4 Ströme

4.1 Differentialformen und äußere Ableitung

Ziel: Integration über orientierte Flächen.

Definition
Sei $k \in \mathbb{R}$ und V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.

(1) Eine Abbildung $\Phi\colon V^k \to \mathbb{R}$ heißt multilinear, falls Φ in jeder Komponente linear ist.

(2) Eine Abbildung $\Phi\colon V^k \to \mathbb{R}$ heißt alternierend, falls Φ nur das Vorzeichen wechselt, wenn zwei Komponenten vertauscht werden:

$$\Phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\Phi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k).$$

(3) $\bigwedge^k V \coloneqq \{(\Phi\colon V^k \to \mathbb{R}) : \Phi \text{ ist multilinear und alternierend}\}$.

(4) $\bigwedge^k V$ wird in kanonischer Weise zu einem Vektorraum. Die Elemente von $\bigwedge^k V$ nennt man k-Kovektoren, falls $V = \mathbb{R}^n$. Ist $V = (\mathbb{R}^n)^*$, so werden die Elemente von $\bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^* =: \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ als k-Vektoren bezeichnet.

Bemerkungen: (1) $\bigwedge^1 \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^*$

(2) $\bigwedge_1 \mathbb{R}^n = ((\mathbb{R}^n)^*)^* = \mathbb{R}^n$ (mit der üblichen Identifikation).

(3) Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und $e_1^*, \ldots, e_n^*$ die Dualbasis. Wir schreiben

$$\langle e_j^*, e_i \rangle \coloneqq e_j^*(e_i) = \delta_{ij}.$$

Statt e_j^* wird auch dx_j geschrieben.

(4) $\bigwedge^n \mathbb{R}^n$ sind gerade die Determinantenfunktionen.

Definition
Seien $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$. Dann wird

$$\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$$

durch

$$(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k)(v_1, \ldots, v_k) \coloneqq \det\left(\langle \eta_i, v_j \rangle_{i,j=1,\ldots,k}\right)$$

erklärt. Man beachte hierbei $\langle \eta_i, v_j \rangle \coloneqq \eta_i(v_j)$.

Alternativ: Ist $\eta_i = \sum_{j=1}^n \eta_{ij} dx_j$, $\eta_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, so kann man auch

$$(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k)(v_1, \ldots, v_k) \coloneqq \det\left((\eta_{ij}) \cdot (v_1 | \cdots | v_k)\right)$$

erklären.

Ergänzung: Mit $\mathcal{T}^k(V) \coloneqq \{(T\colon V^k \to \mathbb{R}) : T \text{ ist } k\text{-linear}\}$ bezeichnet man die Tensoren der Stufe k über dem Vektorraum V. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^k(V) \otimes \mathcal{T}^l(V) &\to \mathcal{T}^{k+l}(V)\\ (T,S) &\mapsto T \otimes S\end{aligned}$$

ist erklärt durch

$$(T \otimes S)(u_1, \ldots, u_{k+l}) \coloneqq T(u_1, \ldots, u_k) \cdot S(u_{k+1}, \ldots, u_{k+l}).$$

Man bezeichnet $T \otimes S$ als das Tensorprodukt von T und S. Um für $p \in \mathbb{N}$ einen p-Tensor in einen alternierenden p-Tensor zu überführen, erklärt man die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}\colon \mathcal{T}^p(V) &\to \bigwedge\nolimits^p V\\ T &\mapsto \mathrm{Alt}(T),\end{aligned}$$

wobei

$$\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_p) \coloneqq \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\pi \in S_p} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot T(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}).$$

Hier ist S_p die Menge aller Permutationen (Bijektionen) der Menge $\{1, \ldots, p\}$. Für $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ sei

$$\omega \wedge \eta \coloneqq \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \bigwedge\nolimits^{k+l} \mathbb{R}^n.$$

Man stellt fest, dass dieses „Dachprodukt“ assoziativ ist. Ferner gilt

$$\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k = k! \cdot \mathrm{Alt}(\eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_k).$$

In gleicher Weise erklären wir nun auch ein Dachprodukt für k-Vektoren.

Definition
Seien $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Dann wird

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \bigwedge\nolimits_k \mathbb{R}^n$$

durch

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)(\eta_1, \ldots, \eta_k) \coloneqq \det\left(\langle \eta_i, v_j \rangle_{i,j=1,\ldots,k}\right)$$

erklärt, wobei $\eta_1, \ldots, \eta_k \in (\mathbb{R}^n)^*$.

Man kann zeigen, dass $\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}$ eine Linearform auf $\bigwedge_k \mathbb{R}^n$ ist, wenn man

$$(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \coloneqq (\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k)(v_1, \ldots, v_k)$$

für $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ erklärt. Die Wohldefiniertheit ist leicht einzusehen. Im Folgenden schreiben wir für $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n$

$$\langle \omega, \xi \rangle \coloneqq \omega(\xi).$$

In gleicher Weise wird $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ als Linearform auf $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ erklärt, indem man

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k) \coloneqq (v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)(\eta_1, \ldots, \eta_k)$$

setzt. Auch hier ist die Wohldefiniertheit leicht zu bestätigen.

Man kann ferner nachweisen, dass

$$e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*, \qquad 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$$

eine Basis von $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ ist. Ebenso ist

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, \qquad 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$$

eine Basis von $\bigwedge_k \mathbb{R}^n$. Diese Basen sind zueinander dual in Bezug auf obige Deutung von k-Kovektoren als Linearformen auf k-Vektoren.

Notation: Sei

$$I_k^n := \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}.$$

Für $I \in I_k^n$ ist $e_I := e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ und $dx_I := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ und so weiter.

Bemerkungen: (1) Für $\sigma \in S_k$, $\eta_1, \ldots, \eta_k \in (\mathbb{R}^n)^* = \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$ gilt

$$\eta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \eta_{\sigma(k)} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k.$$

(2) Sei $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\Phi = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \Phi_{(i_1, \ldots, i_k)} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I \cdot dx_I.$$

Hierbei ist also $\Phi_I = \Phi(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \Phi(e_I) \in \mathbb{R}$.

Definition
Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\Phi \colon W \to \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ heißt Differentialform vom Grad k (kurz: k-Form). Die k-Form Φ ist von der Klasse $\mathcal{C}^r$, $r \ge 1$, falls $p \mapsto \Phi(p)(v_1, \ldots, v_k)$ von der Klasse $\mathcal{C}^r$ ist für jede Wahl von $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkungen: (1) Die k-Form Φ ist von der Klasse $\mathcal{C}^r$ genau dann, wenn

$$p \mapsto \Phi_I(p) := \Phi(p)_I = \langle \Phi(p), e_I \rangle = \langle \Phi(p), e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \rangle$$

von der Klasse $\mathcal{C}^r$ ist für alle $I \in I_k^n$.

(2) Die k-Form Φ lässt sich schreiben als

$$p \mapsto \Phi(p) = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I(p) dx_I$$

mit $\Phi_I(p) \in \mathbb{R}$.

Definition (Dachprodukt)
Für $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ wird $\Phi \wedge \eta \in \bigwedge^{k+l} \mathbb{R}^n$ in folgender Weise erklärt: Ist $\Phi = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I dx_I$ und $\eta = \sum_{J \in I_l^n} \eta_J dx_J$, dann ist

$$\Phi \wedge \eta := \sum_{I \in I_k^n,\, J \in I_l^n} \Phi_I \cdot \eta_J \underbrace{dx_I \wedge dx_J}_{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}}.$$

Eine „invariante Definition“ kann mit Hilfe des Alt-Operators gegeben werden (s.o.).

Bemerkungen: (1) Assoziativgesetz: Für $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$, $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ und $\Theta \in \bigwedge^r \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(\Phi \wedge \eta) \wedge \Theta = \Phi \wedge (\eta \wedge \Theta).$$

(2) Distributivgesetz: Für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\Phi_1, \Phi_2 \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2) \wedge \eta = \alpha_1(\Phi_1 \wedge \eta) + \alpha_2(\Phi_2 \wedge \eta).$$

Ausblick:

- Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine k-Fläche, das heißt es gibt eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ der Klasse $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, F ist injektiv, DF_x ist injektiv und $S = F(U)$.

  Die Fläche S wird „orientiert“ durch die Orientierung von $\mathbb{R}^k$ und durch F.

- Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $S \subset W$. Sei ferner Φ eine k-Form auf W, das heißt $\Phi(p) \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ für $p \in W$.

- Das Integral von Φ über S kann erklärt werden durch

$$\int_S \Phi := \int_U \left\langle \underbrace{\Phi \circ F(x)}_{\in \bigwedge^k \mathbb{R}^n}, \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)}_{\in \bigwedge_k \mathbb{R}^n} \right\rangle \lambda^k(dx).$$

  Man zeigt mit Hilfe des Transformationssatz für Gebietsintegrale, dass diese Defintion von der Wahl von F unabhängig ist.

Definition (Äußeres Differential)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ eine k-Form der Klasse $\mathcal{C}^r$ mit $r \geq 1$.

(a) Ist $k = 0$, so ist $\Phi = f$ eine Funktion und $d\Phi = df$ ist als 1-Form auf U erklärt durch $df(p)(v) := D_v f(p)$, das heißt

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

denn

$$df(p)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot dx_i(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = \langle \nabla f(p), v \rangle = D_v f(p).$$

(b) Ist $k \geq 1$ und $\Phi = f \cdot dx_I$ für ein $I \in I_k^n$, dann sei $d\Phi := df \wedge dx_I$, das heißt $d\Phi(p) \in \bigwedge^{k+1} \mathbb{R}^n$ mit

$$d\Phi(p) = \underbrace{df(p)}_{\in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n} \wedge \underbrace{dx_I}_{\in \bigwedge^k \mathbb{R}^n} \in \bigwedge^{k+1} \mathbb{R}^n.$$

(c) Sei $k \geq 1$ und $\Phi = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I dx_I$ allgemein. $d\Phi$ wird durch lineare Fortsetzung erklärt, das heißt

$$d\Phi := \sum_{I \in I_k^n} d(\Phi_I dx_I) = \sum_{I \in I_k^n} d\Phi_I \wedge dx_I.$$

Bemerkungen: Es gilt

$$\langle d\Phi(p), v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k+1} \rangle = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \langle D_{v_i}\Phi(p), v_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{v_i} \wedge \cdots \wedge v_{k+1} \rangle.$$

Lemma 4.1
Seien Φ, Ψ jeweils k-Formen der Klasse C^r, $r \geq 1$, und Θ eine l-Form der Klasse C^s, $s \geq 1$. Dann gilt

(1) $d(\Phi + \Psi) = d\Phi + d\Psi$

(2) $d(\Phi \wedge \Theta) = d\Phi \wedge \Theta + (-1)^k \cdot \Phi \wedge d\Theta$.

