Kapitel 2

Hilberträume

(Weidmann: Lin Op auf HR, Band I)

2.1 Grundlegende Eigenschaften

Definition 2.1 *Ein **Skalarprodukt** $(x|y)$ auf einem VR X ist eine Abbildung von X^2 nach $\mathbb{K}$ mit*

1. $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y)$

2. $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$

3. $(x|y) = \overline{(y,x)}$

(a) - c) Sesquilinearform)

d) $(x|x) \geq 0,\ (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(positiv definit)*

für alle $x_1, x_2, x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{K}$*. Wir setzen* $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$

Bemerkung 2.2 1. Aus a) - c) folgen $(x, 0) = 0$ und $(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1}(x|y_1) + \overline{\alpha_2}(x|y_2)$ für alle $x, y_1, y_2 \in X,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.

2. Für $x, y \in X$ gilt die Cauchy-Schwarze Ungl. (CS) $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = \alpha y$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$. (Bew: LA, Werner V, 1.2)

3. $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf X, denn:

   (i) $\|\alpha x\| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x|x)} = |\alpha|\|x\|$

   (ii) $\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = \|x\|^2 + (x|y) + (y|x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2\mathrm{Re}\,(x|y)}_{\leq 2\|x\|\|y\|} + \|y\|^2$ (2.1) $\overset{CS}{\leq} (\|x\| + \|y\|)^2$

   (iii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4. *Beh:* Das Skalarprodukt ist stetig.
   Bew: Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$. Dann:

$$|(x_1 - x_2|y_1 - y_2)| \leq |(x_1 - x_2|y_)| + |(x_2|y_1 - y_2)| \tag{2.1}$$

$$\overset{CS}{\leq} \|x_1 - x_2\|\|y_1\| + \|x_2\|\|y_1 - y_2\| \quad (\Rightarrow \text{ lokal Lipschitz}) \tag{2.2}$$

Definition 2.3 *Sei $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf X. Dann heißt $(X, \|\cdot\|)$ ein* ***Prä Hilbertraum****. Wenn $\|\cdot\|$ vollständig ist, so heißt $(X, \|\cdot\|)$* ***Hilbertraum*** *(HR) (mit $\|\cdot\|$ aus Def 2.1)*

Beispiel 2.4 In a)-d) werden HR def.

1. $X = \mathbb{K}^n$, $(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2$
2. $X = \ell^2$, $(x|y) = \sum_{k=1}^\infty x_k \overline{y_k}$ (Summe konv absolut nach Hölder mit $p = 2$. $\|x\| = \|x\|_2$
3. Sei $A \in \mathcal{L}_d$, $X = L^2(A)(f|g) = \int_A f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$ (ex nach Hölder mit $p = p' = 2$.) $\|f\| = \|f\|_2$.
4. Sei S eine Menge. Setze $\ell^2(S) = \{f : S \Rightarrow \mathbb{K}, f(s_j) \neq 0$ nur für höchstens abzählbar viele $s_j \in S$ (abh von f) mit $\sum_{s\in S} |f(x)|^2 = \sum_{j=1}^\infty |f(s_j)|^2 < \infty\}$ Wie bei $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ sieht man, dann $(f|g) = \sum_{s\in S} f(s)\overline{g(s)}$ ein Skalarprodukt ist und $\|f\|^2 := \sum_{s\in S} |f(s)|^2$ ist vollständig.
5. Teilräume von Prä HR sind Prä HR mit gleichem Skalarprodukt.

-1

Lemma 2.6 *Ein nVR X ist ein Prä HR genau dann, wenn $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (2.2) (Parallelogrammgl) für $x, y \in X$ gilt.*

Beweis "⇒Â´Â´ $\|x + y\|^2 \overset{2.1}{=} \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x|y) + \|y\|^2$. $\|x - y\|^2 \overset{2.1}{=} \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(x|y) + \|y\|^2 \Rightarrow (2.2)$

"⇐Â´Â´ siehe Werner,V,1.6 ■

Korollar 2.7 *Die Vervollständigung eines Prä HR X ist ein HR.*

Beweis (2.2) gilt auf X und somit auch auf $\tilde{X}$ per Approximation. ■

Definition 2.8 *Zwei Elemeten x, y eines PräHR X heißen* ***orthogonal****, wenn $(x|y) = 0$. Zwei TM A, B heißen orthogonal, wenn $(a|b) = 0 \;\forall\, a \in A, b \in B$. Mann schreibt $x \perp aufy$ bzw $A \perp B$. Das orthogonale Komplement $A^\perp$ von $A \subseteq X$ ist gegeben durch $A^\perp\{x \in X : x \perp a \;\forall\, a \in A\}$.*
Ein ***Orthogonalsystem*** *(ONS) ist eine TM $S \subseteq X$ mit $\|b\| = 1$ und $b \perp b'$ für alle $b, b' \in S, b \neq b'$*

Bemerkung 2.9 Sei X ein PräHR, $x, y \in X, A, b \subseteq X$. Dann gelten:

1. $x \perp x \Rightarrow x = 0, x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$.
2. Pythahoras: $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 \overset{(2.1)}{=} \|x\|^2 + \|y\|^2$
3. $X^\perp = \{0\}, A \cap A^\perp = \{0\}. A \subseteq (A^\perp)^\perp$ nach a), $\{0\}^\perp = X$.
4. $A^\perp$ ist UVR (klar) und abg ($x_n \perp a, x_n \to x \Rightarrow (x|a) = \lim_{n\to\infty}(x_n|a) = 0$)
5. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$. $A^\perp = (\overline{\lim A})^\perp$ (wie d))
6. $(x|y) = (z, y)\ \forall y \in X \Rightarrow (x - z) \perp X \overset{a)}{\Rightarrow} x = z$

