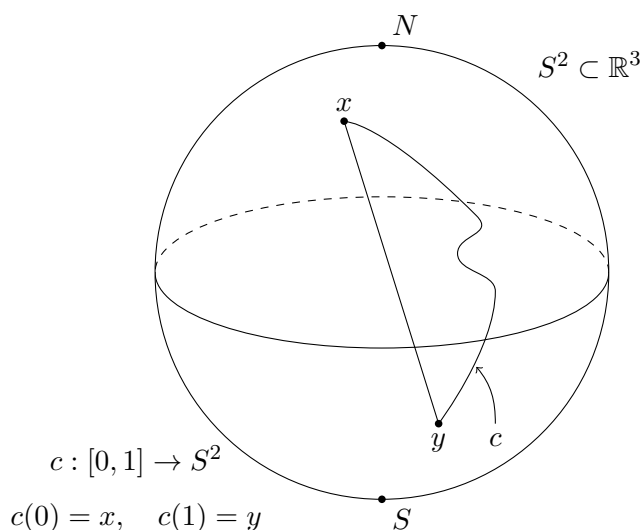


Kapitel 6.

Riemannsche Metriken

Was ist Geometrie? Vereinfacht ausgedrückt suchen wir eine Möglichkeit um Distanzen und Winkel auszudrücken. Betrachte im Folgenden die Einheitskugel, auf der wir den eine Reise von x nach y unternehmen möchten.



Wir definieren mit $\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \|\dot{c}\| dt$ die **Riemann-Metrik**, also das Skalarprodukt mit allen $T_p M$. Damit folgt dass wenn $c: [0, 1] \rightarrow M$ glatt ist, dass $\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle}$ und der Abstand auf M kann ausgedrückt werden durch $d_M(x, y) = \inf\{\mathcal{L}(c) \mid c \text{ von } x \text{ nach } y\}$.

Das wirft Fragen auf nach der Existenz kürzester Abstände, Unterschieden zwischen lokal Kürzestem und global Kürzesten und der Eindeutigkeit.

Definition 6.1 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine **Riemannsche Metrik** g auf M ist gegeben durch ein Skalarprodukt auf jedem $T_p M$, welches glatt von p abhängt, das heißt $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$, so dass $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrisch und positiv definit ist. Ist g eine Riemann-Metrik auf M , so heißt (M, g) eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.*

Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathcal{V}(M)$, $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y =$

$\sum \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j}$, dann ist

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= g\left(\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j g_{ij} \quad (g_{ij} \text{ glatt, } g_{ij} = g_{ji}) \end{aligned}$$

Beispiel (1) \mathbb{R}^m trägt eine natürliche Riemannsche Metrik: Für $x \in \mathbb{R}^m$ ist $\mathcal{I}_x : T_x \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein (natürlicher) Isomorphismus. Damit definiert

$$g_x(\cdot, \cdot) = \langle \mathcal{I}_x(\cdot, \cdot), \mathcal{I}_x(\cdot, \cdot) \rangle$$

eine Riemannsche Metrik auf \mathbb{R}^m . Bezüglich der Karte $(\text{id}, \mathbb{R}^m)$ gilt

$$g_{ij} = \sum \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_i dx^i \otimes dx^j$$

(2) Betrachtet man Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2(r, \vartheta)$:

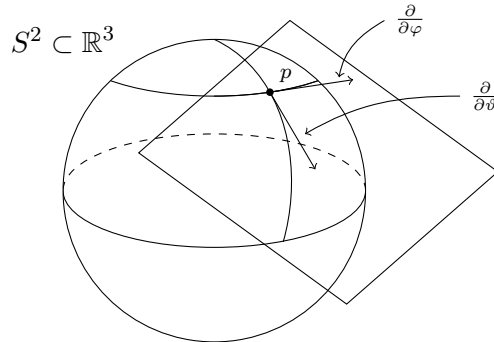
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(r, \vartheta)} &= (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Big|_{(r, \vartheta)} &= r(-\sin \vartheta, \cos \vartheta) \end{aligned}$$

$$g_{rr} = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1$$

$$g_{\vartheta\vartheta} = g\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) = r^2$$

$$g_{r\vartheta} = g_{\vartheta r} = 0$$

(3) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ m -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit. M trägt eine natürliche Riemann-Metrik:



Für jedes $p \in M$ ist $T_p M$ kanonisch isomorph zum von partiellen Ableitungen $\partial_1 F|_p, \dots, \partial_m F|_p$ einer lokalen Parametrisierung F aufgespannten Untervektorraum \mathbb{R}^m . Mit diesem (lokalen) Isomorphismus definiert

$$g_{ij} = \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle$$

eine Riemann-Metrik auf M .

