

## 20. Gleichmäßige Stetigkeit

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen seien stets:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

**Erinnerung:** Sei  $f \in C(D), x_0 \in D$  und  $\varepsilon > 0$ . 17.1  $\implies \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$  mit: (\*)  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  Im allgemeinen hängt  $\delta$  von  $\varepsilon$  und  $x_0$  ab.

### Definition

$f$  heißt auf  $D$  **gleichmäßig stetig** :  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (**) |f(x) - f(z)| < \varepsilon \forall x, z \in D$  mit  $|x - z| < \delta$ .

**Beachte:** Ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $D \implies f \in C(D)$ ; Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.

### Beispiel

$D = [0, \infty), f(x) := x^2$ . Klar:  $f \in C(D)$ . Annahme:  $f$  ist auf  $D$  gleichmäßig stetig. Dann existiert zu  $\varepsilon = 1$  ein  $\delta > 0 : |x^2 - z^2| < 1 \forall x, z \in D$  mit  $|x - z| < \delta$ . Sei  $x \in D$ .  $z := x + \frac{\delta}{2} \implies |x - z| = \frac{\delta}{2} \implies |x^2 - z^2| = |x + z||x - z| = (2x + \frac{\delta}{2})\frac{\delta}{2} = x\delta + \frac{\delta^2}{4} < 1 \implies x\delta < 1 \implies \delta < \frac{1}{x}$ . Also:  $\delta < \frac{1}{x} \forall x > 0 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \delta \leq 0$ , Widerspruch!

### Definition

$f$  heißt auf  $D$  **Lipschitz stetig** :  $\iff \exists L \geq 0 : \underbrace{|f(x) - f(z)|}_{(***)} \leq L|x - z| \forall x, z \in D$

### Satz 20.1 (Stetigkeitsstätze)

- (1) Ist  $f$  auf  $D$  Lipschitz stetig  $\implies f$  ist auf  $D$  gleichmäßig stetig
- (2) Ist  $D$  beschränkt und abgeschlossen und  $f \in C(D) \implies f$  ist auf  $D$  gleichmäßig stetig (**Satz von Heine**).

### Beweis

- (1) Sei  $L \geq 0$  und es gelte (\* \* \*). O.B.d.A.:  $L > 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ . Seien  $x, z \in D$  und  $|x - z| < \delta \implies |f(x) - f(z)| \leq L|x - z| < L\delta = \varepsilon$
- (2) Annahme:  $f$  ist auf  $D$  nicht gleichmäßig stetig  $\implies \exists \varepsilon > 0 : (**)$  ist für kein  $\delta > 0$  richtig.  $\implies \forall \delta > 0 \exists x = x(\delta), z = z(\delta) \in D : |x - z| < \delta$  aber  $|f(x) - f(z)| \geq \varepsilon$ .  $\implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, z_n : |x_n - z_n| < \frac{1}{n}$ , aber  $|f(x_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon$ .  $D$  beschränkt  $\xrightarrow{8.2} (x_n)$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k}), x_0 := \lim x_{n_k}$ .  $D$  abgeschlossen  $\implies x_0 \in D$ .  $|x_{n_k} - z_{n_k}| \leq \frac{1}{n_k} \forall k \in \mathbb{N} \implies z_{n_k} - x_{n_k} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty) \implies z_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} \rightarrow x_0$ .  $f$  stetig  $\implies |f(x_{n_k}) - f(z_{n_k})| \rightarrow |f(x_0) - f(x_0)| = 0$ . Widerspruch zu  $|f(x_{n_k}) - f(z_{n_k})| \geq \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}$  ■

**Beispiel**

$D = [0, 1], f(x) := \sqrt{x}$ . Satz  $\implies f$  ist auf  $D$  gleichmäßig stetig. Annahme:  $\exists L > 0 : |\sqrt{x} - \sqrt{z}| \leq L|x - z| \ \forall x, z \in [0, 1] \implies \sqrt{x} \leq Lx \ \forall x \in [0, 1] \implies 1 \leq L\sqrt{x} \ \forall x \in (0, 1] \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \leq 0$ , Widerspruch!