Theorem 2.10 (Projektionssatz) *Sei X ein HR, $K \subseteq X$ abg + konvex. Dann ex für jedes $x \in X$ genau ein $y_* = P_K(x) \in \mathbb{K}$ mit $\|x - P_K(x)\| = \inf_{y \in K} \|x - y\| = d(x, K)$. Wenn $x \in K$, dann gilt $P_K(x)) = x$ (mit $d(x, K)$, und $P_k \circ P_k = P_K, R(P_K) = K$*

Beweis $R(p_k) = K$: klar.
Wenn $x \neq 0$, so können wir $\tilde{x} = 0$ und $\tilde{K} = K - x$ betrachten. Sei also $x = 0 \notin K$. Dann ex $y_n \in K$ mit $\|y_n\| \to \kappa := \inf\{\|y\|,\ y \in K\}$ $(n \to \infty)$. $\kappa > 0$, da K abg.

$2.2 \Rightarrow \|\frac{1}{2}(y_n - y_m)\|^2 = \frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 - \underbrace{\|\frac{1}{2}(y_n + y_m)\|}_{\in K}{}^2 \leq \frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 - \kappa^2 \to 0\ (n, m \to \infty)$
$\Rightarrow\ \exists\, y^* = \lim_{n\to\infty} y_n \in K,\ K$ abg. Ferner $\|y^*\| = \kappa$.
Sei $y_0 \in K, y_* \neq y_0, \|y_0\| = \kappa. \Rightarrow \|\frac{1}{2}(y_0 - y_*)\|^2 < \|\frac{1}{2}(y_0 + y_*)\|^2 + \|\frac{1}{2}(y_0 - y_*)\|^2 \overset{(2.2)}{=} \frac{1}{2}\|y_0\|^2 + \frac{1}{2}\|y_*\|^2 = \kappa^2$. Wid zu $\frac{1}{2}(y_0 + y_*) \in K$ ■

Bemerkung Theorem gilt auch (mit ähnlichem Beweis) für gleichmäßig konvexe BRe, d.h.

$$\forall \varepsilon \in (0, 2]\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \qquad \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x - y\| \geq \varepsilon \\ \Longrightarrow \|\frac{1}{2}(x + y)\| \leq 1 - \delta$$

Beispiele:

1. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|2)\ X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x, y > 0\}$ ist glm konvex
2. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|2)\ X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1, x, y > 0\}$ ist nicht glm konvex

HRe sind glm konvext mit $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$ nach (2.2)
Ferner: $L^p(A), \ell^p$ $(1 < p < \infty)$ sind glm konvex (Dobrowdski, Satz 4.29)

Korollar 2.11 *In der Situation von Theorem 2.8 gilt:*

$$y = p_K(x) \Longleftrightarrow y \in K \text{ und } Re\,(x - y|z - y) \leq 0\ \forall z \in K$$

Nachtrag zu Beispiel 2.4 c)
$A \in \mathcal{L}^d : \omega : A \to \mathbb{R}$ messbar, $\omega(x) > 0\ \forall x \in A$. Dann: $X = L^2(A, \omega) = \{f : A \to \mathbb{C}$ messbar, $\sqrt{\omega} f \in L^2(A)\}$ $(f|g) = \int_A f \overline{g} \omega dx \Rightarrow$ Skalarprodukt mit vollständiger Norm $\|f\|_{2;\omega} = \left(\int_A |f|^2 \omega dx\right)^{\frac{1}{2}}$

Definition 2.12 *Sei X ein PräHR. Eine Projektion $P \in B(X)$ heißt* ***orthogonal*** $:\Leftrightarrow R(P) \perp N(P)$

Theorem 2.13 *Sei X ein HR, $Y \subseteq X$ ein abg UVR. Dann ist die Projektion P aus Theorem 2.8 linear mit $\|P\| = 1$ und es gelten: $R(P) = Y, N(P) = Y^\perp$ und $X = Y \oplus Y^\perp$. Insbesondere gilt:*
P ist orthogonal und $X_{/Y} \cong Y^\perp$ (Bsp 1.76)

Beweis Sei $x \in X$ und $P = Py$. Dann: $y = Px \overset{2.9}{\Leftrightarrow} y \in Y, \mathrm{Re}\,(x-y|z-y) \leq 0\ \forall z \in Y \overset{Y\text{ UVR}}{\Leftrightarrow} y \in Y, \mathrm{Re}\,(x-y|z') \leq 0\ \forall z' \in Y \Leftrightarrow y \in Y, (x-y|z') = 0\ \forall z' \in Y (\backslash \Rightarrow" :$ Betrachte $-z', \pm iz') \Rightarrow x - y \perp Y\ (*)$
Also: $R(I-P) = Y^\perp$
Seien $x_1, x_2 \in X, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Da $Y^\perp$ UVR gilt:

$$\begin{aligned}
& & & \alpha_1(x_1 - Px_1) + \alpha_2(x_2 - Px_2) \in Y^\perp \\
&\overset{(*)}{\Rightarrow} & & y = \alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2 = P(\underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}_{=:x}) \Rightarrow P \text{ ist linear.} \\
&2.8 \Rightarrow & & P^2 = P, R(P) = Y. \\
&\text{Ferner:} & & \|x^2\| = \|Px + (I-P)x\|^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2 \geq \|Px\|^2 \\
&\Rightarrow & & P \text{ ist stetig und } \|P\| \leq 1. \\
&\text{Lemma 1.73} \Rightarrow & & \|P\| \geq 1 \\
&\Rightarrow & & \|P\| = 1
\end{aligned}$$

