

## 20. Homotopie und einfacher Zusammenhang

### Lemma 20.1

Sei  $\emptyset \neq K \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $K$  kompakt. Dann existiert ein  $r > 0$ :  $U_r(a) \subseteq D \forall a \in K$ .

### Beweis

$\forall a \in K \exists r_a > 0: U_{2r_a}(a) \subseteq D$ . Dann:  $K \subseteq \bigcup_{a \in K} U_{r_a}(a)$ .

2.3  $\implies \exists a_1, \dots, a_n \in K: K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{r_{a_j}}(a_j)$ .

$r := \min\{r_{a_1}, \dots, r_{a_n}\}$ . Sei  $a \in K$  und  $z \in U_r(a)$ .

Zu zeigen:  $z \in D$ .

$\exists j \in \{1, \dots, n\}: a \in U_{r_{a_j}}(a_j)$ .

Dann:  $|z - a_j| = |z - a + a - a_j| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |z - a| + |a - a_j| < r + r_{a_j} \leq 2r_{a_j} \implies z \in U_{2r_{a_j}}(a_j) \subseteq D \blacksquare$

### Lemma 20.2

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$ . ( $\gamma$  also „nur“ stetig)

Dann existiert ein  $r > 0$  und eine Zerlegung  $Z = \{a_0, \dots, a_n\}$  von  $[a, b]$  mit:

- (1) für  $z_j := \gamma(a_j)$  gilt:  $U_r(z_j) \subseteq D$  ( $j = 0, \dots, n$ )
- (2)  $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subseteq U_r(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$  ( $j = 0, \dots, n$ )

### Beweis

20.1  $\implies \exists r > 0: U_r(z) \subseteq D \forall z \in K := \text{Tr}(\gamma) \implies (1)$ .

OBdA:  $[a, b] = [0, 1]$ .  $\gamma$  ist auf  $[0, 1]$  gleichmäßig stetig  $\implies \exists \delta > 0: |\gamma(s) - \gamma(t)| < r \forall s, t \in [0, 1]$  mit  $|s - t| < \delta$ .

Sei  $n \in \mathbb{N}$  so, daß  $\frac{1}{n} < \delta$ .  $a_j := \frac{j}{n}$  ( $j = 0, \dots, n$ ) und  $Z := \{a_0, \dots, a_n\}$ . Sei  $t \in [a_j, a_{j+1}]$ .  
 $\implies |t - a_j| < \delta, |t - a_{j+1}| < \delta \implies |\gamma(t) - \underbrace{\gamma(a_j)}_{=z_j}| < r, |\gamma(t) - \underbrace{\gamma(a_{j+1})}_{=z_{j+1}}| < r \implies \gamma(t) \in$

$U_r(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$ . ■

In §8 haben wir  $\int_{\gamma} f(z) dz$  definiert für  $\gamma$  stückweise glatt und  $f \in C(\text{Tr}(\gamma))$ . Jetzt definieren wir

$\int_{\gamma} f(z) dz$  für  $\gamma$  „nur“ stetig und  $f$  holomorph.

**Definition**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in H(D)$  und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$ . Seien  $r, z_j, Z$  wie in 20.2.  
 $z_0 = \gamma(a_0) = \gamma(a)$ ,  $z_n = \gamma(a_n) = \gamma(b)$   
 $\gamma_j(t) := z_j + t(z_{j+1} - z_j)$  ( $t \in [0, 1]$ ) ( $j = 0, \dots, n-1$ ).  
 $\Gamma := \gamma_0 \oplus \dots \oplus \gamma_{n-1}$  ist stückweise glatt. 20.2  $\implies \text{Tr}(\Gamma) \subseteq D$ . Setze

$$(+)\quad \int_{\gamma} f(z)dz := \int_{\Gamma} f(z)dz$$

**Lemma 20.3**

Bezeichnungen wie in obiger Definition.