Beweis
(2) Seien $\Phi = f dx_I$, $\Theta = g dx_J$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} d(\Phi \wedge \Theta) &= d(f \cdot dx_I \wedge g \cdot dx_J) = d((f \cdot g) \cdot dx_I \wedge dx_J) = d(f \cdot g) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (g \cdot df + f \cdot dg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= g \cdot df \wedge dx_I \wedge dx_J + f \cdot dg \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \wedge dx_I) \wedge (g \cdot dx_J) + (-1)^k \cdot (f \cdot dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= d\Phi \wedge \Theta + (-1)^k \cdot \Phi \wedge d\Theta. \end{aligned}$$

■

Lemma 4.2
Ist die k-Form $\Phi\colon U \to \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ von der Klasse $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$, so gilt $dd\Phi = 0$ (als $(k+2)$-Form).

Beweis
Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Phi = f \cdot dx_I$, $I \in I_k^n$. Dann gilt

$$d\Phi = df \wedge dx_I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I$$

und ferner

$$\begin{aligned}
d(d\Phi) &= d(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \cdot dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I) \\
&= (\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \cdot dx_j \wedge dx_i) \wedge dx_I \\
&= \sum_{i<j} (\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \cdot dx_j \wedge dx_i + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}} \cdot \underbrace{dx_i \wedge dx_j}_{-dx_j \wedge dx_i}) \wedge dx_I = 0.
\end{aligned}$$

■

Bemerkung: Eine k-Form Φ mit $d\Phi = 0$ heißt geschlossen. Eine k-Form Φ, zu der es eine $k-1$-Form η gibt mit $d\eta = \Phi$ heißt exakt. Lemma 4.2 besagt, dass jede exakte Form geschlossen ist.

Frage: Gilt auch die Umkehrung? Das heißt: Ist eine geschlossene Form stets exakt?

Im Allgemeinen gilt dies nicht. Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ ist dies jedoch richtig (Lemma von Poincaré).

Ziele:

- Integration von Differetialformen
- Satz von Stokes (Spezialfall)

Definition
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine λ^n-messbare Menge und ω eine stetige n-Form auf U. Dann wird das Integral von ω über U erklärt durch

$$\int_U \omega := \int_U \langle \omega(x), e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \, \lambda^n(dx)$$

wobei das U im linken Integral als Menge mit Orientierung (durch die rechts verwendete geordnete Standardbasis) zu verstehen ist. So legt man auch fest, dass

$$\int_{-U} \omega := \int_U -\langle \omega(x), e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \, \lambda^n(dx).$$

Niederdimensionale Mengen und Integration:

Beispiel
Sei $F = \{p\}$ eine 0-dimensionale Menge, sei ω eine 0-Form, das heißt eine Funktion $\omega\colon U \to \mathbb{R}$, $p \in U$. Dann wird erklärt

$$\int_F \omega := \omega(p) =: \delta_p(\omega).$$

Definition
Sei $n \geq 1$.

(1) Ein $(n-1)$-dimensionaler Quader F, der zur i-ten Koordinatenachse orthogonal ist, ist von der Form
$$F = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_i, b_i] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$
mit $a_i = b_i$ und $a_j < b_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$.

(2) Orientierung von F durch den $(n-1)$-Vektor
$$\hat{e}_i := \bigwedge_{j \neq i} e_j := e_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{e_i} \wedge \cdots \wedge e_n.$$

(3) Integration einer $(n-1)$-Form ω über F. Sei $\omega \colon F \to \bigwedge^{n-1} \mathbb{R}^n$ stetig (oder λ^{n-1}-messbar). Dann sei
$$\int_F \omega := \int_F \langle \omega(x), \hat{e}_i \rangle \, \lambda^{n-1}(dx)$$
und
$$\int_{-F} \omega := \int_F -\omega = \int_F -\langle \omega(x), \hat{e}_i \rangle \, \lambda^{n-1}(dx).$$

(4) Seien $\alpha_k \in \mathbb{R}$, F_k orientierte „Seitenflächen“ von n-dimensionalen Quadern, $k \in \mathbb{N}$. Sei $\sum \alpha_k F_k$ eine formale, endliche Linearkombination. Sei ω eine $(n-1)$-Form auf $U \subset \mathbb{R}^n$, $F_k \subset U$. Dann sei
$$\int_{\sum \alpha_k F_k} \omega := \sum \alpha_k \cdot \int_{F_k} \omega.$$

Definition (Orientierter Rand)
Sei $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein Quader mit $a_i < b_i$. Dann sei für $1 \leq i \leq n$
$$R_i^+ := [a_1, b_1] \times \cdots \times \{b_i\} \times \cdots \times [a_n, b_n],$$
$$R_i^- := [a_1, b_1] \times \cdots \times \{a_i\} \times \cdots \times [a_n, b_n]$$
und
$$\partial_o R := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (R_i^+ - R_i^-)$$
sei eine formale Linearkombination von Flächen.

Satz 4.3
Seien $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $a_i < b_i$ und φ eine $(n-1)$-Form der Klasse C^k mit $k \geq 1$, auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $R \subset U$. Dann gilt
$$\int_R d\varphi = \int_{\partial_o R} \varphi.$$

Beweis
Sei zunächst $n = 1$, φ eine 0-form, das heißt eine Funktion auf U. Es gilt $d\varphi(x) = \varphi'(x) \cdot dx$. Nun gilt

$$\int_{\partial_o R} \varphi = \int_{\partial_o [a_1,b_1]} \varphi = \int_{\{b\}-\{a\}} \varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$$

und

$$\begin{aligned}\int_R d\varphi = \int_{[a,b]} \varphi'(x)dx = \int_{[a,b]} \langle \varphi'(x)dx_1, e_1\rangle \, \lambda^1(dx) \\ = \int_a^b \varphi'(x)\, \lambda^1(dx) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_{\partial_o R} \varphi,\end{aligned}$$

wobei der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet wurde.

Sei nun $n \geq 2$. Dann hat φ eine Darstellung der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Es genügt, zu zeigen, dass für $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$\int_R d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) = \int_{\partial_0 R} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned} d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \int_R d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) &= (-1)^{i-1} \int_R \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \int_R \langle \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \, \lambda^n(dx) \\ &= (-1)^{i-1} \int_R \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x)\, \lambda^n(dx) \\ &= (-1)^{i-1} \cdot \left(\int_{R_i^+} \varphi_i \, d\mathscr{H}^{n-1} - \int_{R_i^-} \varphi_i \, d\mathscr{H}^{n-1} \right), \end{aligned}$$

wobei der Satz von Fubini und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet wurden.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial_o R} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \Big(\int_{R_j^+} \varphi_i(x) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n - \int_{R_j^-} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \Big(\int_{R_j^+} \varphi_i(x) \underbrace{\langle dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n, \hat{e}_j \rangle}_{= \begin{cases} 0, & \text{für } j \neq i \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}} \mathscr{H}^{n-1}(dx) \\
&\qquad - \int_{R_j^-} \varphi_i(x) \langle dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n, \hat{e}_j \rangle \, \mathscr{H}^{n-1}(dx) \Big) \\
&= (-1)^{i-1} \Big(\int_{R_i^+} \varphi_i \, d\mathscr{H}^{n-1} - \int_{R_i^+} \varphi_i \, d\mathscr{H}^{n-1} \Big).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Gleichheit. ∎

Im vorangehenden Beweis ist die Fallunterscheidung $n = 1$ bzw. $n \geq 2$ nicht zwingend erforderlich. Der Fall $n = 1$ kann dem Fall $n \geq 2$ untergeordnet werden.

Spezialfall: Divergenzsatz/Satz von Gauß-Green.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Setze $V_i(x) \coloneqq \langle V(x), e_i \rangle$, $x \in U$. Sei V von der Klasse $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. Die Divergenz von V ist

$$\operatorname{div}(V)(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x).$$

Ist φ eine $(n-1)$-Form auf $\mathbb{R}^n$ mit einer Darstellung der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

so setzt man

$$V(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \varphi_i \cdot e_i = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ -\varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
d\varphi &= \Big(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\Big) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= (\operatorname{div}(V)(x)) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.
\end{aligned}$$

Bezeichnet nun n den äußeren Normaleneinheitsvektor von R in ∂R, so folgt:

Korollar 4.4
Für ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld auf einer Umgebung von R gilt

$$\int_R \operatorname{div}(V)\, d\mathscr{H}^n = \int_{\partial R} \langle V, n\rangle\, d\mathscr{H}^{n-1}.$$

Zurückholen von Formen: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$ mit $k \geq 1$. Sei $x \in U$ und sei φ eine in $F(x)$ erklärte r-Form. dann wird eine r-Form $(F^{\#}\varphi)(x)$ erklärt als r-Kovektor durch:

$$\Big(F^{\#}\varphi\Big)(x)(v_1, \ldots, v_r) \coloneqq \varphi\Big(F(x)\Big)\Big(DF_x(v_1), \ldots, DF_x(v_r)\Big).$$

Im Spezialfall $r = 0$ ist φ eine Funktion und

$$(F^{\#}\varphi)(x) = \varphi(F(x)) = (\varphi \circ F)(x).$$

Bemerkungen: (1) Ist φ von der Klasse $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$, und F von der Klasse $\mathcal{C}^{k+1}$, so ist $F^{\#}\varphi$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$.

(2) $F^{\#}\varphi(x)$ kann als lineare Abbildung $\bigwedge_r \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden.

