

# Kapitel 2

## Bewegungsplanung & Konfigurationsräume

Als Motivation für das folgende Kapitel können wir uns beispielsweise die Bewegungssteuerung gleichartiger Automaten, beziehungsweise Fahrzeuge, in einer Umgebung, etwa in der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  oder der Ebene  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \leq k} I_i$  mit Hindernissen, anschauen.

Unser Ziel ist es, bestimmte Positionen oder Zyklen von Bewegungen, zum Beispiel zur Steuerung von Fahrzeugen in einer Lagerhalle, zu finden. Als Einschränkung wählen wir dabei das Umfahren von Hindernissen.

Wir modellieren das Problem, so dass  $x_i$  die Position des  $i$ -ten Automaten mit  $x_i \notin O_i$  beschreibt, und Kollisionsfreiheit, das heißt  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$ . Wir setzen

$$X = \times_{i=1}^n (\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_k O_k) \setminus \Delta \quad \Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_i = x_j, i \neq j\}$$

Wir werden uns auf Graphen beschränken, das ist zum Einen motiviert durch Anwendung (Schienensysteme), und zum Anderen durch Methodik (lokale Kollisionsvermeidung).

Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Die **verallgemeinerte Diagonale** von  $X^n$  ist  $\Delta = \Delta_n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid \exists i \neq j : x_i = x_j\}$ . Der Raum

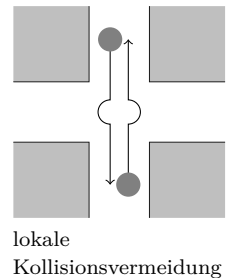
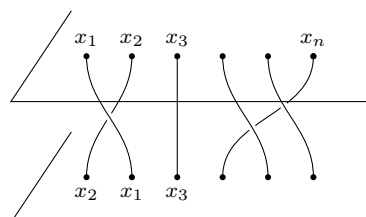
$$F_N X = X^n \setminus \Delta_n(X)$$

heißt der **Konfigurationsraum** von  $X$ .

### Beispiel

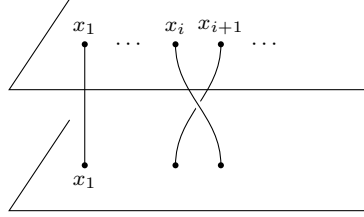
$F_2 \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$  (Beweis zur Übung)

Die symmetrische Gruppe  $S_n$  wirkt frei auf  $F_n X$ . Dann heißt der Quotient  $C_n X = F_n X / S_n$  der **(ungeordnete) Konfigurationsraum** von  $X$ . Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(C_n X)$  heißt die  $n$ -te **Zopfgruppe** von  $X$ . Die klassischen Zopfgruppen sind  $B_n = \pi_1(C_n \mathbb{R}^2)$ :



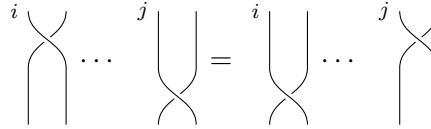
$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [x_2, x_1, \dots, x_n]$$

Darstellung von  $B_1$ :

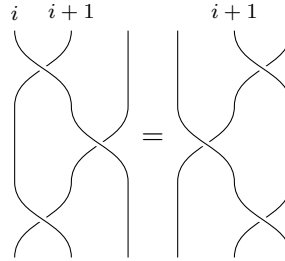


Erzeuger:  $g_i, i \leq n-1$ , Relationen:

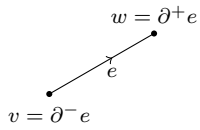
- $g_i g_j = g_j g_i, |i-j| \geq 2$



- $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$



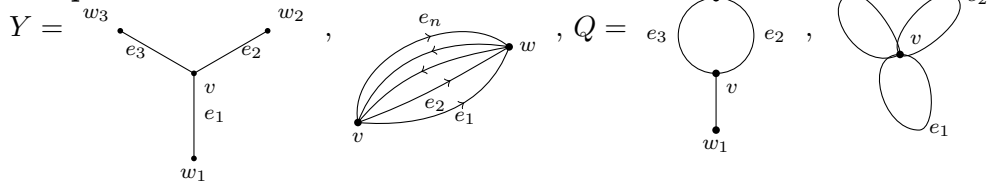
Ein **Graph**  $\mathcal{G}$  besteht aus einer nichtleeren **Eckenmenge**  $\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{G}$ , einer **Kantenmenge**  $\mathcal{E} = \mathcal{G}\mathcal{E}$  und (surjektiven) **Randabbildungen**  $\partial^\pm : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ . Zur Notation der **Kantenorientierung** sei  $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times \{+1, -1\}$  mit den Randabbildungen



$$e^+ = (e, 1) \mapsto \partial^+ e \quad \text{und} \quad e^- = (e, -1) \mapsto \partial^- e.$$

Dann gilt für die Kanteninversion  $e^\pm \rightarrow e^\mp$ ,  $\partial^+ \bar{e} = \partial^- e$  und  $\partial^- \bar{e} = \partial^+ e$ . Es bezeichne  $|e|$  stets die unorientierte Kante  $e$ .

**Beispiel**



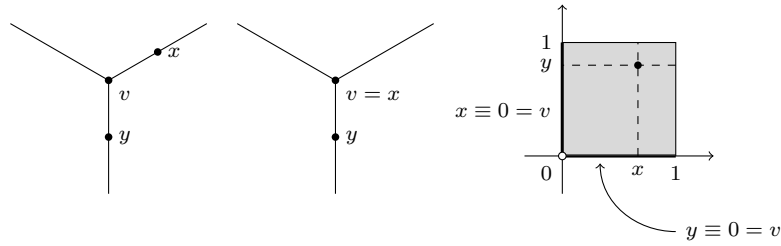
Der **Grad**  $\deg v$  einer Ecke ist die Zahl, wie oft  $v$  als Ecke einer Kante vorkommt. Eine Ecke mit  $\text{Grad} \geq 3$  heißt **essentiell**, mit Grad 1 heißt sie **frei**.

Die geometrische Realisierung  $|\mathcal{G}|$  eines Graphen  $\mathcal{G}$  erhält man durch das Verkleben von (Einheits-) Intervallen zu jeder Kante entsprechender Randabbildungen. Man kann sich, aus topologischer Sicht, auf Graphen beschränken, deren Ecke entweder frei oder essentiell ist. Jede essentielle Ecke  $v$  besitzt eine Umgebung  $U$ , so dass  $U \setminus \{v\}$  in  $\mathcal{G}$  in mindestens drei Zusammenhangskomponenten zerfällt.

