftrightarrow x\in B(x_0,r),\quad \phi_{r,x_0}=0\Leftrightarrow x\notin B(x_0,r).$$

Seien X,Y normierte Vektorräume, $D\subset X$, $f:X\to Y$. Der Träger (support) von f ist

$$\operatorname{supp} f := \{x\in X : f(x)\neq 0\}.$$

Bild zu f in $d=1$: TODO
Sei $U\subset\mathbb{R}^d$ offen. Wir schreiben $f\in C^k(\overline{U},\mathbb{R}^l)$, wenn $f\in C^k(U,\mathbb{R}^l)$ und alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung kleiner oder gleich k eine stetige Fortsetzung auf ∂U haben, wobei $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Wir schreiben etwa zum Beispiel

$$\partial_j f(x) := \lim_{y\to x, y\in D}\partial_j f(x),\ \text{in diesem Fall für } j=1,\dots,d,\ x\in\partial D.$$

Satz 4.17. *Sei $D\subset\mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $\overline{D}\subset U_1\cup\dots\cup U_m$ für offene, beschränkte $U_k\subset\mathbb{R}^d$. Dann gibt es $\varphi_k\in C^\infty(\overline{D})$, sodas $0\leq\phi_k\leq 1$, $\operatorname{supp}\varphi_k\subset U_k$ und $\sum_{k=1}^m\varphi_k=1$ $(\forall k=1,\dots,m,\ x\in\overline{D})$. (Man nennt $\{\varphi_k : k=1,\dots,m\}$ glatte Zerlegung der Eins auf $\overline{D}$ zu $U_1,\dots,U_m$)*

TODO: Bild in $d=1, D=(a,b)$.

Beweis. $\forall x \in \overline{D}\ \exists r(x) > 0,\ h \in \{1,\dots,m\}$ mit $x \in B(x,r(x)) \subset \overline{B}(0,r(x)) \subset U_k$. (Kugeln bezüglich der sup-Norm.) Da $\overline{D}$ kompakt ist, existieren $x_j \in \overline{D}$ mit $B_j = B(x_j, r(x_j))$, $(j = 1,\dots,n)$, sodass $\overline{D} \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$ und $\forall j\ \exists : \overline{B}_j \subset U_k$. Setze

$$\phi_k := \sum_{j_0 : B_j \subset U_k} \phi_{r(x_j),x_j}$$

Damit gilt $\phi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ k = 1,\dots,m$ und $\operatorname{supp}\phi_k \subset \bigcup_{j:B_j\subset U_k} \overline{B}_j \subset U_k$ und $\phi_k > 0$. Ferner gilt $\forall x \in \overline{D}\ \exists B_j$ mit $x \in B_j$. Dann folgt $\phi_{r(x_j),x_j}(x) > 0$. Dann folgt $\alpha(x) := \sum_{k=1}^m \phi_k(x) > 0$. Damit setze $\varphi_k := \frac{1}{\alpha}\phi_k \in C^\infty(\overline{D})$. Dann gilt $\varphi_k \geq 0$, $\operatorname{supp}\varphi_k = \operatorname{supp}\phi_k \subset U_k$, $\sum_{k=1}^m \varphi_k(x) = \frac{1}{\alpha(x)}\sum_{k=1}^m \phi_k(x) = 1$ $(\forall x \in \overline{D})$. Daraus folgt $\phi_k \in [0,1]$. $\square$

Man setzt für offene $U \subset \mathbb{R}^d,\ k \in \mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$

$$\begin{aligned} C_b^k(U,\mathbb{R}^l) := \{f \in C^k(U,\mathbb{R}^l) :\, & f \text{ und alle partiellen Ableitungen von } f \\ & \text{bis Ordnung } k \text{ sind beschränkt}\}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Sei $a < b$ in $\mathbb{R}$, $g \in C_b^1((a,b)\times U),\ U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $h \in C^1(U,\mathbb{R})$. Setze

$$G(t,x) := \int_a^b g(s,x)ds, \quad t \in (a,b),\ x \in U.$$

Mit dem Diff-/Stetigkeitssatz und dem Hauptsatz folgt $G \in C^1((a,b)\times U,\mathbb{R})$. Mit der Kettenregel gilt dann für alle $j = 1,\dots,d,\ x \in U$

$$\begin{aligned} \exists \frac{\partial}{\partial x_j}\int_a^{h(x)} g(s,x)ds &= \frac{\partial}{\partial x_j} G(h(x),x) \\ &= g(h(x),x)\partial_j h(x) + \int_a^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} g(s,x)ds \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ana III, 23.01.2009

