

# i Die Kategorie der affinen Varietäten

## 1 Affine Varietäten und Verschwindungsideale



Sei  $k$  stets ein Körper.

DEFINITION 1.1: Eine Teilmenge  $V \subseteq k^n$  heißt *affine Varietät*, wenn es eine Menge von Polynomen  $\mathcal{F} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  mit

$$V = \mathfrak{V}(\mathcal{F}) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid f(x) = 0 \forall f \in \mathcal{F}\}$$

gibt.

BEISPIEL 1.2: (a)  $k^n = \mathfrak{V}(\{0\})$

(b)  $\emptyset = \mathfrak{V}(\{1\})$

**Frage:** Wie eindeutig ist das  $\mathcal{F}$ ? Zum Beispiel liefern Produkte und Summen von Polynomen keine neuen Nullstellen.

BEISPIEL: (a)  $\mathfrak{V}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \supsetneq \mathfrak{V}(x^2 + y^2 + z^2 - 1, z - \frac{1}{2})$

(b)  $\mathfrak{V}(x^2 + y^2 + z^2 - 1, z - \frac{1}{2}) = \mathfrak{V}(x^2 + y^2 + z^2 - 1, z - \frac{1}{2}, x^2 + y^2 + z^2 - 1 + z - \frac{1}{2})$ .

BEMERKUNG 1.3: Seien  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ . Dann gilt:

(a)  $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \implies \mathfrak{V}(\mathcal{F}_1) \supseteq \mathfrak{V}(\mathcal{F}_2)$

(b) Sei  $(\mathcal{F})$  das von  $\mathcal{F}$  erzeugte Ideal. Dann gilt:  $\mathfrak{V}(\mathcal{F}) = \mathfrak{V}((\mathcal{F}))$ .

(c) Sei

$$\sqrt{(\mathcal{F})} := \{p \in k[X_1, \dots, X_n] \mid \exists d \geq 1 \text{ mit } p^d \in (\mathcal{F})\}$$

das *Radikal* von  $(\mathcal{F})$  ( $\sqrt{(\mathcal{F})}$  ist ein Ideal!). Ein Ideal mit  $I = \sqrt{I}$  nennen wir *Radikalideal*. Es gilt:  $\mathfrak{V}(\sqrt{(\mathcal{F})}) = \mathfrak{V}(\mathcal{F})$ .

(d) Zu jeder affinen Varietät  $V \subseteq k^n$  gibt es endlich viele Polynome  $f_1, \dots, f_r$  mit

$$V = \mathfrak{V}(\{f_1, \dots, f_r\}) =: \mathfrak{V}(f_1, \dots, f_r).$$

*Beweis:* (a) und (b) folgen direkt aus der Definition.

(c) Offenbar ist  $\sqrt{(\mathcal{F})} \supseteq (\mathcal{F})$ , also gilt nach (a) und (b):

$$\mathfrak{V}(\sqrt{(\mathcal{F})}) \subseteq \mathfrak{V}((\mathcal{F})) = \mathfrak{V}(\mathcal{F}).$$

Für die andere Richtung: Sei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{V}(\mathcal{F})$  und  $f \in \sqrt{(\mathcal{F})}$ . Nach Definition existiert  $d \in \mathbb{N}$ , so dass  $f^d \in (\mathcal{F})$ . Also gilt  $f^d(x) = 0$  und damit  $f(x) = 0$ , demnach ist  $x \in \mathfrak{V}(\sqrt{(\mathcal{F})})$ .

(d) Nach (b) gilt  $\mathfrak{V}(\mathcal{F}) = \mathfrak{V}((\mathcal{F}))$  und nach Hilberts Basissatz wird  $(\mathcal{F})$  von endlich vielen Elementen erzeugt.  $\square$

DEFINITION/BEMERKUNG 1.4: Sei  $V \subseteq k^n$ . Wir nennen

$$\mathfrak{I}(V) := \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in V\}$$

das *Verschwindungsideal* von  $V$ . Es ist ein Ideal.

BEMERKUNG 1.5: Es gilt:

(a) Seien  $V_1, V_2 \subseteq k^n$  mit  $V_1 \subseteq V_2$ . Dann ist  $\mathfrak{I}(V_1) \supseteq \mathfrak{I}(V_2)$ .

(b) Sei  $V \subseteq k^n$ . Dann ist  $\mathfrak{I}(V)$  ein Radikalideal.

(c) Sei  $V$  eine affine Varietät. Dann gilt  $V = \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V))$ .

Es gilt sogar:  $\mathfrak{I}(V)$  ist das größte Ideal mit dieser Eigenschaft, d.h. für jedes Ideal  $J \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  mit  $\mathfrak{V}(J) = V$  folgt schon  $J \subseteq \mathfrak{I}(V)$ .

(d) Seien  $V_1, V_2$  affine Varietäten. Dann gilt:

$$V_1 = V_2 \iff \mathfrak{I}(V_1) = \mathfrak{I}(V_2) \text{ und } V_1 \subseteq V_2 \iff \mathfrak{I}(V_1) \supseteq \mathfrak{I}(V_2).$$

*Beweis:* Die Aussagen (a) und (b) folgen sofort aus der Definition.

(c) Sei zuerst  $x \in V$ . Dann gilt für alle  $f \in \mathfrak{I}(V)$ :  $f(x) = 0$ , also gilt  $x \in \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V))$ .

Sei nun  $V$  eine affine Varietät. Dann gilt  $V = \mathfrak{V}(\mathcal{F})$  für eine geeignete Menge  $\mathcal{F}$ . Es gilt  $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{I}(V)$ , also ist

$$V = \mathfrak{V}(\mathcal{F}) \supseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)).$$

Der Rest der Behauptung folgt aus der Definition des Verschwindungsideals.

(d) Die eine Richtung ist klar, bzw. folgt aus (a). Für die andere Richtung überlegt man sich, dass nach (c)  $V_1 = \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V_1)) = \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V_2)) = V_2$  gilt. Die Aussage für die Inklusionen folgt analog.  $\square$

**Frage:** Wir haben gesehen, dass die Zuordnung

$$V \longmapsto \mathfrak{I}(V)$$

injektiv ist. Ist sie auch surjektiv?

## 2 Zariski-Topologie



DEFINITION/BEMERKUNG 2.1: Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die affinen Varietäten im  $k^n$  bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf dem  $k^n$ . Diese heißt *Zariski-Topologie*.

*Beweis:* (1)  $\emptyset$  und  $k^n$  sind affine Varietäten nach Beispiel 1.2.

- (2) Seien  $V_1, V_2$  affine Varietäten, d.h.  $V_1 = \mathfrak{V}(I_1)$  und  $V_2 = \mathfrak{V}(I_2)$ , wobei  $I_1, I_2$  Ideale in  $k[X_1, \dots, X_n]$  sind. Dann gilt:

$$V_1 \cap V_2 = \mathfrak{V}(I_1 \cup I_2) = \mathfrak{V}(I_1 + I_2).$$

Das gleiche Argument funktioniert für beliebige Familien  $V_\lambda$  mit  $\lambda \in \Lambda$  und  $\Lambda$  Indexmenge, d.h.  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$  ist wieder eine affine Varietät.

- (3) Seien  $V_1, V_2$  affine Varietäten mit  $I_1 = \mathfrak{I}(V_1)$  und  $I_2 = \mathfrak{I}(V_2)$ .

**Zeige:**  $\mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2) \subseteq V_1 \cup V_2 \subseteq \mathfrak{V}(I_1 \cap I_2) \subseteq \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$ .

(i)  $V_1 \cup V_2 \subseteq \mathfrak{V}(I_1 \cap I_2) \subseteq \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$  ist nach Definition klar.

(ii) Sei  $x \in \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$ . Angenommen  $x \notin V_1$ . Dann existiert  $g \in I_1$  mit  $g(x) \neq 0$ . Sei  $f \in I_2$ . Dann ist  $f \cdot g \in I_1 \cdot I_2$ , folglich ist

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 0$$

und da  $g(x) \neq 0$  ist  $f(x) = 0$ , also  $x \in \mathfrak{V}(I_2) = V_2$ .

DEFINITION 2.2: Wir schreiben  $\mathbb{A}^n(k)$  für  $k^n$  mit der Zariski-Topologie.

BEMERKUNG 2.3: Sei  $M \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ . Der Abschluss  $\overline{M}$  von  $M$  bezüglich der Zariski-Topologie ist  $\overline{M} = \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(M))$ .

*Beweis:*  $\overline{M} \subseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(M))$  folgt sofort aus der Definition.

Für die andere Inklusion überlegt man sich: Sei  $\mathfrak{V}(J) \supseteq M$  eine abgeschlossene Obermenge von  $M$ . Dann ist  $\mathfrak{I}(M) \supseteq \mathfrak{I}(\mathfrak{V}(J))$  und damit

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(M)) \subseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(J))) = \mathfrak{V}(J). \quad \square$$

BEISPIEL 2.4: Sei  $n = 1$ . Dann gilt:  $X \subseteq \mathbb{A}^1(k)$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $X$  eine endliche Teilmenge oder ganz  $\mathbb{A}^1(k)$  ist.



„Kleine Umgebungen“ sind riesig groß!

BEMERKUNG 2.5: (a) Wenn  $k$  endlich ist, entspricht die Zariski-Topologie auf  $\mathbb{A}^n(k)$  der diskreten Topologie.

(b) Wenn  $k$  unendlich ist, ist die Zariski-Topologie nicht hausdorffsch.

*Beweis:* (a) Punkte sind abgeschlossen, denn sei  $x = (x_1, \dots, x_k) \in k^n$ , dann ist

$$\{x\} = \mathfrak{V}(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n).$$

Damit sind auch endliche Vereinigungen von Punkten abgeschlossen und somit schon *alle* Teilmengen von  $\mathbb{A}^n(k)$ .

- (b) ERINNERUNG: Ein topologischer Raum  $X$  heißt hausdorffsch, wenn für alle Punkte  $x, y \in X$  offene Umgebungen  $U_x \ni x$  und  $U_y \ni y$  mit  $U_x \cap U_y = \emptyset$  existieren.

Für  $n = 1$  folgt die Behauptung also aus Beispiel 2.4.

Den Fall  $n \geq 2$  führen wir zurück auf den Fall  $n = 1$ :

Seien  $x, y \in \mathbb{A}^n(k)$ ,  $U_x, U_y$  offene Umgebungen von  $x$  bzw.  $y$ . Wir setzen

$$V_1 := \mathbb{A}^n(k) \setminus U_x =: \mathfrak{V}(I_1) \text{ und } V_2 := \mathbb{A}^n(k) \setminus U_y =: \mathfrak{V}(I_2)$$

für entsprechende Ideale  $I_1$  und  $I_2$ . Ohne Einschränkung wählen wir  $x$  und  $y$  in  $W := \mathfrak{V}(X_2, \dots, X_n)$ , also auf der „ $X_1$ -Achse“. Dann gilt für alle Polynome  $f \in I_1$  und  $g \in I_2$ , dass sie auf  $W$  nicht verschwinden, da  $x$  bzw.  $y$  in den Komplementen von  $V_1$  bzw.  $V_2$  liegen.

Dann besteht  $V_1 \cap W$  aus nur endlich vielen Punkten, da diese Nullstellen von  $f(X_1, 0, \dots, 0) \neq 0$  sein müssen. Gleiches gilt für  $V_2 \cap W$ . Also schneiden sich ihre Komplemente  $U_x$  und  $U_y$  sogar schon in  $W$ , da  $|W| = |k| = \infty$ .  $\square$

DEFINITION/ERINNERUNG 2.6: Seien  $X, X_1, X_2$  topologische Räume.

- (a) Sei  $Y \subseteq X$ . Definiere auf  $Y$  die *Spurtopologie* durch

$$U \subseteq Y \text{ offen} :\iff \exists V \subseteq X \text{ offen mit } U = V \cap Y.$$

- (b) Sei  $X_1 \times X_2$  das kartesische Produkt (als Mengen) und seien

$$\begin{aligned} p_1: X_1 \times X_2 &\longrightarrow X_1, & (x_1, x_2) &\longmapsto x_1, \\ p_2: X_1 \times X_2 &\longrightarrow X_2, & (x_1, x_2) &\longmapsto x_2, \end{aligned}$$

die zugehörigen Projektionen. Die *Produkttopologie* auf  $X_1 \times X_2$  ist die größte Topologie (d.h. möglichst wenig offene Mengen), so dass  $p_1$  und  $p_2$  stetig sind.

Daher ist  $U \subseteq X_1 \times X_2$  genau dann offen, wenn  $U$  beliebige Vereinigung endlicher Schnitte von Urbildern offener Mengen in  $X_1$  bzw.  $X_2$  unter  $p_1$  bzw.  $p_2$  ist.

- (c)  $X$  heißt *reduzibel*, wenn es abgeschlossene echte Teilmengen

$$A, B \subsetneq X \text{ mit } X = A \cup B \text{ gibt.}$$

- (d)  $X$  heißt *irreduzibel*, wenn  $X$  nicht reduzibel ist.

(e) Eine maximale irreduzible Teilmenge von  $X$  heißt *irreduzible Komponente*.

BEISPIEL 2.7: Sei  $X$  hausdorffsch und  $M \subseteq X$ . Dann gilt:

$$M \text{ ist irreduzibel (bzgl. Spurtopologie)} \iff |M| \leq 1,$$

$M$  ist also einelementig oder leer.

Denn: Liegen  $x \neq y$  in  $M$ , so finden wir (offene) Umgebungen  $U_x$  und  $U_y$  mit leerem Schnitt, können also

$$M = (M \setminus U_x) \cup (M \setminus U_y)$$

schreiben und sehen so, dass  $M$  reduzibel ist.  $\emptyset$  ist irreduzibel.