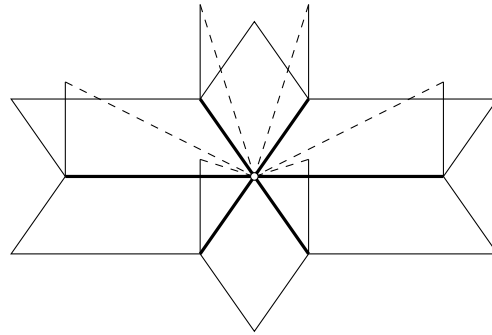
**Beispiel**

Wir betrachten nun speziell  $F_2 Y$ . Die Position zweier Punkte  $x$  und  $y$  auf benachbarten Kanten ist durch ein Einheitsquadrat parametrisiert. Die Achsen sind für

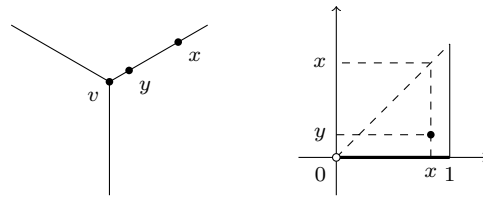
ihre jeweiligen Punkte zugelassene Positionen, solange nicht beide Punkte null sind, da es dann zu einer Kollision käme.



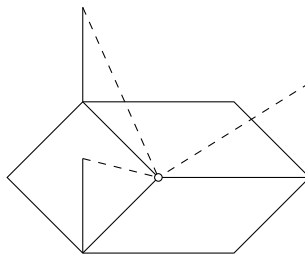
Sechs dieser Parameterbereiche werden entlang der Kanten  $x \equiv 0 = v$  beziehungsweise  $y \equiv 0 = v$  miteinander verklebt



Liegen zwei Punkte  $x$  und  $y$  auf einer Kante, so sind ihre Koordinaten durch ein „halbes“ Quadrat parametrisiert.



Für  $C_2Y$  ergibt sich dann



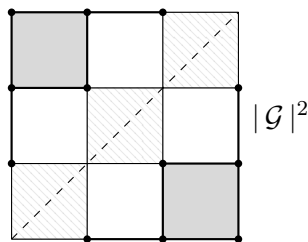
### Satz (Swiatowski 2001)

Es sei  $\mathcal{G}$  ein endlicher Graph. Dann existiert ein nichtpositiv gekrümmter-Kubenkomplex  $K_n \mathcal{G} \hookrightarrow C_n \mathcal{G} = F_n \mathcal{G} / S_n$ , sodass  $K_n \mathcal{G}$  ein Deformationsretrakt von  $C_n \mathcal{G}$  ist. Es gilt  $\dim K_n \mathcal{G} = \min\{n, b\}$ , wobei  $b$  die Anzahl der essentiellen Ecken von  $\mathcal{G}$  ist.

Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(C_n \mathcal{G})$  enthält eine frei abelsche Untergruppe vom Rang  $\min\{b, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ . Die Konstruktion basiert darauf, die Verteilung von Punkten auf Ecken, beziehungsweise Kanten, beziehungsweise die Übergänge zwischen solchen Zuständen zu beschreiben.

**Ansatz (Abrams 2000)**

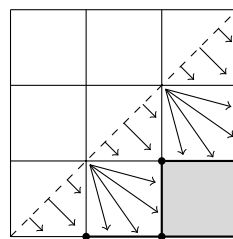
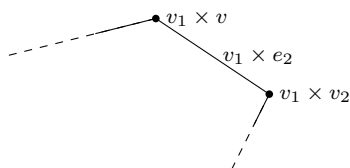
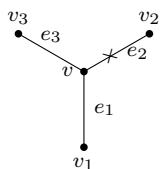
Wie erhält man die Zellenstruktur beziehungsweise die Kombinatorik von  $|\mathcal{G}|^n = \{\sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \mid \sigma \text{ Zelle von } \mathcal{G}\}$  in  $C_n \mathcal{G}$ ? Man erhält  $F_n \mathcal{G}$  durch das „Löschen“ der verallgemeinerten Diagonale.


**Analogon**

$|\mathcal{G}|^n$  ist ein Zellkomplex mit Zellen  $\sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$ . Die kombinatorische Diagonale von  $|\mathcal{G}|^n$  besteht aus Zellen der Form  $\sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$  mit  $\partial\sigma_i \cap \partial\sigma_j \neq \emptyset$  für ein  $i \neq j$ . Betrachten den kombinatorischen Konfigurationsraum mit Zellen  $\sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$  mit  $\partial\sigma_i \cap \partial\sigma_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ . Dies sind genau die  $n$ -Tupel von Punkten, welche paarweise durch eine (offene) Kante getrennt sind.

**Beispiel**

$\mathcal{G} = Y$ : 1-Zellen der Form  $v \times e$ , wobei  $e$  eine der Ecke  $v$  gegenüberliegende Kante ist.



Anschließend lässt sich der kombinatorische Konfigurationsraum auf  $C_n \mathcal{G}$  retraktieren. Leider erhält man im Allgemeinen *nicht* die Topologie von  $C_n \mathcal{G}$ : Beispiel

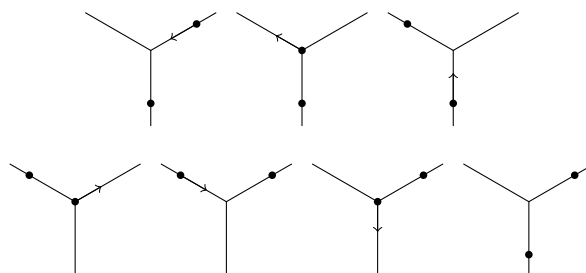
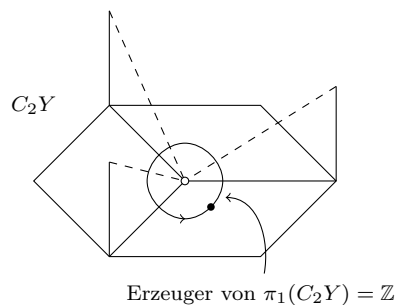
$$v \begin{matrix} \xrightarrow{e_2} \\ \xleftarrow{e_1} \end{matrix} v \rightsquigarrow v \times w. \text{ Es gilt zumindest}$$

**Satz (Abrams 2000)**

Ist  $\mathcal{G}$  ein einfacher Graph, das heißt enthält keine Schleifen der Länge  $\leq 2$ , so ist sein kombinatorischer Konfigurationsraum auf zwei Punkten ein Deformationsretrakt von  $C_2 \mathcal{G}$ .

