Kapitel I

Affine Varietäten

§ 1 Nullstellenmengen und Verschwindungsideale

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

Definition 1.1 Eine Menge $V \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt *affine Varietät*, falls es eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ gibt, sodass gilt

$$V = V(F) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$$

Beispiel 1.2 (i) Wir definieren $\mathbb{K}^n := V(\{0\}) = V(\varnothing)$. Damit wird $\mathbb{K}^n$ zur affinen Varietät.

(ii) Mit $V(\{1\}) = V(1) = \varnothing$ wird $\varnothing$ zur affinen Varietät.

(iii) Für jedes $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ ist $\{x\}$ affine Varietät via

$$\{a\} = V(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

(iv) Allgemeiner gilt: Jeder affine Untervektorraum des $\mathbb{K}^n$ ist affine Varietät.

Bemerkung 1.3 *(i) Aus $F_1 \subseteq F_2$ folgt $V(F_1) \supseteq V(F_2)$.*

(ii) Für $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ gilt $V(f_1 f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$.

(iii) Für $F \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ gilt $V(F) = V(\langle F \rangle)$, wobei $\langle F \rangle$ das von F erzeugte Ideal bezeichnet.

Beweis. (i) Ist $x \in V(F_2)$, so gilt $f(x) = 0$ für alle $f \in F_2$. Wegen $F_1 \subseteq F_2$ folgt $f(x) = 0$ für alle $f \in F_1$, also $x \in V(F_1)$.

(ii) Es gilt $x \in V(f_1 f_2)$ genau dann, wenn $(f_1 f_2)(x) = 0$, also $f_1(x) = 0$ oder $f_2(x) = 0$ und damit $x \in V(f_1) \cup V(f_2)$.

(iii) „ $\supseteq$ " folgt aus (i) mit $F \subseteq \langle F \rangle$. Für die andere Inklusion wähle $x \in V(F)$ und $f \in \langle F \rangle$. Schreibe

$$f = \sum_{i=0}^{r} a_i f_i, \qquad a_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n], f_i \in F$$

Dann ist

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i(x) f_i(x) = 0$$

und damit $x \in V(\langle F \rangle$. $\square$

Folgerung 1.4 Sei $V \subseteq \mathbb{K}^n$ affine Varietät.

(i) Dann gibt es ein Ideal $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ mit $V = V(I)$.

(ii) Dann gibt es es $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ mit $V = V(f_1, \dots, f_r)$.

Beweis.

(i) Für $V = V(F)$ wähle $I = \langle F \rangle$.

(ii) Folgt aus dem Hilbertschen Basissatz. □

Bemerkung + Definition 1.5 (i) Sei R (kommutativer) Ring (mit 1) und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Dann heißt

$$\sqrt{I} := \{f \in R \mid \text{ es existiert } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n \in I\}$$

das *Radikal* von I.

(ii) $\sqrt{I}$ ist Ideal.

(iii) I heißt *Radikalideal*, falls $I = \sqrt{I}$.

(iv) Jedes Primadeal ist Radikalideal.

(v) $n\mathbb{Z}$ ist Radikalideal genau dann, wenn n quadratfrei ist, d.h. $\nu_p(n) \in \{0, 1\}$ für alle $p \in \mathbb{P}$.

(vi) Für jedes Ideal $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ gilt $V(I) = V(\sqrt{I})$.

Definition + Bemerkung 1.6 Sei $V \subseteq \mathbb{K}^n$.

(i) Das *Verschwindungsideal von* V ist

$$I(V) := \{f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$$

(ii) $I(V) \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ist Radikalideal.

(iii) $V(I(V)) \supseteq V$.

Beweis. (i) Folgt aus $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(h \cdot f)(x) = h(x)f(x)$.

(ii) Folgt aus $f^d(x) = f(f(\dots f(x) \dots)) = f(x)^d$.

(iii) Klar. □

Beispiel 1.7 (i) $I(\varnothing) = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

(ii) $I(\mathbb{K}^n) = \{0\}$ genau dann wenn (!) $\mathbb{K}$ unendlich ist.

(iii) Für $n = 2$ betrachte $V = \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{K}^2$. Dann ist

$$I(V) = \left\{ f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} X^i Y^j \;\middle|\; a_{0,0} = 0 \right\}$$

Proposition 1.8 *Seien V, V_1, V_2 affine Varietäten in $\mathbb{K}^n$. Dann gilt*

(i) $V(I(V)) = V$.

(ii) $V_1 \subseteq V_2$ *genau dann, wenn* $I(V_1) \supseteq I(V_2)$.

Beweis. (i) "$\supseteq$" Klar.

"$\subseteq$" Sei $V = V(I')$ für ein Ideal $I' \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Dann ist $I' \subseteq I(V)$, denn für $f \in I'$ ist $f(x) = 0$ für alle $x \in V = V(I')$, also $V(I') \supseteq V(I(V))$.

(ii) Folgt aus (i) und 1.2. □

Bemerkung 1.9 *Frage: Gilt auch $I(V(I)) = I$ für ein Radikalideal? Antwort: Nicht uneingeschränkt! Betrachte*

$$I = \langle X^2 + 1\rangle \in \mathbb{K}[X]$$

Dann ist für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $V(I) = \varnothing$, also $I(V(I)) = I(\varnothing) = \mathbb{R}[X]$.
Gehen wir dagegen in einen algebraisch abgeschlossenen Körper, z.B. $\mathbb{C}$ über:
Dann ist $V(I) = \{i, -i\}$, also

$$I(V(I)) = \langle X - i\rangle \cap \langle X + i\rangle = \langle X^2 + 1\rangle.$$

Unser Ziel soll es also sein, zu zeigen, dass dies allgemein in algebraisch abgeschlossenen Körpern gilt.

Definition + Bemerkung 1.10 Sei $V \subseteq \mathbb{K}^n$ affine Varietät, $I(V)$ das Verschwindungsideal.

(i) Wir definieren die *affine Algebra* bzw. den *affinen Koordinatenring* zu V als

$$A(V) := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \big/ I(V)$$

(ii) $A(V)$ ist eine endlich erzeugte, reduzierte $\mathbb{K}$-Algebra, d.h. $A(V)$ enthält keine nilpotenten Elemente, d.h. für $a \neq 0$ gilt $a^d \neq 0$ für alle $d \in \mathbb{N}$.

(iii) Ist $V' \subseteq V$ affine Varietät, so erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren $p : A(V) \longrightarrow A(V')$.

Beweis. (ii) Sei $a \in A(V)$ mit $a \neq 0$ und $a^d = 0$ für ein $d \geqslant 1$. Wähle $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ mit $\overline{f} = a$ in $A(V)$. Dann ist $f^d \in I(V)$, denn $\overline{f^d} = \overline{f}^d = a^d = 0$, und damit auch $f \in I(V)$, da $I(V)$ Radikalideal ist. Dann gilt $a = 0$, also ein Widerspruch.

(iii) Wegen 1.6 ist $I(V') \supseteq I(V)$. Mit dem Homomorphiesatz erhalten wir eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \arrow[rr] \arrow[dr] & & A(V') \\
& A(V) \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

welche den gewünschten Homomorphismus liefert. □

§ 2 Die Zariski-Topologie

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

Definition + Bemerkung 2.1 (i) Die affinen Varietäten in $\mathbb{K}^n$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{K}^n$.

(ii) Diese Topologie heißt *Zariski-Topologie*.

(iii) Es bezeichne $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ den topologischen Raum $\mathbb{K}^n$ mit der Zariski-Topologie.

Beweis. Wir rechnen die Axiome einer Topologie nach.

(1) Per Definition sind $\mathbb{K}^n = V(0)$ und $\varnothing = V(1)$ affine Varietäten.

(2) Seien $V_1 = V(I_1), V_2 = V(I_2)$ affine Varietäten.

Beh. (a) Es gilt $V(I_1 I_2) \overset{(i)}{\subseteq} V_1 \cup V_2 \overset{(ii)}{\subseteq} V(I_1 \cup I_2) \overset{(iii)}{\subseteq} V(I_1 I_2)$.

Dann gilt an jeder Stelle Gleichheit und damit ist auch $V_1 \cup V_2$ affine Varietät.

Bew. (a) Es gilt

(iii) $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$, also $V(I_1 I_2) \supseteq V(I_1 \cap I_2)$.

(ii) Es ist $I_k \cap I_2 \subseteq I_k$, also $V_k \subseteq V(I_1 \cap I_2)$ für $k \in \{1, 2\}$, also auch $V_1 \cup V_2 \subseteq V(I_1 \cap I_2)$.

(i) Sei $x \in V(I_1 I_2)$, ohne Einschränkung $x \notin V_1$. Zu zeigen: $x \in V_2$.

Da $x \notin V_1$, gibt es ein $f \in I_1$, sodass $f(x) \neq 0$. Sei nun $g \in I_2$. Nach Voraussetzung ist dann

$$0 = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

und damit $g(x) = 0$. Dies impliziert $x \in V_(I_2) = V_2$.