BEISPIEL 2.8: Sei  $k$  ein Körper mit unendlich vielen Elementen.

- (a)  $\mathbb{A}^1(k)$  ist irreduzibel, da echte abgeschlossene Teilmengen endlich sind.
- (b)  $\mathfrak{V}(X \cdot Y) = \mathfrak{V}(X) \cup \mathfrak{V}(Y)$  ist reduzibel mit irreduziblen Komponenten  $\mathfrak{V}(X)$  und  $\mathfrak{V}(Y)$ .

BEMERKUNG 2.9: Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät. Dann gilt:

$$V \text{ ist irreduzibel} \iff \mathfrak{I}(V) \text{ ist ein Primideal.}$$

*Beweis:* Sei zuerst  $V$  irreduzibel. Seien  $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$  mit  $f \cdot g \in \mathfrak{I}(V)$ .

Angenommen  $f \notin \mathfrak{I}(V)$ , dann gilt auch  $\mathfrak{V}(f) \not\supseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)) = V$ .

Außerdem gilt nach Definition/Bemerkung 2.1:  $\mathfrak{V}(f) \cup \mathfrak{V}(g) = \mathfrak{V}(f \cdot g) \supseteq V$ , also

$$V = (V \cap \mathfrak{V}(f)) \cup (V \cap \mathfrak{V}(g)),$$

wobei  $V \cap \mathfrak{V}(f)$  und  $V \cap \mathfrak{V}(g)$  in  $V$  abgeschlossen sind. Außerdem ist, nach Annahme,  $V \neq V \cap \mathfrak{V}(f)$ , also gilt, da  $V$  irreduzibel ist,  $V = V \cap \mathfrak{V}(g)$ . Daraus folgt  $V \subseteq \mathfrak{V}(g)$  und damit ist  $g \in \mathfrak{I}(V)$  und  $\mathfrak{I}(V)$  ist somit ein Primideal.

Sei nun  $\mathfrak{I}(V)$  ein Primideal. Seien  $V_1, V_2$  Varietäten mit  $V = V_1 \cup V_2$  und  $I_1 := \mathfrak{I}(V_1)$ ,  $I_2 := \mathfrak{I}(V_2)$ .

Angenommen  $V \neq V_1$ , d.h.  $V \supsetneq V_1$ , dann ist auch  $\mathfrak{I}(V) \subsetneq \mathfrak{I}(V_1) = I_1$ .

Außerdem ist  $V = V_1 \cup V_2 = \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$ , also ist  $I_1 \cdot I_2 \subseteq \mathfrak{I}(V)$ . Das impliziert aber  $I_2 \subseteq \mathfrak{I}(V)$ , da  $\mathfrak{I}(V)$  ein Primideal ist und  $I_1 \not\subseteq \mathfrak{I}(V)$ . Daher gilt

$$V_2 = \mathfrak{V}(I_2) \supseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)) = V,$$

also ist schon  $V = V_2$  und damit ist  $V$  irreduzibel.  $\square$

PROPOSITION 2.10: Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann ist jede irreduzible Teilmenge in einer irreduziblen Komponente enthalten.

*Beweis:* Verwende das Lemma von Zorn:

ERINNERUNG: Hat in einer halbgeordneten Menge  $\mathcal{M}$  jede Kette (d.h. totalgeordnete Teilmenge) eine obere Schranke, dann hat  $\mathcal{M}$  mindestens ein maximales Element.

Seien also  $X' \subseteq X$  eine irreduzible Teilmenge,

$$\mathcal{M} := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ irreduzibel, } Y \supseteq X'\}$$

und  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  eine Familie aus  $\mathcal{M}$ , die totalgeordnet ist. Sei  $Y := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ .

ZEIGE:  $Y \in \mathcal{M}$ , d.h.  $Y$  ist irreduzibel.

Wir nehmen an, es gäbe abgeschlossene Mengen  $A, B \subsetneq X$ , so dass  $Y \cap A$  und  $Y \cap B$  echte Teilmengen von  $Y$  sind, für die  $Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$  gilt. Insbesondere gilt dann:

$$(X \setminus A) \cap Y \neq \emptyset \neq (X \setminus B) \cap Y.$$

Folglich existieren ein  $\lambda_1$  mit  $(X \setminus A) \cap Y_{\lambda_1} \neq \emptyset$  und ein  $\lambda_2$  mit  $(X \setminus B) \cap Y_{\lambda_2} \neq \emptyset$ . Da die  $Y_{\lambda_i}$  Teil einer Kette sind, können wir ohne Einschränkung  $Y_{\lambda_1} \subseteq Y_{\lambda_2}$  annehmen. Damit ist aber auch  $(X \setminus A) \cap Y_{\lambda_2} \neq \emptyset$  und wir finden eine echte Zerlegung

$$Y_{\lambda_2} = (Y_{\lambda_2} \cap A) \cup (Y_{\lambda_2} \cap B),$$

was im Widerspruch zur Irreduzibilität von  $Y_{\lambda_2}$  steht. Folglich hat jede Kette eine obere Schranke und nach dem Lemma von Zorn hat  $\mathcal{M}$  somit ein maximales Element.  $\square$

**Satz 1:** Sei  $V$  eine affine Varietät. Dann gilt:

- (a)  $V$  ist eine endliche Vereinigung von irreduziblen affinen Varietäten.
- (b)  $V$  hat nur endlich viele irreduzible Komponenten  $V_1, \dots, V_r$ . Insbesondere ist die Zerlegung

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_r$$

eindeutig.

*Beweis:* (a) Seien

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &:= \{V \subseteq k^n \mid V \text{ ist affine Varietät und erfüllt nicht (a)}\}, \\ \mathcal{J} &:= \{\mathfrak{J}(V) \subseteq k[X_1, \dots, X_n] \mid V \in \mathcal{B}\}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an,  $\mathcal{B}$  wäre nicht leer. Dann ist auch  $\mathcal{J}$  nicht leer. Da  $k[X_1, \dots, X_n]$  noethersch ist, finden wir in  $\mathcal{J}$  ein maximales Element  $I_0 = \mathfrak{J}(V_0)$ . Damit ist  $V_0$  ein minimales Element in  $\mathcal{B}$ . Dann ist  $V_0$  aber *nicht* irreduzibel, also existieren affine Varietäten  $V_1, V_2 \subsetneq V_0$  mit  $V_0 = V_1 \cup V_2$ . Insbesondere sind diese aber nicht in  $\mathcal{B}$ , da  $V_0$  minimal gewählt war, lassen sich also als Vereinigung endlich vieler irreduzibler Varietäten schreiben. Dann geht das aber auch für  $V_0$  und das ist ein Widerspruch, da  $V_0 \in \mathcal{B}$ .

(b) Mit Hilfe von Proposition 2.10 und dem (a)-Teil sehen wir, dass wir

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_r$$

schreiben können, wobei die  $V_i$  irreduzible Komponenten sind. Wir zeigen noch die Eindeutigkeit dieser Zerlegung: Sei  $W$  eine irreduzible Komponente von  $V$ . Wir schreiben

$$W = (W \cap V_1) \cup \dots \cup (W \cap V_r)$$

und sehen, da  $W$  irreduzibel ist, dass es ein  $i$  mit  $W = W \cap V_i$  gibt. Also gilt  $W \subseteq V_i$  und damit schon  $W = V_i$ , da  $W$  als irreduzible *Komponente* eine *maximale* irreduzible Teilmenge von  $V$  ist.  $\square$

### 3 Der Hilbertsche Nullstellensatz



**Motivation:** Bisher haben wir die Mengen

$$\mathcal{V}_n = \{V \subseteq k^n \mid V \text{ affine Varietät}\} \text{ und } \mathcal{I}_n = \{I \subseteq k[X_1, \dots, X_n] \mid I \text{ Radikalideal}\}$$

und zwischen ihnen die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}: \mathcal{I}_n &\longrightarrow \mathcal{V}_n, & I &\longmapsto \mathfrak{V}(I) \\ \mathfrak{I}: \mathcal{V}_n &\longrightarrow \mathcal{I}_n, & V &\longmapsto \mathfrak{I}(V) \end{aligned}$$

betrachtet. Wir haben gesehen, dass  $\mathfrak{V} \circ \mathfrak{I} = \text{id}$  gilt. Gilt auch  $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{V} = \text{id}$ ?

BEISPIEL: Wenn  $k$  nicht algebraisch abgeschlossen ist, muss das nicht gelten: sei  $k = \mathbb{R}$  und  $I = (X^2 + 1)$ . Dann ist  $\mathfrak{V}(I) = \emptyset$ , aber  $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = k[X_1, \dots, X_n]$ .

Wir werden sehen, dass  $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{V} = \text{id}$  gilt, falls  $k$  algebraisch abgeschlossen ist. Das einzige „Problem“ ist, dass  $\mathfrak{V}(I) = \emptyset$  gilt, obwohl  $I \neq k[X_1, \dots, X_n]$  ist.

**Satz 2** (Hilbertscher Nullstellensatz): (a) **Algebraische Form:** Sei  $\mathfrak{m}$  ein maximales Ideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$ . Dann ist  $k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  eine endliche algebraische Körpererweiterung von  $k$ .

(b) **Schwacher Hilbertscher Nullstellensatz:** Ist  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$  ein echtes Ideal, dann ist  $\mathfrak{V}(I) \neq \emptyset$ .

(c) **Starker Hilbertscher Nullstellensatz:** Ist  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  ein Ideal, dann ist  $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I}$ .

Die Aussage wird in mehreren Schritten im Rest dieses Abschnitts bewiesen.

Wir nennen  $x_1 := \overline{X_1}, \dots, x_n := \overline{X_n}$ . Ohne Einschränkung können wir nach einer eventuellen Umsortierung der Variablen annehmen, dass  $x_1, \dots, x_l$  algebraisch unabhängig über  $k$  sind und  $x_{l+1}, \dots, x_n$  algebraisch über  $k(x_1, \dots, x_l)$ . Also:

$$k \subseteq S = k(x_1, \dots, x_l) \subseteq L = k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m},$$

dabei ist  $k(x_1, \dots, x_l) \cong \text{Quot}(k[X_1, \dots, X_l])$  und  $L$  ist endlich erzeugt als  $S$ -Modul.

LEMMA 3.1: Seien  $R, S, T$  Ringe mit  $R \subseteq S \subseteq T$ , sodass gilt:

- $R$  ist noethersch
- $T$  ist endlich erzeugt als  $R$ -Algebra; seien  $x_1, \dots, x_n$  solche Erzeuger
- $T$  ist endlich erzeugt als  $S$ -Modul; seien  $w_1, \dots, w_m$  solche Erzeuger

Dann ist  $S$  als  $R$ -Algebra endlich erzeugt.

*Beweis:* Wir schreiben

$$x_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} w_j \text{ mit } a_{ij} \in S, \quad w_i w_j = \sum_{l=1}^m b_{ijl} w_l \text{ mit } b_{ijl} \in S.$$

Sei  $S_0$  die  $R$ -Unteralgebra von  $S$ , die von allen  $a_{ij}$  und  $b_{ijl}$  erzeugt wird. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist  $S_0$  ein noetherscher Ring.  $T$  wird von den  $w_i$  auch als  $S_0$ -Modul erzeugt und ist noethersch als  $S_0$ -Modul, da er ein endlich erzeugter Modul über einem noetherschen Ring ist.  $S$  ist ein  $S_0$ -Untermodul von  $T$ . Damit ist  $S$  endlich erzeugt als  $S_0$ -Modul, also auch als  $R$ -Algebra.  $\square$

Insbesondere ist in der Situation im Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes  $k(x_1, \dots, x_l)$  als  $k$ -Algebra endlich erzeugt.

LEMMA 3.2: Es sei  $k$  ein Körper und  $r \geq 1$ . Dann ist  $k(X_1, \dots, X_r)$  nicht endlich erzeugt als  $k$ -Algebra.

*Beweis:* Wir nehmen an, wir hätten endlich viele Erzeuger  $h_1, \dots, h_l$  und schreiben  $h_i = \frac{f_i}{g_i}$  mit  $f_i, g_i \in k[X_1, \dots, X_r]$ . Dann wählen wir ein Primpolynom  $p$ , das keines der  $g_i$  teilt und schreiben

$$\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^N a_i h_{i_1} \cdots h_{i_{m_i}} \quad (a_i \in k, \quad m_i \in \{1, \dots, l\}).$$

Sei  $H = g_1 \cdots g_l$ . Multipliziert man obige Gleichung mit  $H$  durch, bekommt man

$$\frac{H}{p} \in k[X_1, \dots, X_r],$$

also ist  $p$  ein Teiler von  $H$ . Aber  $p$  war teilerfremd zu allen  $g_i$  gewählt. Das ist ein Widerspruch.  $\square$

PROPOSITION 3.3: Die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes stimmt.

