18. Differentialgleichungen höherer Ordnung

In diesem Paragraphen: $m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0, y_0, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{R}$ mit $(x_0, y_0, \dots, y_{m-1}) \in D$.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\text{(D)} \quad y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$

und das Anfangswertproblem

$$(\mathrm{A}_1) \quad \begin{cases} \text{(D)} \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{cases}$$

(Lösungsbegriff für (D) und $(\mathrm{A}_1) \to$ § 6)

Für $z = (z_1, \dots, z_m)$ betrachten wir das System

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = f(x, z_1, \dots z_m) \end{cases}$$

Satz 18.1
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

(1) Ist $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (D) auf $I \implies z := (y, y', \dots, y^{(m-1)})$ ist eine Lösung von (S) auf I.

(2) Ist $z = (z_1, \dots, z_m) : I \to \mathbb{R}^m$ eine Lösung von (S) auf $I \implies y := z_1$ ist eine Lösung von (D).

Beweis
Nachrechnen. ■

Satz 18.2
Sei $h : D \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $h(x,y) := (y_2, \ldots, y_m, f(x,y))$, wobei $(x,y) \in D$ und $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^m$.

(1) $h \in C(D, \mathbb{R}^m) \iff f \in C(D, \mathbb{R})$

(2) f genügt auf D einer (lokalen) Lipschitzbedingung bezüglich $y \iff h$ genügt auf D einer (lokalen) Lipschitzbedingung bezüglich y.

Beweis

(1) Klar.

(2) Nachrechnen. ■

Aus 18.1, 18.2 und 15.3 folgt:

Satz 18.3
Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}, D := I \times \mathbb{R}^m, f \in C(D, \mathbb{R})$ und genüge auf D einer Lipschitzbedingung bezüglich y. Dann hat (A_1) auf I genau eine Lösung.

Bemerkung: Die weiteren Sätze aus § 15 lassen sich ebenfalls auf Differentialgleichungen m-ter Ordnung übertragen.