(3) Seien für eine beliebige Indexmenge J V_i, $i \in J$ affine Varietäten, es gelte $V_i = V(I_i)$. Dann ist

$$\bigcap_{i \in J} V_i = V\left(\bigcup_{i \in J} I_i\right) = V\left(\left\langle \bigcup_{i \in J} I_i \right\rangle\right) := V\left(\sum_{i \in J} I_i\right)$$

ebenfalls affine Varietät, was zu zeigen war. □

Beispiel 2.2 Betrachte $n = 1$. Dann ist $V \subseteq \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$ abgeschlossen genau dann, wenn $V = \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$ oder V endlich ist. Insbesondere ist $\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$ damit nicht hausdorffsch.

Beispiel 2.3 Ist $\mathbb{K}$ endlich, so ist die Zariski-Topologie auf $\mathbb{K}^n$ die diskrete Topologie.

Proposition 2.4 *Sei $\mathbb{K}$ unendlich. Dann ist $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ nicht hausdorffsch.*

Beweis. Siehe Übung.

Proposition 2.5 *Für $f \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ sei*

$$D(f) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) \neq 0\} = \mathbb{K}^n \backslash V(f)$$

Dann bildet die Familie $\{D(f)\}_{f \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]}$ eine Basis der Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$.

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ offen. Es ist zu zeigen, dass U eine Menge $D(f)$ für ein geeignetes f enthält. Offenbar ist $V := \mathbb{K}^n \backslash U$ abgeschlossen, also eine affine Varietät. Dann schreibe $V = V(I)$ für ein Ideal $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$.

Sei nun $x \in U$. Da $x \notin V$ existiert ein $f \in I(V)$, sodass gilt $f(x) \neq 0$, also $x \in D(f)$. Da $f \in I$, gilt $\langle f \rangle \subseteq I$, also $V(f) \supseteq V(I) = V$ und damit $D(f) \subseteq U$, was zu zeigen war. □

Definition + Bemerkung 2.6 Für jede affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ heißt die Spurtopologie ebenfalls *Zariski-Topologie*.

Für $f \in A(V) \backslash \mathbb{K}$ sei

$$D(f) := \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}$$

Dann ist die Familie $\{D(F)\}_{f \in A(V) \backslash \mathbb{K}}$ offen und eine Basis der Zariski-Topologie.

§ 3 Irreduzible Varietäten

Definition 3.1 Sei X ein topologischer Raum.

(i) X heißt *reduzibel*, falls es echte abgeschlossene Teilmengen $V, W \subset X$ gibt mit $V \cup W = X$.

(ii) Ist X nicht reduzibel, so heißt X *irreduzibel*.

(iii) Eine maximale irreduzible Teilmenge von X heißt *irreduzible Komponente*.

Beispiel 3.2 Sei X ein Hausdorffraum. Dann ist X irreduzibel genau dann wenn $|X| \leqslant 1$, also $X \in \{\{\text{pt}\}, \varnothing\}$.

Beweis. Seien $x, y \in X$, $x \neq y$ und U_x, U_y offene Umgebungen von x, y mit $U_x \cap U_y = \varnothing$. Dann sind $V_x := X\backslash U_x$, $V_y := X\backslash U_y$ abgeschlossene Mengen mit

$$V_x \cup V_y = (X\backslash U_x) \cup (X\backslash U_y) = X\backslash(U_x \cap U_y) = X$$

Bemerkung 3.3 *(i) Sei X topologischer Raum, $V \subseteq X$ irreduzibel. Dann ist auch $\overline{V}$ irreduzibel.*

(ii) Irreduzible Komponenten sind abgeschlossen.

Beispiel 3.4 (i) Sei $\mathbb{K}$ unendlicher Körper. Dann ist $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ irreduzibel für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) = V(I_1) \cup V(I_2)$ mit $I_1 \neq \langle 0 \rangle \neq I_2$. Dann gilt nach Bemerkung 2.1

$$\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) = V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_2 I_2)$$

Wähle also $f \in I_2\backslash\{0\}, g \in I_2\backslash\{0\}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{K}^n$ $(f \cdot g)(x) = 0$, also $f \cdot g = 0$, ein Widerspruch zur Nullteilerfreiheit.

$V(X \cdot Y) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ ist reduzibel mit $V(X \cdot Y) = V(X) \cup V(Y)$.

Satz 3.5 *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietät, $V \neq \varnothing$. Dann gilt*

$$V \textit{ ist irreduzibel} \quad \Longleftrightarrow \quad I(V) \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \textit{ ist Primideal}$$

Beweis. "$\Rightarrow$" Seien $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $fg \in I(V)$, ohne Einschränkung $f \notin I(V)$. Dann gibt es $x \in V$ mit $f(x) \neq 0$, das heißt es gilt $V \nsubseteq V(f)$, nach Voraussetzung aber $V \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$. Damit ist

$$(V \cap V(f)) \cup (V \cap V(g)) = V$$

Da V aber irreduzibel ist und $V \cap V(f) \neq V$, muss gelten $V \cap V(g) = V$, also $V(g) \subseteq V$ und damit $g \in I(V)$.

"$\Leftarrow$" Sei $V = V_1 \cup V_2$ ein Zerlegung von V in zwei abgeschlossene Teilmengen V_1 und V_2. Dann ist $V_1 = V(I_1), V_2 = V(I_2)$ für Ideale $I_1, I_2 \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Sei ohne Einschränkung $V \neq V_1$, also $V \nsubseteq V(I_1)$. Dann gibt es $x \in V, f \in I_1$ mit $f(x) \neq 0$, also $f \notin I(V)$. Zeige also $V \subseteq V(I_2)$. Hierfür genügt zu zeigen $I_2 \subseteq I(V)$.

Sei nun $g \in I_2$. Dann ist $fg \in I_1 I_2$. Wegen $V = V_1 \cup V_2$, also $V = V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2)$, gilt $I_1 I_2 \subseteq I(V)$, also $fg \in I(V)$. Da $I(V)$ prim ist und $f \notin I(V)$, gilt $g \in I(V)$ und damit $I_2 \subseteq I(V)$.

Satz 3.6 *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietät. Dann gilt*

(i) V ist endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten.

(ii) Gilt $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ mit irreduziblen Varietäten $V_1, \ldots, V_r$ und $V_i \nsubseteq V_j$ für $i \neq j$ (das heißt, kein V_i ist überflüssig), so sind die V_i die irreduziblen Komponenten von V, also insbesondere eindeutig.

Beweis. (i) Definiere

$$\mathcal{B} := \{V | \text{ V ist nicht endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten } \}$$

$$\mathcal{I} := \{I(V) \mid V \in \mathcal{B}\}$$

Zu zeigen: $\mathcal{B}, \mathcal{I}$ sind leer.
Angenommen $\mathcal{I} \neq \varnothing$. Dann enthält $\mathcal{I}$ ein maximales Element I_0, denn $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ ist noethersch, also wird jede aufsteigende Kette von Idealen stationär. Schreibe $I_0 = I(V_0)$ mit $V_0 \in \mathcal{B}$. V_0 ist reduzibel, schreibe also $V_0 = V_1 \cup V_2$ mit abgeschlossenen Mengen $V_1 \subsetneq V_0 \supsetneq V_2$, also gilt dann $I(V_1) \supsetneq I_0 \subsetneq I(V_2)$. Da I_0 maximal ist, ist $I(V_1), I(V_2) \notin \mathcal{I}$ und damit $V_1, V_2 \notin |B$. Per Definition sind dann also V_1, V_2 darstellbar als endliche Vereinigungen irreduzibler Varietäten:

$$V_1 = \bigcup_{i=1}^{n} U_i, \qquad V_2 = \bigcup_{i=n+1}^{m} U_i$$

Damit ist aber V endliche Vereinigung von irreduziblen Komponenten, also $V \in \mathcal{B}$, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(ii) Zeige zunächst die Eindeutigkeit. Sei hierfür $W \subseteq V$ irreduzible Komponente. Zu zeigen: $W = V_i$ für ein $1 \leqslant i \leqslant r$. Schreibe

$$W = W \cap V = \bigcup_{i=1}^{r} \underbrace{(W \cap V_i)}_{\text{abgeschlossen}}$$

Da W irreduzibel ist, gilt bereits $W \cap V_i = W$, also $W \subseteq V_i$ für ein $1 \leqslant i \leqslant r$. Da aber auch V_i irreduzibel ist, gilt $W = V_i$.
Zeige nun, dass $V_1, \ldots, V_r$ irreduzible Komponenten sind. Sei $1 \leqslant i \leqslant r$. Dann existiert eine irreduzible Komponente W von V mit $V_i \subseteq W$, also $W = V_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, r\}$. Also erhalten wir $V_i \subseteq V_j$ und wegen $V_i \nsubseteq V_j$ dann $i = j$ und schließlich $W = V_i$. Damit ist V_i irreduzible Komponente.

