iv Nicht-singuläre Kurven

1 Divisoren

Sei $\mathcal{C}$ immer eine reguläre, projektive, zusammenhängende Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K.

Ziel: *Wir möchten die Divisorengruppe basteln und damit das Geschlecht definieren.*

DEFINITION 1.1: (a) Ein *Divisor* auf $\mathcal{C}$ ist eine formale Summe

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{Z}$ und $P_i \in \mathcal{C}$. Die Menge

$$\operatorname{Div} \mathcal{C} := \{D \mid D \text{ ist Divisor auf } \mathcal{C}\}$$

ist mit „+“ die freie abelsche Gruppe über $\mathcal{C}$. Sie heißt *Divisorengruppe.*

(b) Für $D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$ heißt $\deg D := \sum_{i=1}^{k} n_i$ der *Grad von* D.

$\deg \colon \operatorname{Div} \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist also ein Gruppenhomomorphismus.

(c) $D = \sum n_i P_i$ heißt *effektiv*, wenn alle $n_i \geq 0$ sind. Wir schreiben dann $D \geq 0$.

BEMERKUNG 1.2: (a) Divisoren können allgemein auch für irreduzible Varietäten höherer Dimension definiert werden, also als endliche Summen von „Primdivisoren“, d.h. irreduzible Untervarietäten von Kodimension 1.

(b) Im Spezialfall Kurven gilt für die zugehörigen lokalen Ringe: $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ ist ein noetherscher lokaler Ring von Dimension 1 und $\dim_K \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = 1$. Nach Algebra II gilt also:

- $(\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}, \mathfrak{m}_P)$ ist ein diskreter Bewertungsring.
- $(\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}, \mathfrak{m}_P)$ ist ein Hauptidealring.
- Für alle $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P} \setminus \{0\}$ gibt es $u \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}^{\times}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $x = ut^n$, wobei t ein Erzeuger von $\mathfrak{m}_P$ ist. So ein t nennen wir auch *Uniformisierende.*
- $\nu_P \colon K(\mathcal{C})^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\frac{f}{g} \longmapsto n_1 - n_2$, wobei $f = u_1 t^{n_1}$ und $g = u_2 t^{n_2}$, ist eine diskrete Bewertung.

DEFINITION/BEMERKUNG 1.3: Sei $f \in K(\mathcal{C})^{\times}$. Dann gilt:

(a) $\operatorname{ord}_P f := \nu_P(f)$, mit ν_P wie in Bemerkung 1.2 (b), heißt *Ordnung von f in P*.

(b) $\operatorname{div} f := \sum_{P \in \mathcal{C}} \operatorname{ord}_P(f) \cdot P$ heißt *Divisor zu f*.

(c) Wir nennen $D \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$ *Hauptdivisor*, wenn es $f \in K(\mathcal{C})^\times$ gibt, so dass $D = \operatorname{div} f$.

(d) Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe $\operatorname{Div_H} \mathcal{C}$ von $\operatorname{Div} \mathcal{C}$.

(e) $\mathcal{C}\ell(\mathcal{C}) := {}^{\operatorname{Div} \mathcal{C}}\!/_{\operatorname{Div_H} \mathcal{C}}$ heißt *Divisorenklassengruppe*.

(f) $D, D' \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$ heißen *linear äquivalent*, wenn $D - D' \in \operatorname{Div_H} \mathcal{C}$ liegt.
In dem Fall schreiben wir $D \sim D'$ oder $D \cong D'$.

Beweis: (b) Wir müssen noch zeigen, dass die Summe wirklich endlich ist. Da $f \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_P f \neq 0 &\iff \operatorname{ord}_P f > 0 \text{ oder } -\operatorname{ord}_P f = \operatorname{ord}_P \tfrac{1}{f} > 0 \\ &\iff P \in \mathfrak{V}(f) \text{ oder } P \in \mathfrak{V}\big(\tfrac{1}{f}\big). \end{aligned}$$

Aber $\mathfrak{V}(f)$ und $\mathfrak{V}\big(\frac{1}{f}\big)$ sind abgeschlossene echte Teilmenge einer Varietät von Dimension 1 und damit endlich. Damit gibt es auch nur endlich viele Summanden, die nicht 0 sind.

(d) Es gilt $\operatorname{div}(f \cdot g) = \operatorname{div} f + \operatorname{div} g$, $\operatorname{div}(1) = 0$ und $\operatorname{div} \frac{1}{f} = -\operatorname{div} f$, da ν_P ein Gruppenhomomorphismus ist. □

Beispiel 1.4: Sei $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$. Dann können wir $f \in K(\mathcal{C})^\times$ als

$$f = \frac{\prod_{i=0}^{n} (X - a_i)}{\prod_{j=0}^{m} (X - b_j)}$$

schreiben und sehen, dass dann für $a \in \mathcal{C} \setminus \{\infty\}$

$$\operatorname{ord}_a f = |\{i \in \{1,...,n\} \mid a_i = a\}| - |\{j \in \{1,...,m\} \mid b_j = a\}|$$

gilt. Den Punkt $a = \infty$ fassen wir als $(0:1)$ auf und setzen ihn in das homogenisierte Polynom

$$\mathcal{H}(f) = \frac{\prod_{i=0}^{n} (X - a_i X_0) X_0^{M-n}}{\prod_{j=0}^{m} (X - b_j X_0) X_0^{M-m}},$$

wobei $M := \max\{m, n\}$ ist, ein und sehen damit, dass

$$\operatorname{ord}_\infty f = (M - n) - (M - m) = m - n.$$

Insgesamt sehen wir also:

$$\begin{aligned}\deg(\operatorname{div} f) = \sum_{a\in\mathbb{P}^1} \operatorname{ord}_a f &= |\{a \mid \exists\, i : a = a_i\}| - |\{a \mid \exists\, j : a = b_j\}| + m - n \\ &= n - m + m - n = 0.\end{aligned}$$

Umgekehrt kann zu jedem Divisor D von Grad 0 so ein f gefunden werden, mit dem $D = \operatorname{div} f$ ist. Wir erhalten also:

$$\operatorname{Div}_{\mathrm{H}} \mathbb{P}^1 = \{D \in \operatorname{Div} \mathbb{P}^1 \mid \deg D = 0\} = \operatorname{Kern}(\deg).$$

Also ist $\mathcal{C}\ell(\mathbb{P}^1) \cong \operatorname{Bild}(\deg) = \mathbb{Z}$.

Definition/Bemerkung 1.5: Sei $f \in K(\mathcal{C})^\times$ und $P \in \mathcal{C}$.