*Beweis:* Das liegt daran, dass  $k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  nach Lemma 3.1 als  $k$ -Algebra endlich erzeugt ist und nach Lemma 3.2 folglich keine transzendenten Elemente enthält, also eine algebraische Körpererweiterung ist.  $\square$

Um die Implikation  $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n] \implies \mathfrak{V}(I) \neq \emptyset$  zu zeigen, betrachten wir für einen Punkt  $p = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$  den Einsetzungshomomorphismus

$$\varphi_p: k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k, \quad f \longmapsto f(p)$$



(das ist ein  $k$ -Algebrenhomomorphismus). Dieser steigt genau dann auf  $A = k[X_1, \dots, X_n]/I$  ab, wenn  $p \in \mathfrak{V}(I)$  gilt. Außerdem ist jeder  $k$ -Algebrenhomomorphismus  $\varphi: A \longrightarrow k$  von dieser Art: wähle

$$p = (\varphi(\overline{X_1}), \dots, \varphi(\overline{X_n})).$$

Ist  $I = \mathfrak{m}$  ein maximales Ideal, dann ist  $A = k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  eine endliche algebraische Körpererweiterung von  $k$ . In diesem Fall existiert genau dann ein  $k$ -Algebrenhomomorphismus von  $A$  nach  $k$ , wenn  $A = k$  gilt.

LEMMA 3.4: Aus der algebraischen Version folgt der schwache Hilbertsche Nullstellensatz.

*Beweis:* Sei  $\mathfrak{m}$  ein maximales Ideal mit  $I \subseteq \mathfrak{m}$ . Da  $k$  algebraisch abgeschlossen ist, ist also, nach Satz 2 (a),  $L = k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m} \cong k$ . Sei  $\varphi: L \longrightarrow k$  ein Isomorphismus und

$$p = (\varphi(\overline{X_1}), \dots, \varphi(\overline{X_n})) \in k^n.$$

Für  $f \in \mathfrak{m}$  gilt dann  $f(p) = \varphi(f(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_n})) = \varphi(\overline{f(X_1, \dots, X_n)}) = \varphi(0) = 0$ .

Also ist  $p \in \mathfrak{V}(I)$  und damit  $\mathfrak{V}(I) \neq \emptyset$ .  $\square$

LEMMA 3.5 (Schluss von Rabinowitsch): Der starke Hilbertsche Nullstellensatz folgt aus dem schwachen Hilbertschen Nullstellensatz.

*Beweis:* Zu zeigen ist  $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I}$ . Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar. Für die andere Inklusion nehmen wir uns ein  $g \in \mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I))$  und zeigen: es gibt ein  $d \geq 1$  mit  $g^d \in I$ .

Wir betrachten  $k^{n+1}$  und definieren

$$J = (I, gX_{n+1} - 1).$$

Dann ist  $\mathfrak{V}(J) = \emptyset$ , denn wäre  $p = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathfrak{V}(J)$ , dann wäre  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{V}(I)$ , also  $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ , aber damit wäre

$$(gX_{n+1} - 1)(p) = -1 \neq 0,$$

was ein Widerspruch ist.

Nach Satz 2 (b) muss dann also  $J = k[X_1, \dots, X_{n+1}]$  gelten. Also gibt es

$$b_1, \dots, b_{n+1} \in k[X_1, \dots, X_{n+1}],$$

sodass

$$1 = b_1 f_1 + \dots + b_n f_n + b_{n+1} (gX_{n+1} - 1)$$

gilt. Wir verwenden den  $k$ -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi: k[X_1, \dots, X_{n+1}] \longrightarrow k(X_1, \dots, X_n), \quad X_i \longmapsto \begin{cases} X_i, & \text{für } i \in \{1, \dots, n\}, \\ \frac{1}{g}, & \text{für } i = n+1. \end{cases}$$

und erhalten so

$$1 = \varphi(1) = \varphi(b_1) f_1 + \dots + \varphi(b_n) f_n + 0.$$

Nun schreiben wir  $\varphi(b_i) = \frac{\tilde{b}_i}{g} a_i$  für  $\tilde{b}_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ . Durchmultiplizieren mit  $g^d$  für genügend großes  $d$  ergibt dann  $g^d \in I$ .  $\square$

KOROLLAR 3.6: Ist  $k$  algebraisch abgeschlossen, dann entsprechen die affinen Varietäten in  $\mathbb{A}^n(k)$  bijektiv den Radikalidealen in  $k[X_1, \dots, X_n]$  via  $V \longmapsto \mathfrak{I}(V)$ .

## 4 Morphismen zwischen affinen Varietäten



**Ziel:** In diesem Abschnitt sollen Morphismen definiert werden. Die Idee dabei ist, Abbildungen zu betrachten, die von Polynomen herkommen.

DEFINITION 4.1: (a) Seien  $V \subseteq k^n, W \subseteq k^m$  affine Varietäten. Wir nennen eine Abbildung  $f: V \longrightarrow W$  einen *Morphismus*, wenn es Polynome  $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$  mit

$$f(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p)) \in k^m \text{ gibt.}$$

- (b) Ein Morphismus  $f: V \longrightarrow W$  heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus  $g: W \longrightarrow V$  mit  $g \circ f = \text{id}_V$  und  $f \circ g = \text{id}_W$  gibt.
- (c) Gibt es einen Isomorphismus zwischen  $V$  und  $W$ , so heißen  $V$  und  $W$  *isomorph*.

BEMERKUNG 4.2: Die affinen Varietäten über  $k$  bilden zusammen mit den Morphismen eine Kategorie:  $\mathcal{A}ffVar_k$ . Dabei sind die Objekte gerade die affinen Varietäten und die Morphismen zwischen zwei affinen Varietäten sind wie in Definition 4.1 gegeben. Man beachte, dass die Verkettung von Polynomen wieder ein Polynom ist, d.h. die Verkettung zweier Morphismen ist auch wieder ein Morphismus.

BEISPIEL 4.3: (a) Projektionen bzw. Einbettungen  $\mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{A}^m(k)$

$$\begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_m), & \text{falls } n \geq m, \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0), & \text{falls } n < m, \end{cases}$$

sind Morphismen.

- (b) Jedes  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  definiert einen Morphismus  $\mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{A}^1(k)$ .
- (c) Seien  $V = \mathbb{A}^1(k)$ ,  $W = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ . Die Abbildung

$$f: V \longrightarrow W, \quad x \longmapsto (x^2, x^3)$$

definiert einen Morphismus. Ihr Bild heißt *Neilsche Parabel*. Hierbei ist  $f$  bijektiv mit Umkehrabbildung

$$g(x, y) = \begin{cases} y/x, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Ist  $k$  unendlich, so ist  $g$  kein Morphismus. Also sind bijektive Morphismen im Allgemeinen keine Isomorphismen.

(d) Sei  $\text{char}(k) = p > 0$ . Dann heißt  $f: \mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{A}^n(k)$  gegeben durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1^p, \dots, x_n^p)$$

*Frobeniusmorphismus.* Bekanntermaßen sind die Nullstellen des Polynoms  $X^p - X$  genau die Elemente aus  $\mathbb{F}_p$ . Damit sind die Fixpunkte des Frobeniusmorphismus gerade die Punkte mit Koordinaten in  $\mathbb{F}_p$ .

BEMERKUNG 4.4: (a) Morphismen sind stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

(b) Sind  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  affine Varietäten, dann lässt sich jeder Morphismus  $f: V \longrightarrow W$  zu einem Morphismus  $f^n: \mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{A}^m(k)$  fortsetzen.

*Beweis:* (a) Seien  $V$  und  $W$  affine Varietäten,  $f: V \longrightarrow W$  ein Morphismus und  $Z = \mathfrak{V}(J) \subseteq W$  abgeschlossen. Setze  $I = \{g \circ f \mid g \in J\}$ . Dann ist  $f^{-1}(Z) = \mathfrak{V}(I)$ , denn:

$$x \in f^{-1}(Z) \iff f(x) \in Z \iff g(f(x)) = 0 \text{ für alle } g \in J \iff x \in \mathfrak{V}(I).$$

Also ist  $f^{-1}(Z)$  abgeschlossen und  $f$  damit stetig.

(b) Das folgt direkt aus Definition 4.1, da Polynome global definierbar sind.  $\square$



Im Allgemeinen gibt es viel mehr stetige Abbildungen als Morphismen.

Beispielsweise ist jede bijektive Abbildung von  $k$  nach  $k$  stetig, was wir mit Hilfe von Beispiel 2.4 einsehen können.

DEFINITION 4.5: Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät. Dann heißt

$$k[V] = \{f: V \longrightarrow \mathbb{A}^1 \mid f \text{ ist Morphismus}\}$$

der *affine Koordinatenring*.

BEMERKUNG 4.6: (a) Der Koordinatenring  $k[V]$  ist eine *reduzierte*  $k$ -Algebra, das heißt aus  $f^n = 0$  folgt  $f = 0$ .

(b) Es gilt  $k[V] \cong k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{I}(V)$ .

*Beweis:* (a) folgt aus (b), wobei Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation komponentenweise definiert sind. Die Reduziertheitsaussage ist klar, da  $\mathfrak{I}(V)$  ein Radikalideal ist.

(b) Definiere

$$\varphi: k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k[V], \quad p \longmapsto p|_V.$$

Dann ist  $\varphi$  nach Definition der Morphismen surjektiv, vgl. Definition 4.1. Weiter gilt:

$$p \in \text{Kern}(\varphi) \iff p|_V \equiv 0 \iff \forall x \in V: p(x) = 0 \iff p \in \mathfrak{I}(V).$$

Mit dem Homomorphiesatz folgt die Behauptung.  $\square$

BEMERKUNG 4.7: Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  affine Varietäten. Dann gilt:

- (a) Jeder Morphismus  $f: V \longrightarrow W$  induziert einen  $k$ -Algebrenhomomorphismus

$$f^\sharp: k[W] \longrightarrow k[V], \quad g \longmapsto g \circ f.$$

- (b) Jeder  $k$ -Algebrenhomomorphismus zwischen  $k[W]$  und  $k[V]$  wird von einem solchen  $f$  induziert.  
(c) Die Abbildung

$$\sharp: \text{Mor}(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_k(k[W], k[V]), \quad f \longmapsto f^\sharp$$

ist sogar bijektiv.

*Beweis:* (a) Die Algebrenhomomorphismeigenschaften zu überprüfen ist elementar.

- (b) Sei  $\varphi: k[W] \longrightarrow k[V]$  ein  $k$ -Algebrenhomomorphismus und

$$k[W] \ni p_i: W \longrightarrow k$$

sei die Projektion auf die  $i$ -te Koordinate. Definiere nun  $f: V \longrightarrow W$  durch

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\varphi(p_1)(x), \dots, \varphi(p_m)(x)).$$

Wir zeigen, dass  $f$  wohldefiniert ist und dass  $f^\sharp = \varphi$  ist.

Zuerst sehen wir, dass die  $p_i$ 's  $k[W]$  als  $k$ -Algebra erzeugen und nach der Definition von  $f$  ist

$$f^\sharp(p_i) = p_i \circ f = \varphi(p_i).$$

Es bleibt also nur noch die Wohldefiniertheit zu zeigen, d.h.  $f$  bildet wirklich nach  $W = \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(W))$  ab.

Wir zeigen also: Für alle  $g \in \mathfrak{I}(W)$  und  $x \in V$  gilt  $g(f(x)) = 0$ .

Sei also  $g \in \mathfrak{I}(W)$ . Dann ist  $g$  als Element in  $k[W]$  schon 0 und damit ist auch  $\varphi(g) = 0$  in  $k[V]$ .

Nun definieren wir uns  $\widehat{\varphi}$ , indem wir  $X_i \in k[X_1, \dots, X_m]$  auf ein Urbild von  $\varphi(p_i)$  in  $k[X_1, \dots, X_n]$  schicken. Das dürfen wir, da der Polynomring frei ist und daher kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_m] & \xrightarrow{\widehat{\varphi}} & k[X_1, \dots, X_n] \\ \downarrow \pi_W & & \downarrow \pi_V \\ k[W] = k[X_1, \dots, X_m] / \mathfrak{I}(W) & \xrightarrow{\varphi} & k[V] = k[X_1, \dots, X_n] / \mathfrak{I}(V) \end{array}$$

Also folgt die Behauptung, da

$$g(\varphi(p_1)(x), \dots, \varphi(p_m)(x)) = \widehat{\varphi}(g)(x) = 0$$

für  $g \in \mathfrak{I}(W)$ , da  $\widehat{\varphi}(g) \in \mathfrak{I}(V)$  liegt, da das Diagramm kommutiert.

- (c) Die Surjektivität der Abbildung wurde gerade gezeigt, also bleibt nur die Injektivität zu zeigen. Sei also  $f_1^\# = f_2^\#$ , d.h.  $g \circ f_1 = g \circ f_2$  für alle  $g \in k[W]$ . Insbesondere gilt das für die Projektionen auf die einzelnen Koordinaten. Damit sind  $f_1$  und  $f_2$  in allen Komponenten gleich und es folgt  $f_1(x) = f_2(x)$  für alle  $x \in V$ .  $\square$

**Satz 3:** Wir bezeichnen die Kategorie der endlich erzeugten, reduzierten  $k$ -Algebren mit  $\mathcal{RedAlg}_k$ .

- (a) Die Zuordnung  $V \longmapsto k[V]$  induziert einen kontravarianten Funktor  $\Phi$ .  
 (b) Ist  $K = k$  algebraisch abgeschlossen, so induziert  $\Phi$  eine Äquivalenz der Kategorien  $\mathcal{AffVar}_K$  und  $\mathcal{RedAlg}_K$ .

*Beweis:* (a) Wir definieren  $\Phi$  auf den Morphismen durch

$$\text{Mor}(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_k(k[W], k[V]), \quad g \longmapsto g^\#.$$

Dann gilt  $\Phi(g_1 \circ g_2) = (g_1 \circ g_2)^\# = g_2^\# \circ g_1^\#$  und  $\Phi(\text{id}) = \text{id}$ .

