

Kapitel 4

Nichtsinguläre Kurven

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. C sei irreduzible projektive Varietät der Dimension 1 über k .

C nicht singulär \Leftrightarrow jedes $x \in C$ nichtsingulär
 $\Leftrightarrow \mathcal{O}_{C,x}$ regulärer lokaler Ring für jedes $x \in C$

§ 20 Diskrete Bewertungsringe

Proposition 20.1

Sei (R, m) ein nullteilerfreier lokaler noetherscher Ring der Dimension 1. Dann sind äquivalent:

- i) R ist regulär (das heißt $\dim_k(m/m^2) = 1, k = R/m$)
- ii) m ist Hauptideal
- iii) Es gibt $t \in m$, sodass jedes $x \in R - \{0\}$ eine eindeutige Darstellung $x = u \cdot t^n$ hat mit $n \in \mathbb{N}, u \in R^\times$
- iv) R ist Hauptidealring

Beweis

(i) \Rightarrow (ii): ✓

(ii) \Rightarrow (iii): ✓

(iii) \Rightarrow (iv): Sei $(0) \neq I \subset R$ Ideal, n minimal, sodass es ein $x = u \cdot t^n \in I$ gibt.

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow t^n \in I \Rightarrow m^n \subseteq I \\ I \subseteq m^n \text{ nach Wahl von } n \end{array} \right\} \Rightarrow I = m^n = (t^n)$$

(iv) \Rightarrow (i): R Hauptidealring $\Rightarrow m = (t)$ für ein $t \in m$. $\Rightarrow m/m^2$ wird von \bar{t} erzeugt $\Rightarrow \dim_k(m/m^2) \leq 1$.

Andererseits: $\dim(m/m^2) \geq \dim R = 1$

□

Bemerkung 20.2

Sei (R, m) regulärer lokaler Ring der Dimension 1, $K = \text{Quot}(R)$. Dann gilt:

- a) Jedes $x \in K^\times$ hat eindeutige Darstellung $x = ut^n$ mit $u \in R^\times, n \in \mathbb{Z}$
- b) Die Abbildung $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}, ut^n \mapsto n$ erfüllt:
 - i) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$
 - ii) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$ für $x + y \neq 0$

Definition + Bemerkung 20.3

Sei K ein Körper

- Eine surjektive Abbildung $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ mit i) und ii) heißt **diskrete Bewertung** auf K .
- Ist v diskrete Bewertung auf K , so ist $\mathcal{O}_v := \{x \in K : x = 0 \text{ oder } v(x) \geq 0\}$ lokaler Ring mit maximalem Ideal $m_v = \{x \in K : x = 0 \text{ oder } v(x) > 0\}$.
- Ein nullteilerfreier Ring R heißt **diskreter Bewertungsring**, wenn es eine diskrete Bewertung v auf $K := \text{Quot}(R)$ gibt mit $R = \mathcal{O}_v$.
- Jeder reguläre lokale Ring der Dimension 1 ist diskreter Bewertungsring.

Beweis

- b) \mathcal{O}_v Ring: $v(x) = v(1 \cdot x) = v(1) + v(x) \Rightarrow v(1) = 0$

$$0 = v(1) = v((-1) \cdot (-1)) = v(-1) + v(-1)$$

$$\Rightarrow v(-x) = v(x) \forall x \in K \Rightarrow \mathcal{O}_v \text{ ist Ring}$$

\mathcal{O}_v lokal: Sei $x \in \mathcal{O}_v - m_v$, also $v(x) = 0$

$$\Rightarrow v(x) + v\left(\frac{1}{x}\right) = v\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = v(1) = 0$$

$$\Rightarrow v\left(\frac{1}{x}\right) = -v(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathcal{O}_v \Rightarrow x \in \mathcal{O}_v$$

- d) folgt aus 20.2 □

Proposition 20.4

Jeder diskrete Bewertungsring ist regulärer Ring der Dimension 1.