(3) Sei $L\colon V \to W$ linear. Dann wird durch

$$\bigwedge_r L\colon \bigwedge_r V \to \bigwedge_r W$$
$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \mapsto L(v_1) \wedge \cdots \wedge L(v_r)$$

eine lineare Abbildung erklärt.

(4) $(F^{\#}\varphi)(x)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = (\varphi \circ F)(x)(\bigwedge_r DF_x(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r))$.

Wir haben nun vier Operationen für Formen ($\wedge$, d, $f^{\#}$, $+$), für die nun Rechenregeln angegeben werden:

Lemma 4.5
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^l$ offene Mengen. Seien $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ Abbildungen der Klasse $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. Für k-Formen φ, ω auf V, eine h-Form η auf V und eine k-Form ζ auf W gelten die folgenden Aussagen:

(1) $f^{\#}(\omega + \varphi) = f^{\#}\omega + f^{\#}\varphi$,

(2) $f^{\#}(\varphi \wedge \eta) = (f^{\#}\varphi) \wedge (f^{\#}\eta)$,

(3) $d(f^{\#}\omega) = f^{\#}(d\omega)$,

(4) $(g \circ f)^{\#}\zeta = f^{\#}(g^{\#}(\zeta))$.

Beweis
Die Aussagen (1), (2), (4) folgen leicht aus den Definitionen (Übung). Zum Nachweis von (3) sei zunächst $k = 0$ und daher ω eine Funktion auf V. Dann gilt $f^\# \omega = \omega \circ f$. Für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$d(f^\#\omega)_x(v) = d(\omega \circ f)_x(v) = D(\omega \circ f)_x(v) = D\omega_{f(x)}(Df_x(v)) = d\omega_{f(x)}(Df_x(v)) = (f^\# d\omega)_x(v),$$

und damit die Behauptung im Fall $k = 0$. Sei nun $k = 1$ und $\omega = d\xi$ mit einer 0-Form ξ auf V. Dann gilt

$$d(f^\#\omega) = d(f^\# d\xi) = d(d(f^\#\xi)) = 0 = f^\#(dd\xi) = f^\#(d\omega).$$

Die Aussage (3) folgt nun wegen (1) und (2) daraus, dass jede „einfache“ k-Form äußeres Produkt einer 0-Form und äußeren Ableitungen von 0-Formen ist. ■

Definition
Seien R ein Quader in $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $R \subset U$. Sei $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$ mit $k \geq 1$, injektiv und DF_x injektiv für $x \in U$. Dann ist $F(R)$ eine n-dimensionale Fläche in $\mathbb{R}^m$, die mit $F_\# R$ bezeichnet wird. Formal erklärt man für $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und Quader R_i in $\mathbb{R}^n$

$$F_\#(\sum_i \alpha_i R_i) \coloneqq \sum_i \alpha_i F_\# R_i.$$

Ist ω eine n-Form auf einer Umgebung von $F(R)$ in $\mathbb{R}^m$, so sei

$$\begin{aligned}\int_{F_\# R} \omega &\coloneqq \int_R \langle \omega \circ F(x), \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x)}_{=DF_x(e_1)} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \rangle \, \lambda^n(dx) \\ &= \int_R \underbrace{\langle \omega \circ F(x), \textstyle\bigwedge_n DF_x(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\rangle}_{\langle (F^\#\omega)_x, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle} \, \lambda^n(dx) \\ &= \int_R F^\# \omega\end{aligned}$$

und analog für formale Linearkombination von Quadern.

Definition
Für einen Quader R in $\mathbb{R}^n$ (und analog für formale Linearkombination) erklärt man

$$\partial_o F_\# R \coloneqq \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}(F_\# R_i^+ - F_\# R_i^-) = F_\# \partial_0 R.$$

Satz 4.6
Sei $R \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $R \subset U$, $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ sei $\mathcal{C}^k$ mit $k \geq 1$, injektiv und DF_x injektiv für $x \in U$. Sei ω eine $(n-1)$-Form auf einer Umgebung von $F(R)$ in $\mathbb{R}^m$ von der Klasse $\mathcal{C}^2$. Dann gilt:

$$\int_{F_\# R} d\omega = \int_{\partial_o F_\# R} \omega.$$

Beweis
Man erhält

$$\int_{F_\# R} d\omega = \int_R F^\#(d\omega) = \int_R d(F^\#\omega) = \int_{\partial_o R} F^\#\omega = \int_{F_\# \partial_o R} \omega = \int_{\partial_0 F_\# R} \omega.$$ ■

4.2 Grundlagen und Beispiele

Wir definieren im Folgenden eine Topologie auf Differentialformen und Strömen.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\mathcal{E}^k(U) := \{(\varphi\colon U \to \bigwedge^k \mathbb{R}^n) : \varphi \text{ ist von der Klasse } \mathcal{C}^\infty\}.$$

Definiere zu $i \in \mathbb{N}_0$ und $K \subset U$, K kompakt, eine Seminorm ν_K^i auf $\mathcal{E}^k(U)$ durch

$$\nu_K^i(\varphi) := \sup\{\|D^j\varphi(x)\| : 0 \le j \le i,\, x \in K\}.$$

Es sei

$$\mathcal{O}(\varphi, i, K, \varepsilon) := \{\psi \in \mathcal{E}^k(U) : \nu_K^i(\varphi - \psi) < \varepsilon\}$$

für $i \in \mathbb{N}_0$, $K \subset U$ kompakt, $\varepsilon > 0$ $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$. Diese Mengen bilden eine Subbasis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf $\mathcal{E}^k(U)$. Dann ist $(\mathcal{E}^k(U), \mathcal{O})$ ein topologischer Raum (genauer: ein lokal konvexer, Hausdorffscher, topologischer Vektorraum; vgl. Walter Rudin, Functional Analysis, Seite 7).

Definition
Es sei

$$\mathcal{E}_k(U) := \{(T\colon \mathcal{E}^k(U) \to \mathbb{R}) : T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Zu $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sei

$$\mathcal{O}'(\varphi, a, b) := \{T \in \mathcal{E}_k(U) : a < T(\varphi) < b\}.$$

Auf $\mathcal{E}_k(U)$ wird die „schwache Topologie“ betrachtet, das heißt $\mathcal{O}'(\varphi, a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$ bilden eine Subbasis dieser Topologie.

Definition (Träger)
Für $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$ sei

$$\operatorname{supp}(\varphi) := U \setminus \bigcup\{W \subset U : W \text{ offen}, \varphi|_W = 0\}.$$

Für $T \in \mathcal{E}_k(U)$ sei

$$\operatorname{spt}(T) := U \setminus \bigcup\{W \subset U : W \text{ offen}, T(\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{E}^k(U) \text{ mit } \operatorname{supp}(\varphi) \subset W\}.$$

Lemma 4.7

(a) Zu $T \in \mathcal{E}_k(U)$ gibt es $M > 0$, $i \in \mathbb{N}_0$ und $K \subset U$ kompakt, so dass gilt:

$$T(\varphi) \le M \cdot \nu_K^i(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$.

(b) Seien $T_i, T \in \mathcal{E}_k(U)$, $i \in \mathbb{N}$, und $T_i \xrightarrow{s} T$ für $i \to \infty$. Dann existiert $K \subset U$, K kompakt, mit $\operatorname{spt}(T_i), \operatorname{spt}(T) \subset K$ für $i \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten jetzt Teilmengen von $\mathcal{E}^k(U)$. Sei hierzu $K \subset U$ kompakt und

$$\mathcal{D}_K^k(U) := \{\varphi \in \mathcal{E}^k(U) : \operatorname{supp}(\varphi) \subset K\} \subset \mathcal{E}^k(U),$$

$$\mathcal{D}^k(U) := \bigcup \{\mathcal{D}_K^k(U) : K \subset U \text{ kompakt}\}.$$

Auf $\mathcal{D}^k(U)$ wird die feinste Topologie betrachtet, für die alle Inklusionsabbildungen

$$i_K \colon \mathcal{D}_K^k(U) \to \mathcal{D}^k(U), \qquad \varphi \mapsto \varphi$$

stetig sind. Das heißt, $W \subset \mathcal{D}^k(U)$ ist offen genau dann, wenn $W \cap \mathcal{D}_K^k(U)$ offen ist in der Spurtopologie von $\mathcal{E}^k(U)$ auf $\mathcal{D}_K^k(U)$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset U$.

Definition
Es sei

$$\mathcal{D}_k(U) := \{(T \colon \mathcal{D}^k(U) \to \mathbb{R}) : T \text{ linear und stetig}\}.$$

Auf $\mathcal{D}_k(U)$ wird durch die Subbasis

$$\{T \in \mathcal{D}_k(U) : a < T(\varphi) < b\}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi \in \mathcal{D}^k(U)$ eine Topologie festgelegt.

Bemerkungen:

- Jedes $\varphi \in \mathcal{D}^k(U)$ hat kompakten Träger.
- $T \in D_k(U)$ hat im Allgemeinen keinen kompakten Träger.
- $\mathcal{D}^k(U) \subset \mathcal{E}^k(U)$, $\mathcal{E}_k(U) \subset \mathcal{D}_k(U)$. Dies folgt etwa aus dem nachfolgenden Lemma 4.9.

Lemma 4.8
Seien $\varphi_i, \varphi \in \mathcal{D}^k(U)$, $i \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\varphi_i \to \varphi \text{ für } i \to \infty$$

genau dann, wenn es eine kompakte Menge $K \subset U$ gibt, so dass $\operatorname{supp}(\varphi_i), \operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ für $i \in \mathbb{N}$ und für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt $\|D_j(\varphi_i - \varphi)\| \to 0$ für $i \to \infty$.

Lemma 4.9
Sei $T \colon \mathcal{D}^k(U) \to \mathbb{R}$ linear. Genau dann ist $T \in \mathcal{D}_k(U)$, wenn es zu jeder kompakten Menge $K \subset U$ ein $i \in \mathbb{N}_0$ und $M > 0$ gibt mit

$$T(\varphi) \leq M \cdot \nu_K^i(\varphi) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}_K^k(U).$$

Definition

- Die Elemente von $\mathcal{D}_k(U)$ heißen k-dimensionale Ströme auf U. ($k = 0$: Distributionen).
- Die Elemente von $\mathcal{E}_k(U)$ heißen k-dimensionale Ströme auf U mit kompaktem Träger.