Sei $g \in C([a,b])$ mit $g|_{(a,b)} \in C^1((a,b))$ und $g' \in C^1((a,b))$. Dann gilt

$$\int_a^b g'(t)dt \overset{\text{vgl. Kor 3.15}}{=} \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} g'(t)dt \overset{\text{HS}}{=} \lim_{\epsilon\to 0}\left(g(b-\epsilon) - g(a+\epsilon)\right). \tag{4.7}$$

Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f, g \in C^1(U,\mathbb{R}^d)$. Die Divergenz von f ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{div} f = \partial_1 f_1(x) + \partial_2 f_2(x) + \cdots + \partial_d f_d(x) = \operatorname{Spur}(f'(x)),\ x \in U. \tag{4.8}$$

Beachte dabei $\operatorname{div}(f+g) = \operatorname{div} f + \operatorname{div} g$.

Theorem 4.18 (Divergenzsatz von Gauß). *Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\partial D \in C^1$, $f \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^d)$ mit $f|_D \in C_b^1(D, \mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$\int_D \operatorname{div} f(x) dx = \int_{\partial D} (f(x)|\nu(x)) d\sigma(x),$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale von D ist (vgl. Lem 4.7).
(Eine allgemeinere Version findet man im Königsberger Ana2, §12.4)

Beweis. 1) Aus Lem 4.7 folgt: $\forall x \in \partial D$ $\exists$ eine Karte $(\psi, \tilde{V})$, sodass (eventuell nach orthogonaler Transformation $y = Qx$) D lokal bei x unter einem Graph liegt. Da ∂D kompakt ist, exisiteren offene $V_1, \dots, V_m \subset \mathbb{R}^d$ mit $\partial D \subset V_1 \cup \dots \cup V_m$ (die Tilde wurde weggelassen), orthogonale Matrizen $Q_1, \dots, Q_m$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ und offene $U_1, \dots, U_m \subset \mathbb{R}^{d-1}$, $h_1, \dots, h_m \in C^1(U_k, \mathbb{R})$ mit beschränkter Ableitung, sodass

$$Q_k(V_k \cap D) = \{y = (\underbrace{y_1, \dots, y_{d-1}}_{=:y'}, y_d) \in \mathbb{R}^d : y' \in U_k,\ y_d \in (a_k, h_k(y'))\}$$

und

$$Q_k(\partial D \cap V_k) = \{(y', y_d) : y' \in U_k,\ y_d = h_k(y')\} \quad (k = 1, \dots, m).$$

Wähle $V_0 \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $\overline{V}_0 \subset D$ und $D \subset V_0 \cup \dots \cup V_m$.

TODO: Bild

Wähle φ_k wie in Lem 4.7 auf $\overline{D}$ zu $\{V_0, V_1, \dots, V_m\}$. Setze $f^k := \varphi_k f$. Dann gelten $f^k \in C_b^1(D, \mathbb{R}^d) \cap C(\overline{D}, \mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} f^k \subset V_k \cap \overline{D}$ $(k = 1, \dots, m)$ und

$$\sum_{k=0}^m f^k(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^m \varphi_k}_{=1} \cdot f(x) = f(x) \qquad \forall x \in \overline{D}.$$

Beachte dabei, dass $f^k(x) = 0$ $\forall x \in \partial V_k \cap D$, aber dass $f^k(x) \neq 0$ möglich ist, wenn $x \in \partial N_k \cap \partial D$.

TODO: Bild

2) Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g \in C^1(W, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} g \subset W$, $\operatorname{supp} g$ kompakt. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Setze g mit 0 zu $\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ fort. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int_W \partial_j g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j \tilde{g}(x) dx = \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_j \tilde{g}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) dx_j d(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \\
&= \int_{-r}^{r} \partial_j \tilde{g}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) dx_j = [\tilde{g}]_{x_j=-r}^{x_j=r} = 0,
\end{aligned}$$

wobei r so gewählt ist, dass $\operatorname{supp} g \subset B(0,r)$. Also gilt

$$\int_W \partial_j g dx = 0.$$

Speziell gilt für $k = 0$

$$\int_D \partial_j f_j^0(x) dx = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n,$$

denn $\operatorname{supp} f^0 \subset V_0 \subset D$. Daraus folgt

$$\int_D \operatorname{div} f^0(x) dx = 0 = \int_{\partial D} (\underbrace{f^0(x)}_{=0} | \nu(x)) d\sigma(x).$$