**Beispiel**

$$\pi_1(C_2, Y)$$



### Definition (Swiatowski)

Es sei  $\mathcal{G}$  ein endlicher Graph, dessen nichtessentielle Ecken frei sind, mit Kanten  $\mathcal{E}$  und Ecken  $\mathcal{V}$ . Es bezeichne  $\mathcal{B}$  die Menge der essentiellen Ecken. Es sei  $P_n^{(k)} \mathcal{G}$  die Menge der Paare  $(f, S)$  mit

- (i)  $f : \mathcal{E} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine Abbildung
- (ii)  $S = \{e_1, \dots, e_k\}$  paarweise verschiedene orientierte Kanten
- (iii)  $v_{e_i} = \partial^+ e_i \in \mathcal{B}$  und  $v_{e_i} \neq v_{e_j}$  für  $i \neq j$
- (iv)  $f(v) \in \{0, 1\}$  für alle  $v \in \mathcal{B}$  und  $f(v_{e_i}) = 0$  für alle  $i \leq k$
- (v)  $\sum_{|a| \in \mathcal{E} \cup \mathcal{B}} f(|a|) = n - k$ .

Es gelte dabei  $(f, S) \prec (g, S \dot{\cup} \{e\})$  mit  $e \notin S$ , falls entweder

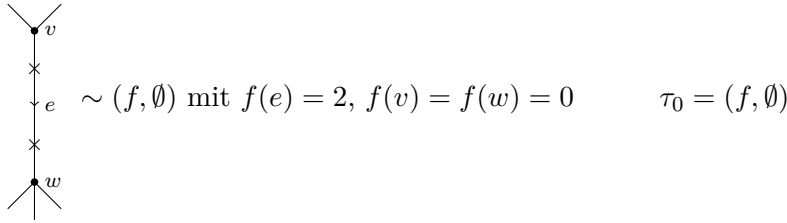
- (a)  $f(v_e) = g(v_e) + 1 (= 1)$  und sonst  $f(a) = g(a)$

oder

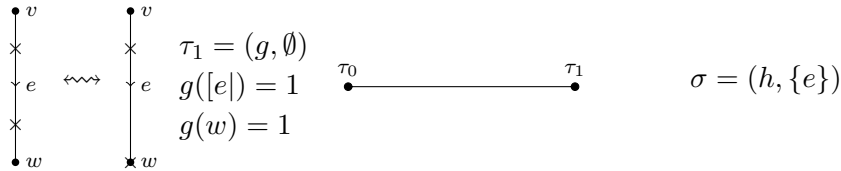
- (b)  $f(|e|) = g(|e|) + 1$  und sonst  $f(a) = g(a)$

gilt. Es bezeichne  $\prec$  die davon erzeugte partielle Ordnung auf  $P_n \mathcal{G} = \dot{\cup} P_n^{(k)} \mathcal{G}$  und  $K_n \mathcal{G}$  seine geometrische Realisierung.

0-Skelett: Paare  $(f, \emptyset)$  mit  $f : \mathcal{E} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{|a| \in \mathcal{E} \cup \mathcal{B}} f(|a|) = n$ ,  $f$  „zählt“ wieviele Punkte auf einer Kante beziehungsweise essentiellen Ecke sitzen.



Zwei solche 0-Zellen sind durch eine Kante (1-Zelle) verbunden, wenn einer der Punkte das Innere einer Kante durch eine essentielle Ecke betritt oder verlässt.



$$h(|e|) = 1 \xrightarrow{(b)} \tau_0 \prec \sigma, h(w) = 0 \xrightarrow{(a)} \tau_1 \prec \sigma \quad (h(v) = 0)$$

Die höherdimensionalen Zellen bestehen aus  $k$ -Tupeln von unabhängigen Zügen wie oben. Ist  $\sigma = (g, \{e_1, \dots, e_k\})$  eine  $k$ -Zelle in  $K_n \mathcal{G}$ , so besitzt  $\sigma$  genau  $2k$  Facetten der Kodimension 1:

$$\partial_{e_i}^{\pm} \sigma = (g_i^{\pm}, \{e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k\})$$

mit  $g_i^+(v_{e_i}) = 1$ , beziehungsweise  $g_i^-(|e_i|) = g(|e_i|) + 1$ . Damit ist  $K_n \mathcal{G}$  ein Kubenkomplex: Jede Menge  $\{\tau \mid \tau \prec \sigma\}$  ist ein Würfel.

Wir definieren die Dimension als  $\dim K_n \mathcal{G} = \min\{|\mathcal{B}|, n\}$ . Es gilt dann  $\dim K_n \mathcal{G} = \max\{k \mid P_n^{(k)} \mathcal{G} \neq \emptyset\}$ . Wir beweisen die Aussage:

Aus (ii) und (iii) folgt  $\dim K_n \mathcal{G} \leq |\mathcal{B}|$ . Ist  $k = \min\{|\mathcal{B}|, n\}$ , so existieren paarweise verschiedene essentielle Ecken  $v_1, \dots, v_n$ . Da  $v_i$  essentiell ist, existieren paarweise

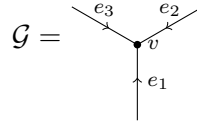
verschiedene Kanten  $e_1, \dots, e_k$  mit  $v_i = v_{e_i}$ . Es sei  $S = \{e_1, \dots, e_k\}$  und

$$f : \mathcal{E} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad |a| \mapsto \begin{cases} n - k & |a| = e_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt  $(f, S) \in P_n^{(k)} \mathcal{G}$ .

### Beispiel

Betrachte wieder den Graphen  $\mathcal{G} = Y$ , wir suchen  $K_2 Y$  mit  $\mathcal{B} = \{v\}$ ,  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$  und  $\dim K_2 Y = \min\{|\mathcal{B}|, n\} = \min\{2, 1\} = 1$ .