Bemerkung Sind φ und ψ Karten einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) um p und sind $g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ und $h = \sum h_{ij} dy^i \otimes dy^j$ die lokalen Darstellungen bezüglich φ beziehungsweise ψ , so gilt

$$h_{kl} = g \left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l} \right) = \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial y^l} g_{ij}}_{\partial_l(\varphi^i \circ \psi^{-1})}$$

Eine Riemannsche Metrik induziert eine Metrik auf dem Kotangentenbündel: Die Isomorphismen $T_p M \rightarrow T_p^* M$, $X \mapsto \langle X, \cdot \rangle_p$ einen Isomorphismus von TM nach T^*M . Für $\omega \in T_p^* M$ sei $X(\omega) \in T_p M$ mit $\omega = \langle X(\omega), \cdot \rangle_p$. Man definiert nun durch

$$\langle \omega, \tilde{\omega} \rangle = \langle X(\omega), X(\tilde{\omega}) \rangle$$

ein Skalarprodukt auf $T_p^* M$. Für $\omega = \sum \omega_i dx^i$, $X(\omega) = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ gilt

$$\omega_i = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left\langle X(\omega), \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \sum_j \xi^j g_{ij}$$

Also $\xi^i = \sum g^{ij} \omega_j$, wobei (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \langle \omega, \tilde{\omega} \rangle &= \langle X(\omega), X(\tilde{\omega}) \rangle \\ &= \sum g_{kl} \xi^k \xi^l \\ &= \sum g_{kl} g^{ki} \omega_i g^{lj} \tilde{\omega}_j \\ &= \sum \delta_l^i g^{lj} \omega_i \tilde{\omega}_j \\ &= \sum g^{ij} \omega_i \tilde{\omega}_j \end{aligned}$$

Für beliebige Tensoren $S, S' \in T_q^p(TM)$ und $T, T' \in T_l^k(TM)$ definiert man induktiv durch lineare Fortsetzung Skalarprodukte wie folgt:

$$\langle S \otimes T, S' \otimes T' \rangle = \langle S, S' \rangle \otimes \langle T, T' \rangle.$$

Auf $TM \otimes TM$ hat die Metrik die folgende Gestalt:

$$\langle X \otimes Y, \tilde{X} \otimes \tilde{Y} \rangle = \sum g_{ij} g_{kl} \xi^i \tilde{\xi}^j \eta^k \tilde{\eta}^l.$$

Definition 6.2 Es seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein Diffeomorphismus $\Phi: M \rightarrow N$ heißt **Isometrie**, falls $\Phi^*h = g$, das heißt für alle $p \in M$ und $X, Y \in T_p M$ gilt:

$$\begin{aligned} g_p(X, Y) &= h_{\Phi(p)}(\Phi_{*p}X, \Phi_{*p}Y) \\ &= \underbrace{\Phi^*h(X, Y)}_{\rightsquigarrow \text{Pullback Metrik}} \end{aligned}$$

Ist umgekehrt $\Phi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und h eine Riemannsche Metrik auf N , so ist Φ^*h eine Riemannsche Metrik auf M .

Satz 6.3 Jede glatte Mannigfaltigkeit trägt eine Riemannsche Metrik.

Um Metriken in den Überlappungsgebieten von Karten „verkleben“ zu können, benötigt man das folgende Hilfsmittel.

Satz (Zerlegung der Eins) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung von M . Dann existiert eine **Zerlegung der Eins** auf einer abzählbaren, lokal endlichen Verfeinerung von $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, das heißt es existiert eine abzählbare offene Überdeckung $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von M und glatte Funktionen mit kompaktem Träger $\alpha_k: M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:

- (i) $\forall k \in \mathbb{N} \exists i(k) \in \mathcal{I} : V_k \subseteq U_{i(k)}$ (Verfeinerung),
- (ii) $\forall p \in M \exists U \ni p : \#\{k \mid V_k \cap U \neq \emptyset\} < \infty$ (lokal endlich),
- (iii) $\forall k \in \mathbb{N} : \text{supp}(\alpha_k) \subseteq V_k$,
- (iv) $\forall k \in \mathbb{N} \forall p \in M : 0 \leq \alpha_k(p) \leq 1$,
- (v) $\forall p \in M : \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k(p) = 1$.

(Wegen (ii) und (iii) ist die Summe in (v) endlich).

An dieser Stelle geht maßgeblich ein, dass die Topologie von M eine abzählbare Basis besitzt. Beweis siehe Boothby, Kapitel V.4 [1].