Sei X HR. Für $y \in X$ definiere $\Phi(y) : X \to \mathbb{C}$ durch $(\Phi(y))(x) = (x|y),\ x \in X \Rightarrow \Phi(y)$ ist linear. Nach CS:

$$|\left(\Phi(y)\right)(x)| \leq \|x\|\|y\| \Longrightarrow \Phi(y) \in X^*,\ \|\Phi(y)\|_{X^*} \leq \|y\|_X$$

∎

Theorem 2.14 *Sei X ein HR. Dann ist obiges $\Phi : X \to X^*$ "konjugiert linear "oder "...unlesbar... ", d.h. $\Phi(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1}\Phi(y_1) + \overline{\alpha_2}\Phi(y_2)$, bijektiv und isometrisch. D.h. $\forall x^* \in X^*\ \exists$ genau ein $y \in X$, sodass $\|x^*\|_{X^*} = \|y\|_X$ und $\langle x, x^* \rangle = (x|y)\ \forall x \in X$.*

Beweis Offenbar ist Φ konjugiert linear. Sei $y \in X \backslash \{0\}$. Setze $x = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow \|\Phi(y)\|_{X^*} \geq |(\Phi(y))(x)| = \frac{1}{\|y\|}|(y|y)| = \|y\|_X \Rightarrow \Phi$ ist Isometrie.
z.z: Φ ist surjektiv. Sei $x^* \in X^* \backslash \{0\} \Rightarrow R(x^*) = \mathbb{C}$. Sei $U = N(x^*) \Rightarrow U \neq X, U$ abg. UVR. Theorem 2.11 $\Rightarrow X = U \oplus U^\perp$. 1.77 und Bsp 1.76 liefern:
$x^*_{|U^\perp}$ ist bijektiv $\Rightarrow U^\perp = 1$. Sei $y \in U^\perp$ mit $\langle y, x^* \rangle = 1$. Für $x \in X$ gibt es also eindeutige $u \in U, \alpha \in \mathbb{K}$ mit $x = u + \alpha y$. Damit: $\langle x, x^* \rangle = \langle u, x^* \rangle + \alpha \langle y, x^* \rangle = \alpha$.
$(x|y) = (u|y) + \alpha(y|y) = \alpha\|y\|_X^2 \Longrightarrow x^* = \Phi(\frac{1}{\|y\|^2} y)$ ∎

2.2 Othonormalbasen

Definition 2.15 *Ein Orthonormalsystem (ONS) S heißt* ***Orthonormalbasis*** *(ONB) $:\Longleftrightarrow$ S ist maximal, d.h. ONS $S', S \subseteq S' \Rightarrow S = S'$*

Beispiel (zu ONS, später sind alles ONBs) a) $X = \ell^2$, $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ ist ONS. Wenn $X = \ell^2(J)$, dann bilden

$$e_j(i) = \begin{cases} 1 & ,j = i \\ 0 & ,j \neq i \end{cases} \text{ ein ONS.}$$

b) $X = L^2([0, 2\pi])$. $S = \{f_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ mit $f_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$ $(t \in [0, 2\pi],\ n \in \mathbb{Z}$. ist ein ONS, denn:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}|^2 dt = 1$$

$$n \neq m \Longrightarrow (f_n|f_m) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi i(n-m)} e^{i(n-m)t}|_0^{2\pi} = 0$$

reelle Variante:

$$S = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{1},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n),\ n \in \mathbb{N}\} \text{ ist ONS.}$$

Satz 2.16 *Sei X ein HR, $x, y \in X$, $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt:*

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|b_n)|^2 \leq \|x\|^2 \textit{ \textbf{Besselsche Ungleichung}}.$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|b_n)(y|b_n)| < \infty \textit{ für } x, y \in X$$

Beweis a) Sei $N \in \mathbb{N}, x \in X$. Setze $x_N = x - \sum_{k=1}^{N}(x|b_k)b_k \Rightarrow x_n \perp b_n, n = 1, \ldots, N \overset{\text{Pyth.}}{\Rightarrow} \|x\|^2 = \|x_N\|^2 + \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\|(x|b_k)b_k\|^2}_{=|(x|b_k)|^2} \geq \sum_{n=1}^{N} |(x|b_k)|^2 \overset{n\to\infty}{\Rightarrow}$ Beh.

b) folgt aus Hölder ∎

Lemma 2.17 *Sei $S \subseteq X$ ein ONS und X ein HR, $x \in X$. Dann ist die Menge $S_X := \{b \in S : (x|b) \neq 0\}$ höchstens abzählbar. Beachte: S_X ist ONS.*

Beweis Sei $k \in \mathbb{N}$. Nach 2.15a) ist $S_{x,k} := \{b \in S, |(x|b)|^2 \geq \frac{1}{k}\}$ ist endlich. $S_X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_{x,k} \Rightarrow S_X$ ist abzählbar. ∎

Sei X ein UVR, J eine Indexmenge und $x_j \in X$ für $j \in J$. Man sagt, dass $\sum_{j\in J} x_j$ **unbedingt konvergiert** gegen $x \in X$, wenn

i) $J_0 = \{j \in J : x_j \neq 0\}$ ist höchstens abzählbar

ii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{jn}$ für jede Abzählung $\{j_1, j_2, \dots\}$ von J_0.

Dann schreibt man $x = \sum_{j\in J} x_j$.