Beweis

Es genügt zu zeigen, dass m_v Hauptideal ist (wegen 20.1!!). Sei dazu $t \in m_v$ mit $v(t) = 1$. Sei $x \in m_v \setminus \{0\}$, $y := \frac{x}{t^{v(x)}} \in K^\times$.

$$v(y) = v(x) - v(t^{v(x)}) = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{O}_v^\times$$

$$\Rightarrow x = y \cdot t^{v(x)} \in (t) \quad \square$$

Beispiel

- 1) Sei k ein Körper, $a \in k$. Für $f \in k(X)^\times$ sei $\text{ord}_a(f)$ die Null-, beziehungsweise Polstellenordnung von f in a . Das heißt für $f \in k[X]$ ist $\text{ord}_a(f) = n$, wenn $f = (X - a)^n \cdot g$ mit $g(a) \neq 0$. Für $f = \frac{g}{h}$, $g, h \in k[X] \setminus \{0\}$, ist $\text{ord}_a(f) = \text{ord}_a(g) - \text{ord}_a(h)$.

$\Rightarrow \text{ord}_a : k(X)^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ ist diskrete Bewertung. Der zugehörige Bewertungsring ist $k[X]_{(X-a)} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(k), a}$

- 2) Für $f = \frac{g}{h} \in k(X)^\times$, $g, h \in k[X] \setminus \{0\}$, sei $\text{ord}(f) := \deg(h) - \deg(g)$.

ord ist diskrete Bewertung auf $k(X)$:

$$\text{ord}\left(\frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2}\right) = \text{ord}\left(\frac{g_1 h_2 + g_2 h_1}{h_1 h_2}\right) = \deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_1 h_2 + g_2 h_1)$$

$$\geq \min(\deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_1 h_2), \deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_2 h_1)) = \min(\text{ord}\left(\frac{g_1}{h_1}\right), \text{ord}\left(\frac{g_2}{h_2}\right))$$

Anmerkung: ord „=“ ord_∞ wie in Beispiel 1.

Bemerkung 20.5

Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist jede diskrete Bewertung auf $k(X)$ von der Form ord_a für ein $a \in k \cup \{\infty\}$.

Beweis

Übung oder Vorlesung □

Beispiel

3) $K = \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ Primzahl. Schreibe $a \in \mathbb{Q}^\times$ in der Form $a = p^n \cdot \frac{b}{c}$, $b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $p \nmid bc$. Setze $v_p(a) := n$.

$v_p : \mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ ist diskrete Bewertung („ p -adische Bewertung“).

$$\mathcal{O}_{v_p} = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\}$$

Bemerkung 20.6

Sei $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ diskrete Bewertung auf Körper K . Sei $0 < \varrho < 1$. Setze:

$$|x|_v := \begin{cases} \varrho^{v(x)} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Dann erfüllt $|\cdot|_v : K \rightarrow \mathbb{R}$:

- $|xy|_v = \varrho^{v(xy)} = \varrho^{v(x)+v(y)} = \varrho^{v(x)} \cdot \varrho^{v(y)} = |x|_v \cdot |y|_v$
- $|x+y|_v = \varrho^{v(x+y)} \leq \max(\varrho^{v(x)}, \varrho^{v(y)}) \leq \max(|x|_v, |y|_v) (\leq |x|_v + |y|_v)$

Definition 20.7

Sei C nichtsinguläre Kurve, $P \in C$. Dann ist $\mathcal{O}_{C,P}$ diskreter Bewertungsring. Die zugehörige diskrete Bewertung auf $k(C) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{C,P})$ heißt ord_P . ord_P heißt die **Ordnung** von f in P .

Bemerkung 20.8

Sei C nichtsinguläre Kurve, $f \in k(C)^\times$. Dann gibt es nur endlich viele $P \in C$ mit $\text{ord}_P(f) \neq 0$.