Beweis (von Satz 6.3) Es sei M eine glatte, m -dimensionale Mannigfaltigkeit. $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ ein Atlas von M und $\{(V_k, \alpha_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung der Eins auf einer abzählbaren, lokal endlichen Verfeinerung von $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$. Es sei β ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^m . Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist dann

$$g_k = \varphi_{i(k)}^* \Big|_{V_k} \beta$$

eine Riemannsche Metrik auf V_k . Damit ist $g = \sum g_k \alpha_k$ eine Riemannsche Metrik auf M . Die Summe ist punktweise endlich und g ist als Komposition glatter Abbildungen selbst glatt. Symmetrie und Bilinearität folgen sofort. Für jedes $p \in M$ gilt $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k(p) = 1$, das heißt es existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_l(p) > 0$ und für $X \in T_p M$ mit $X \neq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} g_p(X, X) &= \sum \underbrace{g_k(p)(X, X)}_{>0} \alpha_k(p) \\ &\geq g_l(p)(X, X) \alpha_l(p) > 0. \end{aligned}$$

Damit ist g positiv definit. □

Für eine glatte Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ heißt

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}\| = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

die **(Kurven-)Länge** von γ . Ist $\tau: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ glatt und monoton, so gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma \circ \tau) &= \int_\alpha^\beta \|\dot{\gamma}(\tau(s))\| |\tau'(s)| ds \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}\| = \mathcal{L}(\gamma). \end{aligned}$$

τ' ist die Ableitung von τ , der Strich wurde aus ästhetischen Gründen statt dem Punkt gewählt

Damit ist die Kurvenlänge invariant unter Reparametrisierungen. Ist γ **regulär**, das heißt $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$, so ist ihre sogenannte **Bogenlänge**

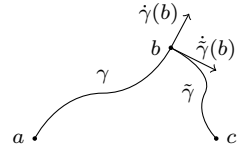
$$\sigma: [a, b] \rightarrow [0, \mathcal{L}(\gamma)], t \mapsto \mathcal{L}(\gamma|_{[a, t]}) = \int_a^t \|\dot{\gamma}\|.$$

streng monoton steigend, also $\sigma'(s) = \|\dot{\gamma}(s)\| > 0$. Für $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma^{-1}: [0, \mathcal{L}(\gamma)] \rightarrow M$ gilt $\|\dot{\tilde{\gamma}}\| \equiv 1$. Die Kurve $\tilde{\gamma}$ heißt **Bogenlängenparametrisierung** von γ . Gilt für $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ dass $\|\dot{\gamma}\| \equiv \lambda$, so heißt γ **proportional zur Bogenlänge** parametrisiert.

Sind $\gamma: [a, b] \rightarrow M, \tilde{\gamma}: [b, c] \rightarrow M$ glatte Kurven mit $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$, so sei

$$\mathcal{L}(\gamma \cup \tilde{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma) + \mathcal{L}(\tilde{\gamma}).$$

Eine Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ heißt **stückweise glatt**, wenn t_0, \dots, t_k mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ existieren, so dass $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ für alle $i \leq k$ glatt ist.



Definition 6.4 Für Punkte $p, q \in M$ ist der **Abstand** definiert durch:

$$d(p, q) = \inf\{\mathcal{L}(\gamma) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow M \text{ stückweise glatt mit } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

Satz 6.5 Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Abstandsfunktionen bilden eine Metrik auf M , welche die ursprüngliche Topologie induziert.

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

Satz 6.6 Es seien (M, g) und (N, h) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\Phi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Dann ist Φ genau dann eine Isometrie, wenn $\mathcal{L}(\Phi \circ \gamma) = \mathcal{L}(\gamma)$ für alle glatten $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ gilt.

Beweis Dass eine Isometrie die Kurvenlängen erhält gilt offensichtlich. Erhält Φ die Kurvenlängen, so erhält Φ auch die Norm von Tangentialvektoren, denn andernfalls gäbe es $X_p \in T_p M$ mit (ohne Einschränkung)

$$h_{\Phi(p)}(\Phi_{*p}X, \Phi_{*p}X) > g_p(X, X)$$

und eine Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = X$ und es gälte (für hinreichend kleines ε):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma|_{[0, \varepsilon]}) &= \int_0^\varepsilon \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \\ &< \int_0^\varepsilon \sqrt{h_{\Phi(\gamma(t))}(\Phi_{*\gamma(t)}\dot{\gamma}(t), \Phi_{*\gamma(t)}\dot{\gamma}(t))} dt \\ &= \int_0^\varepsilon \sqrt{h_{\Phi(\gamma(t))}((\Phi \circ \dot{\gamma})(t), (\Phi \circ \dot{\gamma})(t))} dt \\ &= \mathcal{L}((\Phi \circ \gamma)|_{[0, \varepsilon]}). \end{aligned}$$