Bemerkung 1. $\dim X < \infty$: absolut konvergent $\Leftrightarrow$ unbedingt konvergent (Riemannscher Umordnungssatz)

2. $\dim X = \infty$ absolut konvergent $\overset{\text{wie in } \mathbb{R}}{\Rightarrow}$ unbedingt konvergent. Rückrichtung gilt nicht, vgl (Dvoretzky-Rogers)

Satz 2.18 *Sei S ein ONS im HR X und $x \in X$. Dann:*

a) $\sum_{b\in S} |(x|b)|^2 \leq \|x\|^2$

b) $Px := \sum_{b\in S}(x|b)b$ *konv. unbedingt.*

c) P *ist Orthogonalprojektion auf* $\overline{\mathit{lin}\, S}$ *und* $X = \overline{\mathit{lin}\, S} \oplus S^{\perp}$

d) $\exists$ *ONS* $B \supset S$

Beweis Sei $S_x = \{b_1, b_2, \dots\}$ wie in Lemma 2.16

a) Folgt aus 2.15a) und 2.16

b) Sei $N \geq M$. Pyth+Bessel liefern

$$\|\sum_{n=m}^{N}(x|b_n)b_n\|^2 = \sum_{n=M}^{N} |(x|b_n)|^2 \underbrace{\|b_n\|}_{=1}^{2} \to 0 \ (N, M \to \infty)$$

$$\overset{\text{Cauchy-Folge}}{\Rightarrow} \exists\, y := \sum_{n=1}^{\infty}(x|b_n)b_n \text{ und } \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|b_n)|^2 \overset{a)}{\leq} \|x\|^2 \ (*)$$

Sei $\{b_{\pi(1)}, b_{\pi(2)}, \dots\}$ eine Umordnung von S_x. Wir erhalten genauso $y_\pi = \sum_{n=1}^{\infty}(x|b_{\pi(n)})$. Sei $z \in X$. Dann:

$$(y_\pi|z) = \sum_{n=1}^{\infty}(x|b_{\pi(n)})b_{\pi(n)}$$

$$\overset{2.15b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}(x|b_n)(b_n|z) = (y|z)$$

$$\Rightarrow (y_\pi - y|z) \ \forall\, z \in X \quad \overset{2.7f)}{\Rightarrow} y_\pi = y.$$

c) $Px := y$ ist linear und nach $(*)$ stetig auf X. Sei $x \in X \Rightarrow P^2x = \sum_{b\in S}\sum_{b'\in S}(x|b)(b|b')b' \overset{\text{ONS}}{=} \sum_{b\in S}(x|b)b = Px$.
Klar: $R(P) \subseteq \overline{\text{lin}\, S}$ und $S \subseteq R(P)$.$R(P)$ abg. UVR $\Rightarrow R(P) = \overline{\text{lin}\, S}$. Ferner: $S^{\perp} \subseteq N(P) = R(I-P)$. Sei $b_0 \in S$. Dann: $(x - Px|b_0) = (x|b_0) - (x|b_0)(b_0|b_0) = 0 \Rightarrow \underbrace{N(P)}_{=R(I-P)} \subseteq S^{\perp} \Rightarrow N(P) = S^{\perp} = \overline{\text{lin}\, S}^{\perp}$

zu d) Sei “$\leq$ ”eine partielle Ordnung auf einer Menge $M \neq \emptyset . K \subseteq M$ heißt **Kette**, wenn für alle $x, y \in K$ stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. Ein maximales Element in M ist $x^* \in M$ wenn für $x \in M, x \geq x^*$ folgt: $x = x^*$
Lemma von Zorn:
Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge, sodass jede Kette in M eine obere Schranke hat. Dann hat jede Kette ein maximales Element in M.

d) Betrachte $\mathcal{S} := \{S' \subseteq X : S' \text{ ONS}, S \subseteq S'\}$ mit Mengeninklusion. Eine Kette $\mathcal{S}_0$ in $\mathcal{S}$ hat die obere Schranke $\bigcup_{S' \in \mathcal{S}_0} S' \in \mathcal{S} \overset{\text{Lemma von Zorn}}{\Rightarrow} \exists$ maximales Element $B \in \mathcal{S} \Rightarrow B$ ist die gewünschte ONB ■

Theorem 2.19 *Sei X ein HR und $S \subseteq X$ ein ONS. Dann sind äquivalent:*

a) S *ist ONB.*

b) $S^\perp = \{0\}$

c) $X = \overline{lin\, S}$

d) $x = \sum_{b \in S} (x|b) b \ \forall x \in X$ *(unbedingte konvergenz)*

e) $(x|y) = \sum_{b \in S} (x|b)(b|y) \ \forall x, y \in X$

f) ***Parsevalsche Gleichung:*** $\|x\|^2 = \sum_{b \in S} |(x|b)|^2 \ \forall x \in X$

Beweis a) $\Rightarrow$ b) Annahme: $y \in S^\perp, y \neq 0 \Rightarrow S' = \{\frac{1}{\|y\|} y\} \cup S$ ist ONS. Wid zu S ONB!

b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) folgen aus 2.17, denn $Px = \sum_{b \in S} (x|b) b$ ist orthogonale Projektion auf $\overline{lin\, S}$ mit $N(P) = S^\perp$

d) $\Rightarrow$ e) Sei $S_x \cup S_y = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ (Lemma 2.16). Dann liefert d)

$$
\begin{aligned}
(x|y) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x|b_n) b_n \Big| \sum_{m=1}^{\infty} (y|b_m) b_m \right) \overset{(\cdot|\cdot) \text{ stetig}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} ((x|b_n) b_n | (y|b_m) b_m) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (x|b_n) \overline{(y|b_m)} \underbrace{(b_n|b_m)}_{=\delta_{mn}} = \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_n)(b_n|y) = \sum_{b \in S} (x|b)(b|y)
\end{aligned}
$$

e) $\Rightarrow$ f) Setze $x = y$.