Beweis

Es ist $\text{ord}_P(f) > 0 \Leftrightarrow f \in m_P \Leftrightarrow f(P) = 0$

$$\text{ord}_P(f) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f} \in m_P \Leftrightarrow \frac{1}{f}(P) = 0$$

$$\Rightarrow \{P \in C : \text{ord}_P(f) \neq 0\} = V(f) \cup V\left(\frac{1}{f}\right)$$

$V(f)$ und $V\left(\frac{1}{f}\right)$ sind echte abgeschlossene Teilmengen von C .

$\dim C = 1 \Rightarrow V(f), V\left(\frac{1}{f}\right)$ sind endlich. □

Proposition 20.9

Sei C nichtsinguläre Kurve, $\emptyset \neq U \subseteq C$ offen, V projektive Varietät, $f : U \rightarrow V$ Morphismus. Dann gibt es genau einen Morphismus $\bar{f} : C \rightarrow V$ mit $\bar{f}|_U = f$.

Beweis

Eindeutigkeit: Seien $g, h : C \rightarrow V$ Morphismen mit $g|_U = h|_U = f$.

$\{x \in C : g(x) = h(x)\}$ ist abgeschlossen.

$\Rightarrow g|_{\bar{U}} = h|_{\bar{U}}$. Da $\bar{U} = C$, folgt $g = h$.

Existenz: $\text{OE } U = C \setminus \{P\}$ für ein $P \in C$. Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, also $\text{OE } V = \mathbb{P}^n(k)$.

$\text{OE } f(U) \not\subset V(X_i)$ für ein $i \in \{0, \dots, n\}$ (sonst $V = \mathbb{P}^{n-1}(k)$).

$$\Rightarrow W := f^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^n U_i\right) \neq \emptyset$$

$\Rightarrow W$ ist dicht in U .

Sei $h_{ij} := \frac{X_i}{X_j} \circ f$, $i, j = 0, \dots, n$

h_{ij} ist reguläre Funktion auf W und damit Element von $k(C)^\times$.

Sei $r_i := \text{ord}_P(h_{i0})$, $i = 0, \dots, n$

Sei k so gewählt, dass $r_k \leq r_j$ für alle $j \neq k$

$$\Rightarrow \text{ord}_P(h_{ik}) = \text{ord}_P\left(\frac{h_{i0}}{h_{k0}}\right) = r_i - r_k \geq 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow h_{ik} \in \mathcal{O}_{C,P}, i = 0, \dots, n$$

$$\Rightarrow \exists \text{ Umgebung } \tilde{U} \text{ von } P \text{ in } C, \text{ sodass } h_{ik} \in \mathcal{O}_{C,P}(\tilde{U}), i = 0, \dots, n.$$

$$\text{Setze } \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & : x \neq P \\ \underbrace{(h_{0k}(x) : \dots : h_{nk}(x))}_{\in \mathbb{P}^n(k), \text{ da } h_{kk}=1} & : x = P \end{cases}$$

Für $x \in \bar{U} \setminus \{P\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= f(x) = \left(\left(\frac{X_0}{X_k} \circ f \right) (x) : \left(\frac{X_1}{X_k} \circ f \right) (x) : \dots : \left(\frac{X_n}{X_k} \circ f \right) (x) \right) \\ &= (h_{0k}(x) : \dots : h_{nk}(x)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \bar{f}$ ist Morphismus. □

§ 21 Divisoren

Sei C nichtsinguläre Kurve (also projektiv, irreduzibel, über algebraisch abgeschlossenem k).