Folgerung 3.7 Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietät, $I = I(V)$ ihr Verschwindungsideal und $A(V) := \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_N]/I(V) := \mathbb{K}[V]$ ihr affiner Koordinatenring. Dann gilt

(i) $\mathbb{K}[V]$ hat nur endlich viele minimale Primideale.

(ii) In $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ gibt es nur endlich viele Primideale, die I umfassen und minimal mit dieser Eigenschaft sind.

Beweis. (i) Folgt aus (ii), denn (surjektive) (Ur-)Bilder von Primidealen sind wieder Primideale.

(ii) Ist $p \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ prim sodass $\mathfrak{p} \supseteq I$ und minimal mit dieser Eigenschaft. Dann ist $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(I)$ irreduzible Komponente und nach 3.5 ist die Anzahl dieser endlich.

§ 4 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Satz 4.1 (*Hilbertscher Nullstellensatz*) *Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Für jedes Ideal $\{0\} \neq I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ ist $V(I) \neq \varnothing$.

(ii) Für jedes Ideal $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ ist $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Satz 4.2 (*Algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes*) *Sei $\mathbb{K}$ Körper, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{m} \lhd \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ ein maximales Ideal. Dann ist $\mathbb{L} := \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{m}$ eine algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{K}$.*

Folgerung 4.3 Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es Bijektionen zwischen folgenden Mengen:

(i) $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n\}$

(ii) Ideale $\{I_x = \langle X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n \rangle \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1 \ldots, X_n]\}$

(iii) Maximale Ideale $\{\mathfrak{m} \lhd \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]\}$.

Beweis. "(i)⇒(ii)" Klar.

"(ii)⇒(iii)" Sei für $x \in \mathbb{K}^n$ $\phi : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathbb{K},\ f \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$. Dann ist offenbar $\ker(\phi) = I_x$, und da ϕ surjektiv ist damit

$$\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]/I_x \cong \mathbb{K}$$

"(iii)⇒(ii)" Sei $\mathfrak{m} \lhd \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ maximales Ideal. Mit Satz 4.2 gilt also

$$\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$$

Sei nun

$$\phi : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$$

die Restklassenabbildung, $x_i := \phi(X_i)$. Dann gilt $\mathfrak{m} = \ker(\phi)$ und $\mathfrak{m} = I_x$. □

Beweis von Satz 4.1. (i) Sei $I \lhd \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ ein echtes Ideal. Dann existiert nach Zorn's Lemma ein maximales Ideal $I \subseteq \mathfrak{m} \lhd \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Damit gilt $V(I) \supseteq V(\mathfrak{m})$. Nach Folgerung 4.3 gibt es damit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\mathfrak{m} = \langle X_1 - x_1, \ldots, X_1 - x_1 \rangle$$

und damit $x \in V(\mathfrak{m}) \subseteq V(I)$, also gerade $V(I) \neq \varnothing$.

(ii) Sei $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ Ideal. Dann gilt offenbar $\sqrt{I} \subseteq I(V(I))$. Zu zeigen ist somit $I(V(I)) \subseteq \sqrt{I}$. Sei also $g \in I(V(I))$. Zeige: Es existiert $d \in \mathbb{N}$ mit $g^d \in \sqrt{I}$. Seien dazu $f_1, \ldots, f_m$ Erzeuger von I und

$$J \ \trianglelefteq\ \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n, Y]$$

das von $f_1 \ldots, f_m$ und dem Polynom $gY - 1$ erzeugte Ideal.

Beh. (a) Es gilt $V(J) = \varnothing$.

Bew. (a) Sei das Tupel $(x_1, \ldots, x_n, y) := (x', y) := x \in V(J)$. Dann gilt für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$0 = f_i(x) = f_i(x') \quad \Longrightarrow \quad x' \in V(I)$$

Da $g \in I(V(I))$, gilt $g(x') = 0$, denn $x' \in V(I)$. Dann folgt wegen $g(x') = 0$

$$0 = (gY - 1)(x) = (g(x)Y(x) - 1) = g(x') \cdot Y - 1 = -1,$$

ein Widerspruch. Also gilt $V(J) = \varnothing$.

Damit folgt $J = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, also insbesondere $1 \in J$. Schreibe

$$1 = \sum_{i=1}^{m} b_i f_i + c \cdot (gY - 1), \qquad b_i, c \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n, Y]$$

Betrachte nun den Ring

$$R := \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] / \langle gY - 1 \rangle \cong \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \left[\frac{1}{g} \right]$$

Für die Isomorphie betrachte den surjektiven Ringhomomorphismus

$$\phi : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n, Y] \longrightarrow \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \left[\frac{1}{g} \right], \qquad \begin{cases} X_i \mapsto X_i \\ Y \mapsto \frac{1}{g} \end{cases}$$

Für diesen gilt

$$\ker(\phi) = \left\langle \left\{ Y = \frac{1}{g} \right\} \right\rangle = \langle gY - 1 \rangle$$

In R gilt

$$1 \;=\; \sum_{i=1}^{m} \overline{b_i f_i} + \overline{c(gY - 1)} \;=\; \sum_{i=1}^{m} \overline{b_i} f_i$$

Schreibe

$$\overline{b_i} = \sum_{j=1}^{d_i} c_j \frac{1}{g^j} = \sum_{j=1}^{d_i} \frac{c_0 g^{d_i} + c_1 g^{d_i - 1} + \ldots + c_{d_i}}{g^{d_i}} := \frac{c_i}{g^{d_i}}$$

Sei $d := \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \{d_i\}$. Dann gilt $g^d \, \overline{b_i} \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Schließlich ist

$$g^d = g^d \cdot 1 = g^d \cdot \sum_{j=1}^{m} \overline{b_i} f_i = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{g^d \, \overline{b_i}}_{\in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]} f_i \in I,$$

was die Behauptung liefert. □

Beweis von Satz 4.2. Durch Induktion über n.

n=1 $\mathfrak{m} = \langle f \rangle$ für ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{K}[X]$ (Algebra).

n>1 Angenommen $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ ist nicht algebraisch. Dann ist ohne Einschränkung X_1 transzendent über $\mathbb{K}$, $x_i := \overline{X_i}$. Dann ist

$$\mathbb{K}(X) = \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[X]) \cong \mathbb{K}(x_1) \subseteq \mathbb{L}$$

Weiter wird $\mathbb{L}$ über $\mathbb{K}(x_1)$ von $x_2, \ldots, x_n$ erzeugt. Damit ist

$$\mathbb{L} \cong \mathbb{K}(x_1)[X_2, \ldots, X_n] \big/ \mathfrak{m}'$$

für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}' \lhd \mathbb{K}(x_1)[X_2, \ldots, X_n]$. Per Induktionsvoraussetzung sind $x_2, \ldots, x_n$ damit algebraisch über $\mathbb{K}(x_1)$, es gibt also normierte Minimalpolynome $f_2, \ldots, f_m \in \mathbb{K}(x_1)[X]$ aus denen Gleichungen

$$f_i(x_i) \;=\; x_i^{m_i} \;+\; \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} x_i^j \;=\; 0$$

mit geeigneten $a_{ij} \in \mathbb{K}(x_1)$. Sei nun R der kleinste Teilring vom $\mathbb{K}(x_1)$, der $\mathbb{K}[x_1]$ und alle a_{ij} enthält. Dann sind $x_2, \ldots, x_n$ ganz über R, also $\mathbb{L}/R$ eine ganze Ringerweiterung. Wir erhalten:

(1) R ist kein Körper, da $\mathbb{K}[x_1]$ unendlich viele Primelemente enthält, R aber nur endlich viele Primfaktoren als Nenner enthält.

(2) Jedes $a \in R \backslash \{0\}$ besitzt ein Inverses in R. Offenbar ist $\frac{1}{a}$ in $\mathbb{L}$ enthalten. Andererseits ist $\frac{1}{a}$ ganz über R, das heißt es existiert eine Darstellung

$$\left(\frac{1}{a}\right)^m \;+\; \sum_{j=0}^{m-1} b_j \left(\frac{1}{a}\right)^j \;=\; 0$$

für geeignete $b_j \in R$. dann gilt aber

$$1 \;=\; -\sum_{j=0}^{m-1} b_j \; a^{m-j} \;=\; -a \cdot \sum_{j=0}^{m-1} b_j \; a^{m-j-1}$$

und damit $a \in R^\times$, womit R zum Körper wird, also ein Widerspruch zu (1).