3) Sei $k \in \{1, \ldots, m\}$. Setze $\tilde{f}^k(y) := Q_k f^k(Q_k^{-1} y)$ für alle $y = Q_k x,\ x \in D$. Sei $\tilde{\nu}$ die äußere Einheitsnormale von $Q_k D$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \tilde{f}^k(y) &= \operatorname{Spur}\left[Q_k \cdot (f^k \cdot Q_k^{-1})'(y)\right] = \operatorname{Spur}\left[Q_k (f^k)'(x) Q_k^{-1}\right] \\
&\overset{\text{LA}}{=} \operatorname{Spur}(f^k)'(x) = \operatorname{div} f^k(x) \quad (\forall x \in D).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_D \operatorname{div} f^k(x) dx &\underset{x = Q_k^{-1} y}{\overset{\text{Trafo}}{=}} \int_{Q_k D} \operatorname{div} \tilde{f}^k(y) \cdot \underbrace{|\det Q_k^{-1}|}_{=1} dy \\
&\underset{(+)}{\overset{!}{=}} \int_{\partial Q_k D} \left(\tilde{f}^k(y) | \tilde{\nu}(y)\right) d\sigma(y) \\
&\underset{y = Q_k x}{\overset{\text{Trafo}}{=}} \int_{\partial D} (\tilde{f}^k(Q_k x) | \underbrace{\tilde{\nu}(Q_k x)}_{= Q_k \nu(x)}) \cdot \underbrace{|\det Q_k|}_{=1} d\sigma(x) \\
&= \int_{\partial D} (Q_k f^k(x) | Q_k \nu(x)) d\sigma(x) \\
&\overset{Q_k^T = Q_k^{-1}}{=} \int_{\partial D} (f^k(x) | \nu(x)) d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Zeige nun das Gleichheitszeichen (+). Es gilt $f = \tilde{f}$ auf $Q_k D$. Schreibe dann f^k statt $\tilde{f}^k$, D statt $Q_k D$, x statt y, ν statt $\tilde{\nu}$.

$$\begin{aligned}
\int_D \partial_d \cdot f_d^k(x) dx &\underset{\operatorname{supp} f^k \subset V_k \cap \overline{D}}{\overset{Fubini}{=}} \int_{U_k} \underbrace{\int_{a_k}^{h_k(x')} \partial_d f_d^k(x', x_d) dx_d dx'}_{\overset{(4.7)}{=} f_d^k(x', h_k(x')) \cdot \underbrace{f_d(x', a_k)}_{=0}} \qquad (*) \\
&= \int_{U_k} f_d^k(x', h_k(x')) dx'.
\end{aligned}$$

Sei $j \in \{1, \dots, d-1\}$. Dann gilt

$$\partial_j \cdot \underbrace{\int_{a_k}^{h_k(x')} f_j^k(x', x_d) dx_d}_{=\varphi(x')} \overset{(4.6)}{=} f_j^k(x', h_k(x')) \partial_j h_k(x')$$

$$+ \int_{a_k}^{h_k(x')} \partial_j f_j^k(x', x_d) dx_d.$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \int_D \partial_j f_j^k(x) dx &\overset{\text{Fub}}{=} \int_{U_k} \int_{a_k}^{h_k(x')} \partial_j f_j^k(x', x_d) dx_d dx' \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} \int_{U_k} f_j^k(x', h_k(x')) \partial_j h_k(x') dx' + \underbrace{\int_{U_k} \partial_j \varphi(x') dx'}_{\overset{2)}{=} 0, \text{ da } \operatorname{supp} \varphi \subset U_k} \end{aligned} \tag{**}$$