- (b) Nun zeigen wir, dass  $\Phi$  eine natürliche Äquivalenz definiert. Genauer:
- $\Phi$  ist ein volltreuer Funktor (d.h. induziert Bijektion auf den Morphismen).
  - Für jede endlich erzeugte, reduzierte  $K$ -Algebra  $A$  gibt es eine affine Varietät  $V$  mit  $\Phi(V) \cong A$ .

Alternativ könnte man auch zeigen: Es existiert ein Funktor

$$\Psi: \mathcal{RedAlg}_K \longrightarrow \mathcal{AffVar}_K$$

mit  $\Psi \circ \Phi \cong \text{id}_{\mathcal{AffVar}_K}$  und  $\Phi \circ \Psi \cong \text{id}_{\mathcal{RedAlg}_K}$ .

Zuerst stellen wir fest: Nach Bemerkung 4.7 ist  $\Phi$  volltreu.

Sei nun  $A$  eine endlich erzeugte  $K$ -Algebra mit Erzeugern  $a_1, \dots, a_n$ . Definiere den Homomorphismus

$$\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow A \text{ durch } X_i \longmapsto a_i.$$

Aus der Reduziertheit von  $A$  folgt, dass  $I = \text{Kern}(\varphi)$  ein Radikalideal ist. Setze nun  $V = \mathfrak{V}(I)$ . Da  $K$  algebraisch abgeschlossen ist, gilt  $\mathfrak{I}(V) = \sqrt{(I)} = I$ . Insgesamt gilt mit dem Homomorphiesatz:

$$K[V] \cong K[X_1, \dots, X_n] / \mathfrak{I}(V) = K[X_1, \dots, X_n] / I \cong A. \quad \square$$

**BEISPIEL 4.8:** In diesem Beispiel sei wieder  $K$  algebraisch abgeschlossen.

- (a) Ist  $V = \mathbb{A}^n(K)$ , so ist  $\mathfrak{I}(V) = (0)$  und damit  $K[V] \cong K[X_1, \dots, X_n]$ .  
 (b) Im anderen Extremfall  $V = \emptyset$  gilt  $\mathfrak{I}(V) = K[X_1, \dots, X_n]$ , d.h.  $K[V] \cong \{0\}$ .  
 (c) Ist  $V$  ein Punkt, d.h.  $V = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ , dann ist  $\mathfrak{I}(V) = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$ . Also gilt dann  $K[V] \cong K$ . Das passt auch zu der Sichtweise, dass die maximalen Ideale in einem algebraisch abgeschlossenen Körper gerade den Punkten entsprechen.

- (d) Sei  $V$  eine Hyperebene, d.h.  $\mathfrak{I}(V) = (a_1X_1 + \dots + a_nX_n + c)$  mit mindestens einem  $a_i \neq 0$ . Dann ist  $K[V] \cong K[X_1, \dots, X_{n-1}]$  und  $V \cong \mathbb{A}^{n-1}$ .
- (e) Wir betrachten die Neilsche Parabel aus Beispiel 4.3. Wir haben also

$$V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3) \text{ sowie } I = (Y^2 - X^3), \text{ also } \mathfrak{V}(I) = \{(t^2, t^3) \mid t \in K\}.$$

Folglich gilt

$$K[V] \cong K[X, Y] / (Y^2 - X^3).$$

Man beachte, dass  $\mathbb{A}^1(K)$  und  $V$  birational äquivalent sind. Es gilt also  $K(V) \cong K(\mathbb{A}^1(K))$ .

Konkreter: Die Äquivalenzklasse von  $X^3$  ist ein Quadrat in  $K(V)$ , also ist auch die Klasse von  $X$  ein Quadrat. Wie sieht eine Wurzel von der Klasse von  $X$  aus?

Betrachte dazu

$$r_1: \begin{cases} \mathbb{A}^1(K) \longrightarrow V \\ t \longmapsto (t^2, t^3) \end{cases} \quad \text{und} \quad r_2: \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{A}^1(K) \\ (x, y) \longmapsto y/x \end{cases}$$

Dann sind  $r_1$  und  $r_2$  birationale Abbildungen und induzieren

$$\alpha_1: K(V) \longrightarrow K(\mathbb{A}^1(K)) = K(t),$$

$$\alpha_2: K(\mathbb{A}^1(K)) \longrightarrow K(V),$$

wobei  $\alpha_1(X) = t^2$  und  $\alpha_2(t) = Y/X$ . Also gilt in  $K(V)$ :  $Y^2/X^2 = X$ .

Im Koordinatenring  $K[V]$  gibt es hingegen keine Wurzel aus der Klasse von  $X$ . Denn ansonsten gäbe es  $P \in K[X, Y]$  mit  $P^2 - X \in (Y^2 - X^3)$ . Also gäbe es ein

$$f \in K[X, Y] \text{ mit } P^2(X, Y) = X + f(X, Y)(Y^2 - X^3).$$

Insbesondere wäre dann

$$P^2(X, 0) = X - f(X, 0) \cdot X^3 = X(1 - f(X, 0)X^2) \text{ in } K[X].$$

Also wäre  $P^2(X, 0)$  durch  $X$ , aber nicht durch  $X^2$  teilbar, was unmöglich ist.

Daher ist  $K[V]$  hier nicht isomorph zu  $K[X]$ .

## 5 Die Garbe der regulären Funktionen



In diesem Abschnitt wollen wir Morphismen „lokal“, d.h. auf offenen Mengen definieren. In diesem Abschnitt sei stets  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

DEFINITION/BEMERKUNG 5.1: Sei  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  und

$$\mathfrak{D}(f) := \{x \in \mathbb{A}^n(K) \mid f(x) \neq 0\} = \mathbb{A}^n(K) \setminus \mathfrak{V}(f).$$

Das ist eine offene Teilmenge des  $\mathbb{A}^n(K)$ . Die Menge  $\{\mathfrak{D}(f) \mid f \in K[X_1, \dots, X_n]\}$  ist eine Basis der Zariski-Topologie.

*Beweis:* Sei  $U \subseteq \mathbb{A}^n(K)$  eine offene Menge,  $V = \mathbb{A}^n(K) \setminus U$  und  $I = \mathfrak{I}(V)$ . Dann gilt für alle  $f \in I$  und  $p \in \mathfrak{D}(f)$ , dass  $f(p) \neq 0$ , also  $p \notin V = \mathfrak{V}(I)$  und damit  $p \in U$ . Also ist  $U$  die Vereinigung aller  $\mathfrak{D}(f)$  für  $f \in I$ .  $\square$

BEMERKUNG 5.2: Sei  $V$  eine affine Varietät und  $h \in K[X_1, \dots, X_n]$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}(h) \cap V = \emptyset &\iff \mathfrak{I}(V) + (h) = K[X_1, \dots, X_n] \\ &\iff 1 = gh + f \text{ für passende } g \in K[X_1, \dots, X_n], f \in \mathfrak{I}(V) \\ &\iff \bar{1} = \bar{g}\bar{h} \text{ in } K[V] \\ &\iff \bar{h} \text{ ist in } K[V] \text{ invertierbar.} \end{aligned}$$

DEFINITION 5.3: Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$  eine affine Varietät und  $U \subseteq V$  offen (bzgl. der Spurtopologie).

- (a) Sei  $p \in U$ . Eine Funktion  $r: U \longrightarrow \mathbb{A}^1(K)$  heißt *regulär in  $p$* , wenn es eine Umgebung  $U_p$  von  $p$  gibt und  $f_p, g_p \in K[V]$  mit  $g_p(x) \neq 0$  für alle  $x \in U_p$ , sodass

$$r(x) = \frac{f_p(x)}{g_p(x)} \text{ für alle } x \in U_p \text{ gilt.}$$

Die Funktion  $r$  heißt *regulär*, wenn sie für alle  $p \in U$  regulär ist.

- (b) Die Menge

$$\mathcal{O}_V(U) = \{r: U \longrightarrow \mathbb{A}^1(K) \mid r \text{ regulär}\}$$

heißt  *$K$ -Algebra der regulären Funktionen* oder *regulärer Ring*.

BEISPIEL: Für  $V = \mathbb{A}^1(K)$  und  $U = V \setminus \{0\}$  ist z.B.  $\frac{1}{x} \in \mathcal{O}_V(U)$ .

BEMERKUNG 5.4: Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$  eine affine Varietät und  $U \subseteq V$  offen und dicht. Dann ist  $\mathcal{O}_V(U)$  eine  $K$ -Algebra, die  $K[V]$  umfasst.

BEMERKUNG 5.5 (Restriktion der regulären Funktionen): Für offene Mengen  $U, U' \subseteq V$  mit  $U' \subseteq U$  ist die Restriktionsabbildung

$$\rho_{U'}^U: \mathcal{O}_V(U) \longrightarrow \mathcal{O}_V(U'), \quad f \longmapsto f|_{U'}$$

ein  $K$ -Algebrenhomomorphismus mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Für in  $V$  offene Mengen  $U'' \subseteq U' \subseteq U$  gilt  $\rho_{U''}^U = \rho_{U''}^{U'} \circ \rho_{U'}^U$ .  
 (b) Ist  $U$  offen in  $V$  und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $U$ , so gilt  
 (i) Für alle  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  gilt  $f = 0$  genau dann wenn  $\rho_{U_i}^U(f) = 0$  für alle  $i \in I$ .  
 (ii) Ist eine Familie  $(f_i)_{i \in I}$  mit  $f_i \in \mathcal{O}_V(U_i)$  gegeben, die

$$\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(f_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(f_j)$$

für alle  $i, j \in I$  erfüllt, dann gibt es ein  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  mit  $\rho_{U_i}^U(f) = f_i$  für alle  $i \in I$  („Verklebeeigenschaft“).

*Beweis:* (a) Folgt aus den Eigenschaften von Einschränkungen von Funktionen.

- (b) (i) Klar.  
(ii) Definiere  $f(x) = f_i(x)$ , falls  $x \in U_i$ . Dann ist  $f$  wohldefiniert und eine reguläre Funktion, denn auf jedem  $U_i$  stimmt  $f$  mit  $f_i$  überein und  $f_i$  ist auf  $U_i$  regulär.  $\square$

DEFINITION 5.6: (a) Sei  $X$  ein topologischer Raum. Für jede offene Menge  $U \subseteq X$  sei eine  $K$ -Algebra  $\mathcal{O}(U)$  gegeben. Weiter sei für jede Inklusion von offenen Mengen  $U' \subseteq U$  ein  $K$ -Algebren-Homomorphismus  $\rho_{U'}^U: \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U')$  gegeben, sodass die Eigenschaften (a) und (b) aus Bemerkung 5.5 gelten. Dann heißt  $\{\mathcal{O}(U), \rho_{U'}^U\}_{U' \subseteq U \text{ offen}}$  eine *Garbe von  $K$ -Algebren* auf  $X$  und die  $\rho_{U'}^U$  heißen *Restriktionshomomorphismen*.

- (b) Garben von Vektorräumen, Ringen, Mengen etc. sind analog definiert.  
(c) Aus der Bedingung (i) in Bemerkung 5.5 folgt die Eindeutigkeit von  $f$  in (ii).  
(d) Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{O}_X$  eine Garbe von Ringen auf  $X$ . Dann heißt  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein *geringter Raum* und  $\mathcal{O}_X$  heißt *Strukturgarbe* auf  $X$ .

BEMERKUNG 5.7: Sei  $V$  eine affine Varietät über  $K$ . Die regulären Ringe  $\mathcal{O}_V(U)$  aus Definition 5.3 bilden eine Garbe von  $K$ -Algebren.

BEISPIEL 5.8: Weitere Beispiele für Garben:

- topologischer Raum mit Garbe der stetigen Funktionen,
- differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit  $C^k$ -Funktionen,
- Riemannsche Flächen mit Garbe der holomorphen Funktionen.

**Ziel:** Wir wollen reguläre Funktionen möglichst global definieren. Dazu zeigen wir zunächst, dass endlich viele der  $U_p$  reichen und dass  $\mathcal{O}_V(V) = K[V]$ .

BEMERKUNG 5.9: Sei  $V$  eine affine Varietät.

- (a)  $V$  ist ein *noetherscher topologischer Raum*, d.h. jede absteigende Kette abgeschlossener Mengen  $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$  wird stationär.  
(b) Offene Teilmengen  $U$  von  $V$  sind *quasikompakt*, d.h. jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung.  
(c) Für  $g \in K[V]$  sei  $\mathfrak{D}(g) = \{x \in V \mid g(x) \neq 0\}$ . Die Mengen  $\mathfrak{D}(g)$  bilden eine Basis der Topologie von  $V$ . Es gilt sogar, dass jede offene Menge in  $V$  Vereinigung von endlich vielen der  $\mathfrak{D}(g)$  ist.

*Beweis:* (a) Das gilt, weil  $K[V]$  noethersch als Ring ist.

- (b) Wenn das nicht so wäre, dann gäbe es in einer offenen Überdeckung

$$U \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine Folge  $i_1, i_2, i_3, \dots$ , so dass man kein  $U_{i_j}$  weglassen kann. Damit wäre

$$U_{i_1} \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup U_{i_3} \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Kette offener Mengen, die nie stationär wird. Dies ist ein Widerspruch zu (a).



- (c) Dass die  $\mathfrak{D}(g)$  eine Basis bilden, sieht man wie in Definition/Bemerkung 5.1. Es reichen endlich viele, weil jedes Ideal in  $K[V]$  endlich erzeugt ist.  $\square$

PROPOSITION 5.10: Sei  $V$  eine affine Varietät. Dann gibt es für  $g \in K[V]$  und eine reguläre Funktion  $r \in \mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(g))$  ein  $f \in K[V]$  und ein  $d \in \mathbb{N}_0$ , sodass  $r = \frac{f}{g^d}$ .

