0 Vorbemerkungen

0.1 Bezeichnungen

Allgemeine Bezeichnungen

- griechische Buchstaben: s. Übungsblatt.
- Thm = Theorem = Hauptsatz.
- Def. = Definition, „:=“ heißt „steht für“.
- Lem. = Lemma = Hilfssatz.
- Bew. = Beweis.
- Beh. = Behauptung.
- Ann. = Annahme.
- n.V. = nach Voraussetzung.
- Vor. = Voraussetzung.
- Bsp. = Beispiel.
- Bem. = Bemerkung.
- $\square$ = Beweisende.

Logische Symbole

- $\neg$ = nicht.
- $\wedge$ = und.
- $\vee$ = oder.
- $\rightarrow$ = impliziert.
- $\iff$ = equivalent.
- $\forall$ = für alle.
- $\exists$ = es existiert.
- $\exists!$ = es existiert genau eines.

Etwas zu Mengen

Mengen werden durch die Angabe ihrer Elemente definiert, z. B. $M = \{1,2,3\} = \{2,1,3\}$ = die Menge, die aus 1, 2 und 3 besteht.

- $M = \mathbb{N}$ = die Menge der natürlichen Zahlen.
- $M = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade}\}$ = gerade Zahlen.
- $\emptyset$ = leere Menge = $\{\}$.

Operationen mit Mengen M, N:

- $x \in M$ – „x ist ein Element von M.“ (Beispiel: $1 \in \{1,2,3\}$)
- $x \notin M$ – „x ist kein Element von M.“
- $M \subseteq N$ – „M ist Teilmenge (TM) von M,“ d. h. wenn $x \in M$, dann auch $x \in N$, *oder*: $x \in M \implies x \in N$.
- $M = N$ – „$M \subseteq N$ und $N \subseteq M$“ *oder*: M und N haben die gleichen Elemente.
- $M \cap N = \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$ = Schnittmenge = Menge der x, die in beiden Mengen liegen.
- $M \cup N = \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$ = Vereinigungsmenge = Menge der x, die in einer der beiden Mengen liegen (oder auch in beiden).
- $M \times N = \{(x,y) : x \in M,\ y \in N\}$ = Menge der geordneten Paare aus M und N. Ferner: $M^2 = M \times M$, $M^n = M \times \cdots \times M$ (n-fach) ($n \in \mathbb{N}$).
- $M \setminus N = \{x \in M : x \notin N\}$ = Differenzmenge = Menge der x aus M, die nicht in N liegen.
- $\mathcal{P}(M) = \{N : N \subseteq M\}$ = Potenzmenge = die Menge aller Teilmengen von M.
- $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$. Zugehörige Rechenregeln, siehe LA.

Abbildungen (Abb.) oder Funktionen (Fkt.):

Seien M und N Mengen. Eine Funktion $f : M \to N,\ x \mapsto f(x)$ besteht aus dem Definitionsbereich M, dem Bildbereich N und der Abbildungsvorschrift f, die jedem „Urbild“ $x \in M$ genau ein „Bild“ $f(x) \in N$ zuordnet. Streng genommen ist die Funktion das Tripel (f, M, N), man schreibt meistens nur f. Beispiel: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto 2x$. Hier schreibt man auch $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = 2x$.

0.2 Vollständige Induktion

Wir setzen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, ($\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$), die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die Brüche $\mathbb{Q}$ samt ihren Rechenregeln vorraus.

Dann gilt das *Prinzip der vollständigen Induktion* (vollst. Ind.).
$M \subseteq \mathbb{N}$ erfülle die beiden folgenden Bedingungen:
(IA) $1 \subseteq M$
(IS) Wenn ein $n \in \mathbb{N}$ zu M gehört, dann gehört auch der Nachfolger $n + 1$ zu M.
Beh. Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Beweis (indirekt). Annahme Die Behauptung sei falsch. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N} \setminus M$. Nach (IA) ist $1 \in M$. Dann liefert (IS), dass $2 = 1 + 1 \in M$. Diesen Schritt wiederholt man $(m - 1)$ mal. Somit erhält man mit $m \in \mathbb{N}$ einen Widerspruch ($\lightning$) zu $m \in \mathbb{N} \setminus M$. Also muss die Annahme falsch sein, d. h. die Behauptung ist wahr. $\square$

Eine *Aussage* ist ein „Satz“, der entweder wahr oder falsch ist, z. B. $7 + 5 = 12$, $3 + n = n$ sind Aussagen. $n + 1$ ist keine Aussage.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Es seien für jedes $n \in \mathbb{N}$ Aussagen $A(n)$ gegeben. Wir wollen zeigen, dass alle Aussagen wahr sind, d. h. $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$ muss gleich $\mathbb{N}$ sein. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion muss man also die folgenden Behauptung zeigen:

(IA) Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(1)$ wahr ist.

(IS) Induktionsschluss: Es gelte die Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein (festes, aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ wahr.

Dann zeigt man, dass auch $A(n + 1)$ wahr ist. Dann folgt, dass alle $A(n)$ wahr sind.