(a) $\operatorname{ord}_P f = 0 \iff f \in \mathcal{O}_P^\times \iff f$ ist in P definiert und $f(P) \neq 0$.

(b) $\operatorname{ord}_P f > 0 \iff f \in \mathfrak{m}_P \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$, d.h. f ist in P definiert und $f(P) = 0$.

(c) $\operatorname{ord}_P f < 0 \iff f$ kann nicht in P fortgesetzt werden, also ist $\frac{1}{f}$ in P definiert und es gilt $\frac{1}{f}(P) = 0$.
In diesem Fall heißt P *Polstelle*.

(d) Sei t die Uniformisierende, also $\mathfrak{m}_P = \langle t \rangle$. Dann gibt es ein $u \in \mathcal{O}_P^\times$, so dass

$$f = u t^{\operatorname{ord}_P f}.$$

Proposition 1.6: Sei $\mathcal{C}$ eine reguläre Kurve (nicht notwendigerweise projektiv), $P \in \mathcal{C}$, sowie X eine projektive Varietät und $f\colon \mathcal{C} \setminus \{P\} \longrightarrow X$ ein Morphismus. Dann existiert ein Morphismus

$$\overline{f}\colon \mathcal{C} \longrightarrow X, \quad \overline{f}|_{\mathcal{C}\setminus\{P\}} = f,$$

der f fortsetzt.

Beweis: Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$. Dann ist, ohne Einschränkung, $X \not\subseteq \mathfrak{V}(X_i)$ für alle $i \in \{0,\dots,n\}$, denn ansonsten wählen wir n einfach kleiner.

Sei $\mathfrak{U}_i = \mathbb{P}^n \setminus \mathfrak{V}(X_i)$. Dann gilt für $U := \bigcap_{i=0}^n \mathfrak{U}_i$, dass

$$W := f^{-1}(U) = \bigcap_{i=0}^n f^{-1}(\mathfrak{U}_i) \neq \varnothing$$

ist und, da offen, damit dicht in $\mathcal{C}$ liegt, da f als Morphismus stetig ist.

Sei außerdem $h_{ij} = \frac{x_i}{x_j} \circ f$. Dann ist h_{ij} eine reguläre Funktion auf $W \setminus \{P\}$. Insbesondere definiert jedes h_{ij} ein Element im Funktionenkörper, wir können also $h_{ij} \in K(\mathcal{C})^\times$ auffassen.

Sei $r_i := \operatorname{ord}_P h_{i0}$. Wähle k mit r_k minimal. Dann ist

$$\operatorname{ord}_p(h_{ik}) = \operatorname{ord}_p\left(\frac{h_{i0}}{h_{k0}}\right) = r_i - r_k \geq 0$$

und nach Definition/Bemerkung 1.5 liegt P somit im Definitionsbereich von h_{ik}, d.h. es gibt eine Umgebung $\widetilde{W}$ von P mit $h_{ik} \in \mathcal{O}_{\widetilde{W}}$.

Insbesondere ist auf $\widetilde{W}$, nach gleicher Argumentation, $\operatorname{ord}_P h_{kk} = 0$, also $h_{kk}(P) \neq 0$.

Nun definieren wir $\overline{f}$ durch

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq p, \\ (h_{0k}(p) : \cdots : h_{nk}(p)), & x = p. \end{cases}$$

Dann ist $\overline{f}$ ein Morphismus, denn für $x \in \widetilde{W}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \big(f_0(x) : \cdots f_n(x)\big) = \big(\big(x_0 \circ f\big)(x) : \cdots : \big(x_n \circ f\big)(x)\big) \\ &= \big(\big(\tfrac{x_0}{x_k} \circ f\big)(x) : \cdots : \big(\tfrac{x_n}{x_k} \circ f\big)(x)\big) = \big(h_{0k}(x) : \cdots : h_{nk}(x)\big). \end{aligned}$$

Damit ist aber auch $\overline{f}(p) \in X$, denn ist X ist abgeschlossen. □

Damit gilt auch:

Korollar 1.7: Jede rationale Abbildung $\mathcal{C} \longrightarrow X$ für eine projektive Varietät X lässt sich zu einem Morphismus von $\mathcal{C}$ nach X fortsetzen.

Korollar 1.8: Sind zwei zusammenhängende reguläre projektive Kurven $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ birational äquivalent, so sind sie bereits isomorph.

Beweis: Seien $\Psi_1 \colon \mathcal{C}_1 \dashrightarrow \mathcal{C}_2$ und $\Psi_2 \colon \mathcal{C}_2 \dashrightarrow \mathcal{C}_1$ mit $\Psi_1 \circ \Psi_2 = \mathrm{id}$ und $\Psi_2 \circ \Psi_1 = \mathrm{id}$. Dann lassen diese sich nach Korollar 1.7 zu $\overline{\Psi_1}$, bzw. $\overline{\Psi_2}$ fortsetzen. Damit gilt, jeweils auf einer dichten Teilmenge, $\overline{\Psi_1} \circ \overline{\Psi_2} = \mathrm{id}$ und $\overline{\Psi_2} \circ \overline{\Psi_1} = \mathrm{id}$ und damit, da die Kurven zusammenhängend sind, schon jeweils auf der ganzen Kurve. □

2 Verzweigungsindizes

In diesem Abschnitt seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ reguläre projektive zusammenhängende Kurven und $f \colon \mathcal{C}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{C}_2$ ein surjektiver Morphismus.

Definition/Bemerkung 2.1: (a) Sei $Q \in \mathcal{C}_2$, $P \in f^{-1}(Q)$ und t Uniformisierende in Q, also $\mathfrak{m}_Q = \langle t \rangle$. Dann heißt

$$e_P := e_P(f) := \operatorname{ord}_P(t \circ f) = \nu_P(t \circ f)$$

Verzweigungsgrad von f in P.

(b) Wir definieren einen Gruppenhomomorphismus $f^* \colon \operatorname{Div} \mathcal{C}_2 \longrightarrow \operatorname{Div} \mathcal{C}_1$ durch

$$Q \longmapsto \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P \cdot P.$$

(c) Es gilt $f^*(\operatorname{div} g) = \operatorname{div}(g \circ f)$.

(d) f^* steigt zu einem Homomorphismus von $\mathcal{C}\ell(\mathcal{C}_2)$ nach $\mathcal{C}\ell(\mathcal{C}_1)$ ab.