Damit war die Annahme zu Beginn falsch und x_1, und damit auch $\mathbb{L}$ ist algebraisch über $\mathbb{K}$. $\square$

Folgerung 4.4 Für jeden Körper $\mathbb{K}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{V}_n(\mathbb{K}) := \{V \subseteq \mathbb{K}^n \mid V \text{ is affine Varietät } \}$$

$$\mathcal{I}_n(\mathbb{K}) := \{I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \mid I = \sqrt{I}\}$$

$$V := V_{n,\mathbb{K}} : \mathcal{I}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{V}_n(\mathbb{K}), \quad I \mapsto V(I)$$

$$I := I_{n,\mathbb{K}} : \mathcal{V}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{I}_n(\mathbb{K}), \quad V \mapsto I(V)$$

Dann gilt

$$\mathbb{K} \text{ ist algebraisch abgeschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad I \text{ und } V \text{ sind zueinander invers}$$

Bemerkung 4.5 *Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen und ist $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietät, so entsprechen die Punkte in V bijektiv den maximalen Idealen in $A(V) := \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \big/ I(V)$.*

§ 5 Morphismen zwischen affinen Varietäten

Definition + Bemerkung 5.1 Sei $\mathbb{K}$ Körper, $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$ affine Varietäten.

(i) Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt *Morphismus*, falls es Polynome $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ gibt mit $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V \subseteq \mathbb{K}^n$.

(ii) Jeder Morphiums $f : V \longrightarrow W$ ist die Einschränkung eines Morphismus $\tilde{f} : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$.

(iii) Ein Morphismus $f : V \longrightarrow W$ heißt *Isomorphismus*, falls es einen Morphismus $g : W \longrightarrow V$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$ und $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

(iv) Die affinen Varietäten bilden zusammen mit den Morphismen eine Kategorie $\underline{\mathrm{Aff}}(\mathbb{K})$

Beispiel 5.2 (0) Die Identität

$$\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n(\mathbb{K})} : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

ist ein Morphismus mit $f_i = X_i$.

(i) Weitere Morphismen sind

$$\textit{Einbettungen:}\ \ \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^{n+m}(\mathbb{K}),\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0 \ldots, 0)$$

$$\textit{Projektionen:}\ \ \mathbb{A}^{n+m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K}),\ (x_1, \ldots x_{n+m}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

$$\textit{Vertauschungen:}\ \ \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K}),\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), \quad \sigma \in S_n$$

(ii) Jedes $f \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ ist ein Morphimsus $f : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{K})$.

(iii) Sei $V = \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$, $W = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$. Definiere

$$f : V \longrightarrow W,\ x \mapsto (x^2, x^3)$$

Dann ist f ein Morphismus. Außerdem ist f bijektiv mit Umkehrabbildung

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

denn es gilt

$$f(g(x,y)) = f\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}\right) = \left(\frac{x^3}{x^2}, \frac{y^3}{y^2}\right) = (x, y)$$

$$g(f(x)) = g\left(x^2, x^3\right) = \left(\frac{x^3}{x^2}\right) = x$$

Aber: g ist kein Morphismus (und f damit kein Isomorphismus), falls $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, denn andernfalls gäbe es ein Polynom $h \in \mathbb{K}[X, Y]$ mit $h(X, Y) = \frac{Y}{X}$, also

$$X \cdot h - Y \in I(W) = I(V(\langle Y^2 - X^3 \rangle)) = \langle Y^2 - X^3 \rangle$$

und damit $X \cdot h - Y = H \cdot (Y^2 - X^3)$ für ein $H \in \mathbb{K}[X, Y]$ $\lightning$.

(iv) Sei $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p > 0$. Dann heißt

$$f : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^p, \ldots, x_n^p)$$

Frobenius-Homomorphismus. Es gilt: f ist injektiv, denn für $x^p = y^p$ gilt

$$0 = x^p - y^p = (x-y)^p \implies x - y = 0 \implies x = y$$

f ist surjektiv, falls $\mathbb{K}$ enthalten ist in $\overline{\mathbb{F}}_p$ (im Allgemeinen jedoch nicht!). Damit sind die Fixpunkte unter f gerade jene, deren Koordinaten alle in $\mathbb{F}_p$ liegen, also

$$f(x) = x \iff x \in \mathbb{F}_p^n \text{ für } x = (x_1, \ldots, x_n)$$

Bemerkung 5.3 *Morphismen affiner Varietäten sind stetig bezüglich der Zariski-Toipologie.*

Beweis. Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$ affine Varietäten und $f : V \longrightarrow W$ ein Morphismus. Zeige, dass das Urbild abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist.
Sei $Z \subseteq W$ abgeschlossen. Dann ist Z auch abgeschlossen in $\mathbb{A}^m(\mathbb{K})$, also existiert ein Ideal

$$J \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$$

mit $Z = V(J)$. Zeige: Z ist abgeschlossen, also affine Varietät.
Beh. (a) Es gilt $f^{-1}(Z) = V(I)$ mit $I = \{g \circ f \mid g \in J\} \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Dazu:
Bew. (a) Zunächst sehen wir ein

$$\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \xrightarrow{f} \mathbb{A}^m(\mathbb{K}) \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$$

Damit ist $g \circ f : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{K})$ Morphismus, also gerade $g \circ f \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Nun gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Z) \iff f(x) \in Z &\iff g(f(x)) = 0 = (g \circ f)(x) \text{ für alle } g \in J \\ &\iff h(x) = 0 \text{ für alle } h \in I \\ &\iff x \in V(I) \end{aligned}$$

also gerade die Behauptung. □

Bemerkung 5.4 *Für jede affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ bilden die Morphismen $V \longrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$ eine $\mathbb{K}$-Algebra $\mathbb{K}[V]$. Es gilt*

$$\mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]/I(V) = A(V)$$

Beweis. Offenbar ist $\mathrm{Mor}(V, \mathbb{A}^1(\mathbb{K}))$ eine $\mathbb{K}$-Unteralgebra von $\mathrm{Abb}(V, \mathbb{K})$. Weiter ist die Abbildung

$$\phi : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathbb{K}[V], \quad f \mapsto f|_V$$

surjektiver Homomorphimus mit $\ker(\phi) = I(V)$, also

$$\mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]/I(V),$$

was zu zeigen war. □

Proposition 5.5 *Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$ affine Varietäten.*

(i) Für jeden Morphismus $f : V \longrightarrow W$ ist die Abbildung

$$f^{\#} : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V], \quad g \mapsto g \circ f$$

ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren.

(ii) Die Abbildung

$$\alpha : \mathrm{Mor}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[W], \mathbb{K}[V]), \quad f \mapsto f^{\#}$$

ist bijektiv.

Beweis. (i) $g \circ f$ ist als Komposition von Morphismen ein Morphismus $g \circ f : V \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ und es gilt

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

usw. (diese Eigenschaften kennen wir bereits lange). Damit ist $f^{\#}$ Homomorphismus.

(ii) Offenbar ist die Abbildung mit (i) wohldefiniert. Für die Bijektivität zeige

injektiv. Seien $f_1, f_2 \in \mathrm{Mor}(V, W)$ mit $f_1^{\#} = f_2^{\#}$, also $g \circ f_1 = g \circ f_2$ für alle $g \in \mathbb{K}[W]$. Insbesondere erhalten für die Projektionen p_i anstelle von g für alle $1 \leqslant i \leqslant m$

$$p_i \circ f_1 = p_i \circ f_2 \quad \Longrightarrow \quad f_{1i} = f_{2i} \quad \Longrightarrow \quad f_1 = f_2$$

surjektiv. Sei $\phi : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V]$ Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren, also $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[W], \mathbb{K}[V])$. Definiere

$$f : V \longrightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{K}), \quad x \mapsto (\phi(p_1)(x), \ldots, \phi(p_m)(x))$$

Zeige nun

Beh. (1) $f(V) \subseteq W$.

Beh. (2) $f^{\#} = \phi$.

Dann ist f ein Urbild von ϕ und die Behauptung folgt.

Bew. (2) Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt $f^{\#}(p_i) = p_i \circ f \overset{Def.}{=} \phi(p_i)$. Da die p_i die $\mathbb{K}$-Algebra $\mathbb{K}[W]$ erzeugen, gilt $f^{\#} = \phi$.