Definition 21.1

- a) Ein **Divisor** auf C ist eine formale Summe $D = \sum_{i=1}^n n_i P_i$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $P_i \in C$.
- b) $\text{Div}(C) = \{D = \sum_{i=1}^n n_i P_i \mid D \text{ ist Divisor auf } C\}$ mit der formalen Addition heißt **Divisorengruppe** von C .
- c) Für $D = \sum_{i=1}^n n_i P_i$ heißt $\deg(D) := \sum_{i=1}^n n_i$ der **Grad** von D .
- d) $D = \sum_{i=1}^n n_i P_i$ heißt **effektiv**, wenn alle $n_i \geq 0$ sind.
Schreibweise: $D \geq 0$

Definition + Bemerkung 21.2

- a) Für $f \in k(C)^\times$ heißt $\text{div}(f) := \sum_{P \in C} \text{ord}_P(f) P$ der **Divisor von f**
- b) $\text{div}(f)$ ist Divisor (wegen Bemerkung 20.8)
- c) $D \in \text{Div}(C)$ heißt **Hauptdivisor**, wenn es ein $f \in k(C)^\times$ gibt mit $D = \text{div}(f)$.
- d) $\text{div} : k(C)^\times \rightarrow \text{Div}(C)$, $f \mapsto \text{div}(f)$ ist Gruppenhomomorphismus. $\text{Bild}(\text{div}) = \text{Div}_H(C)$ sind die Hauptdivisoren.
- e) $\text{Cl}(C) := \text{Div}(C) / \text{Div}_H(C)$ heißt **Divisorenklassengruppe** von C .
- f) $D, D' \in \text{Div}(C)$ heißen **linear äquivalent**, wenn $D - D'$ Hauptdivisor ist.
Schreibweise: $D \equiv D'$

Beispiel 21.3

$C = \mathbb{P}^1(k)$

Jedes $f \in k(C)^\times = k(X)^\times$ lässt sich eindeutig schreiben in der Form $f = \frac{\prod_{i=1}^n (X - a_i)}{\prod_{j=1}^m (X - b_j)}$ mit $a_i \neq b_j$ für alle i, j ($a_i, b_j \in k$).

Dann ist $\text{ord}_a(f) = \#\{i : a_i = a\} - \#\{j : b_j = a\}$ für $a \in k$

$$\text{ord}_\infty(f) = m - n$$

$$\Rightarrow \text{div}(f) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j + (m - n) \cdot \infty \Rightarrow \deg(\text{div}(f)) = 0$$

Umgekehrt: Sei $D \in \text{Div}(\mathbb{P}^1(k))$, $\deg(D) = 0$

$$\text{Schreibe } D = \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{j=1}^m Q_j$$

Sei zum Beispiel $P_1 = \dots = P_d = \infty$, $P_i \neq \infty$ für ein $i > d$

$$\Rightarrow \text{für } f = \frac{\prod_{i=1}^n (X - P_i)}{\prod_{j=1}^m (X - Q_j)} \text{ gilt: } \text{div}(f) = D \Rightarrow \text{Cl}(\mathbb{P}^1(k)) \cong \mathbb{Z}, [D] \mapsto \deg(D)$$

Ziel

$\deg(\text{div}(f)) = 0$ für jedes $f \in k(C)^\times$

Beobachtung

f induziert Morphismus $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ (Proposition 20.9)

Strategie

- i) $\text{div}(f) = f^*((0) - (\infty))$
- ii) $\deg(f^*(D)) = \deg(f) - \deg(D)$

Definition + Bemerkung 21.4

Sei $f : C_1 \rightarrow C_2$ surjektiver Morphismus von nichtsingulären Kurven C_1, C_2 .

- a) Sei $Q \in C_2, P \in f^{-1}(Q), t \in m_Q$ Uniformierende (das heißt $m_Q = (t)$). Dann heißt $e_P = e_P(f) := \text{ord}_P(t \circ f)$ Verzweigungsordnung von f in P .
- b) Definiere Gruppenhomomorphismus

$$f^* : \text{Div}(C_2) \rightarrow \text{Div}(C_1)$$

$$\text{durch } f^*(Q) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$$

- c) Für $g \in k(C_2)^\times$ gilt:

$$f^*(\text{div}(g)) = \text{div}(g \circ f)$$

- d) f^* induziert Gruppenhomomorphismus:

$$f^* : \text{Cl}(C_2) \rightarrow \text{Cl}(C_1)$$

Beweis

- a) zu zeigen: $e_P(f)$ hängt nicht von der Wahl von t ab.