Beweis: (a) Wir zeigen, dass e_P nicht von der Wahl von t abhängt: Sei dazu $t' = ut$ mit $u \in \mathcal{O}_Q^\times$ auch Uniformisierende. Dann gilt

$$\operatorname{ord}_P(t' \circ f) = \operatorname{ord}_P\big((u \circ f) \cdot (t \circ f)\big) = 0 + \operatorname{ord}_P(t \circ f),$$

da mit u auch $u \circ f$ eine Einheit ist.

(b) Die Summe ist endlich, denn $f^{-1}(Q)$ ist eine abgeschlossene echte Teilmenge von $\mathcal{C}_1$ und damit endlich.

(c) Es gilt, nach Definition,

$$f^*(\operatorname{div} g) = \sum_{P \in \mathcal{C}_2} \operatorname{ord}_P(g) \cdot f^*(P) = \sum_{P \in \mathcal{C}_2} \operatorname{ord}_P(g) \sum_{Q \in f^{-1}(P)} e_Q(f) \cdot Q$$

und

$$\operatorname{div}(g \circ f) = \sum_{Q \in \mathcal{C}_1} \operatorname{ord}_Q(g \circ f) \cdot Q = \sum_{P \in \mathcal{C}_2} \sum_{Q \in f^{-1}(P)} \operatorname{ord}_Q(g \circ f) \cdot Q,$$

da $\mathcal{C}_1$ gerade die Vereinigung der Urbilder von f ist. Es genügt also zu zeigen, dass für $P \in \mathcal{C}_2$ und $Q \in f^{-1}(P)$

$$\operatorname{ord}_Q(g \circ f) = \operatorname{ord}_P(g) \cdot e_Q(f)$$

ist. Es sei also $q := \operatorname{ord}_Q(g \circ f)$. Dann finden wir eine Uniformisierende $t_Q \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,Q}$ und $u_1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,Q}^\times$, so dass $g \circ f = u_1 \cdot t_Q^q$. Genauso finden wir für $r := \operatorname{ord}_P(g)$ eine Uniformisierende t_P und $u_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}_2,P}$ mit $g = u_2 \cdot t_P^r$. Außerdem haben wir $s := e_Q(f) = \operatorname{ord}_Q(t_P \circ f)$, also $u_3 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,Q}^\times$ mit $t_P \circ f = u_3 \cdot t_Q^s$. Nun gilt, mit Hilfe des Einsetzungshomomorphismus,

$$\begin{aligned} u_1 \cdot t_Q^q = g \circ f &= \big(u_2 \cdot t_P^r\big) \circ f = \big(u_2 \circ f\big) \cdot \big(t_P \circ f\big)^r \\ &= \big(u_2 \circ f\big) \cdot \big(u_3 \cdot t_Q^s\big)^r = \big(u_2 \circ f\big) \cdot u_3^r \cdot t_Q^{rs}. \end{aligned}$$

Da aber auch $u_2 \circ f$ und u_3^r Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,Q}$ sind, haben die Ausdrücke die selbe Bewertung und damit ist $q = rs$, wie behauptet.

(d) folgt aus (c), da Hauptdivisoren auf Hauptdivisoren abgebildet werden. □

Beispiel 2.2: Sei $K = \mathbb{C}$, $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ und $f \colon X \longmapsto X^3$.

- Für $P = 0$ ist $t = X$, also $t \circ f = X^3$ und damit $e_0 = \operatorname{ord}_0(t \circ f) = 3$.
- Für $P = a \in \mathbb{C}^\times$ ist $t = X - a^3$ und damit, mit einer dritten Einheitswurzel ζ,
$$e_a = \operatorname{ord}_a(X^3 - a^3) = \operatorname{ord}_a\big((X-a)(X-\zeta a)(X-\zeta^2 a)\big) = 1,$$
da nur $(X - a)$ keine Einheit ist.

- Für $P = \infty$ ist $t = \frac{1}{X}$ und damit ist

$$e_\infty = \operatorname{ord}_\infty\left(\tfrac{1}{X^3}\right) = 3 = -\operatorname{ord}_\infty f.$$

DEFINITION 2.3: So ein Morphismus f induziert $f^\sharp\colon K(\mathcal{C}_2) \hookrightarrow K(\mathcal{C}_1)$, wir können also $K(\mathcal{C}_1)$ als Körpererweiterung von $K(\mathcal{C}_2)$ auffassen. Wir definieren

$$\deg f := [K(\mathcal{C}_1) : K(\mathcal{C}_2)].$$

BEMERKUNG: Da $\operatorname{trdeg}_K(\mathcal{C}_1) = \operatorname{trdeg}_K(\mathcal{C}_2) = 1$ ist diese Körpererweiterung algebraisch.

Satz 7: *Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ zusammenhängende reguläre projektive Kurven und $f\colon \mathcal{C}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{C}_2$ ein surjektiver Morphismus, dann gilt:*

(a) Für $Q \in \mathcal{C}_2$ ist $\sum_{P\in f^{-1}(Q)} e_P(f) = n := \deg(f)$.

(b) Für jeden Divisor D auf $\mathcal{C}_2$ gilt $\deg(f^*D) = \deg(D)\cdot\deg(f)$.

BEMERKUNG: Die Aussage (b) folgt direkt aus (a), denn sei $D := \sum n_i P_i$, dann ist

$$\deg(f^*D) = \deg\left(\sum_{i=1}^k n_i \sum_{P\in f^{-1}(P_i)} e_P P\right) = \sum_{i=1}^k n_i \sum_{P\in f^{-1}(P_i)} e_P = \deg(D)\deg(f).$$

Der BEWEIS von (a) kommt später.

KOROLLAR 2.4: Sei $\mathcal{C}$ eine projektive, zusammenhängende, reguläre Kurve. Dann gilt:

(a) Alle Hauptdivisoren auf $\mathcal{C}$ haben Grad 0.

(b) Die Abbildung $\deg\colon \mathcal{C}\ell(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $[D] \longmapsto \deg D$ ist wohldefiniert.

Beweis: (a) Sei $f \in K(C)^\times$. Dann lässt f sich nach Korollar 1.7 zu einem Morphismus von $\mathcal{C}$ nach $\mathbb{P}^1$ fortsetzen. Dann gilt

$$\deg(\operatorname{div} f) = \sum_{P\in\mathcal{C}} \operatorname{ord}_P(f) = \sum_{P\in f^{-1}(0)} \operatorname{ord}_P(f) + \sum_{P\in f^{-1}(\infty)} \operatorname{ord}_P(f),$$

da nur Null- und Polstellen von 0 verschiedene Ordnung haben.