Beispiele

(1) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. $S_g \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ wird erklärt durch

$$S_g(f) := \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,dx \text{ für } f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}).$$

Zum Nachweis sei $f \in \mathcal{D}^0_K(\mathbb{R})$, $K \subset U$ kompakt. Wegen

$$|S_g(f)| = |\int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,d(x)| \leq \int_R |g(x)| \underbrace{|f(g)|}_{\leq \nu^0_k(f)}\,dx \leq \nu^0_K(f) \cdot \underbrace{\int_K |g(x)|\,dx}_{=:M}$$

und Lemma 4.9 ist dies ein Strom.

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$, $\delta_a(f) := f(a)$ für $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$. Es ist $\delta_a \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$.

(3) Sei $a \in \mathbb{R}$, $T(f) := f'(a)$ für $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$. Es ist $T \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$.

(4) Sei $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. $[\![a,b]\!] \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$[\![a,b]\!](f(x)dx) := \int_a^b f(x)dx \text{ für } f(x)dx \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}).$$

(5) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ist M orientierbar, dann gibt es ein stetiges k-Vektorfeld $x \mapsto (\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x \in T_xM$, für $x \in M$, mit der Eigenschaft $\|(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x\| = 1$ für alle $x \in M$. (Die Existenz eines solchen stetigen k-Vektorfeldes ist äquivalent zur Orientierbarkeit von M; vgl. den Anhang, Abschnitt 5.4.) Dann ist $[\![M]\!] \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R})$ erklärt durch

$$[\![M]\!](\omega) := \int_M \omega := \int_M \langle \omega(x), (\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x \rangle\, \mathscr{H}^k(dx) \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n).$$

(6) Sei $\xi \in \mathcal{E}^{n-k}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \leq k \leq n$. Dann sei $T_\xi \in \mathcal{D}_k(U)$ erklärt durch

$$T_\xi(\omega) := \int_U \omega \wedge \xi = \int_U \langle \omega \wedge \xi, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^k(U).$$

(7) Sei $T \in \mathcal{D}_k(U)$, $\psi \in \mathcal{E}^m(U)$, $m \leq k$. Dann ist $T \lfloor \psi \in \mathcal{D}_{k-m}(U)$ erklärt durch

$$(T \lfloor \psi)(\omega) := T(\psi \wedge \omega) \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^{k-m}(U).$$

Definition (Rand eines Stroms)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T \in \mathcal{D}_k(U)$. Für $k \geq 1$ ist der Rand ∂T von T erklärt durch $\partial T \in \mathcal{D}_{k-1}(U)$ mit

$$\partial T(\omega) := T(d\omega)$$

für $\omega \in \mathcal{D}^{k-1}(U)$.

Beispiele

(1) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$$\partial([\![a,b]\!])(f) = [\![a,b]\!](df) = [\![a,b]\!](f'(x)dx) = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = (\delta_b - \delta_a)(f)$$

Also ist $\partial[\![a,b]\!] = \delta_b - \delta_a$.

(2) Sei $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist $T_g \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ erklärt durch

$$T_g(\omega(x)dx) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} g(x)\omega(x)dx.$$

Ferner sei $S_g \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ wie im vorigen Beispiel. Dann folgt

$$\partial T_g(f) = T_g(df) = T_g(f'(x)dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} g'(x)f(x)dx = -S_{g'}(f) = S_{-g'}(f)$$

Also ist $\partial T_g = S_{-g'}$.

(3) Sei in (2) nun g nur noch stetig, etwa $g(x) = |x|$. Dann ist $\partial T_g = S_{-\operatorname{sgn}}$.

(4) Sei M eine orientierte, kompakte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Rand ∂M und $[\![M]\!] \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R})$ der induzierte Strom. Mit dem Satz von Stokes folgt: Für $\eta \in \mathcal{D}^{k-1}(U)$ gilt

$$\partial[\![M]\!](\eta) = [\![M]\!](d\eta) = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = [\![\partial M]\!](\eta)$$

also gilt $\partial[\![M]\!] = [\![\partial M]\!]$.

(5) Sei $k \geq j+1$, $\xi \in \mathcal{E}^j(U)$, $T \in \mathcal{D}_k(U)$ und $\omega \in \mathcal{D}^{k-j-1}(U)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\partial(T\lfloor\xi)(\omega) = T\lfloor\xi(d\omega) &= T(\xi \wedge d\omega) \\
&= T((-1)^j d(\xi \wedge \omega) + (-1)^{j-1} d\xi \wedge \omega) \\
&= (-1)^j T(d(\xi \wedge \omega)) + (-1)^{j-1} T(d\xi \wedge \omega) \\
&= (-1)^j \partial T(\xi \wedge \omega) + (-1)^{j-1}(T\lfloor d\xi)(\omega) \\
&= (-1)^j((\partial T)\lfloor\xi)(\omega) + (-1)^{j-1}(T\lfloor d\xi)(\omega),
\end{aligned}$$

also gilt

$$\partial(T\lfloor\xi) = (-1)^j((\partial T)\lfloor\xi) + (-1)^{j-1}(T\lfloor d\xi)$$

und somit

$$(\partial T)\lfloor\xi = T\lfloor(d\xi) + (-1)^j \partial(T\lfloor\xi).$$

(6) $\partial\partial T = 0$, für $T \in \mathcal{D}_k(U)$ mit $k \geq 2$, da $\partial\partial T(\omega) = \partial T(d\omega) = T(dd\omega) = T(0) = 0$.

Definition (Masse von Differentialformen und Strömen)

- Euklidische Masse von Differentialformen $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ in $x \in U$:

$$|\omega(x)| \coloneqq \Big(\sum_{I \in I_k^n} \omega_I(x)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

- Komasse von $\omega(x)$:

$$\|\omega(x)\| \coloneqq \sup\{\omega(x)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) : v_i \in \mathbb{R}^n, \|v_i\| \leq 1\}$$

- Euklidische Masse eines Stromes $T \in \mathcal{D}_k(U)$:

$$\underline{\mathbf{M}}(T) \coloneqq \sup\{T(\omega) : |\omega(x)| \leq 1 \ \forall x \in U\}$$

- Masse von T:
$$\mathbf{M}(T) \coloneqq \sup\{T(\omega) : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\}$$

Wegen
$$|\omega(x)| \geq \|\omega(x)\| \geq \binom{n}{k}^{-\frac{1}{2}} \cdot |\omega(x)|$$
folgt
$$\binom{n}{k}^{-1/2} \cdot \mathbf{M}(T) \leq \underline{\mathbf{M}}(T) \leq \cdot \mathbf{M}(T)$$
mit einer Konstanten c, die nur von n abhängt.

Beispiel
Ist $T = [\![M]\!]$, M eine orientierbare, kompakte, k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(T) &= \sup\{\int_M \omega : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\} \\ &= \sup\{\int_M \underbrace{\langle \omega(x), \xi(x)\rangle}_{\leq \|\omega(x)\| \cdot \|\xi(x)\| \leq 1} \mathscr{H}^k(dx) : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\} \\ &\leq \mathscr{H}^k(M).\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass hier sogar Gleichheit gilt.

Definition
Eine Folge $T_i \in \mathcal{D}_k(U)$ konvergiert in der Massenorm gegen ein $T \in \mathcal{D}_k(U)$, falls $\mathbf{M}(T_i - T) \to 0$ für $i \to \infty$.

Bemerkung:
- Ist $\mathbf{M}(0) = 0$, so gilt $T = 0$.
- Gilt $T_i \to T$ in der Massenorm, so gilt $T_i \stackrel{s}{\rightharpoonup} T$, denn:

  Sei $T_j \to 0$ in der Massenorm für $j \to \infty$, das heißt $\mathbf{M}(T_j) \to 0$. Für $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ gilt:
  $$|T_j(\omega)| \leq \mathbf{M}(T_j) \cdot \sup_{x \in U} \|\omega(x)\| \to 0$$
  also $T_j(\omega) \stackrel{s}{\rightharpoonup} 0$ für $j \to \infty$.

  Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht: Seien $T_j = \delta_j \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbf{M}(T_j) = 1$, aber $T_j \stackrel{s}{\rightharpoonup} 0$, da $T_j(f) \to 0$ für $j \to \infty$ und $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$.

Lemma 4.10
Seien $T_j, T \in \mathcal{D}_k(U)$, $j \in \mathbb{N}$ und $T_j \stackrel{s}{\rightharpoonup} T$ für $j \to \infty$. Dann gilt
$$\mathbf{M}(T) \leq \liminf_{j \to \infty} \mathbf{M}(T_j).$$

Beweis
Sei $\mathbf{M}(T) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ mit $\|\omega(x)\| \leq 1$ für alle $x \in U$ und $T(\omega) \geq \mathbf{M}(T) - \varepsilon$. Daher folgt:

$$\liminf_{j\to\infty} \mathbf{M}(T_j) \geq \liminf_{j\to\infty} T_j(\omega) = T(\omega) \geq \mathbf{M}(T) - \varepsilon$$

also $\mathbf{M}(T) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathbf{M}(T_j)$.

Sei $\mathbf{M}(T) = \infty$. Dann existiert zu $m \in \mathbb{N}$ ein ω wie oben mit $T(\omega) \geq m$. Weiter wie oben. ■

Beispiel
Ströme mit minimaler Masse
$T = [\![B^2]\!] \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$, d.h. $T(\omega) = \int_B \langle \omega(x), e_1 \wedge e_2 \rangle \mathscr{H}^2(dx)$, $\omega \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^2)$.

Frage: Hat T minimale Masse unter allen 2-Strömen $S \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$ mit $\partial S = \partial T = [\![\partial B^2]\!]$.

