

1. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

24. Oktober 2007

Faserprodukt von Mengen

Definition

Seien A, B, S Mengen, $f_A : A \rightarrow S, f_B : B \rightarrow S$. Weiter sei F eine Menge mit Abb $\pi_A : F \rightarrow A$ mit $f_A \circ \pi_A = f_B \circ \pi_B$.

F heißt Faserprodukt, von A und B über S (Symbol: $F = A \times_s B$), wenn für jede Menge M und jedes Paar von Abbildungen g_a, g_b von M nach A bzw. B genau eine Abbildung $h : M \rightarrow F$, so dass $g_a = \pi_A \circ h, g_b = \pi_B \circ h$.

Behauptung

Zwischen zwei Faserprodukten von A und B über S gibt es genau eine "sinnvolle" Bijektion.

Beweis

Seien F, F' Faserprodukte. Nach Definition des Faserprodukts:

$$\exists! h : F' \rightarrow F \text{ mit } \pi'_A \circ h = \pi_A \circ \pi'_A, \pi'_B \circ h = \pi_B \circ \pi'_B$$

$$\exists! h' : F \rightarrow F' \text{ mit } \pi_A \circ h' = \pi'_A \circ \pi_A, \pi_B \circ h' = \pi'_B \circ \pi_B$$

$$\Rightarrow h \circ h' \text{ ist Abbildung von } F \text{ nach } F \text{ mit } \pi_A \circ (h \circ h') = \pi_A \circ \pi_A, \pi_B \circ (h \circ h') = \pi_B \circ \pi_B$$

id_F ist aber auch eine Abbildung mit dieser Eigenschaft.

$$\xrightarrow{\text{Def. Faserprodukt}} h \circ h' = id_F. \text{ Genauso: } h' \circ h = id_{F'}.$$

Bemerkung

Zu A, B, S, f_A, f_B wie oben existiert immer ein Faserprodukt.

Denn

Definiere $F := \{(a, b) \in A \times B \mid f_A(a) = f_B(b)\}$.

Zu M wie oben definiere $h : M \rightarrow F, m \mapsto (g_A(m), g_B(m))$.

Bemerkung

$$\text{Es gilt: } F = \bigcup_{s \in S} (f_A^{-1}(s) \times f_B^{-1}(s))$$

Beispiel eines metrischen Raums: Die Hasudorff - Metrik

$M = \mathbb{R}^2, d$ sei der euklidische Abstand.

Ziel

Messe den Abstand zwischen Teilmengen von M .

Definition

Sei $x \in M, S \subseteq M$. Definiere $d(x, S) := \inf\{d(x, y) \mid y \in S\}$.

Seien $S, S' \subseteq M$. Definiere $d(S', S) := \sup\{d(x, S) \mid x \in S'\}$.

Das definiert keine Metrik auf $\mathcal{P}(M)$, denn im Allgemeinen ist $d(S, S') \neq d(S', S)$!

Definiere $H(M) := \{S \subseteq M \mid S \text{ beschränkt und abgeschlossen}\}$.

Definiere nun $h : H(M) \times H(M) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h(S, S') := \max\{d(S, S'), d(S', S)\}$.

Satz

h ist eine Metrik auf $H(M)$.

Beweis

Sei $S \in H(M)$. $h(S, S) = 0$ (da $d(S, S) = 0$). Seien nun $S, S' \in H(M)$ mit $h(S, S') = 0 \Rightarrow d(S, S') = 0, d(S', S) = 0$.

$\Rightarrow S \subseteq S'$ und $S' \subseteq S$. Denn: $d(x, S) = 0 \Rightarrow x \in S$ oder x ist Häufungspunkt von S .

$(x \notin S \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in S : d(x, x_n) < \frac{1}{n})$

$\Rightarrow S = S'$.

Symmetrie: klar. Dreiecksungleichung gilt auch, denn:

$$1. \forall S \in H(M), x, y \in M : d(x, S) \leq d(x, y) + d(y, S) + \epsilon \\ \Rightarrow d(x, S) \leq d(x, y') \leq d(x, y) + d(y, S) + \epsilon.$$

$$2. \forall S, S' \in H(M), x \in M : d(x, S) \leq d(x, S') + d(S', S). \\ \text{Denn: Sei } y' \in S' \text{ mit } d(x, y') \leq d(x, S') + \epsilon + d(S', S).$$

$\Rightarrow \forall x \in S_1 : d(x, S_3) \leq d(x, S_2) + d(S_2, S_3) \Rightarrow \text{Beh.}$

Über wenig weitere Umformungen erhält man das Gewünschte, leider geht mir jetzt der Akku aus.