Wie in Beispiel 2.2 wählen wir $t = X$ als Uniformisierende in 0 und $t = \frac{1}{X}$ als Uniformisierende in ∞. Damit ist, für $P \in f^{-1}(0)$,

$$e_P = \operatorname{ord}_P(X\circ f) = \operatorname{ord}_P(f)$$

und, für $P \in f^{-1}(\infty)$,

$$e_P = \operatorname{ord}_P\left(\tfrac{1}{x}\circ f\right) = \operatorname{ord}_P\left(\tfrac{1}{f}\right) = -\operatorname{ord}_P(f).$$

Insgesamt erhalten wir so, nach Definition von f^* und mit Hilfe von Satz 7 (b),

$$\deg(f) = \sum_{P\in f^{-1}(0)} e_P - \sum_{P\in f^{-1}(\infty)} e_P = \deg\big(f^*(0-\infty)\big) = \deg(f)\cdot\deg(0-\infty) = 0,$$

wobei 0 bzw. ∞ die Divisoren sind, bei denen $n_0 = 1$ bzw. $n_\infty = 1$ und alle anderen $n_P = 0$ sind.

(b) folgt sofort aus (a) mit Definition/Bemerkung 1.3 (e). □

ERINNERUNG: Aus Algebra II wissen wir, dass für einen nullteilerfreien Ring R, der kein Körper ist, gilt:

$$\begin{aligned} R \text{ ist ein Dedekindring} &\iff R \text{ ist eindimensional und normal} \\ &\iff \begin{array}{c}\text{Für jedes Primideal } \wp \neq 0 \text{ ist } R_\wp \\ \text{ein diskreter Bewertungsring.}\end{array} \end{aligned}$$

BEMERKUNG 2.5 (ohne Beweis): Sei $\mathcal{C}$ eine affine Varietät. Dann ist $\mathcal{C}$ genau dann eine zusammenhängende reguläre Kurve, wenn $K[\mathcal{C}]$ ein Dedekindring ist.

BEMERKUNG 2.6: Sei V irreduzible projektive Varietät in $\mathbb{P}^n$.

(a) Sind $P_1,\ldots,P_{N+1}$ endlich viele Punkte, so liegen sie in einer offenen, affinen Teilmenge U von V.

(b) Es gibt ein $v \in K(V)$ mit $v \notin \mathcal{O}_{N+1}, v \in \mathcal{O}_i$ für $i \in \{1,\ldots,N\}$.

Beweis: (a) Nach LA gibt es ein lineares $F \in K[X_0,\ldots,X_n]$ mit $F(P_i) \neq 0$ $(\forall i)$. Nach Koordinatenwechsel ist $F = X_0$ und $\mathfrak{U}_0 = \mathbb{P}^n \setminus \mathfrak{V}(F)$. Also sind

$$P_1,\ldots,P_{N+1} \in U := \mathfrak{U}_0 \cap V$$

und dies ist eine affine Varietät.

(b) Sei U wie in (a) mit $P_1,\ldots,P_{N+1} \in U$. Wähle $h \in \mathcal{O}(U) = K[U]$ mit

$$h(P_1),\ldots,h(P_N) \neq 0 \text{ und } h(P_{N+1}) = 0.$$

Das geht nach dem Primidealvermeidungslemma. Nun erfüllt $v := \frac{1}{h}$ das Gewünschte. □

LEMMA 2.7: Sei $f\colon \mathcal{C}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{C}_2$ ein surjektiver Morphismus zwischen projektiven regulären zusammenhängenden Kurven. Dann gilt:

Wenn $V \subseteq \mathcal{C}_2$ offen und affin ist, dann ist $f^{-1}(V)$ offen und affin in $\mathcal{C}_1$.

Beweis: (1) Zuerst konstruieren wir ein potentielles $f^{-1}(V) =: \widetilde{V}$. Dazu betrachten wir

$$B := K[V] \hookrightarrow K(\mathcal{C}_2) \xhookrightarrow{f^*} K(\mathcal{C}_1)$$

und bezeichnen den ganzen Abschluss von B in $K[\mathcal{C}_1]$ mit A. Aus Algebra II wissen wir, dass A dann ein endlich-erzeugter B-Modul ist (Algebra II, Satz 15, bzw. Shafarevich II.5, Thm. 4). A ist also eine endlich-erzeugte K-Algebra und nullteilerfrei, da $A \subseteq K(\mathcal{C}_1)$. Es gibt also ein affines $\widetilde{V}$ mit $A = K[\widetilde{V}]$ und

$$K(\widetilde{V}) = \mathrm{Quot}(A) = K(\mathcal{C}_1).$$

Nach Satz 4 ist $\widetilde{V}$ somit birational äquivalent zu $\mathcal{C}_1$. Außerdem ist $\widetilde{V}$ eine reguläre irreduzible Kurve, da $A = K[\widetilde{V}]$ ein Dedekindring ist. Nach Korollar 1.8 ist der Abschluss $\overline{\widetilde{V}}$ isomorph zu $\mathcal{C}_1$, wir können $\widetilde{V}$ also als Teilmenge von $\mathcal{C}_1$ auffassen.

(2) Zeige nun: $\widetilde{V} = f^{-1}(V)$

Angenommen, es gäbe $P_0 \in \mathcal{C}_1 \setminus \widetilde{V}$ mit $f(P_0) = Q \in V$. Seien $P_1, \ldots, P_k$ alle Urbilder von $Q = f(P_0)$, die auch in $\widetilde{V}$ liegen. Nach Bemerkung 2.6 (b) kann man nun ein $v \in K(\mathcal{C}_1)$ mit $v \notin \mathcal{O}_{P_0}$ und $v \in \mathcal{O}_{P_i}$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ wählen.

(a) Wir zeigen: Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass v keine Polstelle in $\widetilde{V}$ hat.

Ist nämlich $x \in \widetilde{V}$ eine Polstelle, so setzt man $y = f(x) + Q$. Wir wählen nun $h \in B = K[V]$ mit $h(Q) \neq 0$, $h(y) = 0$, d.h. $h \in \mathfrak{m}_y^v \setminus \mathfrak{m}_Q^v$.

Für $v' := v..(h \circ f)$gilt damit:

$$\operatorname{ord}_x v' = \operatorname{ord}_x(v) + \operatorname{ord}_x(h \circ f) \geq \operatorname{ord}_x(v) + 1,$$

da $f(x) = y$ Nullstelle in h ist.

Außerdem gilt $\operatorname{ord}_{P_i} v' = \operatorname{ord}_{P_i} v + 0$ und es sind keine neuen Pole in $\widetilde{V}$ entstanden, da h auf ganz V regulär ist. Durch mehrmaliges Anwenden dieses Verfahrens kann man alle Polstellen entfernen.