Bew. (1) Zu zeigen ist $f(V) \subseteq V(I(W)) \subseteq W$. Sei also $x \in V$ und $g \in I(W)$ und zeige $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0$. Sei dazu

$$\tilde{\phi} : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_m] \longrightarrow \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$$

ein Homomorphismus, der die X_i abbildet auf eine Reptäsentanten von $\phi(p_i)$ für $1 \leqslant i \leqslant m$. Genauer, betrachte

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_m] \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\pi_W"] & \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \arrow[d, "\pi_V"] \\
W \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{K}[V]
\end{tikzcd}$$

Es gilt $\tilde{\phi}(I(W)) \subseteq I(V)$, also $\tilde{\phi}(g) \in I(V)$. Damit erhalten wir

$$0 = \tilde{\phi}(g)(x) \;=\; g\left(\phi(p_1)(x), \ldots, \phi(p_m)(x)\right) \;=\; (g \circ f)(x)$$

und damit die Behauptung. □

Folgerung 5.6 Die Zuordnung $V \longrightarrow \mathbb{K}[V]$ ist ein *kontravarianter* (=richtungsumkehrender) und *volltreuer* (=bijektiver) *Funktor* via

$$\Phi : \underline{\mathrm{Aff}}(\mathbb{K}) \longrightarrow \underline{\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{red}}$$

Φ ist ein Morphismus auf Objekte:

$$\Phi(f) = f^{\#}, \quad \Phi(V) = \mathbb{K}[V]$$

Für $f \in \mathrm{Mor}(V, W)$ ist

$$\Phi(f) : \Phi(W) = \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V] = \Phi(V), \quad g \mapsto g \circ f = f^{\#}$$

$$\Phi(\mathrm{id}) = \mathrm{id} = \mathrm{id}^{\#}$$

$$\Phi(f_2 \circ f_1) = (f_2 \circ f_1)^{\#} = f_1^{\#} \circ f_2^{\#} = \Phi(f_1) \circ \Phi(f_2)$$

Das heißt, wir haben kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_2 \circ f_1"'] & W \arrow[d, "f_2"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K}[Z] \arrow[r, "f_2^{\#}"] \arrow[dr, "(f_2 \circ f_1)^{\#}"'] & \mathbb{K}[W] \arrow[d, "f_1^{\#}"] \\ & \mathbb{K}[V] \end{tikzcd}$$

Bemerkung 5.7 *Seien V, W affine Varietäten über $\mathbb{K}$ und*

$$\phi : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V]$$

ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren. Ist $f : V \longrightarrow W$ der zugehörige Morphismus (also $f^{\#} = \phi$), so gilt für jedes $x \in V$:

$$\mathfrak{m}_{f(x)} = \phi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$$

Beweis. Es gilt

$$\mathfrak{m}_x = \{g \in \mathbb{K}[V] \mid g(x) = 0\},$$

also

$$\phi^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \{h \in \mathbb{K}[W] \mid \phi \circ h \in \mathfrak{m}_x\} = \{h \in \mathbb{K}[W] \mid h(f(x)) = 0\} = \mathfrak{m}_{f(x)},$$

was zu zeigen war. □

Beispiel 5.8 Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \longrightarrow V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K}), \quad x \mapsto (x^2, x^3)$$

Dann ist

$$f^{\#} : \mathbb{K}[X,Y] / \langle Y^2 - X^3 \rangle \longrightarrow \mathbb{K}[T], \quad X \mapsto T^2, Y \mapsto T^3$$

Offensichtlich ist $f^{\#}$ Homomorphismus. Aber: Kein Isomorphismus, denn $f^{\#}$ ist zwar injektiv (nach Konstruktion), aber nicht surjektiv, da $T \notin \mathrm{Bild}(f^{\#})$.
Bemerkung: Bei Übergang in den Quotientenkörper existiert die Fortsetzung $\tilde{f}^{\#}$, da $\langle X^2 - Y^3 \rangle$ prim und damit $\mathbb{K}[X,Y] / \langle Y^2 - X^3 \rangle$ nullteilerfrei ist. Hier gilt $T = \tilde{f}^{\#}\left(\frac{y}{x}\right)$, $\tilde{f}^{\#}$ ist also Isomorphismus.

Satz 5.9 *Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist*

$$\Phi : \underline{\mathit{Aff}}(\mathbb{K}) \longrightarrow \underline{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Alg}}^{red}, \quad V \mapsto \mathbb{K}[V]$$

eine Äquivalenz von Kategorien, das heißt, es existiert ein Funktor

$$\Psi : \underline{\mathbb{K}\text{-}\mathit{Alg}}^{red} \longrightarrow \underline{\mathit{Aff}}_{\mathbb{K}}$$

sodass $\Phi \circ \Psi$ und $\Psi \circ \Phi$ (als Funktoren) isomorph zur Identität sind.

Beweis. Sei A endlich erzeugte, reduzierte $\mathbb{K}$-Algebra und $a_1, \dots, a_n$ Erzeuger von A als $\mathbb{K}$-Algebra. Dann gibt es einen surjektiven Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren

$$\pi : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow A, \quad X_i \mapsto a_i$$

Setze $V := V(\ker(\pi))$. Dann ist

$$\mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / I(V(\ker(\pi)) \overset{HNS}{=} \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / \ker(\pi) = A$$

§ 6 Reguläre Funktionen

In diesem Paragraph sei $\mathbb{K}$ stets ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Bemerkung 6.1 *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietät, $h \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Dann gilt*

$$\overline{h} \in (\mathbb{K}[V])^{\times} \iff V(h) \cap V = \varnothing$$

Beweis. Wir erhalten folgende Kette von Äquivalenzen:
$V \cap V(h) = V(I(V) + \langle h \rangle) \overset{!}{=} \varnothing$
$\iff$ HNS: $I(V) + \langle h \rangle = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$
$\iff$ $1 = f + gh$ für ein $f \in I(V)$ und $g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$
$\iff$ $1 = \overline{g}\overline{h} \mod \mathbb{K}[V]$
$\iff$ $\overline{h} \in (\mathbb{K}[V])^{\times}$.

Definition 6.2 Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietät, $U \subseteq V$ offen, $x \in U$.

(i) Eine Abbildung $f : U \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt *regulär in* x, falls es eine offene Umgebung $U_x \subseteq U$ von x und $g, h \in \mathbb{K}[V]$ gibt, sodass für alle $y \in U_x$ gilt

$$h(y) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(y) = \frac{g(y)}{h(y)}$$

(ii) f heißt *regulär auf* U, falls f regulär in x ist für alle $x \in U$.

(iii) Die Menge der regulären Funktionen auf U

$$\mathcal{O}_V(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist reguläre Funktion auf } U\}$$

ist eine $\mathbb{K}$-Algebra.

(iv) Die Einschränkung

$$\rho_U : \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathcal{O}_V(U), \quad f \mapsto f|_U$$

ist ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren.

(v) ρ_U ist injektiv genau dann, wenn U dicht in V ist.

Beweis von (v) "$\Leftarrow$" Sei $f \in \ker(\rho_U)$, also $f|_U = 0$. Dann gilt $U \subseteq V(f)$, und da $V(f)$ abgeschlossen ist also auch $\overline{U} \subseteq V(f)$. Da U dicht in V ist erhalten wir $V = \overline{U} \subseteq V(f)$ und damit $f = 0$ in $\mathbb{K}[V]$.

"$\Rightarrow$" Angenommen es gelte $\overline{U} \neq V$. Wähle $x \in V \backslash \overline{U}$. Da $V(I(U)) = \overline{U}$, existiert $f \in I(U)$ mit $f(x) \neq 0$. Damit ist $f \neq 0$ in $\mathbb{K}[V]$ mit $f|_U = \rho_U(f) = 0$, also ist ρ_U nicht injektiv.

Beispiel 6.3 (i) $V = \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$, $U = \mathbb{A}^1(\mathbb{K})\backslash\{0\}$. Dann ist $\frac{1}{X} \in \mathcal{O}_V(U)$. Setze dafür $g(y) = 1$ und $h(y) = X$.

(ii) $V = V(Y^2 - X^3)$, $U = V\backslash\{(0,0)\}$. Dann ist $\frac{Y}{X} \in \mathcal{O}_V(U)$.

(iii) $V = \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, $f \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_V(D(f))$.

Proposition + Definiton 6.4 Für jede affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ ist die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{O}_V(U)$ für alle $U \subseteq V$ offen eine *Garbe von Ringen* auf V. Das bedeutet im Einzelnen:

(i) Für offene Teilmengen $U' \subseteq U \subseteq V$ ist

$$\rho^U_{U'} : \mathcal{O}_V(U) \longrightarrow \mathcal{O}_V(U'), \quad f \mapsto f|_{U'}$$

ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren und es gilt für $U'' \subseteq U' \subseteq U \subseteq V$ offen:

$$\rho^U_{U''} \;=\; \rho^{U'}_{U''} \circ \rho^U_{U'}$$

(ii) Sei $U \subseteq V$ offen, $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U. Dann gilt

(1) Für $f \in \mathcal{O}_V(U)$ ist $f = 0 \iff \rho^U_{U_i}(f) = 0$ für alle $i \in I$.

(2) Ist für jedes $i \in I$ ein $f_i \in \mathcal{O}_V(U_i)$ gegeben, sodass

$$\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(f_i) \;=\; \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(f_j) \qquad \text{für alle } i, j \in I$$

so gibt es $f \in \mathcal{O}_V(U)$ mit $f_i = \rho^U_{U_i}(f)$ für alle $i \in I$.

Proposition 6.5 *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietät. Dann gelten folgende Endlichkeitsaussagen:*

(i) Jede absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen von V wird stationär, d.h. V ist noetherscher topologische Raum.