<++>

Lemma 4.11
Sei $T \in \mathcal{D}_n(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbf{M}(T) < \infty$. Es gebe ein $\Omega = d\varphi \in \mathcal{D}^n(U)$ mit $\|\Omega\| \leq 1$ und $\mathbf{M}(T) = T(\Omega)$. Dann gilt für alle $S \in \mathcal{D}_n(U)$ mit $\partial S = \partial T$:

$$\mathbf{M}(T) \leq \mathbf{M}(S).$$

Beweis
$\mathbf{M}(T) = T(\Omega) = T(d\varphi) = \partial T(\varphi) = \partial S(\varphi) = S(d\varphi) = S(\Omega) \leq \mathbf{M}(S)$. ■

Zurück zum Beispiel: Sei $\Omega := dx_1 \wedge dx_2 \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\|\Omega\| = 1$ und

$$T(\Omega) = \int_{B^2} \underbrace{\langle dx_1 \wedge dx_2, e_1 \wedge e_2 \rangle}_{=1} \mathscr{H}^2(dx) = \mathscr{H}^2(B^2) = \mathbf{M}(T),$$

da

$$T(\omega) = \int_{B^2} \underbrace{\langle \omega, e_1 \wedge e_2 \rangle}_{\leq \|\omega\| \cdot \|e_1 \wedge e_2\|} d\mathscr{H}^2.$$

Ferner gilt für $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$ gerade $d\varphi_x = \frac{1}{2} \cdot (dx_1 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge dx_1) = \Omega$. Mit obigem Lemma folgt, dass T minimierend ist. Zur Berechnung von ∂T betrachten wir

$\eta = \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{aligned}
\partial T(\eta) = T(d\eta) &= T(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2) \\
&= T((\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}) dx_1 \wedge dx_2) \\
&= \int_{B^2} (\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}) \mathscr{H}^2(dx) \\
&= \int_{B^2} \div \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix} \mathscr{H}^2(dx) \\
&= \int_{S^1} \underbrace{\langle \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix} (x), x \rangle}_{= \eta_2(x) \cdot x_1 - \eta_1(x) x_2} \mathscr{H}^1(dx) \\
&= \int_{S^1} \langle \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2, \underbrace{-x_2 e_1 + x_1 e_2}_{\xi \in T_x S^1} \rangle \mathscr{H}^1(dx) \\
&= \int_{S^1} \langle \eta, \xi \rangle d\mathscr{H}^1 \\
&= [\![S^1]\!](\eta).
\end{aligned}$$

4.3 Ströme mit lokalendlicher Masse

Für Ströme mit lokalendlicher Masse liefert der Rieszsche Darstellungssatz eine „explizite“ Integraldarstellung. Dazu sei

$$\mathbf{M}_k(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}(T) < \infty\}$$

die Menge der *Ströme endlicher Masse* und

$$\mathbf{N}_k(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}(T) < \infty \text{ und } \mathbf{M}(\partial T) < \infty\}$$

die Menge der *normalen Ströme.*

Beispiel
$T \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ mit $T(\omega(x)\, dx) := \omega(0)$. Dann ist $\|\omega(x)\, dx\| = |\omega(x)|$ und daher $\mathbf{M}(T) = 1$. Aber $\partial T(f) = T(df) = T(f'(x)\, dx) = f'(0)$ für $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$ und somit $\mathbf{M}(\partial T) = \infty$.

Lokalisierung: Sei $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$, V und U offen, $T \in \mathcal{D}_k(U)$. Es sei

$$\underline{\mathbf{M}}_V(T) := \sup\{T(\omega) : \; |\omega(x)| \; \leq 1 \; \forall x \in U, \operatorname{supp}(\omega) \subset V\}$$

und

$$\mathbf{M}_V(T) := \sup\{T(\omega) : \|\omega(x)\| \leq 1 \; \forall x \in U, \operatorname{supp}(\omega) \subset V\}.$$

Weiter seien definiert:

$$\underline{\mathbf{M}}_{k,\mathrm{loc}}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \underline{\mathbf{M}}_V(T) < \infty \ \forall V \subset U,\ V \text{ offen},\ \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\mathbf{M}_{k,\mathrm{loc}}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}_V(T) < \infty \ \forall V \subset U,\ V \text{ offen},\ \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\underline{\mathbf{N}}_{k,\mathrm{loc}}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \underline{\mathbf{N}}_V(T) < \infty,\ \underline{\mathbf{N}}_V(\partial T) < \infty \ \forall V \subset U,\ V \text{ offen},\ \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\mathbf{N}_{k,\mathrm{loc}}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{N}_V(T) < \infty,\ \mathbf{N}_V(\partial T) < \infty \ \forall V \subset U,\ V \text{ offen},\ \bar{V} \text{ kompakt in } U\}.$$

Satz 4.12
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T_i \in \mathcal{D}_k(U)$, $i \in \mathbb{N}$, mit

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_V(T_i) < \infty \qquad \text{für alle } V \subset U \text{ offen },\bar{V} \text{ kompakt },\bar{V} \subset U.$$

Dann gibt es eine Teilfolge $(T_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ und $T \in \mathcal{D}_k(U)$ mit $T_{n_i} \overset{s}{\rightharpoonup} T$ für $i \to \infty$.

Beweis (Skizze)
Verwende, dass Ströme stetige, lineare Funktionale auf $\mathcal{D}^k(U)$ (topologischer Vektorraum) sind. Jetzt kann man lokal den Satz von Banach-Alaoglu anwenden, der die Auswahl einer lokal schwach* konvergenten Teilfolge erlaubt. Diagonalargument. ∎

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei μ ein borelreguläres Maß auf U mit $\mu(K) < \infty$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (Radonmaß). Sei $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ eine μ-messbare Abbildung und $\|\xi\| = 1$ μ-fast-überall. Dann wird durch

$$L(f) := \int_U \langle f(x), \xi(x)\rangle \mu(dx), \quad f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^n)$$

ein lineares Funktional $L : \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ erklärt. Es gilt

$$|L(f)| \le \int_U |\langle f(x), \xi(x)\rangle| \mu(dx) \le \mu(K) < \infty$$

falls $f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m)$, $\mathrm{supp}(f) \subset K$, $K \subset U$ kompakt, $\|f\| \le 1$. In dieser Situation gilt

$$\sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m), \|f\| \le 1, \mathrm{supp}(f) \subset K\} < \infty$$

für alle $K \subset U$, K kompakt.

Satz 4.13 (Riesz)
Sei $L\colon \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ein lineares Funktional, das

$$\sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m), \|f\| \le 1, \mathrm{supp}(f) \subset K\} < \infty$$

erfüllt. Dann existiert ein Radonmaß μ auf U und eine μ-messbare Abbildung $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ mit $\|\xi(x)\| = 1$ für μ-fast-alle $x \in U$ und

$$L(f) = \int_U \langle f(x), \xi(x)\rangle \mu(dx), \quad f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m).$$

Ferner gilt für $V \subset U$ offen:

$$\mu(V) = \sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m),\ \mathrm{supp}(f) \subset V,\ \|f\| \le 1\}.$$

Beweis
Siehe L. Simon, Lecture Notes of the ANU, Canberra, GMT. ∎

Als Folge erhält man für Ströme lokalendlicher Masse.

Satz 4.14
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T \in \mathcal{D}_k(U)$. Dann sind äquivalent:

(1) $T \in \mathbf{M}_{k,\mathrm{loc}}(U)$.

(2) Es gibt ein Radonmaß μ_T auf U und eine μ_T-messbare Abbildung $\xi : U \to \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ mit $|\xi(x)| = 1$ für μ_T-fast-alle $x \in U$, so dass gilt:

$$T(\omega) = \int \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \mu_T(dx), \quad \omega \in \mathcal{D}^k(U).$$

Hierbei ist für $V \subset U$ offen:

$$\mu_T(V) = \sup\{T(\omega) : \omega \in \mathcal{D}^k(U), \forall x \in U \colon |\omega(x)| \leq 1, \operatorname{supp}(\omega) \subset V\} = \underline{\mathbf{M}}_V(T).$$

Bemerkung: (1) In der Situation des Satzes sagt man, dass T als Integral darstellbar ist.

(2) Auf $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ gibt es die euklidische Norm $|\cdot|$, sowie die Komassen-Norm $\|\cdot\|$. Ferner existiert auf $\bigwedge_k \mathbb{R}^n$ neben der euklidischen Norm $|\cdot|$ die Masse-Norm $\|\cdot\|$:

$$\|\xi\| := \sup\{\langle \omega, \xi \rangle : \omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n, \|\omega\| \leq 1\}$$

Zusammenhänge:

$$|\omega| \geq \|\omega\| \geq \binom{n}{k}^{-\frac{1}{2}} \cdot |\omega|, \qquad \omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n,$$

$\|\omega\| = |\omega|$ für einen einfachen Kovektor ω. Hierbei nennt man $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ einfach, falls es $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$ gibt mit $\omega = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k$. Es gilt nun

$$|\xi| \leq \|\xi\| \leq \binom{n}{k}^{\frac{1}{2}} |\xi|, \qquad , \xi \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n, \qquad \text{und } \|\xi\| = |\xi|$$

für ξ einfach. Für die Verknüpfung mit dem äußeren Produkt gilt dann

$$\|\xi \wedge \eta\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \ \|\varphi \wedge \omega\| \leq \binom{p+q}{p} \|\varphi\| \cdot \|\omega\|,$$

$\xi \in \bigwedge_p \mathbb{R}^n$, $\eta \in \bigwedge_q \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \bigwedge^p \mathbb{R}^n$, $\omega \in \bigwedge^q \mathbb{R}^n$.

$$|\langle \varphi, \xi \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\xi\|$$

für $\varphi \in \bigwedge^p \mathbb{R}^n$, $\xi \in \bigwedge_p \mathbb{R}^n$.

(3) Im vorangehenden Satz setzt man $\overrightarrow{T}(x) := \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}$ und $\|T\| := \|\xi\| \cdot \mu_T$, wobei

$$\|T\|(M) = \int \mathbb{1}_M(x)\|\xi(x)\|\mu_T(dx)$$

und erhält so:

$$T(\omega) = \int_U \langle \omega(x), \overrightarrow{T}(x) \rangle \, \|T\|(dx)$$

mit $\|\overrightarrow{T}\| = 1$, $\|T\|$-fast-überall auf U, $\|T\|(V) = \sup\{T(\omega : \omega \in \mathcal{D}^k(U),\ \|\omega(x)\| \leq 1$ für $x \in U$, $\operatorname{supp}(\omega) \subset V\}$, sowie $\mathbf{M}_V(T) = \|T\|(V)$.