(b) Somit ist v nun aus $A = K[V]$ und damit ganz über B.

Also gibt es $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ mit

$$v^n + b_{n-1}v^{n-1} + \cdots + b_0 = 0,$$

d.h. $v = -b_{n-1} - \frac{b_{n-2}}{v} - \cdots - \frac{b_0}{v^{n-1}}$.

Da $v \notin \mathcal{O}_{P_0}$ ist, ist die linke Seite nicht in P_0 definiert, aber es ist $\frac{1}{v} \in \mathcal{O}_{P_0}$. Demnach ist die rechte Seite in P_0 definiert, da $b_i \circ f$ auf ganz $f^{-1}(V)$ regulär ist, was ein Widerspruch ergibt. □

Ab jetzt sei stets V eine affine Umgebung von Q, also ist nach Lemma 2.7 $\widetilde{V} = f^{-1}(V)$ affin.
Außerdem sei $B = K[V]$, $A = K[\widetilde{V}]$ ist dann der ganze Abschluss von B in $K(\mathcal{C}_1)$.

LEMMA 2.8: Seien $P_i \in \mathcal{C}_1$ und $\widetilde{\mathcal{O}} := \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{P_i} \subseteq K(\mathcal{C}_1)$. Dann gilt:

(a) $\widetilde{\mathcal{O}}$ ist Hauptidealring.

(b) Es gibt $t_1, \ldots, t_k \in \widetilde{\mathcal{O}}$ mit $\operatorname{ord}_{P_i}(t_j) = \delta_{ij}$.

(c) Jedes $v \in \widetilde{\mathcal{O}}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$v = u \cdot t_1^{e_1} \cdots t_k^{e_k}$$

mit $u \in \widetilde{\mathcal{O}}^\times$, $e_i = \nu_{P_i}(v)$.

Beweis: (b) Sei $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_{P_i}^{\widetilde{V}} \subseteq A$ und $\widetilde{t_i}$ Uniformisierende, d.h. $\mathfrak{m}_{P_i} = (\widetilde{t_i}) \subseteq \mathcal{O}_{P_i}$. Wie im Beweis von Lemma 2.7 kann $\widetilde{t_i}$ ohne Einschränkung als regulär vorrausgesetzt werden.

Um die t_i zu konstruieren, wählen wir zuerst $g_i \in A = K[\widetilde{V}]$ mit:

$$g_i(P_i) \neq 0 \text{ und } g_i(P_j) = 0 \quad \text{wobei } i, j \in \{1,..., k\} \text{ und } i \neq j.$$

Sei $t_1 = \widetilde{t_1} + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j \cdot g_j^2$ mit $\alpha_j \in K$, $\alpha_j \neq \dfrac{-\widetilde{t_1}(P_j)}{(g_j(P_j))^2}$.

Dann ist $t_1(P_j) = \widetilde{t_1}(P_j) + \alpha_j(g_j(P_j))^2 \neq 0$, $t_1(P_1) = 0$ und

$$\widetilde{t_1} + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j \cdot g_j^2 \in \mathfrak{m}_{P_1} \setminus \mathfrak{m}_{P_1}^2,$$

da die $g_j \in \mathfrak{m}_{P_1}^2$ und $\widetilde{t_1} \in \mathfrak{m}_{P_1} \setminus \mathfrak{m}_{P_1}^2$ sind.

Also ist $v_{P_1}(t_1) = 1$, d.h. t_1 tut Gewünschtes. Analog konstruiert man $t_2,..., t_k$.

(c) folgt aus (b), denn wir setzen

$$u = \frac{v}{t_1^{\operatorname{ord}_{P_1}(v)} \cdots t_k^{\operatorname{ord}_{P_k}(v)}}$$

und sehen, dass $\operatorname{ord}_{P_i}(u) = 0$ (für jedes i) ist, also ist $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$.

(a) folgt aus (c): Sei I ein Ideal in $\widetilde{\mathcal{O}}$, dann ist

$$I = (t_1^{e_1} \cdots t_k^{e_k}),$$

wobei $e_i = \inf\{\operatorname{ord}_{P_i}(v) \mid v \in I\}$. □

Lemma 2.9: Es gilt:

(a) $\widetilde{\mathcal{O}} = A \cdot \mathcal{O}_Q = \{a \cdot (h \circ f) \mid a \in A_i, h \in \mathcal{O}_Q\}$

(b) $\widetilde{\mathcal{O}}$ ist ein freier $\mathcal{O}_Q$-Modul vom Rang $n = \deg f$. Dabei fasst man wiederum $\mathcal{O}_Q$ via f^* als Teilring von $\widetilde{\mathcal{O}}$ auf.

Beweis: (a) Seien $w \in \widetilde{\mathcal{O}}$, $x_1,..., x_r$ die Polstellen von w und $y_1,..., y_r$ ihre Bilder. Seien weiterhin $l_i = \operatorname{ord}_{x_i}(w)$ und $-n = \min\{l_1,..., l_r\}$.

Wir wählen $h' \in B$ mit $h'(y_i) = 0$ und $h'(Q) \neq 0$ und setzen $h = (h')^N$.

Dann ist $a := w \cdot (h \circ f) \in A$ und $h \in \mathcal{O}_Q^\times$. Folglich ist $w = a \cdot (h \circ f)^{-1}$.

(b) A ist der ganze Abschluss von B in $K(\mathcal{C}_1)$ und damit endlich erzeugt als B-Modul (vgl. Lemma 2.7). Nach (a) ist $\widetilde{\mathcal{O}}$ endlich erzeugt als $\mathcal{O}_Q$-Modul.

Weiter ist $\widetilde{\mathcal{O}}$ torsionsfrei, d.h. $\widetilde{\mathcal{O}}$ ist ein freier $\mathcal{O}_Q$-Modul (Hauptsatz über Moduln von Hauptidealringen, siehe z.B. Bosch).

Ferner ist $\operatorname{Rang}_{\mathcal{O}_Q}(\widetilde{\mathcal{O}}) \leq \dim_{K(\mathcal{C}_2)} K(\mathcal{C}_1)$, da $K(\mathcal{C}_2) = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_Q)$ gilt.

Sei $\{\alpha_1,..., \alpha_n\}$ eine Basis von $K(\mathcal{C}_1)/K(\mathcal{C}_2)$, und l die maximale Polstellenordnung in den P_i's. Dann sind $\alpha_1 \cdot t^l,..., \alpha_n \cdot t^l$ linear unabhängig und in $\widetilde{\mathcal{O}}$. Damit ist $\operatorname{Rang}(\widetilde{\mathcal{O}}) \geq n$, d.h. $\widetilde{\mathcal{O}}$ ist frei vom Rang n. □

Beweis von Satz 7 (a): Zu zeigen ist:

$$n = \deg(f) = \sum_{i=1}^{k} e_{P_i} = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ord}_{P_i}(t \circ f),$$

wobei $(t) = \mathfrak{m}_Q$.