Beispiel 0.1. Zeige: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis (per vollst. Ind.). Es sei $A(n) : 1 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$.
IA: $n = 1 : 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \implies A(1)$ ist wahr.
IS: Es gelten $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV).
Dann: $(1 + \cdots + n) + n + 1 \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$
$\implies A(n + 1)$ ist wahr. $\implies$ IS ist gezeigt. $\implies$ Beh. nach vollst. Ind. $\square$

Unbefriedigend ist die Schreibweise „$+ \cdots +$“, dafür: „rekursive Def.“ des Summenzeichens: Gegeben seien $a_j \in \mathbb{Q}$ für jedes $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \geq m$ für ein festes $m \in \mathbb{Z}$. Dann setzen wir:

$$\sum_{j=m}^{m} a_j := a_m.$$

Wir nehmen an, dass $\sum_{j=m}^{m+n} a_j$ für ein festes, aber beliegiges $n \in \mathbb{N}$ definiert sei. Dann definieren wir:

$$\sum_{j=m}^{m+n+1} a_j := \left(\sum_{j=m}^{m+n} a_j \right) + a_{m+n+1}.$$

Nach dem Induktionsprinzip ist die Menge: $M = \{n \in \mathbb{N} : \sum_{j=m}^{m+n} a_j \text{ ist def.}\}$ gleich $\mathbb{N}$. (Korrektur: Hier braucht man das Induktionsprinzip für $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, siehe Übung.)

Wir haben also den Ausdruck $\sum_{j=m}^{k} a_j$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq m$ definiert. Man schreibt oft $\sum_{j=m}^{k} a_j = a_m + \cdots + a_k$. Genauso definiert man: $\prod_{j=m}^{k} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_k$.
Es gelten die üblichen Rechenregeln, wie man per Induktion zeigt. Dazu ein Beispiel, wobei $m = 1$. Gegeben seien a_j, $b_j \in \mathbb{Q}$, $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$A(n) : \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis (per Ind.). IA: $n = 1 : \sum_{j=1}^{1} a_j + \sum_{j=1}^{1} b_j \overset{\text{Def.}}{=} a_1 + b_1 \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^{1} (a_j + b_j) \implies A(1)$ ist wahr.

IS: Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV). Dann:

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j + \sum_{j=1}^{n+1} b_j \overset{\text{Def.}}{=} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1} \right) + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1} \right)$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) + (a_{n+1} + b_{n+1}) \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^{n+1} (a_j + b_j).$$

$\implies A(n+1)$ ist wahr. $\implies$ IS gilt. $\implies A(m)$ gilt $\forall m \in \mathbb{N}$. $\square$

Beispiel 0.2 (Geometrische Summenformel)**.** Gegeben sei $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.
Beh. Dann gilt:

$$A(n) : \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis (per Ind.). IA: $(n = 1) : \sum_{j=0}^{1} q^j = q^0 + q^1 = 1 + q$,

$\frac{q^2 - 1}{q - 1} = \frac{(q+1)(q-1)}{q - 1} = 1 + q$. „=“ $\implies A(1)$ ist wahr.

IS: Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV). Dann:

$$\sum_{j=0}^{n+1} q^j = \sum_{j=0}^{n} q^j + q^{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}.$$

$\Longrightarrow A(n+1)$ gilt $\Longrightarrow$ (IS) ist gezeigt. $\Longrightarrow$ Ind. zeigt, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Eine weitere rekursive Definition:
Fakultät: $0! = 1$, $1! = 1$. Wenn $n!$ für ein $n \in \mathbb{N}$ definiert ist, dann setzt man $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. Man schreibt: $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Definition (Binomialkoeffizienten)**.** Seien $n, j \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq j$. Dann setzt man

$$\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(1 \cdot 2 \cdots j)(1 \cdot 2 \cdots (n-j))}.$$

Eigenschaften: $(n, j \in \mathbb{N}_0, n \geq j)$

a) $\displaystyle\binom{n}{n-j} = \frac{n!}{(n-j)!(n-n+j)!} = \binom{n}{j}.$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1 = \binom{n}{n}. \tag{0.1}$$

b) Sei $j \geq 1$. Dann: $\displaystyle\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \frac{n! \cdot j}{(j-1)!(n-j+1)! \cdot j} + \frac{n!(n-j+1)}{j! \cdot (n-j)!(n-j+1)}$

$$\overset{\text{Def. Fak.}}{=} \frac{j \cdot n! + (n-j+1)n!}{j!(n-j+1)!} \overset{\text{Def. Fak.}}{=} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} \overset{\text{Def.}}{=} \binom{n+1}{j} \tag{0.2}$$

Beispiel 0.3 (Binomischer Satz)**.** Seien $a, b \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$A(n): \ (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis (per Ind.). IA: $(n = 1)$

$$\sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} a^{1-j} b^j \overset{(0.1)}{=} 1 \cdot a^1 \cdot b^0 + 1 \cdot a^0 \cdot b^1 = (a+b)^1.$$

$\Longrightarrow A(1)$ ist wahr.

IS: $A(n)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV).

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \overset{\text{(IV)}}{=} &\ (a+b)\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\
= &\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j+1} \cdot b^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} \cdot b^{j+1}
\end{aligned}
$$

setze $l = j+1 (\iff j = l-1)$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n+1-j} \cdot b^j + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n+1-l} \cdot b^l \\
&\overset{(0.1)}{=} \underbrace{a^{n+1}}_{(j=0)} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right)}_{\overset{(0.2)}{=} \binom{n+1}{j}} \underbrace{a^{n+1-j} \cdot b^j}_{(j=l \text{ gesetzt})} + \underbrace{1 \cdot a^0 \cdot b^{n+1}}_{(j=n+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} \cdot b^j
\end{aligned}
$$

$\implies A(n+1)$ ist gezeigt $\implies$ (IS) gilt. $\implies$ Beh. folgt mit vollst. Ind. $\square$