*Beweis:* (1) Ohne Einschränkung kann in Definition 5.3  $U_p = \mathfrak{D}(g_p)$  gewählt werden, denn: Wir finden zunächst  $f_p, g_p \in K[V]$ , so dass  $r(x) = \frac{f_p(x)}{g_p(x)}$  für alle  $x \in U_p$ . Wir wählen ein  $\tilde{g}_p \in K[V]$  mit  $p \in \mathfrak{D}(\tilde{g}_p) \subseteq U_p \subseteq \mathfrak{D}(g_p)$ . Damit ist  $\tilde{g}_p \in \sqrt{(g_p)}$ , es gibt also ein  $h \in K[V]$  und ein  $d \in \mathbb{N}$  mit  $\tilde{g}_p^d = h \cdot g_p$ . Wir wählen  $\hat{f}_p = f_p \cdot h$  und  $\hat{g}_p = \tilde{g}_p^d$  und haben dann

$$r(x) = \frac{f_p(x)}{g_p(x)} = \frac{f_p(x)h(x)}{g_p(x)h(x)} = \frac{\hat{f}_p(x)}{\hat{g}_p(x)}$$

auf  $\mathfrak{D}(\hat{g}_p) = \mathfrak{D}(\tilde{g}_p) \subseteq \mathfrak{D}(g_p)$ .

- (2) Nach Bemerkung 5.9 (b) genügen endlich viele der  $\mathfrak{D}(g_p)$ , also können wir

$$\mathfrak{D}(g) = \mathfrak{D}(g_1) \cup \dots \cup \mathfrak{D}(g_n)$$

schreiben und haben nach (1)  $r = \frac{f_i}{g_i}$  auf  $\mathfrak{D}(g_i)$  mit  $f_i, g_i \in K[V]$ .

Wir basteln nun  $\tilde{f}_i, \tilde{g}_i \in K[V]$ , so dass  $r = \frac{\tilde{f}_i}{\tilde{g}_i}$  auf  $\mathfrak{D}(\tilde{g}_i) = \mathfrak{D}(g_i)$  und  $\tilde{f}_i \tilde{g}_j = \tilde{f}_j \tilde{g}_i$  in  $K[V]$  gilt.

Es gilt  $f_i(x)g_j(x) - f_j(x)g_i(x) = 0$  für alle  $x \in \mathfrak{D}(g_i) \cap \mathfrak{D}(g_j) = \mathfrak{D}(g_i g_j)$ . Also gilt

$$g_i(x)g_j(x) \cdot (f_i(x)g_j(x) - f_j(x)g_i(x)) = 0$$

für alle  $x \in V$ , da  $V = \mathfrak{D}(g_i g_j) \cup \mathfrak{V}(g_i g_j)$ . Wir wählen  $\tilde{f}_i = f_i g_i$  und  $\tilde{g}_i = g_i^2$ . Dann ist

$$r(x) = \frac{f_i(x)g_i(x)}{g_i^2(x)} = \frac{\tilde{f}_i(x)}{\tilde{g}_i(x)}$$

auf  $\mathfrak{D}(g_i) = \mathfrak{D}(\tilde{g}_i)$  und  $\tilde{f}_i \tilde{g}_j - \tilde{f}_j \tilde{g}_i = 0$  auf ganz  $V$ .

Es gilt

$$\mathfrak{D}(g) = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{D}(g_i), \text{ also } \mathfrak{V}(g) = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{V}(g_i).$$

Nach dem starken Hilbertschen Nullstellensatz gilt also  $g \in \sqrt{(g_1, \dots, g_n)}$ , d.h. es gibt ein  $d \in \mathbb{N}$  mit  $g^d = h_1 g_1 + \dots + h_n g_n$  mit  $h_i \in K[V]$ . Damit ist für alle  $j$ :

$$f_j g^d = \sum_{i=1}^n h_i g_i f_j = \sum_{i=1}^n h_i g_j f_i = g_j \sum_{i=1}^n h_i f_i.$$

Wir setzen  $f = \sum_{i=1}^n h_i f_i$  und haben dann für alle  $j$

$$r(x) = \frac{f_j(x)}{g_j(x)} = \frac{f(x)}{g^d(x)}$$

auf  $\mathfrak{D}(g_j)$ . □

KOROLLAR 5.11: (a)  $\mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(g)) \cong K[V][\frac{1}{g}] = K[V]_{\{g^d | d \in \mathbb{N}_0\}}$

(b) Ist  $V$  irreduzibel, so gilt  $\mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(g)) = \{\frac{f}{g^d} \in \text{Quot}(K[V])\}$ .

(c)  $\mathcal{O}_V(V) = K[V]$

*Beweis:* (a) Die Abbildung

$$K[V][\frac{1}{g}] \longrightarrow \mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(g)), \quad \frac{f}{g^d} \longmapsto \left( x \longmapsto \frac{f(x)}{g^d(x)} \right)$$

ist ein wohldefinierter  $K$ -Algebren-Homomorphismus, denn  $\frac{f_1}{g^{d_1}} = \frac{f_2}{g^{d_2}}$  gilt genau dann, wenn es ein  $\tilde{d} \in \mathbb{N}_0$  gibt, sodass

$$g^{\tilde{d}}(f_1 g^{d_2} - f_2 g^{d_1}) = 0$$

ist. Da  $g(x) \neq 0$  auf  $\mathfrak{D}(g)$  gilt, ist das äquivalent zu

$$\frac{f_1(x)}{g^{d_1}(x)} = \frac{f_2(x)}{g^{d_2}(x)} \text{ für alle } x \in \mathfrak{D}(g).$$

Außerdem ist die Abbildung offenbar injektiv und wegen Proposition 5.10 auch surjektiv.

(b) Das folgt aus (a), denn hier ist  $K[V]$  nullteilerfrei.

(c) Hier wählen wir  $g = 1$ , sodass  $\mathfrak{D}(g) = V$  und nach (a)  $\mathcal{O}_V \cong K[V]$  gilt. □

PROPOSITION 5.12: Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(K)$  affine Varietäten. Genau dann ist eine Abbildung  $f: V \longrightarrow W$  ein Morphismus, wenn  $f$  stetig ist und reguläre Funktionen erhält, d.h. für alle offenen  $U \subseteq W$  und  $r \in \mathcal{O}_W(U)$  gilt  $r \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$ .

*Beweis:* Sei zuerst  $f$  ein Morphismus. Dann ist  $f$  stetig nach Bemerkung 4.4. Sei  $r \in \mathcal{O}_W(U)$ . Dann lässt sich  $r$  lokal schreiben als

$$r(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} \text{ mit } g_p, h_p \in K[W].$$

Weil  $g_p \circ f = f^\sharp(g_p)$  und  $h_p \circ f = f^\sharp(h_p)$  in  $K[V]$  liegen, ist  $r \circ f(x) = \frac{g_p \circ f(x)}{h_p \circ f(x)}$  eine lokale Darstellung von  $r \circ f$ . Also ist  $r \circ f$  eine reguläre Funktion.

Sei nun umgekehrt  $f$  eine stetige Abbildung, die reguläre Funktionen erhält. Für die Koordinatenfunktionen

$$p_i: \mathbb{A}^m(K) \longrightarrow \mathbb{A}^1(K), \quad (x_1, \dots, x_m) \longmapsto x_i,$$

wollen wir  $p_i \circ f \in K[V]$  zeigen. Dies gilt, denn  $p_i \in K[W] = \mathcal{O}_W(W)$ , also nach Voraussetzung  $p_i \circ f \in \mathcal{O}_V(V) = K[V]$  mit Korollar 5.11 (c). □

BEMERKUNG 5.13: Sei  $V$  eine affine Varietät.

- (a) Sei  $U \subseteq V$  offen,  $r \in \mathcal{O}_V(U)$  und  $A = \{p \in U \mid r(p) = 0\}$ . Dann ist  $A$  abgeschlossen in  $U$ .
- (b) („Identitätssatz“) Sind  $U_1, U_2 \subseteq V$  offen und  $r_1 \in \mathcal{O}_V(U_1)$ ,  $r_2 \in \mathcal{O}_V(U_2)$  und gibt es ein  $\tilde{U} \subseteq U_1 \cap U_2$ , das in  $U_1 \cap U_2$  dicht liegt und so, dass  $r_1|_{\tilde{U}} = r_2|_{\tilde{U}}$ , dann gilt  $r_1|_{U_1 \cap U_2} = r_2|_{U_1 \cap U_2}$ .

*Beweis:* (a) Sei  $q \in U \setminus A$ . Wir schreiben  $r = \frac{f}{g}$  auf einem  $\mathfrak{D}(g) \subseteq U$ . Dann ist  $r(q) \neq 0$ , also  $f(q) \neq 0$ . Insbesondere ist  $r(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathfrak{D}(f) \cap \mathfrak{D}(g)$ . Also ist  $\mathfrak{D}(f) \cap \mathfrak{D}(g)$  eine Umgebung von  $q$  in  $U \setminus A$ .

- (b) Setze  $r = r_1|_{U_1 \cap U_2} - r_2|_{U_1 \cap U_2} \in \mathcal{O}_V(U_1 \cap U_2)$ . Es ist  $r = 0$  auf  $\tilde{U}$ . Da die Nullstellenmenge nach (a) abgeschlossen ist und  $\tilde{U}$  dicht liegt, folgt  $r = 0$  auf  $U_1 \cap U_2$ .  $\square$

DEFINITION/BEMERKUNG 5.14: (a) Eine *quasi-affine Varietät*  $W$  ist eine Zariski-offene Teilmenge einer affinen Varietät.

- (b) Eine Abbildung  $f: W_1 \longrightarrow W_2$  zwischen quasi-affinen Varietäten heißt *Morphismus* oder *reguläre Abbildung*, wenn  $f$  stetig ist und reguläre Funktionen erhält. Die quasi-affinen Varietäten bilden zusammen mit den Morphismen eine Kategorie.
- (c) Eine quasi-affine Varietät  $W$  heißt *affin (als abstrakte Varietät)*, wenn es einen Isomorphismus  $f: W \longrightarrow V$  gibt, sodass  $V = \mathfrak{V}(I)$  eine affine Varietät in einem  $\mathbb{A}^n(K)$  ist.
- (d) Seien  $W_1 \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ ,  $W_2 \subseteq \mathbb{A}^m(K)$  quasi-affine Varietäten und  $f: W_1 \longrightarrow W_2$ . Dann ist  $f$  genau dann eine reguläre Abbildung, wenn es reguläre Funktionen

$$f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_{\overline{W_1}}(W_1) \text{ mit } f = (f_1, \dots, f_m)$$

gibt, denn  $f$  ist genau dann ein Morphismus, wenn  $f$  stetig ist und reguläre Funktionen erhält. Analog zu Proposition 5.12 lässt sich  $f$  also lokal als Quotient von regulären Funktionen schreiben.

- (e) Sei  $V$  eine affine Varietät und  $U \subseteq V$  offen. Dann ist

$$\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{\overline{U}}(U) =: \mathcal{O}(U).$$

Denn: Nach Definition ist jedes Element aus  $\mathcal{O}_V(U)$  lokal auf einer offenen Teilmenge  $\hat{U}$  von  $V$  von der Form  $\frac{g}{h}$  mit  $g, h \in K[V]$ . Insbesondere stimmt das dann auch auf  $\hat{U} \cap \overline{U}$ . Umgekehrt können wir, wenn  $r = \frac{g}{h}$  lokal auf  $\tilde{U} \subseteq \overline{U}$  für  $g, h \in K[V]$  gilt, ein offenes  $\hat{U} \subseteq V$  mit  $\hat{U} \cap \overline{U} = \tilde{U}$  wählen.

BEISPIEL 5.15: (a) Sei  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ . Dann ist  $\mathfrak{D}(f)$  affin als abstrakte Varietät, denn: Definiere  $\tilde{f} \in K[X_1, \dots, X_{n+1}]$  durch  $\tilde{f} = f \cdot X_{n+1} - 1$  und  $I = (\tilde{f})$ . Dann

ist  $\mathfrak{V}(I) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}(K) \mid f(x_1, \dots, x_n) \cdot x_{n+1} = 1\}$ . Definiere weiter

$$\begin{aligned} r_1: \mathfrak{D}(f) &\longrightarrow \mathfrak{V}(I), & (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)}\right), \\ r_2: \mathfrak{V}(I) &\longrightarrow \mathfrak{D}(f), & (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Dann sind  $r_1$  und  $r_2$  wohldefinierte reguläre Abbildungen und zueinander invers.

- (b)  $\mathbb{A}^1(K) \setminus \{0\} = \mathfrak{D}(X)$  ist nach (a) affin als abstrakte Varietät.
- (c)  $\mathbb{A}^2(K) \setminus \{(0, 0)\}$  ist nicht affin als abstrakte Varietät; siehe Übungsblatt.
- (d) Für  $\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in K^{n \times n} \mid \det A \neq 0\} \subseteq K^{n^2}$  gilt  $\mathrm{GL}_n(K) = \mathfrak{D}(\det(\cdot))$ . Mit (a) kann  $\mathrm{GL}_n(K)$  als affine Varietät in  $\mathbb{A}^{n^2+1}(K)$  aufgefasst werden, nämlich als  $\{(A, y) \in K^{n^2+1} \mid y \cdot \det A - 1 = 0\}$ .

## 6 Rationale Abbildungen



In diesem Abschnitt wollen wir alle regulären Funktionen, die auf einem in  $V$  dichten  $U$  definiert sind, gleichzeitig betrachten.