(ii) Jede offene Überdeckung von V besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d.h. V ist kompakt.

(iii) Jede offene Teilmenge von V ist kompakt.

Beweis. (i) Sei $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \ldots$ abgeschlossen in V, d.h. $V_j = V(I_j)$ mit Idealen $I_j \trianglelefteq \mathbb{K}[V]$ für all $j \in I$. Aus $V_j \supseteq V_{j+1}$ folgt $I_j \subseteq I_{j+1}$, also ist $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ absteigende Kette von Idealen. Da $\mathbb{K}[V]$ noethersch ist, wird wird die Kette der Ideale stationär, so auch die V_j.

(ii) Folgt unmittelbar aus (iii).

(iii) Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von $U \subseteq V$ offen. Angenommen, es gibt eine Folge $(U_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (U_i)_{i\in I}$ mit

$$\bigcup_{n=1}^{k} U_n \neq U \quad \text{und} \quad U_{k+1} \nsubseteq \bigcup_{n=1}^{k} U_n \quad \text{fÃŒr alle } k \in \mathbb{N}.$$

FÃŒr

$$V_k := V \setminus \bigcup_{n=1}^{k} U_n$$

wäre $V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \ldots$ eine nicht stationär werdende, absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen, ein Widerspruch zu (i). □

Satz 6.6 *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Varietät, $f \in \mathbb{K}[V]\setminus\{0\}$. Dann ist*

$$\mathcal{O}_V(D(f)) \;\cong\; \mathbb{K}[V]_f$$

wobei $\mathbb{K}[V]_f$ die Lokalisierung von $\mathbb{K}[V]$ nach den Potenzen von f bezeichne, also gerade

$$\mathbb{K}[V]_f = \left\{ \frac{g}{f^d} \mid g \in \mathbb{K}[V],\; d \geqslant 0 \right\}$$

Dabei gilt, da $\mathbb{K}[V]$ nicht notwendigerweise nullteilerfrei ist

$$\frac{g_1}{f^{d_1}} = \frac{g_2}{f^{d_2}} \iff f^d\left(g_1 f^{d_2} - g_2 f^{d_1}\right) = 0 \quad \textit{für ein } d \geqslant 0$$

Insbesondere erhalten wir für $f = 1$

$$O_V(V) \;\cong\; \mathbb{K}[V]$$

Beweis. Definiere

$$\alpha : \mathbb{K}[V]_f \longrightarrow \mathcal{O}_V(D(f)), \quad \frac{g}{f^d}(y) \mapsto \frac{g(y)}{f(y)^d}$$

Zeige nun, dass α der gewünschte Isomorphismus ist.
wohldefiniert. Seien dafür für $d_1, d_2 \geqslant 0, g_1, g_2 \in \mathbb{K}[V]$

$$\frac{g_1}{f^{d_1}} = \frac{g_2}{f^{d_2}} \text{ in } \mathbb{K}[V] \iff f^d\left(g_1 f^{d_2} - g_2 f^{d_1}\right) = 0 \text{ für ein } d \geqslant 0$$

Damit gilt für alle $y \in V$

$$f(y)^d\big(g_1(y)f(y)^{d_2} - g_2(y)f(y)^{d_1}\big) = 0,$$

wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{K}$ also

$$g_1(y)f(y)^{d_2} - g_2(y)f(y)^{d_1} = 0 \iff \frac{g_1(y)}{f(y)^{d_1}} = \frac{g_2(y)}{f(y)^{d_2}}$$

injektiv. Sei

$$\frac{g}{f^d} \in \ker(\alpha) \iff \alpha\left(\frac{g}{f^d}(y)\right) = \frac{g(y)}{f(y)^d} = 0 \ \text{ für alle } y \in D(f)$$

Dann ist $g(y) = 0$ auf ganz $D(f)$, also $g \in I(D(f))$ und somit $f \cdot g = 0$ auf V. Dann gilt

$$f\big(g \cdot 1 - 1 \cdot 0\big) = 0 \iff \frac{g}{1} = \frac{0}{1}$$

und somit $g = 0$. Folglich ist α injektiv.
surjektiv. Sei $g \in \mathcal{O}_V(V)$. Finde $\tilde{g} \in \mathbb{K}[V]_f$ mit $\alpha(\tilde{g}) = g$.
Für jedes $x \in D(f)$ gibt es offene Umgebungen $U_x \subseteq D(f), g_x, h_x \in \mathbb{K}[V]$, sodass gilt

$$g(y) = \frac{g_x(y)}{h_x(y)} \qquad \text{für alle } y \in U_x$$

Wegen 6.4 gibt es endlich viele $x_1, \dots x_m \in D(f)$ mit

$$\bigcup_{i=1}^m U_{x_i} = D(f)$$

Setze $g_i := g_{x_i}, h_i := h_{x_i}, U_i := U_{x_i}$ für alle $1 \leqslant i \leqslant m$. Wegen $U_i \subseteq D(h_i)$ ist mit Komplementbildung

$$D(f) = \bigcup_{i=1}^m U_i \subseteq \bigcup_{i=1}^m D(h_i)$$

und damit

$$V(f) \supseteq \bigcap_{i=1}^m V(h_i) \iff f \in I\left(\bigcap_{i=1}^m V(h_i)\right) = \sqrt{\langle h_1, \dots, h_n \rangle}$$

Folglich finden wir $d \in \mathbb{N}$ mit

$$f^d = \sum_{i=1}^m b_i h_i \qquad \text{für geeignete } b_i \in \mathbb{K}[V]$$

Sei

$$\tilde{g} := \sum_{i=1}^m b_i g_i \in \mathbb{K}[V]$$

Dann gilt für $1 \leqslant j \leqslant m$ und $y \in U_j$:

$$g(y) = \frac{g_j(y)}{h_j(y)} = \frac{(g_j f^d)(y)}{(h_j f^d)(y)} = \frac{g_j \sum_{i=1}^m b_i h_i}{h_j f^d}(y) \overset{Beh.(i)}{=} \frac{\big(\sum_{i=1}^m b_i g_i\big) h_j}{h_j f^d}(y) = \frac{\tilde{g}}{f^d}(y) = \frac{\tilde{g}(y)}{f^d(y)}$$

Also $\alpha(\tilde{g}) = g$.

Es bleibt zu zeigen:

$$g_j\left(\sum_{i=1}^m b_ih_i\right) = \left(\sum_{i=1}^m b_ig_i\right)h_j$$

also $g_ih_j = g_jh_i$ auf ganz U_j, nicht nur auf $U_j \cap U_i$. Dafür

Beh. (1) Ohne Einschränkung ist $g_ih_j = g_jh_i$ in $\mathbb{K}[V]$.

Beh. (2) Ohne Einschränkung ist $U_i = D(h_i)$.

Nun folgt die Behauptung des Satz.

Bew.(1) Aus Beh. (2) folgt $g_ih_j = g_jh_i$ auf $U_i \cap U_j$, also gerade $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_ih_j)$.Weiter gilt

$$h_ih_j(g_ih_j - g_jh_i) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{K}[V] \quad (*)$$

Setze

$$\tilde{g}_i := g_ih_i, \quad \tilde{h}_i := h_i^2, \quad \tilde{g}_j := g_jh_j. \quad \tilde{h}_j := h_j^2$$

Dann wird $(*)$ zu

$$\tilde{g}_i\tilde{h}_j - \tilde{g}_j\tilde{h}_i = 0 \quad \text{in } \mathbb{K}[V]$$

und es gilt

$$\frac{\tilde{g}_i}{\tilde{h}_i} = \frac{g_i}{h_i}, \qquad \frac{\tilde{g}_j}{\tilde{h}_j} = \frac{g_j}{h_j} \quad \text{auf } U_i \cap U_j$$

wobei $U_i = D(h_i)$ und $D(h_j) = U_j$, also folgt die Behauptung.

Bew. (2) Es gilt $U_i \subseteq D(h_i)$. Es bilden die $\{D(h) \mid h \in \mathbb{K}[V]\}$ eine Basis der Zariski-Topologie, d.h. es existiert $h \in \mathbb{K}[V]$ mit $x_i \in D(h)$ und $D(h) \subseteq U_i$.

$\Longrightarrow D(h) \subseteq D(h_i) \Longrightarrow V(h) \supseteq V(h_i)$

$\Longrightarrow h \in I(V(h_i)) = \sqrt{h_i}$.

Damit finden wir $d \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$h^d = a \cdot h_i \qquad \text{für ein } a \in \mathbb{K}[V]$$

Ersetze nun g_i durch $g_i \cdot a$, h_i durch $h^d = a \cdot h_i$, U_i durch $D(h_i)$ und setze $\tilde{g}_i, \tilde{h}_i$ wie oben. Dann gilt für $y \in D(h)$

$$g(y) = \frac{g_i}{h_i}(y) = \frac{g_i \cdot a}{h_i \cdot a}(y) = \frac{\tilde{g}_i}{\tilde{h}_i}(y),$$

es folgt die Behauptung. □

Proposition 6.7 *Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$ affine Varietäten, $f : V \longrightarrow W$ ein Morphismus, $U \subseteq W$ offen. Dann ist*

$$f_U^\# : \mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_V(f^{-1}(U)), \quad g \mapsto g \circ f$$

ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren.

