

Numerik I Dörfler SS08 - Vorlesungsmitschrieb

Inhaltsverzeichnis

0.1	Aufgaben	3
0.2	Hilfsmittel	3
1	Anwendungsbeispiele	3
1.1	ComputerTomographie	3
1.1.1	Modell	3
1.1.2	Das Tomographie-Problem	3
1.1.3	Ein diskretes Tomographie-Problem	5
1.2	Wärmeleitung	6
1.2.1	Wärmeleitungsgleichung	6
1.2.2	Diskretisierung	7
1.3	Berechnung elektrostatischer Felder	8
1.3.1	Elektrostatische Potenziale und Felder	8
1.3.2	Das Prinzip der virtuellen Arbeit	8
1.3.3	Das Poisson-Problem	9
1.3.4	Diskretisierung des Poissonproblems	10
1.3.5	Konvergenzbetrachtung	11
2	Rundungsfehler und numerische Stabilität	11
2.1	Grenzen der Genauigkeit	11
2.2	Zahldarstellung	12
2.2.1	Zahlssysteme	12
2.2.2	Maschinenzahlen	12
2.2.3	Rundungsfehleranalyse	13
2.3	Konditionen von Abbildungen	15
2.3.1	Norm- und komponentenweise Kondition	15
2.3.2	Beispiele	15
2.4	Stabilität numerischer Algorithmen	16
2.4.1	Vorwärtsanalyse	17
2.4.2	Rückwärtsanalyse	17

3	Lineare Gleichungssysteme	18
3.1	Direkte Verfahren: Gauß-Elimination	18
3.1.1	Das Gaußsche Eliminationsverfahren	18
3.1.2	Die LR-Zerlegung	19
3.1.3	Pivotisierung	22
3.1.4	Rechenaufwand	23
3.1.5	Gauß-Elimination für Bandmatrizen	23
3.1.6	Block-Gauß-Elimination	24
3.1.7	Existenz der LR -Zerlegung ohne Pivotisierung	25
3.1.8	Numerische Stabilität	26
3.1.9	Bemerkungen	26
3.2	Cholesky-Zerlegung	27
3.3	Iterative Verfahren	28
3.3.1	Basisiteration	28
3.3.2	Konvergenz linearer Iterationen	28
3.3.3	Die „klassischen Iterationsverfahren“	30
3.3.4	Konvergenz des Jakobi- und Gauß-Seidel-Verfahrens	32
3.3.5	Konvergenzsatz des SOR-Verfahrens	33
3.3.6	Konvergenz des SSOR	34
3.3.7	Beispiele	34
3.3.8	Konsistent geordnete Matrizen	35
3.3.9	Rechenaufwand	36
3.3.10	Idee Des Mehrgitterverfahrens	38
3.4	Das CG-Verfahren	39
3.4.1	Das Gradientenverfahren	39
3.4.2	Fehlerminimierung auf Unterräumen	40
3.4.3	Krylovräume	41
3.4.4	Das CG-Verfahren nach Hestenes/ Stiefel (1954)	41
3.4.5	Konvergenz des CG-Verfahrens	44
3.4.6	Vorkonditionierung	47
3.5	GMRES (Generalized minimal residuals, 1986)	48
3.5.1	Minmale Residuen	48
3.5.2	Konstruktion des GMRES-Verfahrens	49
4	Nichtlineare Gleichungen	53
4.1	Fixpunkte (Ergänzung 5)	53
4.1.1	Fixpunkte und Nullstellen	53
4.1.2	Banachscher Fixpunktsatz	53
4.1.3	Beispiele	53
4.1.4	Konvergenzordnung	55
4.2	Berechnung von Nullstellen	56
4.2.1	Extrema (Ergänzung 7)	56
4.2.2	Nullstellen reeller Funktionen	56
4.2.3	Lokale Konvergenz des Newtonverfahrens	60