In diesem Abschnitt sei stets  $K$  algebraisch abgeschlossen und  $V$  eine affine Varietät.

DEFINITION/BEMERKUNG 6.1: (a) Eine *rationale Funktion* auf  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f)$ , wobei  $U$  eine dichte, offene Teilmenge von  $V$  mit  $f \in \mathcal{O}_V(U)$  ist. Hierbei sei

$$(U, f) \sim (U', f') \iff f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}.$$

- (b) In jeder Äquivalenzklasse gibt es ein maximales Element (bzgl. Inklusion auf  $U$ )  $(U, f)$ . Dieses  $U$  heißt *Definitionsbereich* und  $V \setminus U$  heißt *Polstellenmenge*.
- (c) Die rationalen Funktionen auf  $V$  bilden eine  $K$ -Algebra. Schreibweise:  $\mathrm{Rat}(V)$ .
- (d) Ist  $V$  irreduzibel, so ist  $\mathrm{Rat}(V)$  isomorph zu  $\mathrm{Quot}(K[V]) = K(V)$ .

*Beweis:* (a) Zu zeigen:  $\sim$  definiert eine Äquivalenzrelation. Es bleibt nur die Transitivität zu zeigen. Seien  $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$  und  $(U_2, f_2) \sim (U_3, f_3)$ . Dann stimmen  $f_1$  und  $f_3$  auf  $U_1 \cap U_2 \cap U_3$  überein. Da  $U_1 \cap U_2 \cap U_3$  dicht in  $V$  ist, folgt mit dem Identitätssatz Bemerkung 5.13:

$$f_1|_{U_1 \cap U_3} = f_3|_{U_1 \cap U_3}$$

- (b) Ist  $(U, f) \sim (U', f')$ , so kann auf  $U \cup U'$  die reguläre Funktion  $\hat{f}$  definiert werden, indem man

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in U, \\ f'(x), & \text{falls } x \in U', \end{cases}$$

setzt.

Setze also  $U_{\max} = U \cup U'$ , wobei  $U'$  alle offenen Mengen durchläuft für die es ein  $f' \in \mathcal{O}(U')$  gibt mit  $(U', f') \sim (U, f)$ .

- (c) Summen und Produkte von rationalen Funktionen sind wieder rational und das ist mit der Äquivalenzrelation verträglich. Dabei ist zu beachten, dass man die Definitionsbereiche schneiden muss.
- (d) Definiere den  $K$ -Algebrenhomomorphismus  $\alpha$  durch

$$\alpha: K(V) \longrightarrow \text{Rat}(V), \quad \frac{g}{h} \longmapsto \left[ \left( \mathfrak{D}(h), \frac{g}{h} \right) \right].$$

Sei  $(U, r)$  mit  $r \in \mathcal{O}(U)$  eine rationale Funktion. Da  $r$  regulär ist, gibt es  $U' \subseteq U$  mit  $r|_{U'} = \frac{g}{h}$ , wobei  $g, h \in K[V]$  und  $h \in \mathcal{O}(U')$ . Da  $V$  irreduzibel ist, ist  $U'$  bereits dicht. Also gilt  $\alpha(\frac{g}{h}) = [(U, r)]$  und  $\alpha$  ist surjektiv.

Die Injektivität ist klar, da  $K(V)$  ein Körper ist.  $\square$

DEFINITION 6.2: Sei  $V$  irreduzibel. Der Körper  $K(V) \cong \text{Rat}(V)$  heißt *Funktionenkörper*.



Ist  $V$  irreduzibel, so repräsentiert der gekürzte Bruch  $\frac{g}{h} \in K(V)$  die rationale Funktion  $r := [(\mathfrak{D}(h), \frac{g}{h})]$ . Aber  $\mathfrak{D}(h)$  kann eine *echte* Teilmenge des Definitionsbereichs  $\text{Def}(r)$  sein. Ist jedoch  $K[V]$  faktoriell, so gilt  $\mathfrak{D}(h) = \text{Def}(r)$  (vgl. dazu auch Übungsblätter 4 und 5).

PROPOSITION 6.3: Seien  $V, W$  irreduzible, affine Varietäten,  $f: V \longrightarrow W$  ein Morphismus und  $f^\#: K[W] \longrightarrow K[V]$  der induzierte  $K$ -Algebrenhomomorphismus. Dann gilt:

- (a)  $f^\#$  kann genau dann zu einem Körperhomomorphismus von  $K(W) \longrightarrow K(V)$  fortgesetzt werden, wenn  $f^\#$  injektiv ist.
- (b)  $f^\#$  ist genau dann injektiv, wenn  $f(V)$  dicht in  $W$  ist.

*Beweis:* (a) Die Notwendigkeit der Injektivität von  $f^\#$  ist klar. Ist umgekehrt  $f^\#$  injektiv, so definiert man  $f^\#(\frac{a}{b}) = \frac{f^\#(a)}{f^\#(b)}$ . Die Injektivität impliziert die Wohldefiniertheit und man sieht, dass man auf diese Art einen Körperhomomorphismus erhält.

- (b) Für  $f^\#$  gilt: Für jede Untervarietät  $Z \subseteq V$  ist  $f^{\#-1}(\mathfrak{I}(Z)) = \mathfrak{I}(f(Z))$ . Denn:

$$\begin{aligned} g \in f^{\#-1}(\mathfrak{I}(Z)) &\iff g \circ f \in \mathfrak{I}(Z) \iff g \circ f(x) = 0 \quad \forall x \in Z \\ &\iff g(y) = 0 \quad \forall y \in f(Z) \iff g \in \mathfrak{I}(f(Z)). \end{aligned}$$

Nun gilt:  $f^\#$  ist injektiv  $\iff 0 = f^{\#-1}(0) = f^{\#-1}(\mathfrak{I}(V)) = \mathfrak{I}(f(V)) = \mathfrak{I}(\overline{f(V)})$

$$\iff \overline{f(V)} = W. \quad \square$$

DEFINITION 6.4: Ein Morphismus  $f: V \longrightarrow W$  mit  $\overline{f(V)} = W$  heißt *dominant*.

DEFINITION/BEMERKUNG 6.5: Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(K)$  affine Varietäten.

- (a) Eine *rationale Abbildung*  $f: V \dashrightarrow W$  ist eine Äquivalenzklasse  $(U, f_U)$ , wobei die  $U$  offen und dicht in  $V$  liegen und die  $f_U: U \rightarrow W$  reguläre Abbildungen sind. Dabei ist

$$(U, f_U) \sim (U', f_{U'}) \iff f_U|_{U \cap U'} = f_{U'}|_{U \cap U'}.$$

- (b) Rationale Abbildungen nach  $\mathbb{A}^1(K)$  sind rationale Funktionen.  
(c) Jede rationale Abbildung  $r: V \dashrightarrow W$  hat einen maximalen Definitionsbereich  $\text{Def}(r)$ , der offen ist.  
(d) Sind  $V$  und  $W$  irreduzibel, so ist die Komposition von dominanten rationalen Abbildungen wieder eine dominante rationale Abbildung, d.h. für  $U$  dicht in  $V$  ist

$$\overline{r(U)} = W.$$

- (e) Sind  $V$  und  $W$  irreduzibel, so induziert jede dominante rationale Abbildung

$$f: V \dashrightarrow W$$

einen Körperhomomorphismus  $f^\sharp: K(W) \rightarrow K(V)$  mit

$$f^\sharp(g) = g \circ f.$$

- (f) Eine rationale Abbildung  $f: V \dashrightarrow W$  heißt *birational*, wenn es eine rationale Abbildung  $g: W \dashrightarrow V$  gibt, so dass  $f \circ g$  und  $g \circ f$  definiert sind und jeweils die Identität ergeben.

BEISPIEL 6.6: (a) Seien  $V_1 = \mathfrak{V}(X \cdot Y)$ ,  $V_2 = \mathbb{A}^1(K)$  und  $V_3 = \mathbb{A}^1(K)$ . Weiter seien folgende rationale Abbildungen gegeben:

$$\begin{aligned} f: V_1 \dashrightarrow V_2, \quad (x, y) &\longmapsto x, \\ g: V_2 \dashrightarrow V_3, \quad x &\longmapsto \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

Hier ist  $\text{Def}(g \circ f) \subseteq \mathfrak{V}(Y)$ , also insbesondere nicht dicht in  $V_1$ .

- (b) Die Abbildung  $\sigma: \mathbb{A}^2(K) \rightarrow \mathbb{A}^2(K)$ ,  $(x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$  ist auf  $\mathbb{A}^2(K) \setminus \mathfrak{V}(X \cdot Y)$  definiert, also eine rationale Abbildung.

Beachte:  $\sigma \circ \sigma = \text{id}|_{\mathbb{A}^2(K) \setminus \mathfrak{V}(X \cdot Y)}$ , folglich ist  $\sigma$  sogar birational.

- (c) Seien  $V_1 = \mathbb{A}^1(K)$ ,  $V_2 = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$  (vgl. Beispiel 4.8 (e)). Betrachte die rationalen Abbildungen

$$\begin{aligned} r_1: V_1 &\longrightarrow V_2, & t &\longmapsto (t^2, t^3), \\ r_2: V_2 &\supseteq \mathfrak{D}(X) \longrightarrow V_1, & (x, y) &\longmapsto \frac{y}{x}, \end{aligned}$$

Dann erhalten wir:

- $r_2 \circ r_1 = \text{id}_{U_1}$  mit  $U_1 = \text{Def}(r_2 \circ r_1) = \mathbb{A}^1(K) \setminus \{0\}$ .
- $r_1 \circ r_2 = \text{id}_{U_2}$  mit  $U_2 = \text{Def}(r_1 \circ r_2) = V_2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Also ist  $\mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$  birational äquivalent zu  $\mathbb{A}^1(K)$ , aber sie sind nicht isomorph.

**BEMERKUNG:** Irreduzible affine Varietäten bilden zusammen mit den dominanten rationalen Abbildungen eine Kategorie.

**Satz 4:** *Sei  $K$  algebraisch abgeschlossen. Dann ist die Kategorie der endlich erzeugten Körpererweiterungen  $L/K$  mit  $K$ -Algebrenhomomorphismen äquivalent zur Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten mit dominanten rationalen Abbildungen.*

*Beweis:* Wir definieren

$$\Phi: \begin{cases} V \longmapsto K(V) \\ f \longmapsto f^\# \end{cases}$$

und zeigen, dass das eine Äquivalenz von Kategorien liefert. Dazu zeigen wir:

- Für jede endlich erzeugte Körpererweiterung  $L/K$  gibt es eine irreduzible affine Varietät  $V$  mit  $K(V) \cong L$ .
- $\Phi$  ist volltreu, d.h. induziert eine Bijektion auf den Morphismenmengen.

Zum ersten Punkt: Wir wählen endlich viele Erzeuger  $x_1, \dots, x_n$  der Körpererweiterung  $L/K$ , d.h.  $L = K(x_1, \dots, x_n)$ . Wir definieren  $A = K[x_1, \dots, x_n]$  als die von  $x_1, \dots, x_n$  erzeugte  $K$ -Algebra in  $L$ . Dann ist  $A$  eine endlich erzeugte, reduzierte, nullteilerfreie  $K$ -Algebra. Deshalb gibt es nach Satz 3 eine affine Varietät  $V$  mit  $K[V] \cong A$ . Da  $A$  nullteilerfrei ist, ist  $V$  irreduzibel und es gilt  $K(V) \cong \text{Quot}(A) \cong L$ .

Zum zweiten Punkt zeigen wir: Sind  $V, W$  affine Varietäten und  $\alpha: K(W) \longrightarrow K(V)$  ein  $K$ -Algebrenhomomorphismus, so gibt es eine rationale Abbildung

$$f = f_\alpha: V \dashrightarrow W \text{ mit } \alpha = f^\#.$$

Für den Beweis dieser Aussage seien  $g_1, \dots, g_m$  Erzeuger von  $K[W]$ .

Dann ist  $\alpha(g_i) \in K(V)$  und  $\bigcup_{i=1}^m \text{Def}(\alpha(g_i))$  ist offen und dicht in  $V$ . Wähle

$$U := \mathfrak{D}(g) \subseteq \bigcap_{i=1}^m \text{Def}(\alpha(g_i)) \text{ mit } g \in K[V].$$

Nach Beispiel 5.15 ist  $\mathfrak{D}(g)$  affin, also existiert eine affine Varietät  $Z$  und ein Isomorphismus  $\Psi: Z \longrightarrow \mathfrak{D}(g)$ . So erhalten wir

$$\Psi^\# \circ \alpha: K[W] \longrightarrow \mathcal{O}(Z) = K[Z]$$

und das induziert  $\tilde{f}: Z \longrightarrow W$ .

Damit ist  $\hat{f} := \tilde{f} \circ \Psi^{-1}$  eine reguläre Abbildung von  $U$  nach  $W$ . Diese induziert eine rationale Abbildung  $f: V \dashrightarrow W$ , da  $U$  dicht in  $V$  liegt. Da  $\Psi^\# \circ \alpha$  injektiv ist, ist  $f$  dominant nach Proposition 6.3.

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass  $\Phi$  treu ist. Seien dazu  $r_1, r_2: V \dashrightarrow W$  rationale Abbildungen und  $r_1^\# = r_2^\# = \alpha$ . Wir wählen  $U$  offen, affin und so klein, dass  $r_1$  und  $r_2$  auf  $U$  definiert sind. Dann induzieren  $r_1$  und  $r_2$  aber als Abbildungen von  $U \cong Z$  nach  $W$  aufgefasset das selbe

$$\alpha: K[W] \longrightarrow \mathcal{O}(U) \cong K[Z].$$

Nun können wir Satz 3 anwenden und sehen  $r_1|_U = r_2|_U$  und da  $U$  dicht in  $V$  liegt, folgt  $r_1 = r_2$ .  $\square$

## 7 Spektrum eines Rings



ERINNERUNG 7.0 (aus Algebra II): Seien  $R, S$  Ringe und  $f: R \longrightarrow S$  ein Ringhomomorphismus.