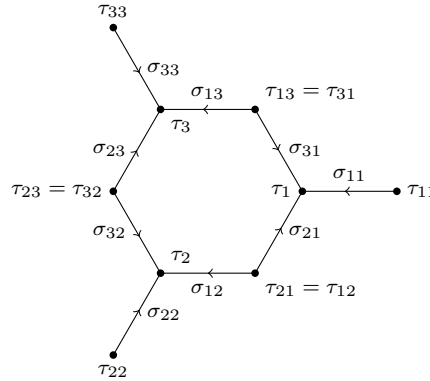
Für die 1-Zellen setze  $\sigma = (g, S)$  mit  $|S| = 1$ , also  $S = \{e_i\}$  für ein  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Dann folgt  $g(v_{e_i}) = g(v) = 0$  nach (iv). Daraus ergibt sich für die Summe

$$\sum_{|a| \in \mathcal{E} \cup \mathcal{B}} g(|a|) = g(|e_1|) + g(|e_2|) + g(|e_3|) + 0 = n - k = 2 - 1 = 1$$

Da alle Summanden positiv sind muss es genau ein  $j$  mit  $g(|e_j|) = 1$  geben, und damit existieren insgesamt genau neun 1-Zellen  $\sigma_{ij} = (|e_j| \mapsto 1, \{e_i\})$  als Ränder. Für die 0-Zellen ergibt sich dann:

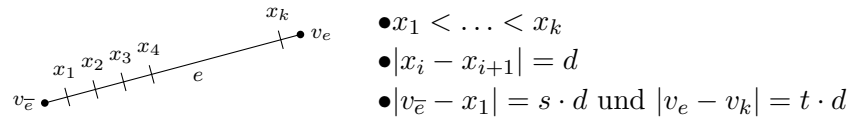
- (a)  $\partial^+ \sigma_{ij} = ( \begin{smallmatrix} v \\ |e_j| \end{smallmatrix} \mapsto \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}, \emptyset ) = \tau_j$  ( $\deg \tau_j = 3$ )
- (b)  $i \neq j$ :  $\partial^- \sigma_{ij} = ( \begin{smallmatrix} |e_i| \\ |e_j| \end{smallmatrix} \mapsto \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}, \emptyset ) = \tau_{ij} = \tau_{ji}$  ( $\deg \tau_{ij} = 2$ )
- $i = j$ :  $\partial^- \sigma_{ii} = (|e_i| \mapsto 2, \emptyset) = \tau_{ii}$  ( $\deg \tau_{ii} = 1$ )

Anschaulich ergibt sich schließlich folgendes Bild:



### Einbettung $\iota : K_n \mathcal{G} \hookrightarrow C_n \mathcal{G}$

Sei die Verteilung von  $k$  Punkten auf einer Kante  $e$  durch  $D_e(k, (s, t)) \subset C_n \mathcal{G} \cap e$ , mit  $(s, t) \in [0, 1]$ , gegeben mit



als koordinaten auf einem Würfel  $\sigma = (f, S) \in P_n^{(k)}$ . Definiere  $t : \sigma \rightarrow [0, 1]^s$  durch lineare Fortsetzung der Abbildung auf seinen 0-Zellen  $p = (f, \emptyset)$ :

$$t(p) : S \rightarrow [0, 1] \quad e \mapsto 1 - f(e).$$

Für jedes  $x \in \sigma = (g, S) \subset K_n \mathcal{G}$  ist  $t(x)$  eine Abbildung von  $S$  in  $[0, 1]$ . Setze fort

$$t(x) : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1] \quad e \mapsto \begin{cases} t(x)(e) & e \in S \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Daraus erhält man eine Einbettung  $\iota_\sigma : \sigma = (g, S) \rightarrow C_n \mathcal{G}$ ,  $x \mapsto \{v \in \mathcal{B} \mid g(v) = 1\} \cup_{e \in \mathcal{E}} D_e(\tilde{g}(|e|), (t(x)(\bar{e}), t(x)(e)))$ , wobei  $\tilde{g}(|e|) = g(|e|) + \#\{s \in S \mid |s| = e\}$ .

Es sei  $x \in \tau = (f, S) \prec \sigma = (g, S \cup \{e\})$ . Wir beschränken und im Folgenden zunächst nur auf den Fall (a), der Fall (b) folgt dann analog. Sei  $f(v_e) = g(v_e) + 1 = 1$ , also  $t_\sigma(x)(e) = 0$  und  $v_e \in v_\tau(x)$  für  $e \notin S$ . Dann folgt  $t_\tau(x)(e) = 1$ . Aus  $f(|e|) = g(|e|)$  folgt  $\tilde{g}(|e|) = \tilde{f}(|e|) + 1$ .

Es folgt

$$\begin{aligned} & D_e(\underbrace{\tilde{g}(|e|)}_{=\tilde{f}(|e|)+1}, (\underbrace{t_\sigma(x)(\bar{e})}_{=0}, \underbrace{t_\sigma(x)(e)}_{=0})) \\ &= D_e(\tilde{f}(|e|) + 1, (s, 0)) \\ &= \{v_e\} \cup D_e(\tilde{f}(|e|), (s, 1)) \quad \Rightarrow \iota_\sigma(x) = \iota_\tau(x) \end{aligned}$$

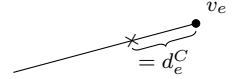


Damit definiert  $\iota = \bigcup_\sigma \iota_\sigma$  eine Einbettung  $K_n \mathcal{G} \hookrightarrow C_n \mathcal{G}$ .

### Retraktion $r : C_n \mathcal{G} \rightarrow K_n \mathcal{G}$

Sei  $C \in C_n \mathcal{G}$  und bezeichne  $n_e^C = \#(C \cap e) \setminus \mathcal{B}$  die Anzahl der Punkt auf  $e$ . Setze

$$d_e^0 = \begin{cases} 1 & n_e^C = 0 \\ \min\{|v_e - x| \mid x \in C \cap e \setminus \mathcal{B}\} & \text{sonst} \end{cases} \quad \delta_e^C = d_e^C (n_e^C + 1)$$



und die mittlere Segmentlänge  $\frac{1}{n_e^C + 1}$ . Setze weiterhin

$$t_e^C = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_e \text{ frei oder } v_e \in C \\ \min\{1, \frac{\delta_e^C}{\min\{\delta_{e'}^C \mid e' \neq e \wedge v_{e'} = v_e\}}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiere

$$r : C_n \mathcal{G} \rightarrow \iota(K_n \mathcal{G}) \quad C \mapsto (C \cap \mathcal{B}) \cup \bigcup_e D_e(n_e^C, (t_e^C, t_e^C))$$

### Homotopie $\text{id} \cong r$

Für beliebiges  $C \in C_n \mathcal{G}$  gilt

- $C \cap \mathcal{B} = r(C) \cap \mathcal{B}$
- $\#(C \cap e) \setminus \mathcal{B} = \#(r(C) \cap e) \setminus \mathcal{B}$  für alle  $e \in \mathcal{E}$

Definiere die Homotopie kantenweise, so dass Punkte in die vorgegebene Standardposition bewegt werden.