f) $\Rightarrow$ a) Annahme: S ist keine ONB $\Rightarrow \exists x \in X : \|x\| = 1 \ x \perp S \overset{f)}{\Rightarrow} \|x\|^2 = \sum_{b \in S} |\underbrace{(x|b)}_{=0}|^2$ Wid! ■

Beispiel Sei $X = L^2([-1,1])$. Sei weiter S die Orthonormalisierung von $\{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ mit $f_n(t) = t^n, \ t \in [-1,1], \ n \in \mathbb{N}_0$. (Legendre Poynome). S ist dann ONS mit $lin\, S = lin\, \{f_n, \ n \in \mathbb{N}_0\}$.
Nach Bsp 1.55: $lin\, \{f_n, \ n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $C([-1,1]) \hookrightarrow L^2([-1,1]) \Rightarrow lin\, \{f_n, \ n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $X \Rightarrow S$ ist ONB (vgl ÜB 21)

Bemerkung 2.20 Die Koeffizienten $(x|b)$ in 2.18d) sind eindeutig bestimmt, denn:
Sei $x = \sum_{b\in S} \alpha(b)b,\ b' \in S \overset{\text{ONS}}{\Rightarrow} (x|b') = \sum_{b\in S} \alpha(b)(b|b') = \alpha(b')$

Definition *Eine* ***Schauderbasis*** $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *eines Banachraumes* X *ist eine Folge* (x_n) *in* X *mit:*
Für alle $x \in X$ *gibt es eindeutig bestimmte* $\alpha_n \in \mathbb{K}$ *mit* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$.
Die Basis heißt ***unbedingt****, wenn diese Reihe für alle* x *unbedingt konvergiert.*

Beispiel abzählbare ONB in HRen (Literatur: unlesbar, Basis in Banach Spaces)

Korollar 2.21 *Sei* X *ein HR mit* $\dim X = \infty$. *Dann sind äquivalent*

a) X *ist seperabel*

b) Alle ONBs auf X *sind abzählbar*

c) Es gibt eine abzählbare ONB auf X

Beweis a) $\Rightarrow$ b) $x \perp y$ und $\|x\| = 1 = \|y\|$, dann (Pyth): $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$
wie bei ℓ^∞ folgt: ONB kann nicht überabzählbar sein, wenn a) gilt.

b) $\Rightarrow$ c) Ist klar (beachte S.2.17b))

c) $\Rightarrow$ a) Thm 2.18d) und Lemma 1.57 ∎

Theorem 2.22 *Sei* X *ein HR mit ONB* S. *Dann ist* X *isometrisch isomorph zu* $\ell^2(S)$. *Somit sind alle separablen URe isometrisch isomorph zu* ℓ^2*, falls deren Dimension* ∞ *ist.*

Beweis Setze $Tx = ((x|b))_{b\in S}$ für $x \in X$. 2.18f) $\Rightarrow T : X \to \ell^2(S)$ und T Isometrie.
Klar: T linear.
Sei $f \in \ell^2(S)$. Setze $x = \sum_{b\in S} f(b)b$. Wie im Beweis von 2.17h) sieht man, dass $\sum_{b\in S} f(b)b$ in X konvergiert. Ferner: $Tx = f$. ∎

Beispiel

1. $L^2(\mathbb{R}^d) \cong \ell^d$
2. $L^2([0,1]) \cong \ell^2$
3. Üb 22: $AP_2(\mathbb{R}) \cong \ell^2(\mathbb{R})$

Beispiel 2.23 (Fourierreihen) Sei $X = L^2([0,2\pi]),\ f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int},\ t \in [0,2\pi],\ n \in \mathbb{Z}$.
Bsp 2.14 $\Rightarrow S = \{f_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ ins ONS. Sei $Y = \{f \in C([0,2\pi]),\ f(0) = f(2\pi)\}$, $f \in X$ und $\varepsilon > 0$.Nach 1.44 existiert denn ein $g \in C([0,2\pi]),\ g \neq 0$ mit $\|f-g\|_2 \leq \varepsilon$.
Sei $0 < \nu \leq \frac{\varepsilon^2}{\|g\|_\infty}$

$$\text{Setze: } h(t) := \begin{cases} g(t) & ,\nu \leq t \leq 2\pi \\ g(2\pi) + \frac{t}{\nu}(g(\nu) - g(2\pi)) & ,0 \leq t \leq \nu \end{cases}$$

$\Rightarrow h \in Y, \|g-h\|_2^2 = \int_0^\nu |g(t)-h(t)|^2 dt \le \nu(4\|g\|_\infty)^2 \le 14\varepsilon^2$.
Nach Bsp 1.55 ex $\varphi \in \text{lin}\, S$ mit $\|h-\varphi\|_\infty \le \varepsilon \overset{1.39}{\Rightarrow} \|h-\varphi\|_2 \le \sqrt{2\pi}\varepsilon \Rightarrow \|f-\varphi\|_2 \le \varepsilon + 4\varepsilon + \sqrt{2\pi}\varepsilon \Rightarrow \overline{\text{lin}\, S} = X \overset{2.18}{\Rightarrow} S$ ONB.
Sei $e_n(t) = e^{int}$, $c_n = (f|e_n)\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ $(n \in \mathbb{Z},\ f \in X)$ 2.18 $\Rightarrow f = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n$ (komplexe Fourierreihe)
Dabei unbedingt konvergent in L^2. Ferner zeigt 2.19, dass

$$\begin{aligned} T: \quad & L^2([0,2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ & \hat{f} = Tf = ((f|f_n))_{n\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