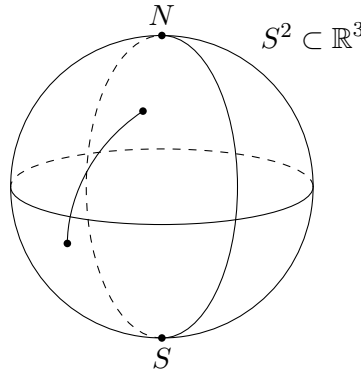
Mit der Polarisationsformel $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}(\|x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ folgt dann, dass Φ auch die Skalarprodukte erhält. \square

Definition 6.7 Eine Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ heißt **minimale Geodätische** von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$, falls ein $\lambda \geq 0$ existiert, so dass für alle $a \leq s < t \leq b$ gilt:

$$\mathcal{L}(\gamma|_{[s,t]}) = \lambda(t - s) = d(\gamma(s), \gamma(t)).$$

Eine Kurve γ heißt **Geodätische**, falls sie lokal minimierende Geodätische ist, das heißt für alle $t \in [a, b]$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ minimierende Geodätische ist.

Eine bessere Vorstellung erhält man durch Betrachtung von Geodätischen als Isometrien von Intervallen in den euklidischen Raum, denn $d(\gamma(s), \gamma(t)) = t - s = d_{\mathbb{R}}(t, s)$.



Geodätische = Großkreissegmente

Bemerkung (1) Die Geodätischen von \mathbb{R}^n mit Standardmetrik sind genau die Geradensegmente.

(2) Ist γ eine minimale Geodätische, so gilt $\|\dot{\gamma}\| = \lambda$, falls $\lambda > 0$, existiert eine Bogenlängenparametrisierung $\tilde{\gamma}$ von γ auf $[0, l]$ mit $l = \mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\tilde{\gamma})$ und $d(\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(t)) = t$. Damit ist $\tilde{\gamma}$ eine isometrische Einbettung von $[0, l]$ in M .

Definition 6.8 Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ eine (stückweise) glatte Kurve auf M . Das Integral

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}\|^2$$

heißt **Energie** von γ .

Lemma 6.9 Für eine (stückweise) glatte Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}(\gamma)^2 \leq E(\gamma),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Beweis Es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das Skalarprodukt $(f, g) \mapsto \int_0^1 fg$ mit $f, g \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$.

Nun sei $f \equiv 1$ und $g = \|\dot{\gamma}\|$, so folgt:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| \leq \left| \left(\int_0^1 f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| = \sqrt{2E(\gamma)}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn 1 und $\|\dot{\gamma}\|$ \mathbb{R} -linear abhängig sind, das heißt wenn $\|\dot{\gamma}\| \equiv \lambda$ gilt. \square

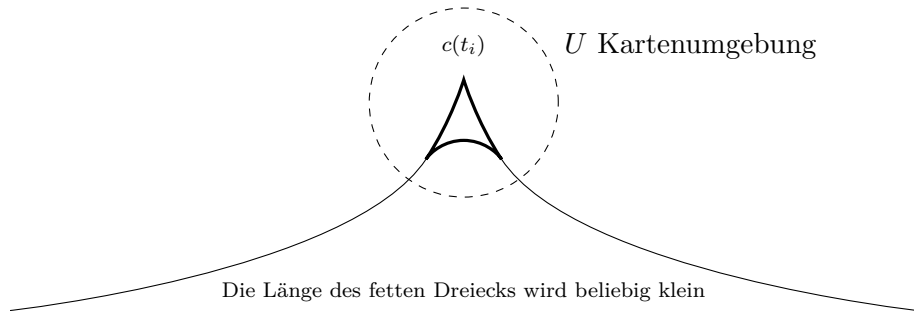
Satz 6.10 *Eine (stückweise) glatte Kurve ist genau dann minimale Geodätische, wenn ihre Energie minimal ist.*

Beweis „ \Rightarrow “: Es sei γ minimale Geodätische, das heißt $\mathcal{L}(\gamma|_{[0,t]}) = \lambda t = d(\gamma(0), \gamma(t))$.

Also gilt $E(\gamma) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\gamma)^2 \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}(c)^2 \leq E(c)$, wobei c eine Kurve zwischen den Endpunkten von γ ist und die letzte Ungleichung aus Lemma 6.9 folgt.

„ \Leftarrow “: Sei γ energieminimierend.

$$\frac{1}{2}d(\gamma(0), \gamma(1))^2 \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}(\gamma)^2 \leq E(\gamma) \leq E(\underbrace{c_n}_{\text{reguläre Kurven}}) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(c_n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}d(\gamma(0), \gamma(1))^2$$



Damit gilt: $\mathcal{L}(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$ und wegen Cauchy-Schwarz ist γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Wendet man dieses Argument auf beliebige Teilstücke an, erhält man:

$$\mathcal{L}(\gamma|_{[s,t]}) = d(\gamma(s), \gamma(t)) = \lambda(s - t). \quad \square$$