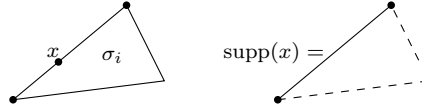
# 1 Geometrie des Kubenkomplexes $K_n \mathcal{G}$

## Definition ( $M_\kappa$ -Komplex)

Es sei  $\sigma_i$ , für  $i \in I$ , eine disjunkte Familie konvexer Polyeder, das heißt  $\sigma_i$  ist eine konvexe Hülle endlich vieler Punkte in  $M_\kappa^{n_i}$ . Es sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $\sqcup_{i \in I} \sigma_i$ ,  $X = \sqcup_{i \in I} \sigma_i / \sim$  und  $\pi : \sqcup_{i \in I} \sigma_i \rightarrow X$  die kanonische Projektion.  $X$  heißt  **$M_\kappa$ -Polyederkomplex**, falls gilt:

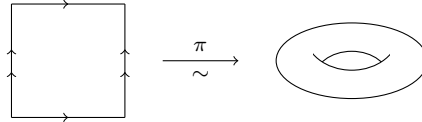
$\hat{\tau}$  offenes Inneres von  $\tau$

- (i) Ist  $\tau \leq \sigma_i$  eine Seite, so ist  $\pi|_{\hat{\tau}}$  injektiv.
- (ii) Sind  $x_1 \in \sigma_1$  und  $x_2 \in \sigma_2$  mit  $\pi|_{\sigma_1}(x_1) = \pi|_{\sigma_2}(x_2)$ , so existiert eine Isometrie  $\varphi : \text{supp}(x_1) \rightarrow \text{supp}(x_2)$  mit  $\pi|_{\sigma_1}(y) = \pi|_{\sigma_2}(\varphi(y))$  für alle  $y \in \text{supp}(x_1)$ ; wobei  $\text{supp}(x_i)$  die eindeutige Seite  $\tau < \sigma_i$  mit  $\hat{\tau} \ni x_i$  ist.



Ein  $M_\kappa$ -Polyederkomplex ist im Allgemeinen *kein* simplizialer Komplex. Betrachte die folgenden beiden Beispiele:

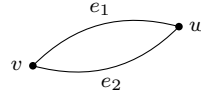
- (1) 2-Torus:



$\sigma = [0, 1]^2$  einziger Polyeder,  $\sim$  Kantenidentifikation (wie üblich)

*Kein* simplizialer Komplex, denn  $\pi|_\sigma$  ist nicht injektiv

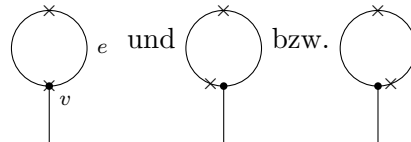
- (2) Digon: zwei (maximale) Polyeder  $e_1 \cong e_2 \cong [0, 1]$ ,  $\sim$  = Identifikation der Randpunkte



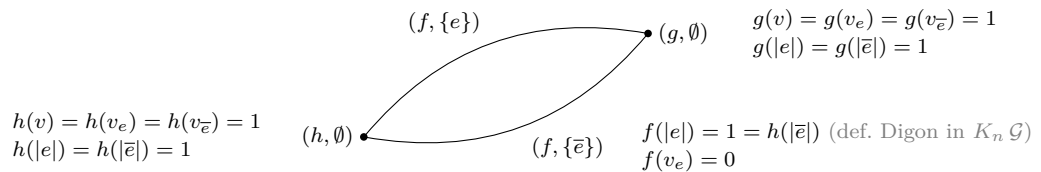
- (i)  $\pi|_{e_i}$  ist injektiv.
- (ii)  $\pi(e_1) \cap \pi(e_2) = \{v, w\}$  ist *nicht* gemeinsame Seite des Polyeders.

Der Kubenkomplex  $K_n \mathcal{G}$  ist ein  $M$ -Polyederkomplex im obigen Sinne.  $K_n \mathcal{G}$  enthält keine Schleifen. Ist  $\sigma \subset K_n \mathcal{G}$  ein 1-Würfel, das heißt  $\sigma = (f, \{e\})$ , so gilt  $\partial^+(f, \{e\}) = (\begin{smallmatrix} v_e \mapsto 0 \\ |e| \mapsto f(|e|)+1 \end{smallmatrix}, \emptyset) \neq \partial^-(f, \{e\}) = (\begin{smallmatrix} v_e \mapsto 1 \\ |e| \mapsto f(|e|) \end{smallmatrix}, \emptyset)$ .

Es gibt Digone in  $K_n \mathcal{G}$ : Es gelte  $n \geq 1$  und  $\mathcal{G}$  enthalte eine Schleife. betrachte die folgenden Konfigurationen:



Es gelte  $v_e = v = v_{\bar{e}}$ , damit existieren zwei Intervalle in  $K_n \mathcal{G}$ , welche das Verlassen der orientierten Kante  $e$  parametrisieren:





Jeder höherdimensionale Würfel in  $K_n \mathcal{G}$  ist eindeutig durch seine Kodimension-1-Seiten bestimmt: Es seien  $(g, S)$  und  $(h, T)$  Würfel der Dimension  $\geq 2$  in  $K_n \mathcal{G}$  mit  $\{\partial_i^\pm(g, S)\} = \{\partial_i^\pm(h, T)\}$ . Es gilt

$$2|S| = \#\{\partial_i^\pm(g, S)\} = \#\{\partial_i^\pm(h, T)\} = 2|T|.$$

Daraus folgt  $|S| = |T| \geq 2$ , also  $S = T$ . Man sieht leicht ein, dass dann auch  $g = h$  gilt, also  $(g, S) = (h, T)$ .