- (1) Ist  $\gamma$  stückweise glatt, so stimmt obige Definition (+) mit der Definition von  $\int_{\gamma} f(z)dz$  aus §8 überein.
- (2) Die Definition (+) ist unabhängig von der Zerlegung  $Z$ , solange  $Z$  die Eigenschaft aus 20.2 hat.
- (3)  $|\int_{\gamma} f(z)dz| \leq (\max_{z \in \text{Tr}(\Gamma)} |f(z)|)L(\Gamma)$ .

**Beweis**

- (1)  $\tilde{\gamma}_j := \gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ . Dann:  $\gamma = \tilde{\gamma}_0 \oplus \tilde{\gamma}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\gamma}_{n-1}$   
 Sei  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ :  $\tilde{\gamma}_j \oplus \tilde{\gamma}_j^-$  ist ein geschlossener, stückweise glatter Weg im Sterngebiet  $U_r(z_j)$  (siehe 20.2).  
 $\xrightarrow{9.2} \int_{\tilde{\gamma}_j \oplus \tilde{\gamma}_j^-} f(z)dz = 0 \implies \int_{\tilde{\gamma}_j} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_j} f(z)dz$ .  
 $\xRightarrow{\text{Summation}} \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz$ .
- (2) Übung. (Ist  $\tilde{Z}$  eine weitere Zerlegung von  $[a, b]$  mit den Eigenschaften aus 20.2, so betrachte die gemeinsame Verfeinerung  $Z \cup \tilde{Z}$ . Verfahre ähnlich wie in (1).)
- (3) folgt aus 8.4 ■

**Definition**

$D \subseteq \mathbb{C}$  sei offen.

- (1) Seien  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  Wege mit  $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq D$ ,  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$  und  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ .  
 $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  heißen **in D homotop**  $:\Leftrightarrow \exists H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ :  $H$  ist stetig,  $H([0, 1]^2) \subseteq D$  und

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) \quad \forall s \in [0, 1]$$

In diesem Fall heißt  $H$  eine **Homotopie von  $\gamma_0$  nach  $\gamma_1$  in D**.

**Anschaulich:** Sei  $s \in [0, 1]$ .

$\Gamma_s(t) := H(t, s)$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $\Gamma_s$  ist ein Weg mit  $\text{Tr}(\Gamma_s) \subseteq D$ .  $\Gamma_s(0) = H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ ,  $\Gamma_s(1) = H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ ,  $\Gamma_0 = \gamma_0$ ,  $\Gamma_1 = \gamma_1$   
 „ $\gamma_0$  kann in  $D$  stetig nach  $\gamma_1$  deformiert werden.“

- (2)  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  sei ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$ .  $z_0 : 0\gamma(0) = \gamma(1)$ .  
 $\gamma_{z_0}(t) := z_0$  ( $t \in [0, 1]$ ) heißt ein **Punktweg**.

$\gamma$  heißt **nullhomotop in  $D$**   $:\Leftrightarrow \gamma$  und  $\gamma_{z_0}$  sind in  $D$  homotop.  
 „ $\gamma$  lässt sich in  $D$  stetig auf einen Punkt zusammenziehen.“

- (3)  $G \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet.  $G$  heißt **einfach zusammenhängend**  $:\Leftrightarrow$  jeder geschlossene Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$  ist in  $G$  nullhomotop.  
 „ $G$  hat keine Löcher.“

#### **Satz 20.4**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein konvexes Gebiet.

- (1) Sind  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  Wege mit  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$  und  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$  und  $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq G$ , so sind  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  homotop in  $G$ .  
 (2)  $G$  ist einfach zusammenhängend

#### **Beweis**

- (1)  $H(s, t) := \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t))$ , ( $s, t \in [0, 1]$ ).  $H$  ist eine Homotopie von  $\gamma_0$  nach  $\gamma_1$  in  $G$   
 (2) folgt aus (1) ■