(4) Ist T durch ein Integral darstellbar, so erklärt man für $A \subset U$, A Borelsch:

$$(T\lfloor A)(\omega) := \int_A \langle \omega, \overrightarrow{T} \rangle \, d\|T\|$$

oder für eine beschränkte Borelfunktion $f : U \to \mathbb{R}$:

$$(T\lfloor f)(\omega) := \int_U f \cdot \langle \omega, \overrightarrow{T} \rangle \, d\|T\|.$$

4.4 Produkt, Push-forward und Homotopieformel

Produkt von Strömen. Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ offen und $S \in \mathcal{D}_{m_1}(U_1)$, $T \in \mathcal{D}_{m_2}(U_2)$ Ströme. Im Folgenden sind $x_1, \ldots, x_{n_1}$ Koordinaten von $\mathbb{R}^{n_1} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ und $y_1, \ldots, y_{n_2}$ sind Koordinaten (bzw. Koordinatenfunktionen) von $\mathbb{R}^{n_2} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ (mit naheliegenden Identifikationen).

Sei $\omega \in \mathcal{D}^{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$. Dann kann man ω in der Form

$$\omega = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ |\alpha|+|\beta|=m_1+m_2}} \omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta$$

geschrieben werden.

Definition
Mit obiger Notation setzen wir

$$S \times T(\omega) := \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ |\alpha|=m_1 \\ |\beta|=m_2}} S_x(T_y(\omega_{\alpha\beta}(x,y)dy_\beta)dx_\alpha).$$

Man kann sich leicht überlegen, dass diese Definition korrekt ist, das heißt etwa, dass das Argument von S im Definitionsbereich von S ist und $S \times T \in \mathcal{D}_{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$ wieder ein Strom ist.

Satz 4.15
Seien $S \in \mathcal{D}_{m_1}(U_1)$ und $T \in \mathcal{D}_{m_2}(U_2)$ Ströme.

(1) Seien $p\colon \mathbb{R}^{m_1+m_2} \to \mathbb{R}^{m_1}$, $(x,y) \mapsto x$ und $q\colon \mathbb{R}^{m_1+m_2} \to \mathbb{R}^{m_2}$, $(x,y) \mapsto y$ die Projektionsabbildungen. Seien $\varphi \in \mathcal{D}^k(U_1)$, $\eta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2-k}(U_2)$. Dann gilt:

$$S \times T(p^{\#}\varphi \wedge q^{\#}\eta) = \begin{cases} S(\varphi) \cdot T(\eta), & k = m_1, \\ 0, & k \neq m_1 \end{cases}$$

und für

$$\omega = \sum_{\alpha,\beta} \omega_\alpha(x)\omega_\beta(y)dx_\alpha \wedge dy_\beta = \underbrace{\Big(\sum_\alpha \omega_\alpha(x)dx_\alpha\Big)}_{:=\omega_1(x)} \wedge \underbrace{\Big(\sum_\beta \omega_\beta(y)dy_\beta\Big)}_{:=\omega_2(y)}$$

gilt

$$S \times T(\omega) = S(\omega_1) \cdot T(\omega_2).$$

(2) $\operatorname{spt}(S \times T) = \operatorname{spt}(S) \times \operatorname{spt}(T)$.

(3) $\partial(S \times T) = \partial S \times T + (-1)^{m_1} S \times \partial T$.

(4) Seien $P : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $x \mapsto (x,0)$, $Q : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $y \mapsto (0,y)$. Haben S und T lokalendliche Massen, so auch $S \times T$ und

$$S \times T(\cdot) = \int \langle \cdot, (\textstyle\bigwedge_{m_1} P)\overrightarrow{S} \wedge (\bigwedge_{m_2} Q)\overrightarrow{T} \rangle \, d(\|S\| \otimes \|T\|)$$

Beweis

(3) Sei $\omega = \omega_{\alpha\beta}(x,y)dx_\alpha \wedge dy_\beta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2-1}(U_1 \times U_2)$. Dann ist

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_\alpha \wedge dy_\beta + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial y_j} dy_j \wedge dx_\alpha \wedge dy_\beta.$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} \partial(S \times T)(\omega) &= S \times T(dw) \\ &= S(\sum_{i=1}^{n_1} T(\frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_i} dy_\beta) dx_i \wedge dx_\alpha) + (-1)^{|\alpha|} S(T(\sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial y_j} dy_j \wedge dy_\beta) dx_\alpha) \\ &= S(d_x(T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha)) + (-1)^{|\alpha|} S(T(d_y(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha)) \\ &= \partial S(T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha)) + (-1)^{m_1} S(\partial T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha) \\ &= \partial S \times T(\omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) + (-1)^{m_1} (S \times \partial T)(\omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) \\ &= (\partial S \times T + (-1)^{m_1} (S \times \partial T))(\omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) \\ &= (\partial S \times T + (-1)^{m_1} (S \times \partial T))(\omega). \end{aligned}$$

(4) Sei $\omega = \omega_{\alpha\beta}(x,y)dx_\alpha \wedge dy_\beta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$. Die Voraussetzung besagt, dass

$$S = \int_{U_1} \langle \cdot, \overrightarrow{S} \rangle d\|S\|$$

und
$$T = \int_{U_2} \langle \cdot, \overrightarrow{T} \rangle d\|T\|.$$
Es folgt
$$\begin{aligned}
S \times T(\omega) &= S_x(T_y(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha) \\
&= \int \langle T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha, \overrightarrow{S} \rangle d\|S\| \\
&= \int T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) \langle dx_\alpha, \overrightarrow{S} \rangle d\|S\| \\
&= \int_{U_1} \int_{U_2} \langle \omega_{\alpha\beta} dy_\beta, \overrightarrow{T} \rangle \, d\|T\| \langle dx_\alpha, \overrightarrow{S} \rangle \, d\|S\| \\
&= \int_{U_1 \times U_2} \langle \omega_{\alpha\beta}(x,y) dy_\beta, \overrightarrow{T}(y) \rangle \langle dx_\alpha, \overrightarrow{S}(x) \rangle \, d(\|S\| \otimes \|T\|) \\
&= \int_{U_1 \times U_2} \langle \omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta, (\textstyle\bigwedge_{n_1} P) \overrightarrow{S}(x) \wedge (\textstyle\bigwedge_{n_2} Q) \overrightarrow{T}(y) \rangle \, d(\|S\| \otimes \|T\|). \blacksquare
\end{aligned}$$
Fazit: Es gilt insbesondere
$$\|S \times T\| = \|S\| \otimes \|T|, \qquad \overrightarrow{S \times T} = (\textstyle\bigwedge_{n_1} P) \overrightarrow{S} \wedge (\textstyle\bigwedge_{n_2} Q) \overrightarrow{T}.$$

Beispiel
Ist T durch ein Integral darstellbar, so auch $[\![0,1]\!] \times T$ mit $\|[\![0,1]\!] \times T\| = \lambda^1_{[0,1]} \otimes \|T\|$ und $\overrightarrow{[\![0,1]\!] \times T} =$„$e_1 \wedge \overrightarrow{T}$“ (hier wurden die Einbettungsabbildungen weggelassen).

Bild eines Stromes. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Ferner seien $T \in \mathcal{D}_k(U)$ und $f \colon U \to V$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung. **Voraussetzung:** $f|_{\mathrm{spt}(T)}$ sei eigentlich (das heißt, für $K \subset V$, K kompakt sei $f^{-1}(K) \cap \mathrm{spt}(T) \subset U$ stets kompakt).

Beispiel
Seien $f \colon U := (0,\infty) \to V := \mathbb{R}$ und $T := [\![0,b]\!] \in \mathcal{D}_0(U)$ für $b > 0$. Dann ist
$$f^{-1}([0,b]) \cap \mathrm{spt}(T) = (0,b] \cap [0,b] = (0,b] \subset U$$
nicht kompakt.

Definition
Seien f und T wie oben. Sei $\omega \in \mathcal{D}^k(V)$. Sei $\gamma \in \mathcal{D}_0(U)$ mit
$$\mathrm{spt}(T) \cap \underbrace{\mathrm{supp}(f^\# \omega)}_{\subset f^{-1}(\mathrm{supp}(\omega))} \subset \{\gamma = 1\}^o.$$
Dann setzt man
$$(f_\# T)(\omega) := T(\gamma \wedge f^\# \omega).$$

Bemerkungen: (i) $\mathrm{supp}(f^\# \omega) \subset f^{-1}(\mathrm{supp}(\omega))$ und $\mathrm{supp}(\omega) \subset V$ ist kompakt, das heißt $\mathrm{spt}(T) \cap \mathrm{supp}(f^\# \omega) \subset \mathrm{spt}(T) \cap f^{-1}(\mathrm{supp}(\omega))$. Dabei ist $\mathrm{spt}(T) \cap f^{-1}(\mathrm{supp}(\omega))$ kompakt und $\mathrm{spt}(T) \cap \mathrm{supp}(f^\# \omega)$ abgeschlossen und damit auch kompakt.

(ii) Auf die Einführung von γ kann man im Allgemeinen nicht verzichten, da $\operatorname{supp}(f^{\#}\omega)$ nicht kompakt sein muss.

(iii) Die Definition von $(f_{\#}T)(\omega)$ ist von der konkreten Wahl von γ unabhängig. Seien nämlich γ_1, γ_2 wie oben. Es ist

$$\operatorname{supp}((\gamma_1 - \gamma_2) \wedge f^{\#}\omega) \cap \operatorname{spt}(T) = \emptyset.$$

Daraus folgt mittels einer Zerlegung der Eins

$$T((\gamma_1 - \gamma_2) \wedge f^{\#}\omega) = 0.$$

Dies schließlich ergibt

$$T(\gamma_1 \wedge f^{\#}\omega) = T(\gamma_2 \wedge f^{\#}\omega).$$

(iv) Manchmal geht es auch ohne γ.

Lemma 4.16
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $T \in \mathcal{D}_k(U)$, $f\colon U \to V$ von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$, wobei $f|_{\operatorname{spt}(T)}$ eigentlich ist. Dann gilt

(1) $\operatorname{spt}(f_{\#}T) \subset f(\operatorname{spt}(T))$

(2) $\partial(f_{\#}T) = f_{\#}(\partial T)$.