### Metrik auf $K_n \mathcal{G}$ (bzw. $M_\kappa$ -Polyederkomplexen)

Es seien  $x, y \in X$ . Ein  $s \in \{x_0, \dots, x_k\}$  mit  $x_0 = x$ ,  $x_k = y$  und  $x_i, x_{i+1} \in \sigma_i$  für einen Würfel (bzw. Polyeder) heißt  **$k$ -Kette**. Mit  $l(s) = \sum_i d_{\sigma_i}(x_i, x_{i+1})$  sei ihre Länge bezeichnet, wobei  $d_{\sigma_i}$  die Metrik auf  $\sigma_i$  ist. Es sei

$$d(x, y) = \inf\{l(s) \mid s \text{ Kette von } x \text{ nach } y\}.$$

Dies definiert im Allgemeinen *keine* Metrik. Es sei  $X$  der Polyederkomplex aus abzählbar vielen Kanten  $e_k$  der Länge  $\frac{1}{k}$ . Dann gilt

$$d(v, w) \leq \inf\{l(e_k) \mid k \in \mathbb{N}\} = \inf_k \frac{1}{k} = 0.$$

Auf dem Kubenkomplex  $K_n \mathcal{G}$  definiert  $d$  eine Metrik:  $K_n \mathcal{G}$  ist zusammenhängend, da  $\mathcal{G}$  zusammenhängend ist. Es genügt zu zeigen, dass  $d(x, y) \neq 0$  für  $x \neq y$  gilt: Liegen  $x$  und  $y$  in einem Würfel  $\sigma$ , so ist dies offensichtlich ( $d|_\sigma$  ist eine euklidische Metrik auf diesem Würfel). Andernfalls betrachte für  $x \in \sigma$

$$\varepsilon_\sigma(x) = \inf\{d_\sigma(x, \tau) \mid \tau < \sigma, \tau \not\cong x\}$$

Dies ist in  $K_n \mathcal{G}$  stets positiv. Man kann zeigen, dass  $l(s) \geq \varepsilon_\sigma(x)$  für jede Kette  $s$  von  $x$  nach  $y$  gilt, also  $d(x, y) > 0$ . Man sieht leicht ein, dass  $d$  eine Längenmetrik ist.

### Geodäzität und Vollständigkeit

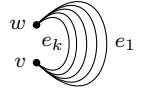
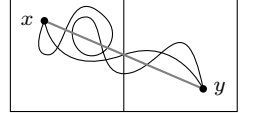
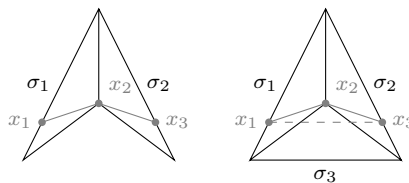
#### Satz (Bridson 1991)

Es sei  $X$  ein zusammenhängender  $M_\kappa$ -Polyederkomplex. Falls in  $X$  nur endlich viele Isometrietypen von Polyedern existieren, so ist  $X$  ein geodätisch vollständiger metrischer Raum.

Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass  $X$  simplizial ist. Betrachte straffe Ketten  $s = \{x_0, \dots, x_k\}$ .

- (i) Kein Tripel  $X_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  liege in einem gemeinsamen Simplex.
- (ii) Gilt  $x_{i-1}x_i \in \sigma_{i-1}$  und  $x_i x_{i+1} \in \sigma_i$ , so sei  $\overline{x_{i-1}x_i} \cup \overline{x_i x_{i+1}}$  geodätisches Segment in  $\sigma_{i-1} \cup \sim \sigma_i$ .

*Beachte:* Das heißt nicht, dass  $\overline{x_{i-1}x_i} \cup \overline{x_i x_{i+1}}$  geodätisch in  $X$  ist, wie man an dieser Zeichnung erkennt:



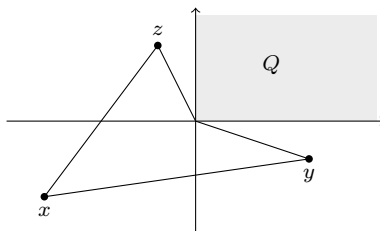
Es gilt  $d(x, y) = \inf\{l(s) \mid s \text{ straffe Kette von } x \text{ nach } y\}$ . Für jede Länge  $l$  existiert eine Schranke  $N$ , abhängig von  $l$  und den Isometrietypen von Simplices, so dass jede straffe Kette der Länge  $l$  höchstens  $N$  Simplices durchläuft.

Für  $x, y \in X$  durchlaufen straffe Ketten hinreichend kleiner Länge nur endlich viele „Modellräume“, welche durch die endlichen Kombinationen der endlich vielen Isometrietypen gegeben sind. Jeder solche „Modellraum“ enthält eine kürzeste Geodätische (Moussong 1988).

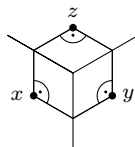
## 2 Nichtpositive Krümmung von Kubenkomplexen

Das Innere der Kuben ist  $CAT(0)$ , da jeder Kubus die euklidische Metrik trägt. Die Krümmung des Komplexes „konzentriert“ sich in den Ecken, das heißt 0-dimensionalen Würfeln.

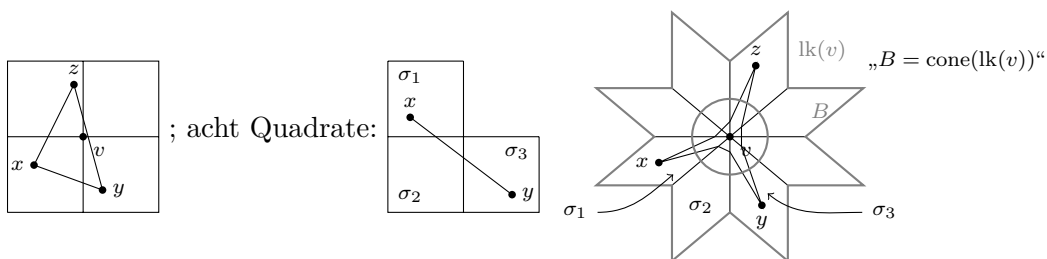
Zur Erinnerung: Das Komplement eines Quadranten in  $\mathbb{R}^2$  ist  $CAT(0)$  und gegeben durch  $\mathbb{R}^2 \setminus Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\}$ .



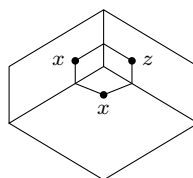
Das Komplement eines Oktanten in  $\mathbb{R}^3$  ist *nicht*  $CAT(0)$ .



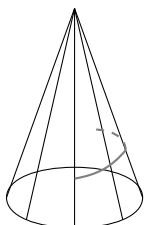
Die folgenden Würfelkomplexe sind euklidisch und  $CAT(0)$ :



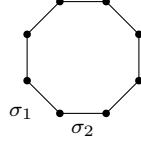
Allerdings ist dies hier nicht mehr  $CAT(0)$ , vergleichbar mit dem Oktanten:



Man kann den Knoten  $v$  als Spitze eines Kegels betrachten und den Link  $lk(v)$  als den Grundkreis. Je größer der Link, umso flacher der Kegel.