Bemerkung a) Bsp 3.7: $\exists f \in Y$, sodass Fourierreihe nicht punktweise konvergiert.

b) Carleson: Fourierreihe konvergiert für alle $f \in X$ fast überall.

c) Gleichmäßige Konvergenz für bessere f (ÜB 24 siehe auch AE, TH VI 7.21)

reelle Version:
Für reelwertige $f \in L^2([0,2\pi])$ setze

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)nt,\ n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)nt,\ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

wie oben:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_1\cos(n\cdot) + b_n\sin(n\cdot)) \quad \text{konvergiert in } X$$

dabei: $c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k),\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),\ k \in \mathbb{N}$
Beispiel

$$f = \mathbb{1}_{[0,\pi]} \Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-in}e^{-int}|_0^\pi = \begin{cases} 0 & , n \text{ gerade} \\ \frac{1}{i\pi n} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow \|c_{2k+1}e_{2k+1}\|_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{2k+1}} \Rightarrow$ Fourierreihe $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{-i}{2k+1}e_{2k+1}$ konvergiert unbedingt, aber nicht absolut in X.

2.3 Operatoren auf Hilberträumen

Seien X, Y HRe und $T \in B(X,Y)$. Für gegebenes $y \in Y$ definiert man $\varphi_y(x) = (Tx|y),\ x \in X \Longrightarrow \varphi_y : X \to \mathbb{C}$ ist linear in X.

$$(2.3) \quad |\varphi_y(x)| \overset{CS}{\le} \|Tx\|\|y\| \le \underbrace{\|T\|\|y\|}_{\text{konstant}}\|x\| \Rightarrow \varphi_y \in X^*$$

Nach 2.12 eixistiert genau ein $z := T'y \in X$ mit

$$(2.4) \quad (Tx|y)_Y = \varphi_y(x) \overset{2.12}{=} (x|z)_X = (x|T'y)_X \ \forall x \in X$$

Die Abbildung $T' : Y \to X$ heißt **HR-Adjungierte** von T. (2.4) defniert T' eindeutig wegen Bem 2.7f

Satz 2.24 *Seien X, Y, Z HRe, $T, S \in B(X, Y)$, $R \in B(Y, Z)$, $\alpha \in K$. Dann gelten:*

a) $T' \in B(Y, X)$ mit $\|T'\| = \|T\|$ und $T'' := (T')' = T$

b) $(T + S)' = T' + S'$, $(\alpha T)' = \overline{\alpha} T'$, $(R \circ T)' = T' \circ R'$

c) $N(T) = R(T')^\perp$, $N(T') = R(T)^\perp$. Damit: T injektiv $\Rightarrow R(T')$ dicht.

Beweis Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $y, u \in Y$, $x \in X$, $z \in Z$

a) $(x|T'(\alpha y+\beta u)) = (Tx|\alpha y+\beta u) = \overline{\alpha}(Tx|y)+\overline{\beta}(Tx|u) = \overline{\alpha}(x|T'y)+\overline{\beta}(x|T'u) = (x|\alpha T'y + \beta T'u) \Rightarrow T'$ linear. (2.3), (2.4) $\Rightarrow T' \in B(Y, X)$ mit $\|T'\| \le \|T\|$ $(*)$
$\Rightarrow T'' \in B(X, Y) \Rightarrow (Tx|y) \overset{(2.4)}{=} (x|T'y) = \overline{(T'y|x)} \overset{(2.4)}{=} \overline{(y|T''(x))} = (T''x|y) \overset{x,y \text{ bel}}{\Longrightarrow}$
$T'' = T \Rightarrow \|T\| = \|(T')'\| \overset{(*)}{\le} \|T'\| \Longrightarrow \|T\| = \|T'\|$

b) folgt aus 2.7f) und

i) $(x|(S + T)'y) \overset{(2.4)}{=} (Sx|y) + (Tx|y) = (x|S'y) + (x|T'y) = (x|(S' + T')y)$

ii) $(x|(\alpha T)'y) = \alpha(Tx|y) = (x|\overline{\alpha}T'y)$

iii) $(x|(RT)'y) = (RTx|y) = (Tx|R'y) = (x|T'R'y)$

c) $Tx = 0 \overset{2.7a)}{\Leftrightarrow} 0 = (Tx|y)\ \forall y \in Y \Leftrightarrow 0 = (x|T'y)\ \forall y \in Y \Leftrightarrow x \perp R(T')$
$\Rightarrow N(T') = R(T'')^\perp \overset{a)}{=} R(T)^\perp$ ∎

Definition 2.25 *Seien X, Y HRe, $T \in B(X, Y)$. Dann:*

*a) T heißt **selbstadjungiert** (sa.) $:\Longleftrightarrow T = T'$ und $X = Y$, d.h.*

$$(Tx|y) = (x|Ty)\ \forall x, y \in X$$

*b) T heißt **unitär** $:\Longleftrightarrow T'T = id_X$ und $TT' = id_Y \Longleftrightarrow$ exists $T^{-1} = T' \in B(Y, X)$*

*c) $X = Y : T$ heißt **normal** $:\Longleftrightarrow TT' = T'T$.*

Bemerkung 1. sa $\Rightarrow$ normal. unitär $\Rightarrow$ normal.

2. $TT', T'T$ sind stehts selbstadjungiert.