Beweis. Zu zeigen ist: $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$. Seien dazu $g \in \mathcal{O}_W(U)$, $x \in f^{-1}(U)$, $y = f(x) \in U$. Nach

Voraussetzung gibt es eine Umgebung $U_y \subseteq U$ von y, sodass

$$g = \frac{g_y}{h_y} \quad \text{für geeignete } g_y, h_y \in \mathbb{K}[V]$$

Für $z \in f^{-1}(U_y) \subseteq f^{-1}(U)$ ist dann

$$(g \circ f)(z) = \frac{g_y(f(z))}{h_y(f(z))} = \frac{g_y \circ f}{h_y \circ f}(z) = \frac{f^{\#}(g_y)}{f^{\#}(h_y)}(z)$$

mit $f^{\#} : \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}[V], g \mapsto g \circ f$ wie gewöhnlich. Damit ist $g \circ f$ regulär auf $f^{-1}(U_y)$ und damit insbesondere in x. □

Bemerkung + Definition 6.8 (i) Sind $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben, so ist ein *Garbenmorphismus* $\Phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ eine Kollektion von Morphismen $\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$, welche mit der Einschränkungsabbildung verträglich sind.

(ii) Die Homomorphismen $f_U^{\#}$ für $U \subseteq W$ offen bilden einen Garbenmorphismus

$$f^{\#} : \mathcal{O}_W \longrightarrow f_*\mathcal{O}_V, \quad U \mapsto (f_*\mathcal{O}_V)(U) = \mathcal{O}_v(f^{-1}(U))$$

d.h. für offene Mengen $U' \subseteq U \subseteq W$ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_W(U) \arrow[r, "\rho^U_{U'}"] \arrow[d, "f_U^{\#}"] & \mathcal{O}_W(U') \arrow[d, "f_{U'}^{\#}"] \\
\mathcal{O}_V(f^{-1}(U)) \arrow[r, "\rho^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(U')}"] & \mathcal{O}_V(f^{-1}(U'))
\end{tikzcd}$$

Lemma 6.9 *Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), W \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$ affine Varietäten. Dann ist eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ Morphismus genau dann, wenn für jedes offene $U \subseteq W$ und jedes $g \in \mathcal{O}_W(U)$ gilt: $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Siehe 6.6

"$\Leftarrow$" Zu zeigen: $p_i \circ f$ ist Polynom für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, wobei

$$p_i : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K}), \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

die Projektionen auf die i-te Komponente ist.

Es gilt $p_i \in \mathcal{O}_W(U)$ für jedes offene $U \subseteq W$, nach Voraussetzung also auch $p_i \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$.

Dann gilt $p_i \circ f \in \mathcal{O}_V(V) \overset{6.5}{=} \mathbb{K}[V]$. □

Beispiel 6.10 Sei $U = \mathbb{A}^1(\mathbb{K})\backslash\{0\}$. Dann ist $g := \frac{1}{x} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(\mathbb{K})}(U)$. Sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{K}), \quad x \mapsto (x, g(x)) = \left(x, \frac{1}{x}\right)$$

Dann ist

$$f(U) = V(XY - 1) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$$

Die Projektion

$$p_1 : \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K}), \quad (x, y) \mapsto x$$

ist die Umkehrabbildung zu f.

Definition + Bemerkung 6.11 (i) Ein offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ heißt *quasiaffine Varietät*, wenn U Zariski-offen in einer affinen Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ ist.

(ii) Eine Abbildung $f : U_1 \longrightarrow U_2$ von quasiaffinen Varietäten heißt *Morphismus* oder auch *regulär*, falls f stetig bezüglich der Zariski-Topologie ist und für jede offene Teilmenge $U \subseteq U_2$ und $g \in \mathcal{O}_{U_2}(U)$ gilt: $g \circ f \in \mathcal{O}_{U_1}(f^{-1}(U))$.

(iii) Seien $U_1 \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), U_2 \subseteq \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$ quasiaffine Varietäten. Dann ist die Abbildung $f : U_1 \longrightarrow U_2$ genau dann regulär, wenn es reguläre Funktionen $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_{U_1}(U_1)$ gibt, sodass

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \qquad \text{für alle } x \in U_1$$

(iv) Die quasiaffinen Varietäten bilden zusammen mit den regulären Abbildungen eine Kategorie, von der $\underline{\text{Aff}}(\mathbb{K})$ eine volle Unterkategorie ist.

(v) Eine quasioffene Varietät heißt *affin* (als abstrakte Varietät), falls sie isomorph zu einer affinen Varietät, also einer Zariski-abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ für ein $n \geqslant 1$ ist.

Beweis. (iii) Folgt aus 6.8.

(iv) Zeige dass für affine Varietäten die regulären Abbildungen bereits Morphismen sind (also dass $\underline{\text{Aff}}(\mathbb{K})$ eine volle Unterkategorie bildet).
Sei $f : V \longrightarrow W$ regulär zwischen affinen Varietäten V und W. Mit (iii) folgt

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \qquad \text{für alle } x \in V$$

mit $f_i \in \mathcal{O}_V(V) = \mathbb{K}[V]$. Dann folgt bereits, dass f Morphismus ist. □

Bemerkung 6.12 *Für $f \in \mathbb{K}[X_1, \ldots X_n]$ ist $D(f)$ affin als abstrakte Varietät.*

Beweis. Definiere

$$G := f \cdot X_{n+1} - 1 \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}]$$

und $V := V(G) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$.
Die Projektion

$$\pi_{n+1} : \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), \quad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

ist Morphismus mit $\pi_{n+1}(V) \subseteq D(f)$. Weiter ist

$$\phi : D(f) \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K}), \quad x \mapsto \left(x, \frac{1}{f(x)}\right)$$

regulär mit $\phi(D(f)) \subseteq V$. π_{n+1}, ϕ sind invers zueinander, also gilt $D(f) \cong V$. □

§ 7 Rationale Abbildungen und Funktionenkörper

Sei $\mathbb{K}$ weiterhin algebraisch abgeschlossen.

Definition + Bemerkung 7.1 Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ quasiaffine Varietät.

(i) Eine *rationale Funktion* auf V ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f) mit $U \subseteq V$ offen und dicht sowie $f \in \mathcal{O}_V(U)$. Dabei sei

$$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \quad \Longleftrightarrow \quad f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$$

(ii) In jeder Äquivalenzklasse gibt es eine bezüglich der Inklusion maximalen Vertreter (U_{max}, f_{max}). U_{max} heißt *Definitionsbereich* von $(U, f)_\sim$. $V \backslash U_{max}$ heißt *Polstellenmenge* von $(U, f)_\sim$.

(iii) Die rationalen Funktionen auf V bilden eine $\mathbb{K}$-Algebra.

(iv) Ist V irreduzibel, so ist

$$\mathrm{Rat}(V) \cong \mathbb{K}(V) = \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V])$$

der *Funktionenkörper* von V.

Beweis. (i) Zu zeigen ist lediglich die Transitivität: Gelte $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2), (U_2, f_2) \sim (U_3, f_3)$. Dann gilt per Definition $f_1|_{U_1 \cap U_2 \cap U_3} = f_2|_{U_1 \cap U_2 \cap U_3}$ und damit, da $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ dicht in $U_1 \cap U_3$ ist: $f_1|_{U_1 \cap U_3} = f_3|_{U_1 \cap U_3}$.

(ii) Setze $U_{max} = \bigcup_{(U', f') \in (U, f)_\sim} U'$.

(iii) klar.

(iv) Sei

$$\alpha : \mathbb{K}(V) \longrightarrow \mathrm{Rat}(V), \quad \frac{f}{g} \mapsto \left(D(g), \frac{f}{g} \right)_\sim$$

Dann ist α offensichtlich Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren.
injektiv: klar.
surjektiv: Sei $(U, f)_\sim \in \mathrm{Rat}(V)$. Dann ist $f \in \mathcal{O}_V(U)$ und es existiert eine offene dichte Teilmenge $U' \subseteq U$ und $g, h \in \mathcal{O}_V(U)$, sodass gilt

$$f = \frac{g}{h} \quad \text{auf } U' \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha\left(\frac{g}{h}\right) = f,$$

was zu zeigen war. □

Beispiel 7.2 Sei $U \subseteq V$ von der Form $U = D(h)$ für ein $h \in \mathbb{K}[V]$. Dann ist

$$\mathcal{O}_V(D(h)) = \mathbb{K}[V]_h = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V]) \;\middle|\; f \in \mathbb{K}[V], g = h^d \text{ für ein } d \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Dann ist

$$\mathrm{Quot}\left(\mathcal{O}_V(D(h))\right) = \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V]_h) = \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V]) = \mathbb{K}(V),$$

denn es gilt

$$\mathbb{K}[V] \subseteq \mathbb{K}[V]_h \subseteq \mathbb{K}[V]_{\mathbb{K}[V] \backslash \{0\}} = \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V]).$$

Definition + Bemerkung 7.3 Seien V, W quasi-affine Varietäten.