Ist t' weitere Uniformierende, so ist $t' = u \cdot t$ für ein $u \in \mathcal{O}_{C_2, Q}^\times$

$$\Rightarrow \text{ord}_P(t' \circ f) = \text{ord}_P(u \cdot t \circ f) = \text{ord}_P((u \circ f) \cdot (t \circ f)) = \underbrace{\text{ord}_P(u \circ f)}_{=0} + \text{ord}_P(t \circ f)$$

- b) zu zeigen: $\#\{D \in C_1 : f(P) = Q\}$ ist endlich.

Denn $\underbrace{f^{-1}(\{Q\})}_{\neq C_1, \text{ da } f \text{ surj.}}$ ist abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(\{Q\})$ endlich

- c) Es ist

$$f^*(\text{div } g) = \sum_{Q \in C_2} \text{ord}_Q(g) \cdot f^*Q = \sum_{Q \in C_2} \text{ord}_Q(g) \cdot \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$$

und

$$\text{div}(g \circ f) = \sum_{P \in C_1} \text{ord}_P(g \circ f) P = \sum_{Q \in C_2} \sum_{P \in f^{-1}(Q)} \text{ord}_P(g \circ f) \cdot P$$

Zu zeigen ist also:

$$\underbrace{\text{ord}_P(g \circ f)}_{=:s} = \underbrace{\text{ord}_Q(g)}_{=:r} \cdot e_P(f) \text{ für alle } P \in C_1$$

Seien t_P und t_Q Uniformisierende in P beziehungsweise $Q = f(P)$. Dann gibt es Einheiten $u, u' \in \mathcal{O}_{C_1, P}$ und $v \in \mathcal{O}_{C_2, Q}$ mit $g \circ f = u \cdot t_P^s, g = v \cdot t_Q^r, t_Q \circ f = u' t_P^{e_P(f)}$

$$\Rightarrow u \cdot t_P^s = g \circ f = (v \cdot t_Q^r) \circ f = (v \circ f) \cdot (t_Q \circ f)^r = \underbrace{(v \circ f)}_{\in \mathcal{O}_{C_1, P}} \cdot u'^r t_P^{r \cdot e_P(f)} \Rightarrow s = r \cdot e_P(f)$$

- d) folgt aus b)

□

Folgerung 21.5

Sei C nichtsinguläre Kurve, $f \in k(C)^\times$. Dann definiert f einen Morphismus $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ und es gilt:

$$\operatorname{div}(f) = f^*((0) - (\infty))$$

Beweis

Der erste Teil folgt aus 20.9. Für P mit $f(P) = 0$ ist $e_P(f) = \operatorname{ord}_P(X \circ f) = \operatorname{ord}_P(f)$; ist $f(P) = \infty$, so ist $\frac{1}{f}(P) = 0$ und $\operatorname{ord}_P(f) = -\operatorname{ord}_P(\frac{1}{f})$. \square

Bemerkung + Definition 21.6

Sei $f : C_1 \rightarrow C_2$ surjektiver Morphismus nichtsingulärer Kurven. Dann induziert f Körperhomomorphismus $f^\# : k(C_2) \rightarrow k(C_1)$. $f^\#$ macht $k(C_1)$ zu einer endlichen Körpererweiterung von $k(C_2)$.

$\deg(f) := [k(C_1) : k(C_2)]$ heißt **Grad** von f .

Beweis

Die Existenz von $f^\#$ steht in 13.7. Da $\dim C_1 = \dim C_2 = 1$, ist $\operatorname{trdeg}(k(C_1)) = \operatorname{trdeg}(k(C_2)) = 1$ (Folgerung 19.8), also $k(C_1)|k(C_2)$ algebraisch. Außerdem ist $k(C_1)|k(C_2)$ endlich erzeugt, weil $k(C_1)$ schon über k endlich erzeugt ist. \square

Satz 11

- a) Sei C eine nichtsinguläre Kurve. Dann hat jeder Hauptdivisor auf C Grad 0.
 b) Sei $f : C_1 \rightarrow C_2$ surjektiver Morphismus von nichtsingulären Kurven. Dann gilt für jeden Divisor D auf C_2 :

$$\deg(f^*(D)) = \deg(f) \cdot \deg D$$

- c) Sei f wie in b). Dann gilt für jedes $Q \in C_2$:

$$\deg(f^*(Q)) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P = \deg f =: n$$

Beweis

- b) folgt offensichtlich aus c).