Durch Aufsummieren über j ergibt sich dann

$$\begin{aligned} &\int_D \operatorname{div} f^k(x) dx \\ &\underset{(**)}{\overset{(*)}{=}} \int_{U_k} \left(f^k(x', h_k(x')) \middle| \begin{pmatrix} -\nabla h_k(x') \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{\sqrt{1 + |\nabla h_k(x')|_2^2}}{\sqrt{1 + |\nabla h_k(x')|_2^2}} dx' \\ &\underset{\text{Bsp 4.9}}{\overset{\text{Lem 4.7}}{=}} \int_{\partial D} (f^k(x) | \nu(x)) d\sigma(x). \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div} f dx = \int_D \operatorname{div} \left(\sum_{k=0}^m f^k \right) dx &\overset{(4.8)}{=} \sum_{k=0}^m \int_D \operatorname{div} f^k dx \\ \underset{3)}{\overset{2)}{=}} \sum_{k=0}^m \int_{\partial D} (f^k(x) | \nu(x)) d\sigma(x) &= \int_{\partial D} (f(x) | \nu(x)) d\sigma(x). \end{aligned}$$

$\square$

Erinnerung: für $u \in C^2(U, \mathbb{R})$ ist der Laplace-Operator gegeben durch

$$\triangle u(x) = \partial_{11} u(x) + \dots + \partial_{dd} u(x) = \operatorname{Spur} \nabla^2 u(x).$$

Damit gilt

$$\triangle u = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \vdots \\ \partial_d u \end{pmatrix} = \operatorname{div} \nabla u \tag{4.9}$$

Korollar 4.19 (Greensche Formeln)**.** *Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\partial D \in C^1$.*

a) Sei $f \in C_b^1(D, \mathbb{R}^d) \cap C(\overline{D}, \mathbb{R}^d)$, $u \in C_b^1(D, \mathbb{R}) \cap C(\overline{D}, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u(x) \cdot f(x)) &= \sum_{j=1}^d ((\partial_j u)(x) \cdot f_j(x) + u(x) \cdot \partial_j f_j(x)) \\ &= (\nabla u(x) | f(x)) + u(x) \cdot \operatorname{div} f(x).\end{aligned}$$

Dann folgt mit Gauss

$$\int_D (\nabla u(x)|f(x))dx = -\int_D u(x) \operatorname{div} f(x) dx + \int_{\partial D} u(x) \cdot (f(x)|\nu(x)) d\sigma(x).$$

b) Seien $u, v \in C_b^2(D, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{D}, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_D u \cdot \triangle v dx &\underset{(4.9)}{\overset{a)}{=}} -\int_D (\nabla u | \nabla v) dx + \int_D u(x) \underbrace{(\nabla v(x)|\nu(x))}_{=\partial_\nu v(x)} d\sigma(x) \\ &= \int_D v \triangle u dx + \int_{\partial D} u(x) \partial_\nu v(x) - v(x) \partial_\nu u(x) d\sigma(x).\end{aligned}$$

Ana III, 26.01.2009

Zur Intepretation vom Divergenzsatz von Gauß

Seien D, f wie in Thm 4.18. Dabei entspreche f einem elektrischen Feld. Setze den Durchfluss von f durch ∂D

$$\phi := \int_{\partial D} (f|\nu) d\sigma.$$

Zu ν: TODO: Bild
Mit Gauss folgt

$$\phi = \int_D \operatorname{div} f dx. \tag{$*$}$$

Also entspricht $\operatorname{div} f$ einer Quellstärke.

Beispiel 4.20. Sei $d = 3,\ q \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit $\partial D \in C^1$. Setze für $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{p\}$

$$f(x) := q \frac{1}{|x-p|_2^3}(x-p).$$

Dann folgt für alle $x \neq p,\ k = 1, 2, 3$

$$\partial_k f_k(x) = q \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - p_k)^2 \right)^{\frac{3}{2}} + q \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot 2(x_k - p_k) \cdot |x-p|_2^{-5} (x_k - p_k).$$

Damit ergibt sich für die Divergenz von f für alle $x \neq p$

$$\operatorname{div} f(x) = 3q|x-p|_2^{-3} - 3q|x-p|_2^{-5} \cdot |x-p|_2^2 = 0.$$

1. Fall: $p \notin \overline{D}$. Dann gilt $f \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^3)$. Mit $(*)$ folgt dann $\int_D \operatorname{div} f dx = 0$.
2. Fall: $p \in D$. Dann ist $f \notin C^1(D, \mathbb{R}^3)$. Wähle $r > 0$ mit $\overline{B}(p,r) \subset D$. Setze $D_r = \partial D \backslash \overline{B}(p,r)$. Daraus folgt $\partial D = \partial D \dot{\cup} \partial B(p,r)$ und damit $f \in C^1(\overline{D}_r, \mathbb{R}^3)$. Somit gilt

$$\phi_r := \int_{\partial D} (f|\nu) d\sigma \overset{\text{Gauss}}{=} \int_{D_r} \underbrace{\operatorname{div} f}_{=0} dx = 0.$$