- (a) Ist  $J \subseteq S$  ein Ideal, ist  $I = f^{-1}(J) \subseteq R$  ein Ideal. Ist dabei  $J$  ein Primideal, so ist auch  $I$  ein Primideal.
- (b) Ist  $f$  surjektiv und  $I \subseteq R$  ein Ideal, dann ist  $J = f(I) \subseteq S$  ein Ideal. Ist dabei  $I$  ein Primideal und  $\text{Kern } f \subseteq I$ , dann ist  $J$  ein Primideal.

Insgesamt gilt also: Primideale in  $S$  entsprechen Primidealen in  $R$ , die den Kern von  $f$  enthalten (falls  $f$  surjektiv ist).

ERINNERUNG/BEMERKUNG 7.1: Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$  eine affine Varietät ( $K$  algebraisch abgeschlossen). Dann haben wir Bijektionen

- (a)  $\{\text{Untervarietäten von } V\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Radikalideale in } K[X_1, \dots, X_n], \\ \text{die } \mathfrak{I}(V) \text{ enthalten} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{\text{Radikalideale in } K[V]\}$
- (b)  $\{\text{irreduzible Untervarietäten von } V\} \longleftrightarrow \{\text{Primideale in } K[V]\}$
- (c)  $\{\text{Punkte in } V\} \longleftrightarrow \{\text{maximale Ideale in } K[V]\}$

*Beweis:* (a) Das folgt aus Bemerkung 1.3, Bemerkung 1.5, Satz 2 und Erinnerung 7.0.

(b) Das folgt aus Bemerkung 2.9 und Erinnerung 7.0.

(c) Die eine Zuordnung ist

$$p = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \mathfrak{m}_p = \mathfrak{I}(\{p\}) = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n).$$

Für die andere sei  $\mathfrak{m}$  ein maximales Ideal in  $K[V]$ , dann gibt es einen Isomorphismus

$$\alpha: K[X_1, \dots, X_n] / \mathfrak{m} \longrightarrow K$$

und wir wählen  $p = (\alpha(\overline{X_1}), \dots, \alpha(\overline{X_n}))$ .  $\square$

DEFINITION/BEMERKUNG 7.2: Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins.

- (a) Die Menge  $\text{Spec } R := \{\wp \subseteq R \mid \wp \text{ ist Primideal}\}$  heißt *Spektrum von } R*.
- (b) Für eine Teilmenge  $S \subseteq R$  heißt  $\mathfrak{V}(S) := \{\wp \in \text{Spec } R \mid \wp \supseteq S\}$  *Verschwindungsmenge von } S* und es gilt  $\mathfrak{V}(S) = \mathfrak{V}((S))$ .



- (c) Die Mengen  $\mathfrak{V}(I)$  für Ideale  $I \subseteq R$  bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf  $\text{Spec } R$ , diese heißt *Zariski-Topologie*.
- (d) Für  $Z \subseteq \text{Spec } R$  heißt  $\mathfrak{I}(Z) := \bigcap_{\wp \in Z} \wp$  das *Verschwindungsideal von  $Z$* .

*Beweis:* (b) Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar. Für die umgekehrte Inklusion sei  $\wp \in \mathfrak{V}(S)$ , also  $\wp \supseteq S$ . Da  $\wp$  ein Ideal ist, folgt  $\wp \supseteq (S)$ , also  $\wp \in \mathfrak{V}((S))$ .

- (c) Das zeigt man wie in Definition/Bemerkung 2.1, insbesondere gilt

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{V}(I_\lambda) = \mathfrak{V}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) = \mathfrak{V}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$$

und  $\mathfrak{V}(I_1) \cup \mathfrak{V}(I_2) = \mathfrak{V}(I_1 \cap I_2) = \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$ .  $\square$

DEFINITION/BEMERKUNG 7.3: (a) Elemente aus  $R$  können als Funktionen aufgefasst werden:

$$r: \text{Spec } R \longrightarrow \bigcup_{\wp \in \text{Spec } R} \text{Quot}(R/\wp), \quad \wp \longmapsto \bar{r} \in \text{Quot}(R/\wp)$$

- (b) Ein Primideal  $\wp$  ist genau dann Nullstelle von  $r \in R$ , wenn  $\bar{r} = 0$  in  $R/\wp$ , also wenn  $r \in \wp$  gilt.

BEISPIEL 7.4: (a) Sei  $R = K[V]$  für eine affine Varietät  $V$  und einen algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$ . Dann enthält  $\text{Spec } R$  je einen Punkt für jede irreduzible Untervarietät von  $V$ . Ist  $\mathfrak{m}$  ein maximales Ideal in  $\text{Spec } R$ , dann ist  $\text{Quot}(R/\mathfrak{m}) \cong K$ .

- (b) Für  $R = \mathbb{Z}$  ist  $\text{Spec } R = \{(p) \mid p \in \mathbb{P}\} \cup \{(0)\}$ , kann also als  $\mathbb{P} \cup \{0\}$  aufgefasst werden.

BEMERKUNG 7.5: (a) Für  $Z \subseteq \text{Spec } R$  ist  $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(Z)) = \bar{Z}$  der Abschluss von  $Z$ .

- (b) Für  $f \in R$  sei  $\mathfrak{D}(f) = \text{Spec } R \setminus \mathfrak{V}(f) = \{\wp \in \text{Spec } R \mid f \notin \wp\}$ . Die Mengen  $\mathfrak{D}(f)$  bilden eine Basis der Topologie auf  $\text{Spec } R$ .

- (c) Sei  $V \subseteq \text{Spec } R$  nichtleer. Dann ist  $V$  genau dann irreduzibel, wenn  $\mathfrak{I}(V)$  ein Primideal ist.

*Beweis:* (a) Es gilt:

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(Z)) = \{\wp \in \text{Spec } R \mid \wp \supseteq \mathfrak{I}(Z)\} = \{\wp \in \text{Spec } R \mid \wp \supseteq \bigcap_{q \in Z} q\} \supseteq Z.$$

Daraus folgt, dass der Abschluss von  $Z$  in  $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(Z))$  liegt. Für die andere Inklusion sei  $\bar{Z} = \mathfrak{V}(J) = \{q \in \text{Spec } R \mid q \supseteq J\}$ . Da  $Z \subseteq \bar{Z}$ , gilt für alle  $\wp \in Z$ , dass  $\wp \supseteq J$ . Sei nun  $q \in \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(Z))$ . Dann gilt

$$q \supseteq \bigcap_{\wp \in Z} \wp \supseteq J,$$

also  $q \in \mathfrak{V}(J)$ .

(b) Das geht wie in Bemerkung 5.9 (c).

(c) Das geht wie in Bemerkung 2.9.  $\square$

BEMERKUNG 7.6: (a) Für  $\wp \in \text{Spec } R$  gilt  $\overline{\{\wp\}} = \{q \in \text{Spec } R \mid q \supseteq \wp\} = \mathfrak{V}(\wp)$ .

(b) Für  $\wp \in \text{Spec } R$  ist  $\{\wp\}$  genau dann abgeschlossen, wenn  $\wp$  ein maximales Ideal ist.

(c) Sei  $R$  nullteilerfrei. Dann gilt  $\overline{\{(0)\}} = \text{Spec } R$ .

BEMERKUNG 7.7: Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$  mit  $\overline{\{x\}} = X$ . Dann heißt  $x$  *generischer Punkt*.

BEISPIEL 7.8: Sei  $V$  eine affine Varietät.

(a) Die abgeschlossenen Punkte in  $\text{Spec } K[V]$  entsprechen bijektiv den Punkten der affinen Varietät  $V$ .

(b) Ist  $V$  irreduzibel, dann ist  $\{(0)\}$  ein generischer Punkt. Dazu gehört gerade  $V$  als Untervarietät von  $V$ .

BEMERKUNG 7.9: Sei  $\alpha: R \longrightarrow R'$  ein Ringhomomorphismus.

(a)  $\alpha$  induziert eine stetige Abbildung

$$f_\alpha: \text{Spec } R' \longrightarrow \text{Spec } R, \quad \wp \longmapsto \alpha^{-1}(\wp).$$

(b) Ist  $I \subseteq R$  ein Ideal, so ist  $f_\alpha^{-1}(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{V}(\alpha(I))$ .

*Beweis:* (a) Nach Erinnerung 7.0 ist  $f_\alpha$  wohldefiniert. Die Stetigkeit folgt aus (b).

(b)  $\wp \in f_\alpha^{-1}(\mathfrak{V}(I)) \iff f_\alpha(\wp) \in \mathfrak{V}(I) \iff f_\alpha(\wp) \supseteq I$

$$\iff \alpha^{-1}(\wp) \supseteq I \iff \wp \supseteq \alpha(I) \iff \wp \in \mathfrak{V}(\alpha(I)) \quad \square$$

PROPOSITION 7.10: Sei  $K$  algebraisch abgeschlossen und  $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$  eine affine Varietät. Dann ist die Abbildung

$$\mathbf{m}: V \longrightarrow \text{Spec } K[V], \quad x \longmapsto \mathbf{m}_x = \{f \in K[V] \mid f(x) = 0\}$$

injektiv und stetig.

*Beweis:* Die Injektivität folgt aus Erinnerung/Bemerkung 7.1. Für den Beweis der Stetigkeit sei  $I \subseteq K[V]$  ein Ideal und  $Z := \mathfrak{V}(I) \subseteq \text{Spec } K[V]$ . Für die affine Varietät  $Z$  gilt

$$x \in \mathfrak{V}(I) \iff f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I \iff f \in \mathbf{m}_x \text{ für alle } f \in I \iff I \subseteq \mathbf{m}_x.$$

Damit gilt  $\mathbf{m}^{-1}(Z) = \{x \in V \mid \mathbf{m}_x \in Z\} = \{x \in V \mid \mathbf{m}_x \supseteq I\} = \mathfrak{V}(I) \subseteq V$ . Also sind Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen.  $\square$

PROPOSITION 7.11: Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins,  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $V \subseteq \text{Spec } R$  eine abgeschlossene Menge. Dann gelten:

(a)  $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)) = V$

(b)  $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I}$

*Beweis:* (a) Aus Bemerkung 7.5 (a) folgt  $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)) = \overline{V} = V$ .

(b) Nach Lemma 7.12 gilt  $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \bigcap_{\wp \in \mathfrak{V}(I)} \wp = \bigcap_{\wp \supseteq I} \wp = \sqrt{I}$ .  $\square$

LEMMA 7.12 (Lemma von Krull): Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins.

- (a) Sei  $S \subseteq R$  ein multiplikatives System und  $I \subseteq R$  ein Ideal, das disjunkt zu  $S$  ist. Dann gibt es ein Primideal  $\wp \subseteq R$ , das  $I$  enthält und ebenfalls zu  $S$  disjunkt ist.
- (b) Es gilt:  $\bigcap_{\substack{\wp \in \text{Spec } R \\ \wp \supseteq I}} \wp = \sqrt{I}$ .

*Beweis:* (b) Die Inklusion „ $\supseteq$ “ gilt, weil der Schnitt von Radikalidealen wieder ein Radikalideal ist. Die andere Inklusion folgt aus (a): Sei  $a \in R \setminus \sqrt{I}$  und  $S := \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ . Dann ist  $S$  ein multiplikatives System und  $I \cap S = \emptyset$ . Nach (a) gibt es dann ein Primideal  $\wp$  mit  $\wp \supseteq I$  und  $\wp \cap S = \emptyset$ . Damit fliegt  $a$  im Schnitt raus.

- (a) Betrachte den kanonischen Ringhomomorphismus  $\varphi: R \longrightarrow R_S$ . Sei  $I' = \langle \varphi(I) \rangle$  das von  $\varphi(I)$  erzeugte Ideal in  $R_S$ , also  $I' = \{\frac{f}{a} \in R_S \mid f \in I, a \in S\}$ . Zunächst überlegen wir uns, dass  $I' \neq R_S$ , also  $1 \notin I'$ . Denn wäre  $1 \in I'$ , dann gäbe es  $f \in I$  und  $a \in S$  mit  $1 = \frac{f}{a}$  in  $R_S$ , d.h. es gäbe ein

$$t \in S \text{ mit } t(f - a) = 0.$$

Dann wäre  $tf = ta$  sowohl in  $I$  als auch in  $S$ —ein Widerspruch zur Disjunktheit!

Somit ist  $I'$  ein echtes Ideal und damit in einem maximalen Ideal  $\mathfrak{m}'$  enthalten. Dann ist  $\wp := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$  ein Primideal, enthält  $I$  und hat leeren Schnitt mit  $S$ , denn sonst wäre für  $s \in S \cap I$  das Bild  $\varphi(s)$  eine Einheit in  $R_S$ .  $\square$

**Ziel:** Wir suchen eine Strukturgarbe  $\mathcal{O}_X$  auf  $X = \text{Spec } R$  mit  $\mathcal{O}_X(\mathfrak{D}(f)) \cong R_f$ .

Ab jetzt verwenden wir folgende SCHREIBWEISEN:

- Für  $f \in R$  und  $S := \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  schreiben wir  $R_f := R_S$ .
- Für ein Primideal  $\wp \subseteq R$  und  $S := R \setminus \wp$  schreiben wir  $R_\wp := R_S$ .