Beispiel 2.26 Seien $a_{kl} \in \mathbb{C}, k, l \in \mathbb{N}$ mit $\|T\|_{HS}^2 := \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 < \infty$.
Üb 18 (Hölder) definiert $(Tx)_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l \ , k \in \mathbb{N}, x \in \ell^2$ ein $T \in B(\ell^2)$ mit $\|T\| \leq \|T\|_{HS} =$ Hilbert-Schmidt-Norm.
Beh:

$$(T'y)_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} x_j \ (*), y \in \ell^2 \text{ mit } b_{ij} = \overline{a_{ji}} \ , i, j \in \mathbb{N}$$

Beweis:
$1.68 \Rightarrow (*)$ mit $b_{ij} = (T'e_j)_i \Rightarrow b_{ij} = (T'e_j|e_i) = \overline{(Te_i|e_j)} \stackrel{1.68}{=} \overline{a_{ji}}$

Beispiel (s. 1.68) $R' = L, L' = R$
Alternativ: $(Lx|y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+1} \overline{y_k} \stackrel{j=k+1}{=} \sum_{j=2}^{\infty} x_j \overline{y_{j-1}} = (x, Ry)$
Insbesondere: T sa. $\iff a_{kl} = \overline{a_{lk}} \ \forall \, k, l \in \mathbb{N}$.
Schreibe $z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ als $z = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$. Seien $A \in \mathcal{L}_m, B \in \mathcal{L}_n \Rightarrow A \times B \in \mathcal{L}_{m+n}$.
Für $f : A \times B \to \mathbb{C}$ bzw $[0, \infty)$ schreiben wir $f^y(x) = f(x, y)$ ($y \in B$ fest) und $f^x(y) = f(x, y)$ ($x \in A$ fest) sowie (soweit existent):

$$F(x) = \int_B f(x,y)dy \ , x \in A; \quad G(y) = \int_A f(x,y)dx \ , y \in B$$

(setze $F(x), G(y) = 0$, falls die Integrale nicht existieren.)

Theorem (Fubini) *a) Sei $f : A \times B \to [0, \infty)$ messbar. Dann sind f^y für f.a. $y \in B, f^x$ für f.a. $x \in A$ F, G messbar und es gilt:*

$$(2.5) \quad \int_{A \times B} f(x,y)d(x,y) = \int_A (\int_B f(x,y)dy)dx = \int_B (\int_A f(x,y)dx)dy$$

b) Sei $f \in L^1(A \times B)$. Dann sind f^y für f.a. $y \in B, f^x$ für f.a. $x \in A$ F, G integrierbar und es gilt (2.5).

Bemerkung Analog: n-fache Integrale

Beispiel 2.27 Integraloperatoren
Sei $k \in L^2(A \times A), A \in \mathcal{L}_d, f \in L^2(A)$. Nach Bem. 1.34 ist

$$(x, y) \mapsto \varphi(x,y) := k(x,y)f(y) \text{ messbar}$$

(Beachte, dass auch $(x, y) \mapsto f(y)$ messbar ist.) Ferner ist $(x, y) \mapsto |\varphi(x,y)|$ messbar.
Fubini a) und Hölder liefern:

$$\begin{aligned}
\int_{A \cap B(0,n)} (\int_A |\varphi(x,y)|dy)^2 dx &\leq \int_A (\int_A |k(x,y)|^2 dy)^{\frac{1}{2} 2} dx \|f\|_2^2 = \|k\|_2^2 \|f\|_2^2 \ (*) \\
\Rightarrow (\int_{A \cap B(0,n)} (\int_A |\varphi(x,y)|dy)dx)^2 &\stackrel{1.39}{\leq} c(n) \int_{A \cap B(0,n)} (\int_A |\varphi(x,y)|dy)^2 dx \\
&\leq c(n) \|k\|_2^2 \|f\|_2^2 \Rightarrow \varphi \in L^1((A \cap B(0,n) \times A) \ \forall \, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$\overset{\text{Fubini b)}}{\Rightarrow} Tf(x) = \int_A k(x,y)f(y)dy$ existiert für f.a. x und ist messbar. Da $|Tf(x)|^2 \leq (\int_A |\varphi(x,y)|dy)^2$ liefert $\sup_n$ in $(*)$, dass $Tf \in L^2(A)$ und $\|Tf\|_2 \leq \|k\|_2 \|f\|_2 \Rightarrow T \in B(L^2(A)), \|T\| \leq \|k\|_2$ (MS-Norm von T)
Sei $g \in L^2(A)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(Tf|g) &= \int_A (\int_A k(x,y)f(y)dy)\overline{g(x)}dx \overset{\text{Hölder und Fubini}}{=} \int_A (\int_A k(x,y)f(y)\overline{g(x)}dx)dy \\ &= \int_A f(y)(\overline{\int_A \overline{k(x,y)}g(x)dx})dy = (f|T'g)\end{aligned}$$

$\Rightarrow T'g(t) = \int_A \overline{k(s,t)}g(s)ds \ (t \in A) \Rightarrow T$ sa $\iff k(x,y) = k(y,x)$ für f.a. $(x,y) \in A \times A$.

Satz 2.28 *Seien X, Y HRe, $T \in B(X,Y)$.*

$$T \text{ ist Isometrie } \iff (T'Tx|z)_X = (Tx|Tz)_Y = (x|z)_X \ \forall x, z \in X$$

Insbesondere:
T unitär $\Leftrightarrow$ T bijektiv und T Isometrie $\Leftrightarrow$ T bijektiv und erhält Skalarprodukt.