Da $t \circ f \in \widetilde{\mathcal{O}}$ liefert Lemma 2.8: $t \circ f = u \cdot t_1^{e_{P_1}} \cdots t_k^{e_{P_k}}$, wobei $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$. Mit dem Chinesischen Restsatz folgt

$$\widetilde{\mathcal{O}} \big/ (t \circ f) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \widetilde{\mathcal{O}} \big/ (t_i^{e_{P_i}}) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} K^{e_{P_i}}.$$

Also ist $\dim_K \widetilde{\mathcal{O}}/(t \circ f) = \sum_{i=1}^{k} e_{P_i}$.

Andererseits ist $\widetilde{\mathcal{O}} \cong \mathcal{O}_Q^n \longrightarrow (\mathcal{O}_a/(t))^n \cong K^n$.

Damit gilt $\widetilde{\mathcal{O}}/(t \cdot \widetilde{\mathcal{O}}) = \widetilde{\mathcal{O}}/(t \circ f) \cong K^n$ und damit ist $\dim_K \widetilde{\mathcal{O}}/(t \circ f) = n$. □

3 Das Geschlecht einer Kurve

Sei $\mathcal{C}$ immer eine nicht-singuläre, zusammenhängende, projektive Kurve.

Definition/Bemerkung 3.1: (a) Sei D ein Divisor. Dann nennen wir

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in K(\mathcal{C})^\times \mid D + \operatorname{div}(f) \text{ ist effektiv}\} \cup \{0\}$$

den *Riemann-Roch-Raum von D*. $\mathcal{L}(D)$ ist ein K-Vektorraum, da für $P \in \mathcal{C}$ immer

$$\operatorname{ord}_P(f+g) \geq \min\{\operatorname{ord}_P(f), \operatorname{ord}_P(g)\} \text{ gilt.}$$

(b) Wir setzen $\ell(D) := \dim_K \mathcal{L}(D)$.

(c) Für einen Divisor $D = \sum n_P P$ nennen wir $\{P \in \mathcal{C} \mid n_P \neq 0\}$ den *Träger von D*.

Bemerkung 3.2: (a) Es gilt $\mathcal{L}(0) = K$ und $\ell(0) = 1$.

(b) Ist $\deg D < 0$, so gilt schon $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ und $\ell(D) = 0$.

(c) Ist $D \sim D'$, so gilt $\ell(D) = \ell(D')$.
Insbesondere ist ℓ somit auf $\mathcal{C}\ell(\mathcal{C})$ wohldefiniert.

Beweis: (a) Nach Satz 5 (a) sind die regulären Funktionen alle konstant.

(b) Nach Korollar 2.4 ist $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$ und damit ist der Grad von $D + \operatorname{div}(f)$ kleiner als 0 und somit ist der Divisor für kein f effektiv.

(c) Sei $g \in K(\mathcal{C})^\times$ mit $D' = D + \operatorname{div} g$. Dann gilt

$$\operatorname{div} f + D' \geq 0 \iff 0 \leq \operatorname{div} f + \operatorname{div} g + D = \operatorname{div}(fg) + D,$$

also erhalten wir einen Vektorraumisomorphismus durch

$$\mathcal{L}(D') \longrightarrow \mathcal{L}(D), \quad f \longmapsto fg,$$

und damit sind die Dimensionen der beiden Räume gleich. □

Satz 8 (Riemann)**:** *(a) Ist* $D \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$ *mit* $\deg D \geq -1$*, so gilt:*

$$\ell(D) \leq \deg D + 1.$$

(b) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{N}_0$*, so dass für alle* $D \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$

$$\deg D + 1 - \gamma \leq \ell(D).$$

Definition 3.3: Das kleinste γ, für das Satz 8 (b) erfüllt ist, nennen wir das *Geschlecht von* $\mathcal{C}$. Wir schreiben auch $\mathfrak{g}(\mathcal{C})$ oder $\mathfrak{g}$.

Bemerkung 3.4: Ist $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}'$, so ist $\mathfrak{g}(\mathcal{C}) = \mathfrak{g}(\mathcal{C}')$, da schon die Divisorengruppen gleich sind.

Lemma 3.5: Seien $D \in \operatorname{Div}(\mathcal{C})$ und $P_0 \in \mathcal{C}$. Dann ist

$$\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D + P_0) \text{ und } \ell(D + P_0) \leq \ell(D) + 1.$$

Beweis: Sei $D := \sum\limits_{P \in \mathcal{C}} n_P P$.

Dass $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D+P_0)$ ist klar, denn für $f \in \mathcal{L}(D)$ gilt $\operatorname{ord}_{P_0}(f) \geq -n_0 := -n_{P_0}$ und damit liegt f insbesondere in $\mathcal{L}(D + P_0)$. Wir sehen sogar, dass für

$$f \in \mathcal{L}(D + P_0) \setminus \mathcal{L}(D) \text{ dann } \operatorname{ord}_{P_0}(f) = -(n_0 + 1)$$

gelten muss.

Um die zweite Aussage einzusehen, nehmen wir zunächst an, dass $\ell(D+P_0) < \infty$. Sei also $f_1,\ldots, f_r$ eine Basis von $\mathcal{L}(D+P_0)$, wobei $f_1,\ldots, f_s \notin \mathcal{L}(D)$ und $f_{s+1},\ldots, f_r \in \mathcal{L}(D)$. Sei t ein Erzeuger von $\mathfrak{m}_{P_0}$. Dann finden wir für $i \in \{1,\ldots, s\}$ jeweils $u_i \in \mathcal{O}^{\times}_{\mathcal{C},P_0}$ mit

$$f_i = u_i t^{-(n_0+1)}.$$

Damit definieren wir $g_i := u_i(P_0) \cdot f_1 - u_1(P_0) \cdot f_i$ und sehen, dass damit

$$g_i = t^{-(n_0+1)} \cdot \big(u_i(P_0) \cdot u_1 - u_1(P_0) \cdot u_i\big), \text{ wobei } u_i(P_0) \cdot u_1 - u_1(P_0) \cdot u_i \in \mathfrak{m}_{P_0},$$

da der Ausdruck in P_0 verschwindet. Damit ist aber $\operatorname{ord}_{P_0}(g_i) \geq -n_0$, also sind die g_i schon aus $\mathcal{L}(D)$.