(i) Eine *rationale Abbildung* $f : V \dashrightarrow W$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f) mit $U \subseteq V$ offen und dicht sowie $f : U \longrightarrow W$ reguläre Abbildung. Dabei gelte wieder

$$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \quad \Longleftrightarrow \quad f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$$

(ii) In jeder Äquivalenzklasse $(U, f)_\sim$ gibt es ein maximales $U := \mathrm{Def}(f)$. U heißt *Definitionsbereich.*

(iii) Rationale Abbildungen $f : V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$ entsprechen den rationalen Funktionen auf V.

Definition 7.4 Ein Morphismus $f : V \longrightarrow W$ von quasiaffinen Varietäten heißt *dominant*, falls $f(V) \subseteq W$ dicht in W ist.

Bemerkung + Definition 7.5 (i) Die irreduziblen quasiaffinen Varietäten über $\mathbb{K}$ bilden mit den dominanten rationalen Abbildungen eine Kategorie.

(ii) Isomorphismen in dieser Kategorie heißen *birationale Abbildungen.*

Beweis von (i). Sind $f : V \dashrightarrow W, g : W \dashrightarrow Z$ dominante rationale Abbildungen irreduzibler Varietäten V, W, Z, so ist $f^{-1}(\mathrm{Def}(g))$ offen und nichtleer, da f dominant ist.
Damit ist $U := f^{-1}(\mathrm{Def}(g))$ dicht in V.
$\Longrightarrow U \subseteq \mathrm{Def}(g \circ f)$, also ist $g \circ f$ rationale Abbildung. □

Beispiel 7.6 (i) Sei $V = V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$,

$$f : V \longrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K}), \quad (x, y) \mapsto x$$

$$g : \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \dashrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K}), \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

Dann ist f surjektiv, g ist dominante rationale Abbildung. Aber es gilt $\mathrm{Def}(g \circ f) = V \backslash V(X)$ ist nicht dicht in V, also ist $g \circ f$ keine rationale Abbildung.

(ii) Betrachte

$$\sigma : \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{K}), \quad (X, Y) \mapsto \left(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}\right)$$

σ ist rationale Abbildung mit $\mathrm{Def}(\sigma) = D(XY), \sigma^2 = \mathrm{id}$ als birationale Abbildung. Damit ist σ eine birationale Abbildung.

Proposition 7.7 *Sei $f : V \longrightarrow W$ Morphismus von affinen Varietäten und*

$$f^\# : \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}[V], \quad g \mapsto g \circ f$$

der induzierte $\mathbb{K}$-Algebren Homomorphismus der zwischen den Koordinatenringen. Dann gilt

$$f^\# \textit{ ist injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad f \textit{ ist dominant}$$

Beweis. **Beh. (1)** Für $Z \subseteq W$ abgeschlossen gilt

$$(f^\#)^{-1}(I(Z)) = I(\overline{f(Z)}) = I(f(Z))$$

Bew. (1) Es gilt: $g \in (f^{\#})^{-1}(I(Z))$

$\iff f^{\#}(g) \in I(Z)$

$\iff g \circ f \in I(Z)$

$\iff g(f(z)) = 0$ für alle $z \in Z$

$\iff g(y) = 0$ für alle $y \in f(Z)$

$\iff g \in I(\overline{f(Z)}) = I(f(Z))$

Damit gilt für $Z = V$ wegen $I(V) = 0$ in $\mathbb{K}[V]$ mit Beh. (1):

$$(f^{\#})^{-1}(0) = (f^{\#})^{-1}(I(V)) = I(\overline{f(V)}) \overset{dom.}{=} I(W) = 0$$

Also gerade $\ker(f^{\#}) = \{0\}$, also ist $f^{\#}$ injektiv. □

Folgerung 7.8 Jede dominante Abbildung $f : V \dashrightarrow W$ zwischen irreduziblen quasiaffinen Varietäten induziert einen Körperhomomorphismus $f^{\#} : \mathbb{K}(W) \longrightarrow \mathbb{K}(V)$.

Beweis. Seien V, W affin. Ist f Morphismus, so ist

$$f^{\#} : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[V], \quad g \mapsto g \circ f$$

injektiv und lässt sich damit fortsetzen zu

$$f^{\#} : \mathbb{K}(W) \longrightarrow \mathbb{K}(V), \quad \frac{g}{h} \mapsto \frac{f^{\#}(g)}{f^{\#}(h)}$$

Ist $\mathrm{Def}(f) \neq V$, so sei $g \in \mathbb{K}[V]$ mit $D(g) \supseteq \mathrm{Def}(f)$. Für $h \in \mathbb{K}[W]$ ist dann

$$f^{\#}(h) = h \circ f \in \mathcal{O}_V(D(g)),$$

also induziert f einen Homomorphismus

$$f^{\#} : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathcal{O}_V(D(g)) = \mathbb{K}[V]_g$$

$D(g)$ ist nach 6.10 affin, mit 7.6 folgt also die Injektivität von $f^{\#}$. Damit existiert die Fortsetzung

$$f^{\#} : \mathbb{K}(W) \longrightarrow \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V]_g) = \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V]) = \mathbb{K}(V)$$

Satz 7.9 *Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so ist die Zuordnung*

$$\Phi : \left\{\begin{matrix} \textit{irreduzible, quasi-affine Varietäten} \\ \textit{dominante rationale Abbildungen} \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} \mathbb{L}/\mathbb{K} \textit{ endlich erzeugt} \\ \mathbb{K}\textit{-Algebra Homomorphismen} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} V \\ f : V \dashrightarrow W \end{matrix}\right\} \mapsto \left\{\begin{matrix} \mathbb{K}(V) \\ f^{\#} : \mathbb{K}(W) \longrightarrow \mathbb{K}(V) \end{matrix}\right\}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Offensichtlich ist Φ ein Funktor. Zu zeigen bleibt also noch

(i) Zu jeder endlich erzeugten Körpererweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ gibt es V mit $\mathbb{K}(V) \cong \mathbb{L}$.

(ii) Die Zuordnung

$$\mathrm{Rat}^{\mathrm{Dom}}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(W), \mathbb{K}(V)), \quad f \mapsto f^{\#}$$

ist eine Bijektion.

zu (i) Seien $x_1, \ldots, x_n$ Erzeuger von $\mathbb{L}$ über $\mathbb{K}$ und $A := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ die von den x_i erzeugte $\mathbb{K}$-Algebra. A ist als solche offenbar endlich erzeugt und reduziert, da A Teilmenge eines Körpers ist. Damit existiert eine affine Varietät V mit $A \cong \mathbb{K}[V]$. Da A nullteilerfrei ist, ist V sogar irreduzibel und damit

$$\mathbb{K}(V) = \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V]) \cong \mathrm{Quot}(A) = \mathbb{L}$$

zu (ii) Es gilt

injektiv. Seien $f, g : V \dashrightarrow W$ mit $f^{\#} = g^{\#}$. Wähle $U = D(h) \subseteq \mathrm{Def}(f) \cap \mathrm{Def}(g)$ offen und affin. $f|_U$ und $g|_U$ sind Morphismen von U nach W.
Diese induzieren $\mathbb{K}$-Algebren Homomorphismen

$$g_U^{\#}, f_U^{\#} : \mathbb{K}[W] \longrightarrow \mathbb{K}[U] \subseteq \mathbb{K}(V)$$

surjektiv. Sei

$$\alpha : \mathbb{K}(W) \longrightarrow \mathbb{K}(V)$$

ein $\mathbb{K}$-Algebren Homomorphismus. Wähle Erzeuger $g_1, \ldots, g_n$ von $\mathbb{K}[W]$ also $\mathbb{K}$-Algebra. Für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ ist $\alpha(g_i)$ rationale Funktion auf V.
Da V irreduzibel ist, ist

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Def}(\alpha(g_i))$$

offen und affin für geeignete $g \in \mathbb{K}[V]$. Nach Konstruktion induziert α einen $\mathbb{K}$-Algebren Homomorphismus

$$\alpha : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{O}_U(U) = \mathbb{K}[U]$$

Damit gilt nach 5.8 gilt dann $\alpha = f^{\#}$ für einen Morphismus $f : U \longrightarrow W$.
Da außerdem U dicht in V ist, ist (U, f) rationale Abbildung, denn f ist dominant, da $f^{\#}$ als Körperhomomorphismus injektiv ist. □