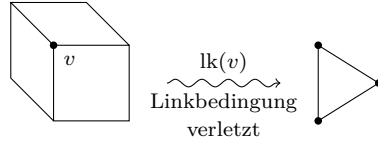
Es sei  $v$  eine Ecke. Der **Link**  $\text{lk}(v)$  ist ein abstrakter simplizialer Komplex mit einem  $k$ -Simplex für jeden  $(k + 1)$ -Würfel, der  $v$  enthält. Für  $K$  sieht der Link  $\text{lk}_K(v)$  folgendermaßen aus:



### Satz (Gromovs Link-Bedingung)

Es sei  $K$  ein endlichdimensionaler Kubenkomplex.  $K$  ist genau dann nichtpositiv gekrümmt, wenn der Link jeder Ecke ein Fahnenkomplex ist.

Ein **Fahnenkomplex** ist ein simplizialer Komplex, in welchem jede Menge von Ecken, die paarweise durch Kanten verbunden sind, einen Simplex aufspannen. Ein Komplex, welcher maximal unter allen Komplexen mit dem gleichen 1-Skelett ist, ist ein Fahnenkomplex.



### Link-Bedingung in $K_n \mathcal{G}$

Es sei  $x \in K_n \mathcal{G}$  eine Ecke, das heißt  $x = (f, \emptyset)$  mit  $f : \mathcal{E} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $\sum_{a \in \mathcal{E} \cup \mathcal{B}} f(a) = n$  und  $f(v) \in \{0, 1\}$  für alle  $v \in \mathcal{B}$ . Es gilt  $\text{lk}(x) = \{\sigma \in K_n \mid (f, \emptyset) \prec \sigma\}$ . Ein  $\sigma = (g, S)$  enthält genau dann  $(f, \emptyset)$ , wenn gilt

$$g(a) = \begin{cases} f(a) & a \in \mathcal{B} \wedge a \neq v_e, e \in S \\ 0 & a = v_e, e \in S \\ f(a) + \sum_{\substack{s \in S \\ |s|=a}} (f(v_s) - 1) & a \in \mathcal{E} \end{cases}$$

Solche  $\sigma = (g, S)$  sind eindeutig bestimmt durch Teilmengen  $S \subset \mathcal{E}$ , welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i)  $v_e \in \mathcal{B}$  für alle  $e \in S$
- (ii)  $v_e \neq v_{e'}$  für  $e, e' \in S$
- (iii)  $f(|e|) + f(v_e) \geq 1$  für alle  $e \in S$
- (iv)  $f(|e|) + f(v_e) + f(v_{\bar{e}}) \geq 2$

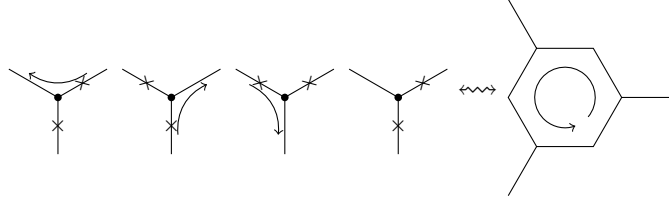
Der Link von  $x$  besteht aus den Teilmengen  $S$ , die (i) bis (iv) erfüllen. Jede solche Teilmenge  $S$  definiert einen  $(|S| - 1)$ -Simplex von  $\text{lk}(x)$ . Die Bedingungen (i) bis (iv) gelten genau dann für eine Teilmenge  $S$ , wenn sie für alle ein- und zweielementigen Teilmengen gelte.

Ist dann  $(g_i, \{e_i\})_{i \leq k}$  eine Menge von Ecken in  $\text{lk}(x)$ , das heißt Kanten in  $K_n \mathcal{G}$ , die  $x$  enthalten, und sind diese alle durch Kanten  $(h_{ij}, \{e_i, e_j\})$  verbunden, so sind (i) - (iv) für  $\{e_i\}$  und  $\{e_i, e_j\}$  erfüllt. Damit gelten die Bedingungen auch für  $S = \{e_1, \dots, e_k\}$  und es existiert ein  $g$  mit  $(g, S) \succ x = (f, \emptyset)$ ; Die Kanten  $(h_{ij}, \{e_i, e_j\})$  in  $\text{lk}(x)$  spannen also einen Simplex auf. Damit ist  $\text{lk}(x)$  ein Fahnenkomplex.

Somit ist nach Gromovs Link-Bedingung  $K_n \mathcal{G}$  nichtpositiv gekrümmt. Das liefert uns

- $\widetilde{K_n \mathcal{G}}$  ist (global) CAT(0)
- $\pi_k(K_n \mathcal{G}) = 0$  für alle  $k \geq 2$
- $K_n \mathcal{G} \hookrightarrow C_n \mathcal{G}$  Deformationsretrakt  $\Rightarrow \pi_*(K_n \mathcal{G}) = \pi_*(C_n \mathcal{G})$
- $\pi_1(C_n \mathcal{G}) = \pi_1(K_n \mathcal{G})$ ,  $\pi_k(C_n \mathcal{G}) = 0$ ,  $k \geq 2$

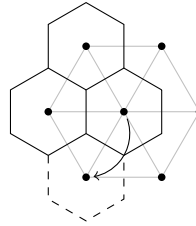
Sei  $k = \min\{|\mathcal{B}|, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ , dann gilt  $\pi_1(C_n \mathcal{G}) \geq \mathbb{Z}^k = \pi_1(T)$ , ein Torus durch die Wirkung  $\pi_1(C_n \mathcal{G}) \curvearrowright K_n \mathcal{G}$ . Finde  $T^k$  in  $K_n \mathcal{G}$ , das heißt „finde  $\mathbb{S}^1$ en in  $K_n \mathcal{G}$ “.



Jede essentielle Ecke  $v \in \mathcal{B}$  in  $\mathcal{G}$  hat  $\deg(v) \geq 3$ . Für jeden Erzeuger einer  $\mathbb{S}^1$  in  $K_n \mathcal{G}$  benötigt man zwei Teilchen und eine essentielle Ecke von  $\mathcal{G}$ .

### 3 Verallgemeinerung: Lokal rekonfigurierbare Räume

Wir betrachten das folgende motivierende Beispiel von Chirikjian aus den 1990er Jahren. In einem zweidimensionalen Modell liegen sechseckige Bausteine, angeheftet an Kanten und drehbar an Ecken.