Nun sind aber $g_2,\ldots, g_s, f_{s+1},\ldots, f_r$ linear unabhängig und in $\mathcal{L}(D)$, es gilt also, wie behauptet,

$$\ell(D) \geq r - 1 = \ell(D + P_0) - 1.$$

Mit gleichem Argument sieht man aber nun, dass aus $\ell(D + P_0) = \infty$ schon $\ell(D) = \infty$ folgt, die Aussage also auch in diesem Fall stimmt. □

Beweis von Satz 8: (a) Wir zeigen $\ell(D) \leq \deg(D) + 1$ durch vollständige Induktion über $\deg D =: d$.

Für $\deg D = -1$ gilt nach Bemerkung 3.2 (b) $\ell(D) = 0$, wir beschränken uns demnach auf $\deg D \in \mathbb{N}_0$.

Sei also zuerst $d = 0$ und seien $f, g \in \mathcal{L}(D)$. Dann ist $\operatorname{div}(f) + D \geq 0$ und es gilt sogar $\operatorname{div}(f) + D = 0$, da beide von Grad 0 sind. Gleiches gilt für g und damit erhalten wir

$$\operatorname{div} f = -D = \operatorname{div} g.$$

Damit ist auch $\operatorname{div}\left(\frac{f}{g}\right) = 0$ und $\frac{f}{g}$ somit, nach Satz 5 (a), konstant, da $\frac{f}{g}$ hier schon regulär ist.

Sei nun $d \geq 1$. Wir schreiben $D = \sum n_i P_i$ und wählen ein P_i mit $n_i > 0$. Für $D' := D - P_i$ ist dann $\deg D' = \deg D - 1$ und nach Lemma 3.5 gilt, zusammen mit der Induktionsvoraussetzung,

$$\ell(D) = \ell(D' + P_i) \leq \ell(D') + 1 \leq d + 1.$$

(b) Wir setzen $s(D) := \deg D + 1 - \ell(D)$ und zeigen, dass es ein $\gamma \in \mathbb{N}$ mit $s(D) \leq \gamma$, für alle $D \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$, gibt.

Wir erinnern uns, dass nach Bemerkung 3.2 (c) und Korollar 2.4 (b)

$$D \sim D' \implies s(D) = s(D')$$

gilt. Außerdem überlegen wir uns, dass es für $D = \sum n_P P$ und $D' = \sum n'_P P$ mit $D' \leq D$ Punkte $P_1, \ldots, P_k$ mit $n'_{P_i} \leq n_{P_i}$ gibt, an allen anderen Stellen sind sie gleich. Lemma 3.5 liefert dann iterativ, dass

$$\ell(D) \leq \ell(D') + \sum_{i=1}^{k} (n_{P_i} - n'_{P_i}) = \ell(D') + \deg D - \deg D'.$$

Das bedeutet aber gerade, dass hier $s(D') \leq s(D)$ ist. Wir zeigen nun:

(1) Für alle $D \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$ gibt es $D' \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$ mit $D \sim D'$, so dass $D' \leq k \cdot N$, wobei $k \in \mathbb{N}$ und N für $f \in K(\mathcal{C}) \setminus K$ der *Nullstellendivisor* f^*0 ist.

(2) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ damit $s(k \cdot N) \leq \gamma$ gilt.

Dann folgt die Behauptung, denn für alle $D \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$ gibt es nach (1) und obiger Überlegung ein D' mit $s(D) = s(D')$ und nach der anderen Überlegung gilt mit (2) schon

$$s(D') \leq s(k \cdot N) \leq \gamma.$$

Wir zeigen zuerst Behauptung (1): Dazu sei wieder $D := \sum n_P P$. Wir suchen also ein $g \in K(\mathcal{C}) \setminus K$ mit $D + \operatorname{div} g \leq k \cdot N$.

Insbesondere heißt das für g, dass alle Nullstellen von g im Träger von N liegen sollten und dass für $n_P > 0$ für ein P, das nicht im Träger von N liegt,

$$\operatorname{ord}_P(g) \leq -n_P$$

gelten muss. Dabei ist P genau dann im Träger von N, wenn $\operatorname{ord}_P(f) > 0$ ist, also f da eine Nullstelle hat.

Seien $P_1,...,P_r$ die Punkte in $\mathcal{C}$ mit $n_{P_i} > 0$ und $\operatorname{ord}_{P_i}(f) \leq 0$. Sei

$$h_i := \frac{1}{f} - \frac{1}{f}(P_i) \quad \text{für } i \in (1,...,r).$$

Dann ist $\operatorname{ord}_{P_i}(h_i) \geq 1$ und für alle P_j mit $\operatorname{ord}_{P_j}(f) \leq 0$ ist $\operatorname{ord}_{P_j}(h_i) \geq 0$. Da die Ordnung von einer Bewertung herkommt, gilt auch

$$\operatorname{ord}_{P_i}(h_i^{-n_{P_i}}) \leq -n_{P_i} \text{ und } \operatorname{ord}_{P_j}(h_i^{-n_{P_i}}) \leq 0$$

für die entsprechenden Punkte. Die $h_i^{-n_{P_i}}$ haben also sicherlich keine Nullstellen außerhalb des Trägers von N,

$$g := \prod_{i=1}^{r} h_i^{-n_{P_i}}$$

erfüllt also alle unsere Wünsche. Nun können wir unser k so wählen, dass für P in dem Träger von N immer

$$n_P + \operatorname{ord}_P(g) \leq k \cdot e_P(f)$$

gilt, da es sich dabei nur um endlich viele Punkte handelt. Und damit gilt, wie behauptet

$$D + \operatorname{div} g \leq k \cdot N.$$

Nun zeigen wir noch Behauptung (2), also dass es ein $\gamma \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$s(k \cdot N) = \deg(k \cdot N) + 1 - \ell(k \cdot N) \leq \gamma.$$