(3) Ist T durch ein Integral darstellbar, so gilt das auch für $f_{\#}T$ und

$$\|f_{\#}T\| \leq f_{\#}\big(\|T\| \llcorner \|(\textstyle\bigwedge_m Df)\overrightarrow{T}\|\big).$$

Hierbei ist für eine messbare Menge $A \subset V$ die rechte Seite erklärt durch

$$f_{\#}\big(\|T\| \llcorner \|(\textstyle\bigwedge_m Df)\overrightarrow{T}\|\big)(A) = \displaystyle\int_{f^{-1}(A)} \|\textstyle\bigwedge_m Df_x \overrightarrow{T}(x)\| \, \|T\|(dx).$$

Satz 4.17 (Homotopieformel)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, seien $f, g\colon U \to V$ von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ und $h\colon [0,1] \times U \to V$ von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ mit $h(0,\cdot) = f$ und $h(1,\cdot) = g$. Sei $T \in \mathcal{D}_k(U)$ und $h|_{[0,1]\times\operatorname{spt}(T)}$ sei eigentlich. Dann gilt

$$g_{\#}T - f_{\#}T = h_{\#}([\![0,1]\!] \times \partial T) + \partial h_{\#}([\![0,1]\!] \times T),$$

wobei für $k = 0$ der erste Term in der Summe entfällt.

Beweis
Wegen $\operatorname{spt}([\![0,1]\!] \times T) = [0,1] \times \operatorname{spt}(T)$ und $\operatorname{spt}(\partial T) \subset \operatorname{spt}(T)$ und nach Voraussetzung sind alle

Ströme erklärt. Nun gilt:

$$\begin{aligned}\partial h_\#([\![0,1]\!] \times T) &= h_\# \partial([\![0,1]\!] \times T) \\ &= h_\#(\partial[\![0,1]\!] \times T + (-1)^1 [\![0,1]\!] \times \partial T) \\ &= h_\#((\delta_1 - \delta_0) \times T - [\![0,1]\!] \times \partial T) \\ &= h_\#(\delta_1 \times T) - h_\#(\delta_0 \times T) - h_\#([\![0,1]\!] \times \partial T) \\ &= g_\# T - f_\# T - h_\#([\![0,1]\!] \times \partial T).\end{aligned}$$

Sei für den letzten Schritt $\tau\colon U \to \mathbb{R} \times U$, $x \mapsto (0,x)$. Dann ist $\delta_0 \times T = \tau_\# T$. In der Tat:

$$\delta_0 \times T(\omega(t,x)dx) = \delta_0(T(\omega(t,x)dx) = T(\omega(0,x)dx)$$

und

$$\tau_\# T(\omega(t,x)dx) = T(\gamma \wedge \tau^\#(\omega(t,x)dx)) = T(\gamma \wedge \omega(0,x)dx) = T(\omega(0,x)dx).$$

Hiermit folgt

$$h_\#(\delta_0 \times T) = h_\#(\tau_\# T) = (h \circ \tau)_\# T = f_\# T.$$

Die hierbei benutzte Eigenschaft $h_\# \circ \tau_\# = (h \circ \tau)_\#$ ist leicht einzusehen. ∎

Beispiel
Sei $T \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial T = 0$, $\operatorname{spt}(T)$ kompakt, $k \geq 1$. Nach der Homotopieformel gilt

$$g_\# T - f_\# T = \partial h_\#([\![0,1]\!] \times T) + 0.$$

Ist spezieller: $g(x) := x$, $f(x) := 0$, so gilt $g_\# T = T$, $f_\# T = 0$ und somit:

$$T = \partial \underbrace{h_\#([\![0,1]\!] \times T)}_{\in \mathcal{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Korollar 4.18
Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.17.

(a) Ist T durch ein Integral darstellbar, so gilt mit der affinen Homotopie $h(t,x) = (1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$:

$$\mathbf{M}(h_\#([\![0,1]\!] \times T)) \leq \|T\|\big(|g-f| \cdot \max\{\|Df\|^k, \|Dg\|^k\}\big).$$

(b) Ist $\mathbf{M}(T) < \infty$ und h wie in (a), so gilt

$$\mathbf{M}(h_\#([\![0,1]\!] \times T)) \leq \sup_{\operatorname{spt}(T)} |g-f| \cdot \sup_{\operatorname{spt}(T)} \{\|Df\|^k, \|Dg\|^k\} \cdot \mathbf{M}(T).$$

Beweis
Für $\psi \in \mathcal{D}^{k+1}(V)$ folgt:

$$
\begin{aligned}
h_\#([\![0,1]\!] \times T)(\psi) &= \int_{(0,1)\times U} \langle e_1 \wedge \overrightarrow{T}, h^\# \psi\rangle \,(\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t,x)) \\
&= \int_{(0,1)\times U} \langle \psi(h(t,x)), \underbrace{\textstyle\bigwedge_{k+1} Dh_{(t,x)}(e_1 \wedge \overrightarrow{T})}_{=(g(x)-f(x))\wedge \underbrace{\bigwedge_k D_x h_{(t,x)} \overrightarrow{T}}_{=(1-t)Df_x(\overrightarrow{T})+t\cdot Dg_x(\overrightarrow{T})}}\rangle \,(\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t,x)) \\
&= \int_{(0,1)\times U} \|\psi(h(t,x))\| \cdot \big((1-t)\|Df_x\|^k + t\cdot \|Dg_x\|^k\big)\,(\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t,x)). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Anwendung: Sei U sternförmig in $\mathbb{R}^n$ bezüglich $u \in U$. Betrachte: $g(x) := x$, $f(x) := u$, $x \in U$, $h(t,x) := (1-t)\cdot u + t \cdot x$. Für $\psi \in \mathcal{D}^k(U)$ ist $f^\#\psi = 0$ ($k \geq 1$) und $g^\#\psi = \psi$. Wir betrachten den speziellen Strom

$$T(\beta) := \langle \beta, \eta\rangle, \quad \beta \in \mathcal{D}^k(U),$$

wobei $\eta \colon U \to \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ fest gewählt ist mit kompaktem Träger in U und von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
g_\# T(\psi) &= T(\gamma \wedge g^\#\psi) = T(\gamma\wedge\psi) = \langle \gamma \wedge \psi, \eta\rangle = \langle \psi, \eta\rangle \\
f_\# T(\psi) &= 0 \\
h_\#([\![0,1]\!] \times \partial T)(\psi) &= [\![0,1]\!] \times \partial T(h^\#\psi) = \partial T\big((h^\#\psi)_{[\![0,1]\!]}\big) = T\big(d((h^\#\psi)_{[\![0,1]\!]})\big) \\
\partial h_\#([\![0,1]\!] \times T)(\psi) &= h_\#([\![0,1]\!] \times T)(d\psi) = \dots
\end{aligned}
$$

Ist $d\psi = 0$, so erhält man aus der Homotopieformel für Ströme:

$$\langle \psi, \eta\rangle = T\big(d((h^\#\psi)_{[\![0,1]\!]})\big) + 0$$

und damit

$$\langle \psi, \eta \rangle = \langle d((h^\#\psi)_{[\![0,1]\!]}), \eta\rangle.$$

Dies zeigt

$$\varphi = d((h^\#\psi)_{[\![0,1]\!]}).$$

Also ist ψ exakt. Dies ist ein Beweis des Lemmas von Poincaré.

Bild eines Stromes unter einer Lipschitzabbildung. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T \in \mathbf{N}_{k,loc}(U)$ und sei $f\colon U \to V$ Lipschitz sowie $f|_{\mathrm{spt}(T)}$ eigentlich. Zu f gibt es eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen von U nach V mit einer globalen Schranke für die Lipschitzkonstante, wobei $f_i \to f$ gleichmäßig konvergiert. Mit der Homotopieformel sieht man nun

$$\big|(f_{i\#}T)(\omega) - (f_{j\#}T)(\omega)\big| \leq c \cdot \sup_{f^{-1}(K)\cap \mathrm{spt}(T)} |f_i - f_j|,$$

falls $K \subset V$, K kompakt und $\mathrm{supp}(\omega) \subset K^o$. Folglich ist $(f_{i\#}T)(\omega)$ eine Cauchyfolge reeller Zahlen, und es existiert also

$$(f_\# T)(\omega) := \lim_{i\to\infty} (f_{i\#}T)(\omega).$$

Man kann zeigen:

- $f_\# T \in \mathbf{N}_{k,\mathrm{loc}}(V)$.
- Die Definition ist von der Wahl der Folge unabhängig.
- $\partial f_\# T = f_\# \partial T$.
- $\mathrm{spt}(f_\# T) \subset f(\mathrm{spt}(T))$.

4.5 Rektifizierbare Ströme

Definition

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Ein Strom $T \in \mathcal{D}_k(U)$ heißt rektifizierbar, falls es

- eine $\mathscr{H}^k$-messbare, abzählbar k-rektifizierbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathscr{H}^k(M \cap K) < \infty$ für $K \subset U$, K kompakt,
- eine $\mathscr{H}^k$-messbare Abbildung $\xi \colon M \to \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| = 1$ $\mathscr{H}^k$-fast-überall auf M und $\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ mit $v_i(x) \in \bigwedge_k T_x M$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in M$,
- eine $\mathscr{H}^k$-messbare Funktion $\theta \colon M \to [0, \infty]$

gibt, so dass gilt

$$T(\omega) = \int_M \langle \omega, \xi \rangle \theta \, d\mathscr{H}^k.$$

(b) Ist θ sogar ganzzahlig, so heißt ein solcher Strom T ganzzahlig rektifizierbar. Die Menge der ganzzahlig rektifizierbaren Ströme wird mit $\mathcal{R}_k(U)$ bezeichnet.

(c) T heißt integraler Strom, falls T und ∂T ganzzahlig rektifizierbare Ströme sind. Die Menge der integralen Ströme wird mit $\mathcal{I}_k(U)$ bezeichnet.