Die äußere Einheitsnormale ν_B von $B(p,r)$ ist $\nu_B = \frac{1}{r}(x-p)$ $(x \in \partial B(p,r))$. Daraus folgt, dass die äußere Einheitsnormale ν von D_r bei $x \in \partial B(p,r)$ $\nu(x) = -\nu_B(x)$ ist. Damit folgt

$$0 = \phi_r \int_{\partial D} (f|\nu) d\sigma = \int_{\partial B(p,r)} \left(f(x) | \frac{1}{r}(x-p) \right) d\sigma(x).$$

Daraus folgt

$$\phi = \frac{q}{r} \cdot \int_{\partial B(p,r)} \underbrace{|x-p|_2^{2-3}}_{=\frac{1}{r}} d\sigma(x) = \frac{q}{r^2} \cdot \int_{\partial B(p,r)} d\sigma = \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

Beispiel 4.21. Sei $C \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit $\partial D \in C^1$. Sei $u(t,x)$ die Konzentration eines Stoffes bei $x \in D$ zur Zeit $t \geq 0$. Es sei $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \overline{D})$. Dann existiert $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \in C_b(\mathbb{R}_+ \times D)$ $(k,l = 1,2,3)$. Der Stoff diffundiere gemäß des "Fickschen Gesetz" mit konstanter Diffusionsrate $a > 0$. Gegeben sei weiter eine Anfangskonzentration $u_0 \in C^1(\overline{D}) \cap C_b^2(D)$. Durch ∂D fließe keine Substanz. Insbesondere sei $\partial_\nu u_0(x) = 0,\ x \in \partial D$. Wir betrachten die Diffusionsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = a \triangle_x u(t,x), & t \geq 0 \\ \partial_\nu u(t,x) = 0, & t \geq 0,\ x \in \partial D \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in D. \end{cases} \tag{4.10}$$

Behauptung:

$$\int_D |u(t,x)|^2 dx \leq \int_D |u_0(x)|^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Wenn die Behauptung gilt, gibt es höchstens eine Lösung von (4.10), denn:
Sei v eine weitere Lösung. Setze $w = u - v \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \overline{D})$. Dann folgt $\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial X_l} \in C_b(\mathbb{R}_+ \times D)$ und w erfüllt (4.10) mit $w(0) = 0$. Mit der Behauptung folgt dann

$$\int_D |w(t,x)|^2 dx \leq 0.$$

Also ist $w(t,x) = 0\ \forall t \geq 0$, *(f.a.)*$x$. Da w stetig ist, folgt $w(t,x) = 0\ \forall t, x$. Mit Bem 5.9 folgt dann $u = v$.
Beweis von der Behauptung:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \int_D \frac{1}{2} |u(t,x)|^2 dx \\
&\overset{\text{Thm 3.16}}{=} \int_D \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial_t} (u(t,x))^2 dx = \int_D u(t,x) \partial_t u(t,x) dx \\
&\overset{(4.10)}{=} a \cdot \int_D u(t,x) \triangle_x u(t,x) dx \\
&\overset{\text{Green}}{=} -a \cdot \int_D \underbrace{(\nabla_x u(t,x) | \nabla_x u(t,x))}_{=|\nabla u(t,x)|_2^2} dx + a \cdot \int_{\partial D} u(t,x) \underbrace{\partial_\nu u(t,x)}_{\overset{(4.10)}{=}} d\sigma(x) \leq 0
\end{aligned}
$$

Stokes

Sei $d = 3$, $F : U_0 \to V_0 \subset \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung mit $F \in C^2(U_0, \mathbb{R}^3)$, $U \subset \overline{U} \subset U_0 \subset \mathbb{R}^2$. Dabei seien U und U_0 offen und beschränkt. Setze außerdem $V := F(U)$. Sei $\partial U \in C^1$ eine geschlossene C^1-Kurve mit Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \partial U$, die im Gegenuhrzeigersinn läuft. Damit ist $\gamma'(t) \neq 0,\ \forall t$. Dann folgt, dass ∂V eine Kurve mit Parametrisierung $\varphi = F \circ \gamma : [a,b] \to \partial V$