- a) folgt aus b) mit 21.5.

- c) Beweis nur im folgenden affinen Beispiel (die Aussage ist lokal, daher ist affines Beispiel sinnvoll): \square

Beispiel

$C_2 = \mathbb{A}^1(k)$, $C_1 = V(h) \subset \mathbb{A}^2(k)$, $h(X, Y) = Y^n + a_{n-1}(X)Y^{n-1} + \dots + a_1(X)Y + a_0(X) \in k[X, Y]$ irreduzibel, $f : C_2 \rightarrow C_1$, $(x, y) \mapsto x$

Es ist $k(C_1) = k(X)[Y]/(h)$ und $f^\# : k(X) \hookrightarrow k(X)[Y]/(h)$ die natürliche Einbettung.

Also: $\deg(f) = n$

Für $x_0 \in k = \mathbb{A}^1(k)$ ist $f^{-1}(x_0) = \{(x_0, y) \in k^2 : h(x_0, y) = 0\}$.

$h(x_0, y) = 0$ ist ein Polynom vom Grad n in y mit Koeffizienten in k , hat also, mit Vielfachheit gezählt, n Nullstellen. Zu zeigen ist also:

Behauptung: Ist $y_0 \in k$ e -fache Nullstelle von $h(x_0, y)$, so gilt für den Punkt $P = (x_0, y_0) \in C_1$:

$$e_P(f) = e$$

Beweis: $\mathbf{OE} (x_0, y_0) = (0, 0)$

Dann ist $h(0, y) = y^e \cdot \tilde{g}(y)$ (*) mit $\tilde{g}(0) \neq 0$ ($e \geq 1$)

Es ist $\tilde{g}(y) = g(0, y)$, wobei $g(x, y) = y^{n-e} + a_{n-1}(x)y^{n-e-1} + \dots + a_{e+1}(x)y + a_e(x)$

Aus $\tilde{g}(0) \neq 0$ folgt $g(0, 0) \neq 0$, also $g \in \mathcal{O}_{C_1, P}^\times$

Weiter folgt aus (*): $a_0(0) = \dots = a_{e-1}(0) = 0$

$\Rightarrow a_i(x) = x \cdot \tilde{a}_i(x)$, $i = 0, \dots, e-1$ ($\tilde{a}_i \in k[X]$)

$\Rightarrow 0 = h(x, y) = y^e g(x, y) + x \cdot b(x, y)$ (**) mit $b(x, y) = \tilde{a}_{e-1}(x)y^{e-1} + \dots + \tilde{a}_1(x)y + \tilde{a}_0(x)$

Gesucht ist $e_P(f) = \text{ord}_P(t \circ f) = \text{ord}_P(f^\#(t))$ für einen Erzeuger von $m_{C_2, f(t)}$.

Da $C_2 = \mathbb{A}^1(k)$ und $f(P) = 0$, ist $t = x$ eine mögliche Wahl $\Rightarrow e_P(f) = \text{ord}_P(x)$

Dazu muss x in der Form $u \cdot s^d$ geschrieben werden für einen Erzeuger s von $m_{C_1, P}$ und ein $u \in \mathcal{O}_{C_1, P}$.