Beweis. „$\Leftarrow$" Setze $x = z$.

„$\Rightarrow$" Sei $\alpha \in \mathbb{K}, x, z \in X$. Dann:
$(T(x+\alpha z)|T(x+\alpha z)) \overset{2.1}{=} \|Tx\|^2 + \|\alpha Tz\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(Tx|\alpha Tz) = \|x\|^2 + |\alpha|\|z\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}(Tx|Tz))$
Andererseits gilt:
$|(T(x+\alpha z)|T(x+\alpha z))| = \|T(x+\alpha z)\|^2 = \|x+\alpha z\|^2 \overset{(2.1)}{=} \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}(x|z)) + |\alpha|\|z\|^2$
$\Rightarrow \mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}(Tx|Tz)) = \mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}(x|z)) \overset{\alpha=1, \alpha=i}{\Rightarrow} (Tx|Tz) = (x|z)$. ■

Satz 2.29 *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}, X$ HR, $T \in B(X)$.*

$$T \text{ sa } \Leftrightarrow (Tx|x) \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in X$$

Beweis. „$\Rightarrow$" $(Tx|x) = (x|Tx) = \overline{(Tx|x)} \Rightarrow$ Beh.

„$\Leftarrow$" Sei $\alpha \in \mathbb{K}, x, y \in X$
$(T(x+\alpha y)|x+\alpha y) = (Tx|x) + \overline{\alpha}(Tx|y) + \alpha(Ty|x) + |\alpha|^2(Ty|y) =: a \overset{\text{Vor.}}{=} \overline{a} \overset{\text{Vor.}}{=} (Tx|x) + \alpha(y|Tx) + \overline{\alpha}(x|Ty) + |\alpha|^2(Ty|y)$

$$\overset{\alpha=1}{\Rightarrow} (Tx|y) + (Ty|x) = (y|Tx) + (x|Ty) \tag{2.3}$$
$$\overset{\alpha=i}{\Rightarrow} i(Tx|y) - i(Ty|x) = -i(y|Tx) + i(x|Ty) \tag{2.4}$$

$\Rightarrow (Ty|x) = (y|Tx) \overset{x,y \text{ bel.}}{\Rightarrow} T$ sa. ■

Beispiel $X = \mathbb{R}^2, T =$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow T$ nicht sa, $(Tx|x) = 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}^2$

Satz 2.30 *Sei X HR, $T \in B(X)$ sei sa. Dann gilt:*
$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} |(Tx|x)| =: M$$
Insbesondere:
$$(Tx|x) = 0 \;\forall\, x \in X \Rightarrow T = 0$$

Beweis„ $\ge$ “ Klar.

„ $\le$ “ Seien $x, y \in X$ mit $\|x\|, \|y\| \le 1$.
$(T(x+y)|x+y) - (T(x-y)|x-y) \overset{2.1}{=} 2(Tx|y) + 2(Ty|x) = 2(Tx|y) + 2\overline{(Tx|y)} = 4\mathrm{Re}\,(Tx|y)$
$\Rightarrow 4\mathrm{Re}\,(Tx|y) \le M(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \overset{(2.2)}{=} 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) \le 4M$
Sei $(Tx|y) \ne 0$ ersetze oben x durch $|(Tx|y)|(Tx|y)^{-1}x$. Dann:
$$|(Tx|y)| = |(x|Ty)| \le M \overset{2.12;\sup \|x\| \le 1}{\Longrightarrow} \|Ty\| \le M \Longrightarrow \|T\| \le M.$$
■

Lemma 2.31 *Sei X HR, $T \in B(X)$ sei normal. Dann gilt:*
$$\|Tx\| = \|T'x\| \quad \forall\, x \in X$$
Insbesondere gilt:
$$N(T) = N(T') \overset{2.23}{=} R(T)^{\perp}$$

Beweis $0 = ((T'T - TT)x|x) = |\;Tx\|^2 - \|T'x\|^2 \quad \forall\, x \in X$ ■

Satz 2.32 *Sei X HR, $P \in B(X)$ eine Projektion mit $P \ne 0$. Dann sind äquivalent:*

a) P *ist orthogonal*

b) $\|P\| = 1$

c) $P = P'$ *(d.h. P sa.)*

d) P *ist normal*

e) $(Px|x) = 0 \;\forall\, x \in X$.

Beweis a) $\Rightarrow$ c) Für $x, y \in X$ gilt: $(Px|y) = (Px|Py + \underbrace{(I-P)y}_{\in N(P)}) \overset{a)}{=} (Px|Py)$.

Genauso: $(x|Py) = (Px|Py) \Longrightarrow P = P'$.

c) $\Rightarrow$ d) Klar.

d) $\Rightarrow$ a) Lemma 2.30

c) $\Rightarrow$ e) $(Px|x) = (PPx|x) \overset{c)}{=} (Px|Px) \geq 0 \; \forall \, x \in X$.

e) $\Rightarrow$ c) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Satz 2.29; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Werner V 5.9

a) $\Rightarrow$ b) Theorem 2.11

b) $\Rightarrow$ a) Sei $\alpha \in \mathbb{K}, x \in N(P), y \in R(P)$. Dann:

$$\|\alpha y\|^2 = \|P(x + \alpha y)\|^2 \overset{b)}{\leq} \|x + \alpha y\|^2 \overset{(2.1)}{=} \|x\|^2 + 2\mathrm{R}e\, \overline{\alpha}(x|y) + |\alpha| \|y\|^2$$

Wähle $\alpha = \frac{(x|y)}{|(x|y)|} \Longrightarrow (x|y) = 0$. ■