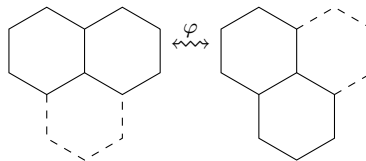


Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph und  $\mathcal{A}$  eine Menge. Ein **Zustand** ist eine „Färbung“ von  $\mathcal{G}$  durch  $\mathcal{A}$ , das heißt  $u : \mathcal{V} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$ .

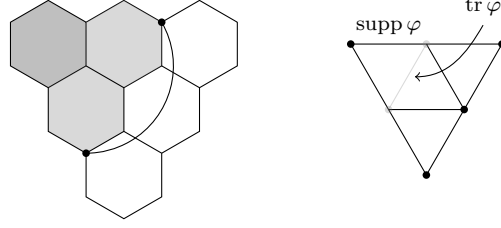
In dem obigen Beispiel ist  $\mathcal{G}$  ein hexagonaler Graph und  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ . Ist eine Position  $v \in \mathcal{G}$  durch ein Sechseck besetzt, so sei  $u(v) = 1$ , sonst 0. Ein **Erzeuger**  $\varphi$  besteht aus

- einem Träger  $\text{supp } \varphi \subseteq \mathcal{G}$ , einem Teilgraph von  $\mathcal{G}$
- seiner Spur  $\text{tr } \varphi \subseteq \text{supp } \varphi$ , einem Teilgraph von  $\text{supp } \varphi$
- einem Paar lokaler Zustände  $u_i^\varphi : \text{supp } \varphi \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $u_0^\varphi|_{\text{supp } \varphi \setminus \text{tr } \varphi} = u_1^\varphi|_{\text{supp } \varphi \setminus \text{tr } \varphi}$

Der Erzeuger gibt uns also Aufschluss über die Drehung



Bei einer Drehung passiert ein Punkt mehrere Sechsecke, daher zählen diese Sechsecke auch zum Träger



Ein Erzeuger heißt **zulässig** auf einem Zustand  $u$ , falls  $u|_{\text{supp } \varphi} = u_0^\varphi$  gilt. Dann sei

$$\varphi.u : \mathcal{V}\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{A} \quad v \mapsto \begin{cases} u(v) & v \notin \text{supp } \varphi \\ u_1^\varphi(v) & v \in \text{supp } \varphi \end{cases}$$

die **Wirkung** von  $\varphi$  auf  $u$ . Ein **lokal rekonfigurierbares System** (LRS) sei eine Menge von Zuständen und Erzeugern, welches abgeschlossen unter dieser Wirkung ist. Ein geeignetes geometrisches Modell von  $C_n \mathcal{G}$  erhielt man aus den unabhängigen Bewegungen von Punkten durch essentielle Ecken.

Eine Familie von Erzeugern  $\{\varphi_i\}$  heißt **kommutativ**, wenn  $\text{tr } \varphi_i \cap \text{supp } \varphi_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ . Analog zu  $C_n \mathcal{G}$  beziehungsweise  $K_n \mathcal{G}$  erhält man so einen Kubenkomplex, ein geometrisches Modell für den Zustandsraum des LRS.

Es seien  $u$  und  $w$  Zustände und  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  zulässige kommutativ Erzeuger. Die Paare  $(u, \{\varphi_i\})$  und  $(w, \{\varphi_i\})$  heißen **äquivalent**, wenn  $u|_{\mathcal{V}\mathcal{G} \setminus \bigcup_i \text{supp } \varphi_i} = w|_{\mathcal{V}\mathcal{G} \setminus \bigcup_i \text{supp } \varphi_i}$  gilt.

Der **Zustandskomplex** eines LRS besteht aus den Äquivalenzklassen von Zuständen  $u$  und Erzeugern  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ , seinen  $k$ -Kuben  $[u, \{\varphi_i\}]$ , mit den Randabbildungen  $\partial_j^- [u, \{\varphi_i\}] = [u, \{\varphi_i\}_{i \neq j}]$  beziehungsweise  $\partial_j^+ [u, \{\varphi_i\}] = [\varphi.u, \{\varphi_i\}_{i \neq j}]$ . (im Allgemeinen nicht lokal endlich)

### Satz (Ghrist '07?)

Ein lokal endlicher Zustandskomplex eines LRS ist nicht-positiv gekrümmt.

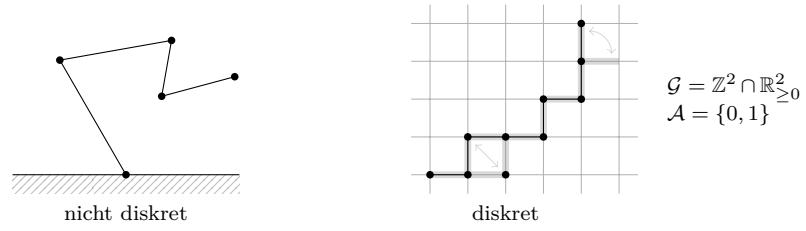
Als Konsequenz ergibt sich daraus, dass  $\mathcal{C}$  ein Eilenberg-McLane-Raum ist, das heißt  $\pi_k(\mathcal{C}) = 0$  für  $k \geq 2$ .

- Jede Homotopieklasse von Wegen besitzt genau einen geodätischen Repräsentanten.
- Die Fundamentalgruppe ist torsionsfrei.
- $\pi(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{C}} = \langle \varphi_i \mid \varphi_i^2 = \text{id}, [\varphi_i, \varphi_j] \rangle$ , rechtwinklige Artin-Gruppe

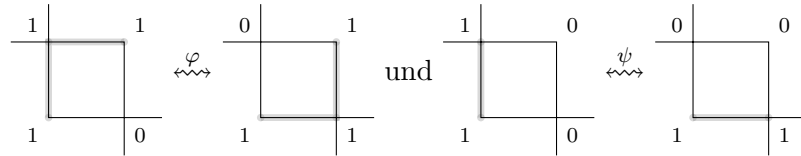
Ein weiteres Beispiel für ein LRS ist ein diskretes Modell für  $C_n \mathcal{G}$ , homöomorph zu  $K_n \mathcal{G}$  (nach eventueller Unterteilung von  $\mathcal{G}$ ). Wir schauen uns nun ein konkretes Beispiel an.

### „Diskreter“ Roboterarm

Um die Bewegungen der Gelenke diskret zu machen legen wir ein Gitter und lassen Bewegungen von entweder  $90^\circ$  oder  $180^\circ$  zu.



Für die Erzeuger gilt



Entsprechend gilt für die Träger und Spuren

$$\text{supp } \varphi = \text{supp } \psi = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \text{mit } \text{tr } \varphi = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \text{und } \text{tr } \psi = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$