1. Fall: $e = 1$

Dann folgt aus (**): $y = -x \cdot b(x, y) \cdot g(x, y)^{-1} \in (x)$

$\Rightarrow x$ erzeugt $m_P \Rightarrow \text{ord}_P(x) = 1 = e$

2. Fall: $e > 1$

Behauptung: In diesem Fall ist $\tilde{a}_0(0) \neq 0$

Dann ist $b(0, 0) \neq 0$, also $b \in \mathcal{O}_{C_1, P}^\times$ und damit $x = y^e \cdot \underbrace{g \cdot b^{-1}}_{=u \in \mathcal{O}_{C_1, P}^\times}$

$\Rightarrow m_P$ wird von y erzeugt und $\text{ord}_P(x) = e$.

hier fehlen ein paar Sachen (sicher?)

§ 22 Der Satz von Riemann-Roch

Sei weiterhin C nichtsinguläre Kurve.

Definition + Bemerkung 22.1

Sei $D = \sum_{P \in C} n_P \cdot P \in \text{Div}(C)$

- a) $L(D) := \{f \in k(C)^\times \mid D + \text{div}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$ ist k -Vektorraum, der **Riemann-Roch-Raum** zu D .
- b) $l(D) := \dim L(D)$
- c) $L(0) = k$
- d) Ist $\deg(D) < 0$, so ist $L(D) = 0$
- e) Ist $D' \equiv D$ für ein $D' \in \text{Div}(C)$, so ist $l(D') = l(D)$

Beweis

- a) $\text{div}(f) \geq -D \Leftrightarrow \text{ord}_P(f) \geq -n_P \quad \forall P$
 $\text{ord}_P(f + g) \geq \min\{\text{ord}_P(f), \text{ord}_P(g)\}$
- e) Sei $D' = D + \text{div}(g)$ für ein $g \in k(C)^\times$. Dann ist $L(D') \rightarrow L(D); f \mapsto f \cdot g$ ein Isomorphismus von k -Vektorräumen.
Denn: $D + \text{div}(fg) = \underbrace{D + \text{div}(g)}_{=D'} + \text{div}(f) \geq 0$
 $(h \cdot \frac{1}{g} \mapsto h)$ □

Proposition 22.2

Sei $D \in \text{Div}(C)$

- a) $l(D + P) \leq l(D) + 1$
 - b) $l(D) \leq \deg(D) + 1$ (falls $\deg(D) \geq 1$)
- Insbesondere ist $L(D)$ endlich dimensionaler Vektorraum

Beweis

- a) Es ist $L(D) \subseteq L(D + P)$. Ist $f \in L(D + P) - L(D)$, dann ist $\text{ord}_P(f) = -(n_P + 1)$. Ist $L(D + P) \neq L(D)$, so wähle $f \in L(D + P) - L(D)$.
Behauptung: $L(D + P)$ wird erzeugt von $L(D)$ und f .
Denn: Sei $g \in L(D + P) - L(D)$
 $\Rightarrow \text{ord}_P(g) = -n_P - 1$
 $\Rightarrow f = ut^{-n_P-1}, g = u't^{-n_P-1}$ für ein $t \in m_P$ mit $m_P = (t)$ ($u, u' \in \mathcal{O}_P^\times$)
 Sei $h := u(P)g - u'(P)f \in L(D + P)$
 $= (u(P) \cdot u' - u'(P) \cdot u)t^{-n_P-1}$
 $\Rightarrow \text{ord}_P(h) \geq -(n_P + 1) + 1 \Rightarrow h \in L(D)$
 $\Rightarrow g = \frac{1}{u(P)} \cdot (h - u'(P)f) \in L(D) + (f)$
- b) Induktion über $d = \deg(D)$
 $d = -1$: $L(D) = 0$
 $d \geq 0$: Sei $P \in C, D' = D - P$
 $\xrightarrow{\text{I. V.}} l(D') \leq \deg(D') + 1 = d$
 $\xrightarrow{\text{a)}} l(D) = l(D' + P) \leq d + 1$ □

Satz + Definition 12 (Riemann-Roch)

a) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{N}$, sodass für alle $D \in \text{Div}(C)$ gilt:

$$l(D) \geq \deg(D) + 1 - \gamma$$

b) Das kleinste γ , für das a) erfüllt ist, heißt **Geschlecht** von C ($g(C) = g$).