Bemerkungen: (1) Übersicht:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_k(U) & \subset & \mathcal{R}_k(U) \\ \cap & & \cap \\ \mathbf{N}_{k,\mathrm{loc}}(U) & \subset & \mathbf{M}_{k,\mathrm{loc}}(U) \end{array}$$

(2) Sei $T \in \mathcal{R}_k(U)$ und sei θ auf M integrierbar. Dann ist

$$\mathbf{M}(T) = \int_M \theta \, d\mathscr{H}^k.$$

(3) $\mathcal{I}_k(U) \subset \mathcal{R}_k(U) \cap \mathbf{N}_{k,\mathrm{loc}}(U)$. Gilt „$\supset$“? Die positive Antwort wird nachfolgenden als Satz formuliert (Randrektifizierbarkeit).

Beispiele

(1) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte k-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$[\![M]\!] \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n).$$

(2) Sei M wie in (1) und $\mathscr{H}^{k-1}(\partial M) < \infty$. Dann gilt

$$[\![M]\!] \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n),$$

denn $\partial [\![M]\!] = [\![\partial M]\!]$.

(3) $\tilde{T} \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^2)$ sei definiert durch

$$\tilde{T}(\omega_1 dx + \omega_2 dy) := \int_0^1 \omega_2(s,0)\,ds.$$

Dann ist $\tilde{T}$ nicht 1-rektifizierbar. Aber

$$T(\omega_1 dx + \omega_2 dy) := \int_0^1 \omega_1(s,0)ds$$

ist 1-rektifizierbar.

(4) Es ist

$$T_j := \sum_{i=1}^{j} [\![\{-\frac{i}{j}\} \times [0, \frac{1}{j}]]\!] \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R}^2) \cap \mathbf{N}_1(\mathbb{R}^2).$$

Es gilt $\mathbf{M}(T_j) = 1$, $\mathbf{M}(\partial T_j) = 2j$, $T_j \overset{s}{\rightharpoonup} \tilde{T}$ für $j \to \infty$. Wir erhalten so eine Folge integraler Ströme, deren schwacher Limes nicht rektifizierbar ist.

Satz 4.19

(1) (Randrektifizierbarkeit) Sei $T \in \mathcal{R}_k(U)$ und $\mathbf{M}_V(\partial T) < \infty$ für alle $V \subset U$ mit V offen, so dass $\bar{V}$ kompakte Teilmenge von U ist. Dann ist $T \in \mathcal{I}_k(U)$.

(2) (Closure Theorem) Seien $T_j \in \mathcal{R}_k(U)$, $j \in \mathbb{N}$, und

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}(\mathbf{M}_V(T_j) + \mathbf{M}_V(\partial T_j)) < C_V < \infty$$

für alle $V \subset U$ mit V offen, so dass $\bar{V}$ eine kompakte Teilmenge von U ist. Gilt $T_j \overset{s}{\rightharpoonup} T \in \mathcal{D}_k(U)$ für $j \to \infty$, so ist $T \in \mathcal{R}_k(U)$.

(3) (Kompaktheitssatz) Seien T_j wie in (2). Dann gibt es eine Teilfolge $T_{j'}$ von T_j und $T \in \mathcal{R}_k(U)$ mit $T_{j'} \overset{s}{\rightharpoonup} T$.

Beweis
Idee: Simultaner Beweis von (1) und (2)/(3) durch vollständige Induktion über k. Aus (2)/(3) für $k-1$ und dem Deformationssatz folgt (1) für k. Ferner geht das Konzept „Schnitt eines Stroms“ ein. ∎

Polyedrische Ströme Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $[0,\varepsilon]^n + \varepsilon \cdot z$, $z \in \mathbb{Z}^n$ ein kompakter ε-Würfel. Ein k-dimensionaler ε-Würfel ist erklärt als das relative Innere einer k-dimensionalen Seite eines solchen ε-Würfels.

Definition
Ein k-dimensionaler polyedrischer Strom in $\mathbb{R}^n$ der Seitenlänge ε ist ein Strom der Form

$$P := \sum_Q a_Q [\![Q]\!],$$

wobei Q ein k-dimensionaler ε-Würfel ist. Ein solcher Strom heißt ganzzahlig polyedrischer, falls $a_Q \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen: (1) $\mathbf{M}(P) = \sum_Q |a_Q| \varepsilon^k$

(2) $\mathbf{M}(\partial P) \leq 2^k \mathbf{M}(P)$. ∂P ist stets polyedrisch.

Satz 4.20 (Deformationssatz)
Es gibt eine Konstante $c = c(n)$, so dass für jedes $T \in \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein k-dimensionaler polyedrischer Strom P existiert und ferner $R \in \mathbf{N}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ und $S \in \mathbf{M}_k(\mathbb{R}^n)$ existieren, so dass gilt

$$T = P + \partial R + S$$

mit

(1) $\mathbf{M}(P) \leq c \cdot \mathbf{M}(T)$, $\mathbf{M}(\partial P) \leq c \cdot \mathbf{M}(\partial T)$,

(2) $\mathbf{M}(R) \leq c \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{M}(T)$, $\mathbf{M}(S) \leq c \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{M}(\partial T)$,

(3) $\mathbf{M}(\partial R) \leq c \cdot \big(\mathbf{M}(T) + \varepsilon \cdot \mathbf{M}(\partial T)\big)$,

(4) $\operatorname{spt}(P), \operatorname{spt}(R) \subset \operatorname{spt}(T)_{\delta(\varepsilon)}$ und $\operatorname{spt}(\partial P), \operatorname{spt}(\partial R) \subset \operatorname{spt}(\partial T)_{\delta(\varepsilon)}$ mit $\delta(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

(5) Ist $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n)$, so können P, R als rektifizierbare Ströme gewählt werden. Ist $T \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n)$, so kann auch S als rektifizierbarer Strom gewählt werden.

Wir formulieren noch einige Anwendungen:

Satz 4.21 (Schwache Polyedrische Approximation)
Sei $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Folge P_i von polyedrischen Strömen mit $P_i \overset{s}{\rightharpoonup} T$, wobei die Massen der P_i uniform beschränkt sind.

Beweis
Wähle $\epsilon_i := 1/i$ im Deformationssatz. Dann gibt es Ströme P_i, R_i, S_i mit den im Deformationssatz beschriebenen Eigenschaften. Wegen (1) sind die Massen von P_i und ∂P_i uniform beschränkt. Aus $\mathbf{M}(R_i) \leq c \cdot \epsilon_i \mathbf{M}(T) \to 0$ folgt $R_i \overset{s}{\rightharpoonup} 0$ und daher auch $\partial R_i \overset{s}{\rightharpoonup} 0$. Wegen $\mathbf{M}(S_i) \leq c \cdot \epsilon_i \mathbf{M}(\partial T) \to 0$ folgt $S_i \overset{s}{\rightharpoonup} 0$. Insgesamt ist also $\partial R_i + S_i \overset{s}{\rightharpoonup} 0$ und daher $P_i \overset{s}{\rightharpoonup} T$. ∎

Sei $T \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq n-1$ und $\operatorname{spt}(T)$ kompakt.

Gibt es $S \in \mathcal{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial S = T$? Notwendige Bedingung: $\partial T = 0$. Diese Bedingung ist auch hinreichend, wie wir schon gesehen haben.

Isoperimetrisches Problem: Finde eine Massenschranke für die „Füllung S" von T.

Satz 4.22 (Isoperimetrische Ungleichung)
Sei $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n)$, $\partial T = 0$, $\mathrm{spt}(T)$ kompakt. Dann gibt es ein $R \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{spt}(R)$ kompakt, $\partial R = T$ und

$$\mathbf{M}(R) \leq c \cdot \mathbf{M}(T)^{\frac{k+1}{k}}$$

mit $c = c(n)$.

Beweis
Sei o.B.d.A. $\mathbf{M}(T) \neq 0$. Setze $\epsilon := (2c\mathbf{M}(T)^{1/k}$, wobei c wie im Deformationssatz gewählt wird. Zu T seien P, R, S wie im Deformationssatz gewählt. Wegen (2) und der Voraussetzung folgt $S = 0$. Weiterhin gilt

$$\mathbf{M}(P) \leq c\mathbf{M}(T) = \frac{1}{2}\epsilon^k < \epsilon^k,$$

und daher ist $\mathbf{M}(P) = 0$, das heißt $P = 0$. Somit ist $P = \partial R$ und

$$\mathbf{M}(R) \leq c\epsilon\mathbf{M}(T) = c(2c\mathbf{M}(T))^{1/k}\mathbf{M}(T) = c'\mathbf{M}(T)^{\frac{k+1}{k}}.$$

Zusammen ergibt dies die Behauptung. ■

Schließlich ergeben die zur Verfügung stehenden Sätze auch einen raschen Beweis für eine Lösung des Plateauschen Problems in der Kategorie der Ströme.

Satz 4.23 (Plateau Problem)
Sei $T \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n)$, $\partial T = 0$, $\mathrm{spt}(T)$ kompakt. Dann existiert $S \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial S = T$, $\mathrm{spt}(S)$ kompakt und

$$\mathbf{M}(S) = \inf\{\mathbf{M}(R) : R \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n), \partial R = T\}.$$

Beweis
Zu T existiert ein $R \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $T = \partial R$ und $\mathrm{spt}(R)$ kompakt (vgl. den Beweis der isoperimetrischen Ungleichung). Da T lokalendliche Masse hat, gilt dies auch für ∂R, so dass der Randrektifizierbarkeitssatz ergibt, dass $R \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist klar, dass sich das Infimum über eine nichtleere Menge erstreckt. Sei R_i, $i \in \mathbb{N}$ eine minimierende Folge. Wegen $\partial R_i = T$ ist die Voraussetzung des Kompaktheitssatzes erfüllt. Es existiert somit ein $S \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $T = \partial R_i \overset{s}{\rightharpoonup} \partial S$, also $T = \partial S$. Eine erneute Anwendung des Randrektifizierbarkeitssatzes zeigt sogar $S \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Wegen der Unterhalbstetigkeit der Masse ist auch $\mathbf{M}(S)$ gleich dem Infimum. Durch die Projektion $\pi_\#(R_i)$ der Ströme einer minimierenden Folge auf die abgeschlossene, konvexe Hülle von $\mathrm{spt}(T)$ erreicht man, dass auch $\mathrm{spt}(S)$ kompakt ist. ■