TODO: Bild

Dabei ist $\nu(\tau) = \frac{1}{|\gamma'(\tau)|_2} \begin{pmatrix} \gamma_2'(\tau) \\ -\gamma_1'(\tau) \end{pmatrix}$ äußere Einheitsnormale von ∂U ($\gamma'(\tau)$ um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts gedreht und normiert. Vgl. Walter Ana2, §5.17) Mit der Bemerkung nach Def 4.8 folgt, dass die Normale an ∂V gegeben ist durch

$$
n(F(t)) = \frac{1}{|\partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t)|_2} \cdot \partial_1 F(t) \times \partial_2 F(t). \tag{4.11}
$$

Erinnerung

$$
\operatorname{rot} f(x) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(x) - \partial_3 f_2(x) \\ \partial_3 f_1(x) - \partial_1 f_3(x) \\ \partial_1 f_2(x) - \partial_2 f_1(x) \end{pmatrix} = \nabla \times f(x).
$$

Das Kurvenintegral zweiter Art ist definiert durch

$$
\int_{\partial V} f \bullet dx = \int_a^b (f(\varphi(\tau)) | \varphi'(\tau)) d\tau.
$$

Theorem 4.22 (Stokes)**.** *V erfülle die obigen Voraussetzungen und es sei $f \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ für ein offenes $D \subset \mathbb{R}^3$ mit $\overline{V} \subset D$. Dann gilt*

$$
\int_V (\operatorname{rot} f(x) | n(x)) d\sigma(x) = \int_{\partial V} f \bullet dx.
$$

Zum Beweis. Der Beweis erfolgt duch direktes Nachrechnen unter Verwendung obiger Formeln, Kettenregel und Gauß (Thm 4.18) für ∂U vgl. Walter Ana2, §8.12. □

Zur Interpretation: Sei f ein elektrisches Feld. Dann entspricht $\int_{\partial V} f \bullet dx$ der Zirkulation in der Leiterschleife ∂V. Stokes sagt dann

$$\int_{\partial V} f \bullet dx = \int_V (\operatorname{rot} f|u) d\sigma.$$

Beispiel 4.23. a) Wenn $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $f = \nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u)^T$, folgt mit Schwarz (Ana2), dass $\operatorname{rot} f = \operatorname{rot} \nabla u = 0$. ($f$ ist ein Radialfeld). Dann folgt

$$\int_{\partial V} f \bullet dx \overset{\text{Stokes}}{=} 0.$$

Beispiel. Sei $u = |x|_2^\alpha$ für $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f(x) = \nabla u(x) = \alpha |x|_2^{\alpha-2} x$. Also gilt $\operatorname{rot} f = 0$.

b) Einfaches Wirbelfeld: $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, 0)^T$. Hier gilt $\partial_2 f_1 = -1$, $\partial_1 f_2 = 1$. Alle anderen partiellen Ableitungen sind 0. Also gilt $\operatorname{rot} f(x) = (0, 0, 2)^T$. Dann folgt

$$\int_{\partial V} f \bullet dx \overset{\text{Stokes}}{=} \int_V (\operatorname{rot} f(x)|n(x)) d\sigma(x) = 2 \cdot \int_V n_3(x) d\sigma(x) \qquad (*)$$

Beispiel. Eine Kugelkappe lässt sich mit dem Graph von $h(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$ für $(x_1, x_2) \in B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$, wobei $0 < r < R$ fest seien.

Hier gelten $F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ und
$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in B(0, r) \subset \mathbb{R}^2,\ x_3 = h(x_1, x_2) \right\}$. Damit gilt $\partial_1 F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 h \end{pmatrix}$, $\partial_2 F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 h \end{pmatrix}$. Dann gilt $(\partial_1 F \times \partial_2 F)_3 = 1 \overset{(4.11)}{=} n_3 |\partial_1 F \times \partial_2 F|_2$. Dann folgt

$$\int_{\partial V} f \bullet dx \underset{\text{Def 4.8}}{\overset{(*)}{=}} 2 \cdot \int_{B(0,r)} 1 \cdot \frac{1}{|\partial_1 F \times \partial_2 F|_2} \cdot \underbrace{|\partial_1 F \times \partial_2 F|_2}_{=\sqrt{g_F}} dx_1 dx_2$$
$$= 2 \cdot \int_{B(0,r)} dx_1 dx_2 = 2\pi r^2.$$