c) Es gibt einen Divisor $K \in \text{Div}(C)$ („kanonischer Divisor“), sodass für jedes $D \in \text{Div}(C)$ gilt:

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

Dabei ist $K = \text{div } \omega$ für ein (beliebiges) Differential $\omega \in \Omega(C)$. Zum Beispiel $\omega = df$ für ein $f \in k(C)^\times$; $\text{ord}_P(\omega) = \text{ord}_P(\frac{df}{dt_P})$, t_P Uniformisierende in P .

Beispiel

1) $C = \mathbb{P}^1(k)$, $\omega = dx$, $\text{div } \omega = ?$

Für $a \in k$ ist $t_a := x - a$ Uniformisierende, $\frac{dx}{d(x-a)} = 1$

In ∞ ist $\frac{1}{x}$ Uniformisierende.

$$\frac{dx}{d(\frac{1}{x})} = (-\frac{1}{x})^{-2} \Rightarrow \text{ord}_\infty(dx) = -2$$

$\Rightarrow K = -2 \cdot \infty$ ist kanonischer Divisor auf $\mathbb{P}^1(k)$.

2) $C = \overline{V(Y^2 - X^3 + X)}$, $\omega = \frac{dy}{x}$ $\Rightarrow \text{div } \omega = 0$ (Rechnung selber)

Folgerung 22.3

a) $l(K) = g$

$$(\text{setze } D = 0 \text{ in Satz 12 c) ein: } \underbrace{l(0)}_{=1} - l(K) = \underbrace{\deg 0}_{=0} + 1 - g$$

b) $\deg K = 2g - 2$

$$(\text{setze } K \text{ in Satz 12 c) ein: } \underbrace{l(K)}_{=g} - \underbrace{l(0)}_{=1} = \deg K + 1 - g$$

Beweis (von Satz 12)

a) Setze $s(D) := \deg D + 1 - l(D)$

Es gilt:

- $s(D) = s(D')$ falls $D' \equiv D$
- $D' \leq D \Rightarrow s(D') \leq s(D)$

Sei nun $f \in k(C)^\times$ und $N := f^*(0)$ der Nullstellendivisor.

Behauptung 1: Für jedes $D \in \text{Div}(C)$ gibt es D' mit $D' \equiv D$, sodass $D' \leq m \cdot N$ für ein $m \geq 1$.

Behauptung 2: Es gibt $\gamma \geq 0$ mit $s(m \cdot N) \leq \gamma \forall m \geq 1$.

Aus Behauptung 1 und Behauptung 2 folgt 12 a).

Beweis 1: Sei $D = \sum_{P \in C} n_P P$

$$\text{Gesucht: } h \in k(C)^\times \text{ mit } n_P + \text{ord}_P h \leq \begin{cases} m \cdot \text{ord}_P(f) & : \text{ord}_P(f) > 0 \\ 0 & : \text{ord}_P(f) \leq 0 \end{cases}$$

Ersetze dann D durch $D' = D + \text{div}(h)$.

Seien $P_1, \dots, P_r \in C$ die Punkte mit $\text{ord}_P(f) \leq 0$ und $n_P > 0$.

$$h_i := \frac{1}{f} - \frac{1}{f}(P_i) \in m_{P_i}$$

$$h := \prod_{i=1}^r h_i^{-n_{P_i}} \text{ tut's}$$

Beweis 2: $[k(C) : k(f)] = \deg(f) =: r$

Sei g_1, \dots, g_r Vektorraum-Basis von $k(C)$ über $k(f)$. \Rightarrow jede Polstelle von g_i ist auch Polstelle von f . $\Rightarrow \frac{g_i}{f^j} \in L(mN)$ mit $i = 1, \dots, r, j = 0, \dots, m \Rightarrow \deg(mN) = mr \Rightarrow l(mN) \geq mr - r(\gamma_0 - 1)$ \square