Sei also $f \in K(\mathcal{C})^\times$ und $g_1,...,g_r$ eine Basis von $K(\mathcal{C})$ über $K(f) = K(\frac{1}{f})$, also $r = \deg f$. Ohne Einschränkung können wir die g_i ganz über $K[\frac{1}{f}]$ wählen. Dann gilt nach ähnlicher Argumentation wie im Beweis zu Lemma 2.7: Wenn P eine Polstelle von g_i ist, so ist P schon eine Polstelle von $\frac{1}{f}$. Damit ist P aber eine Nullstelle von f und liegt somit im Träger von N. Wir finden also ein γ_0, so dass, für $i \in \{1,...,r\}$,

$$\operatorname{div} g_i + \gamma_0 \cdot N \geq 0$$

gilt. Damit zeigen wir nun, dass $\ell(k \cdot N) \geq \deg(k \cdot N) - r \cdot (\gamma_0 - 1)$, wir also

$$\gamma := r(\gamma_0 - 1) + 1$$

finden. Sei dazu $h_{ij} := \frac{g_i}{f^j}$, für $j \in \{0,...,k\}$. Damit gilt

$$\operatorname{div} h_{ij} + (k + \gamma_0) \cdot N = \operatorname{div} g_i - j \cdot \operatorname{div} f + k \cdot N + \gamma_0 \cdot N \geq (k - j) \cdot N \geq 0,$$

da $\operatorname{div} f \leq N$ und $\operatorname{div} g_i + \gamma_0 \cdot N \geq 0$ ist. Damit liegen die h_{ij} alle in $\mathcal{L}((k+\gamma_0)\cdot N)$ und, da die h_{ij} über K linear unabhängig sind, ist

$$\ell((k+\gamma_0)\cdot N) \geq r\cdot(k+1).$$

Wenn wir Lemma 3.5 iterativ anwenden, sehen wir, ähnlich wie oben, dass

$$\ell(k\cdot N) \geq \ell((k+\gamma_0)\cdot N) - \deg(\gamma_0\cdot N) \geq r\cdot(k+1) - \gamma_0 r = kr - r\cdot(\gamma_0 - 1),$$

da, nach Satz 7 (a), $\deg N = \deg f = r$ ist und damit folgt auch schon die Behauptung, denn dann ist auch $kr = \deg(k\cdot N)$. □

4 Der Satz von Riemann-Roch

$\mathcal{C}$ sei stets eine zusammenhängende, reguläre, projektive Kurve, K algebraisch abgeschlossen.

Definition/Bemerkung 4.1: Sei $\Omega_{\mathcal{C}} = \Omega_{K(\mathcal{C})/K}$ der $K(\mathcal{C})$-Vektorraum der K-Differentiale von $K(\mathcal{C})$ (siehe auch Algebra II).

(a) $\Omega_{\mathcal{C}}$ heißt auch Vektorraum der *rationalen Differentiale.*

(b) Es ist $\dim_{K(\mathcal{C})} \Omega_{\mathcal{C}} = 1$.

Beweis: (b) $\mathcal{C}$ ist birational zu einer Hyperfläche $\mathfrak{V}(F) \subseteq \mathbb{A}^2(K)$ nach Lemma 4.4 aus Kapitel III. Damit ist $K(\mathcal{C}) = K(\overline{X}, \overline{Y})$ und $F(\overline{X}, \overline{Y}) = 0$.

Außerdem wird $\Omega_{\mathcal{C}}$ von $\mathrm{d}\overline{X}, \mathrm{d}\overline{Y}$ erzeugt und die notwendige Bedingung

$$\mathrm{d}F(\overline{X}, \overline{Y}) = 0 \text{ erzwingt } \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X}\mathrm{d}\overline{X} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}Y}\mathrm{d}\overline{Y} = 0.$$

Der Lösungsraum dieses linearen Gleichungssystems ist eindimensional. □

Definition/Bemerkung 4.2: Sei $\omega \in \Omega_{\mathcal{C}}$, $\omega \neq 0$.

(a) Sei $P \in \mathcal{C}$, t_P uniformisierend. Dann ist $\omega = f \cdot \mathrm{d}t_P$ und

$$\operatorname{ord}_P(\omega) := \operatorname{ord}_P(f)$$

ist wohldefiniert.

(b) Man definiert $\operatorname{div}\omega := \sum_{P\in\mathcal{C}} \operatorname{ord}_P(\omega)\cdot P$.

(c) $\mathcal{K}$ heißt *kanonischer Divisor*, wenn $\mathcal{K} = \operatorname{div}\omega$ für ein $\omega \in \Omega_{\mathcal{C}}$ gilt.

(d) Je zwei kanonische Divisoren sind linear äquivalent.

Für den Beweis von (a) muss man die Unabhängigkeit der Ordnung von t_P zeigen. Das ist schwierig!
Die restlichen Aussagen folgen dann aus (a).

Satz 9 (Riemann-Roch)**:** *Sei $\mathcal{K}$ ein kanonischer Divisor auf $\mathcal{C}$ und $D \in \mathrm{Div}(\mathcal{C})$. Dann gilt:*

$$\ell(D) - \ell(\mathcal{K} - D) = \deg D + 1 - \mathfrak{g}.$$

KOROLLAR 4.3: (a) Ist $\mathcal{K}$ ein kanonischer Divisor sowie $D = 0$, so ist $\deg D = 0$ und $\ell(D) = 1$ nach Bemerkung 3.2 (a). Also ist in diesem Fall $\ell(\mathcal{K}) = \mathfrak{g}$.

(b) Ist $D = \mathcal{K}$ ein kanonischer Divisor, so ist $\ell(\mathcal{K}) = \mathfrak{g}$ nach (a). Also gilt hier

$$\deg(\mathcal{K}) = \mathfrak{g} - 1 + \ell(D) - \ell(0) = 2\mathfrak{g} - 2.$$

BEISPIEL 4.4: Sei $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1(K)$. Dann ist $K(\mathcal{C}) = K(X)$ und $\Omega_{\mathcal{C}} = K(X)\mathrm{d}X$, $\omega = \mathrm{d}X$ ist uniformisierend.

Wir suchen den kanonischen Divisor $\mathcal{K} = \operatorname{div} \omega$, d.h. wir müssen für jeden Punkt P die Ordnung $\mathrm{ord}_P(\omega)$ bestimmen (vgl. Definition/Bemerkung 4.2).

Sei dazu zunächst $a \in K$. Dann ist $X - a$ uniformisierend. Es gilt also $\mathrm{d}X = \mathrm{d}(X - a)$. Also ist $\mathrm{ord}_a(\omega) = 0$.

Nun sei $a = \infty$. Dann ist $\frac{1}{X}$ uniformisierend und mit der Leibnizregel sieht man:

$$\mathrm{d}\frac{1}{X} = -\frac{1}{X^2}\mathrm{d}X.$$

Also ist $\mathrm{ord}_\infty(\omega) = -2$ und damit ist $\mathcal{K} = -2 \cdot \infty$ der kanonische Divisor zu ω.

Insbesondere ist $\deg \mathcal{K} = -2$. Setze $D = \mathcal{K}$. Nun liefert Korollar 4.3 (b):

$$\mathfrak{g}(\mathbb{P}^1(K)) = 0.$$