Wir erinnern uns außerdem daran, dass in  $R_S$  genau dann  $a = 0$  gilt, wenn es ein  $t \in S$  gibt mit  $ta = 0$ .

VORÜBERLEGUNG: In  $\text{Spec } R$  ist  $\mathfrak{D}(g) \subseteq \mathfrak{D}(f)$  äquivalent zu  $\mathfrak{V}(g) \supseteq \mathfrak{V}(f)$ . In diesem Fall gilt  $g \in \sqrt{(f)}$ , d.h. es gibt ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $h \in R$  mit  $g^m = fh$ . Wir erhalten so eine Abbildung

$$\rho_{\mathfrak{D}(g)}^{\mathfrak{D}(f)}: R_f \longrightarrow (R_f)_h = R_{fh} = R_{g^m} = R_g.$$

Wir setzen  $\mathcal{B} = \{\mathfrak{D}(g) \mid g \in R\}$ , was eine Basis der Topologie auf  $\text{Spec } R$  ist.

PROPOSITION 7.13: Sei  $R$  ein noetherscher kommutativer Ring mit Eins. Auf  $\text{Spec } R$  gibt es eine eindeutige Garbe  $\mathcal{F}$  von Ringen mit  $\mathcal{F}(\mathfrak{D}(f)) \cong R_f$  und für  $\mathfrak{D}(g) \subseteq \mathfrak{D}(f)$  ist die Restriktionsabbildung  $\rho_{\mathfrak{D}(g)}^{\mathfrak{D}(f)}$  wie in der Vorüberlegung definiert.

*Beweis:* Wir definieren  $\mathcal{F}(\mathfrak{D}(f)) = R_f$  und zeigen

(a)  $\mathcal{F}$  erfüllt auf  $\mathcal{B}$  die Garbeneigenschaften, d.h.

(G1)  $\rho_{U''}^U = \rho_{U''}^{U'} \circ \rho_{U'}^U$  und  $\rho_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$  für  $U, U', U'' \in \mathcal{B}$  mit  $U'' \subseteq U' \subseteq U$ .

(G2) Ist  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  (mit  $U, U_i \in \mathcal{B}$ ),  $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$  und gilt für alle  $U' \in \mathcal{B}$  mit  $U' \subseteq U_i \cap U_j$ , dass  $\rho_{U'}^{U_i} = \rho_{U'}^{U_j}$ , dann gibt es genau ein  $f \in \mathcal{F}(U)$  mit  $\rho_{U_i}^U(f) = f_i$ .

(b)  $\mathcal{F}$  lässt sich eindeutig zu einer Garbe fortsetzen.

zu (a): Die erste Garbeneigenschaft ist klar.

Für die zweite sei ohne Einschränkung  $I = \{1, \dots, m\}$  endlich (denn wie in Bemerkung 5.9 sind offene Mengen quasikompakt). Sei  $U = \mathfrak{D}(f)$  und  $U_i = \mathfrak{D}(f_i)$ . Wegen

$$\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{D}(f_1) \cup \dots \cup \mathfrak{D}(f_m)$$

ist  $\mathfrak{V}(f) = \mathfrak{V}(f_1, \dots, f_m)$ , also:

$$\text{Es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } f^k \in (f_1, \dots, f_m). \quad (*)$$

EINDEUTIGKEIT: Seien  $g_1, g_2 \in \mathcal{F}(U) = R_f$  mit  $\rho_{U_i}^U(g_j) = f_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  und  $j \in \{1, 2\}$  und  $g := g_1 - g_2 \in R_f$ , also  $g = 0$  in allen  $R_{f_i}$ . Dann gibt es ein  $M \in \mathbb{N}$  mit  $gf_i^M = 0$  für alle  $i \in I$ . Für genügend großes  $N$  gilt

$$(f_1, \dots, f_m)^N \subseteq (f_1^M, \dots, f_m^M).$$

Mit (\*) folgt  $f^{kN} \in (f_1, \dots, f_m)^N \subseteq (f_1^M, \dots, f_m^M)$ , also gibt es  $a_i$  mit

$$f^{kN} = a_1 f_1^M + \dots + a_m f_m^M.$$

Dann gilt  $f^{kN} g = a_1 f_1^M g + \dots + a_m f_m^M g = 0$ , also gilt  $g = 0$  in  $R_f$  und damit  $g_1 = g_2$ .

EXISTENZ: Gegeben  $g_i \in R_{f_i}$ , sodass  $g_i = g_j$  in  $R_{f_i f_j}$ , suchen wir ein  $g \in R_f$ , sodass  $g = g_i$  in allen  $R_{f_i}$  gilt. Da  $g_i = g_j$  in  $R_{f_i f_j}$ , gibt es ein genügend großes  $N$ , für das

$$g_i f_i^N f_j^N = g_j f_i^N f_j^N$$

gilt, und das ohne Einschränkung nicht von  $i$  und  $j$  abhängt. Insbesondere gibt es wie gerade eben ein  $w \in \mathbb{N}$  mit

$$f^w \in (f_1^N, \dots, f_m^N) \text{ und } f^w = \sum_{i=1}^m a_i f_i^N.$$

Wir definieren

$$g = \frac{1}{f^w} \sum_{i=1}^m a_i f_i^N g_i \in R_f.$$

Dann gilt in  $R_{f_i}$

$$gf_j^N = \frac{1}{f^w} \sum_{i=1}^m a_i f_i^N f_j^N g_j = \frac{1}{f^w} f^w g_j f_j^N = g_j f_j^N,$$

also  $g = g_j$  in  $R_{f_j}$ .

zu (b): Das folgt aus dem folgenden Lemma 7.14.  $\square$

LEMMA 7.14: Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{B}$  eine Basis. Eine  $\mathcal{B}$ -Garbe besteht aus einem Ring  $\mathcal{F}(U)$  für jedes  $U \in \mathcal{B}$  und Restriktionsabbildungen  $\rho_{U'}^U$ , für alle  $U, U' \in \mathcal{B}$  mit  $U' \subseteq U$ , sodass die Garbeneigenschaften (G1) und (G2) aus Proposition 7.13 erfüllt sind.

Jede  $\mathcal{B}$ -Garbe lässt sich eindeutig zu einer Garbe auf  $X$  fortsetzen.

*Beweis:* Sei  $U \subseteq X$  eine beliebige offene Menge. Wir definieren

$$\mathcal{F}_U = \varprojlim_{\substack{\tilde{U} \subseteq U \\ \tilde{U} \in \mathcal{B}}} \mathcal{F}(\tilde{U}) = \left\{ f_{\tilde{U}} \in \prod_{\substack{\tilde{U} \subseteq U \\ \tilde{U} \in \mathcal{B}}} \mathcal{F}(\tilde{U}) \mid \rho_{\tilde{U}}^{\tilde{U}}(f_{\tilde{U}}) = f_{\tilde{U}} \text{ für } \hat{U}, \tilde{U} \in \mathcal{B} \text{ mit } \hat{U} \subseteq \tilde{U} \subseteq U \right\}.$$

Mit den Restriktionsabbildungen

$$\rho_{U'}^U: (f_{\tilde{U}})_{\substack{\tilde{U} \subseteq U \\ \tilde{U} \in \mathcal{B}}} \longmapsto (f_{\tilde{U}})_{\substack{\tilde{U} \subseteq U' \\ \tilde{U} \in \mathcal{B}}} \text{ (wobei } U' \subseteq U)$$

ist  $\mathcal{F}$  eine Garbe. Außerdem stimmt für  $U \in \mathcal{B}$  das neue  $\mathcal{F}(U)$  mit dem ursprünglichen  $\mathcal{F}(U)$  überein via dem Isomorphismus

$$(f_{\tilde{U}})_{\substack{\tilde{U} \subseteq U \\ \tilde{U} \in \mathcal{B}}} \longmapsto f_U.$$

Schließlich ist  $\mathcal{F}$  eindeutig bestimmt, denn für einen weiteren Kandidaten  $\mathcal{G}$  stimmen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  auf jeder Basismenge überein und damit nach (G2) auch auf allen offenen Mengen.  $\square$

BEMERKUNG 7.15: In Proposition 7.13 muss  $R$  nicht noethersch sein! Es gilt für beliebige Ringe  $R$  und  $f \in R$ , dass  $\mathfrak{D}(f)$  quasikompakt ist (siehe Bemerkung 7.16).

BEMERKUNG 7.16: Sei  $R$  ein beliebiger kommutativer Ring mit Eins und  $f, f_i$  ( $i \in I$ ) aus  $R$ .

(a) Es gilt  $\mathfrak{D}(f) = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{D}(f_i)$  genau dann, wenn  $\sqrt{(f)} = \sqrt{(f_i \mid i \in I)}$ .

Insbesondere gilt  $\text{Spec } R = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{D}(f_i)$  genau dann, wenn  $1 \in (f_i \mid i \in I)$ .

(b)  $\mathfrak{D}(f)$  ist quasikompakt.

(c) Wenn  $R$  noethersch ist, ist  $\text{Spec } R$  ein noetherscher topologischer Raum.



Die Gegenrichtung stimmt nicht! Außerdem ist  $\text{Spec } R$  nicht immer ein noetherscher topologischer Raum.

*Beweis:* (a) Es gilt

$$\mathfrak{D}(f) = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{D}(f_i) \iff \mathfrak{V}(f) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{V}(f_i) \iff \sqrt{(f)} = \sqrt{(f_i \mid i \in I)}.$$

Für den zweiten Teil verwende  $\mathfrak{D}(1) = \text{Spec } R$ .

- (b) Sei  $\mathfrak{D}(f) = \bigcup_{i \in I} U_i$  und ohne Einschränkung  $U_i = \mathfrak{D}(f_i)$  für  $f_i \in R$ , da die  $\mathfrak{D}(g)$  eine Basis der Topologie bilden. Nach (a) gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $i_1, \dots, i_n \in I$  mit  $f^m \in (f_{i_1}, \dots, f_{i_n})$ . Damit folgt

$$\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{D}(f^m) \subseteq \bigcup_{j=1}^n \mathfrak{D}(f_{i_j}) \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{D}(f_i) = \mathfrak{D}(f),$$

also  $\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{D}(f_{i_1}) \cup \dots \cup \mathfrak{D}(f_{i_n})$ . Es genügen also endlich viele, um  $\mathfrak{D}(f)$  zu überdecken.

- (c) Wenn wir eine absteigende Kette  $V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq V_3 \supsetneq \dots$  von abgeschlossenen Mengen hätten, die nicht stationär wird, wäre  $\mathfrak{I}(V_1) \subsetneq \mathfrak{I}(V_2) \subsetneq \mathfrak{I}(V_3) \subsetneq \dots$  eine aufsteigende Kette von Idealen, die ebenfalls nicht stationär wird, im Widerspruch dazu, dass  $R$  noethersch ist.  $\square$

DEFINITION 7.17: (a) Sei  $R$  ein beliebiger kommutativer Ring mit Eins,  $X = \text{Spec } R$  und  $\mathcal{O}_X$  die Garbe aus Proposition 7.13. Der geringste Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt *affines Schema zu  $R$* .

- (b) Ist  $R$  noethersch, so heißt  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein *noethersches affines Schema*.

PROPOSITION 7.18: Sei  $V$  eine affine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$  und  $R = K[V]$ . Das affine Schema zu  $R$  ist noethersch und für die stetige Injektion

$$\mathfrak{m}: V \hookrightarrow \text{Spec } R, \quad x \longmapsto \mathfrak{m}_x = \{f \in K[V] \mid f(x) = 0\}$$

gilt  $\mathfrak{m}_* \mathcal{O}_V \cong \mathcal{O}_{\text{Spec } R}$ .

Hierbei ist  $\mathcal{O}_V$  die Garbe der regulären Funktionen auf  $V$ ,  $\mathfrak{m}_* \mathcal{O}_V$  die Bildgarbe auf  $\text{Spec } R$ , definiert durch  $\mathfrak{m}_* \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\mathfrak{m}^{-1}(U))$  (siehe auch Aufgabe 5 auf Übungsblatt 4); und  $\mathfrak{m}_* \mathcal{O}_V \cong \mathcal{O}_X$  heißt: für jedes offene  $U$  existiert ein Isomorphismus

$$\theta_U: \mathfrak{m}_* \mathcal{O}_V(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

und diese Isomorphismen sind mit den Restriktionsabbildungen verträglich, d.h. für  $U' \subseteq U$  ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_* \mathcal{O}_V(U) & \xrightarrow{\theta_U} & \mathcal{O}_X(U) \\ \downarrow \rho_{U'}^U & & \downarrow \rho_{U'}^U \\ \mathfrak{m}_* \mathcal{O}_V(U') & \xrightarrow{\theta_{U'}} & \mathcal{O}_X(U') \end{array}$$

kommutativ.

*Beweis:* Wir zeigen, dass die Garben auf der Basis übereinstimmen. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 7.14. Sei  $U = \mathfrak{D}(f) = \{\wp \in \operatorname{Spec} R \mid \wp \not\ni f\}$ . Aus Proposition 7.13 folgt einerseits  $\mathcal{O}_X(\mathfrak{D}(f)) = R_f$ . Andererseits gilt

$$\mathfrak{m}^{-1}(U) = \{x \in V \mid \mathfrak{m}_x \not\ni f\} = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\} = \mathfrak{D}(f) \subseteq V,$$

also  $\mathfrak{m}_* \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\mathfrak{m}^{-1}(U)) \cong R_f$  wegen Korollar 5.11. Außerdem passen die Restriktionsabbildungen zusammen.  $\square$

