

## § 22.

# Lineare Systeme

In diesem Paragraphen sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n, D := I \times \mathbb{R}^n, b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  ebenfalls stetig (d.h. für  $A(x) = (a_{jk}(x))$  sind alle  $a_{jk} : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig). Hier ist für alle  $x \in I$  und  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ :

$$f(x, y) := A(x)y + b(x)$$

### Definition

Das System von Differentialgleichungen:

$$y' = A(x)y + b(x) \tag{S}$$

heißt ein **lineares System**. (Fall  $n = 1$  siehe §19.)

Ist  $b \equiv 0$ , so heißt (S) **homogen**, anderenfalls **inhomogen**.

Neben (S) betrachten wir auch noch das zu (S) gehörige **homogene System**

$$y' = A(x)y \tag{H}$$

und das **AwP**

$$\begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{A}$$

### Satz 22.1 (Lösungen)

- (1) (A) hat auf  $I$  genau eine Lösung.
- (2) Das System (S) hat Lösungen auf  $I$ .
- (3) Ist  $J \subseteq I$  ein Intervall und  $\hat{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (S), so gibt es eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  von (S) mit  $\hat{y} = y$  auf  $J$ .
- (4) Sei  $y_s : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine spezielle Lösung von (S), dann ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  genau dann eine Lösung von (S) auf  $I$ , wenn eine Lösung  $y_h : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  von (H) existiert mit:

$$y = y_h + y_s$$

### Bemerkung 22.2

Wegen 22.1(3) gehen wir immer davon aus, dass Lösungen von (S) auf ganz  $I$  definiert sind.

**Beweis**(1) **Fall 1:**  $I = [a, b]$ 

Es ist  $f(x, y) = A(x)y + b(x)$ . Sei  $L := \max\{\|A(x)\| : x \in I\}$ . Für alle  $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$  gilt:

$$\begin{aligned}\|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| &= \|A(x)(y - \bar{y})\| \\ &\stackrel{\S 1}{\leq} \|A(x)\| \cdot \|y - \bar{y}\| \\ &\leq L\|y - \bar{y}\|\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus 21.3.

**Fall 2:**  $I$  beliebig.

Sei  $\mathfrak{M} := \{K \subseteq I \mid K \text{ ist kompaktes Intervall, } x_0 \in K\}$ . Dann ist  $I = \bigcup_{K \in \mathfrak{M}} K$ .

Ist  $x \in I$ , so existiert ein  $K \in \mathfrak{M}$  mit  $x \in K$ . Nach Fall 1. hat das AwP auf  $K$  genau eine Lösung  $y_K : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Definiere nun  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie folgt:

$$y(x) := y_K(x) \quad (*)$$

Sei  $\tilde{K} \in \mathfrak{M}$  mit  $x \in \tilde{K}$  und sei  $y_{\tilde{K}}$  die eindeutig bestimmte Lösung von (A) auf  $\tilde{K}$ . Dann ist  $y_K = y_{\tilde{K}}$  auf  $K \cap \tilde{K}$ , also:

$$y_K(x) = y_{\tilde{K}}(x)$$

D.h.  $y$  ist durch  $(*)$  wohldefiniert.

**Leichte Übung:**  $y$  ist auf  $I$  db und löst das AwP auf  $I$ .

Sei  $\tilde{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine weitere Lösung von (A) auf  $I$  und sei  $x \in I$ . Dann existiert ein  $K \in \mathfrak{M}$  mit  $x \in K$  und nach Definition gilt  $y(x) = y_K(x)$ . Da  $\tilde{y}_K$  eine Lösung des AwPs (A) auf  $K$  ist, gilt nach Fall 1.:  $\tilde{y}|_K = y_K$  Dann gilt also:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}|_K(x) = y_K(x) = y(x)$$

(2) Folgt aus (1).

(3) Sei  $\xi \in J, \eta := \hat{y}(\xi)$ . Dann ist  $\hat{y}$  eine Lösung auf  $J$  des AwPs

$$\begin{cases} y' = A(x) + b(x) \\ y(\xi) = \eta \end{cases} \quad (+)$$

Aus (1) folgt, dass das AwP auf  $I$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  hat. Sei  $x \in J$ .

**Fall**  $x = \xi$ :

In diesem Fall gilt:

$$\hat{y}(x) = \hat{y}(\xi) = \eta = y(\xi) = y(x)$$

**Fall**  $x > \xi$ :

Sei  $K := [\xi, x]$ . Da  $\hat{y}$  und  $y$  Lösungen des AwPs (+) auf  $[\xi, x]$  sind folgt aus (1), dass  $y = \hat{y}$  auf  $K$ , also:

$$\hat{y}(x) = y(x)$$

**Fall**  $x < \xi$ :

Sei  $K := [x, \xi]$ . Da  $\hat{y}$  und  $y$  Lösungen des AwPs (+) auf  $[x, \xi]$  sind folgt aus (1), dass  $y = \hat{y}$  auf  $K$ , also:

$$\hat{y}(x) = y(x)$$

**Definition**

Setze  $\mathbb{L} := \{y : I \rightarrow \mathbb{R}^n : y \text{ ist eine Lösung von (H) auf } I\}$   
 ( $y \equiv 0$  liegt in  $\mathbb{L}$ )

**Satz 22.3 (Lösungsmenge als Vektorraum)**

- (1) Sind  $y^{(1)}, y^{(2)} \in \mathbb{L}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so sind  $y^{(1)} + y^{(2)} \in \mathbb{L}$  und  $\alpha y^{(1)} \in \mathbb{L}$ .  $\mathbb{L}$  ist also ein reeller Vektorraum.
- (2) Seien  $y^{(1)}, \dots, y^{(k)} \in \mathbb{L}$ . Dann sind äquivalent:
- (i)  $y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$  sind in  $\mathbb{L}$  linear unabhängig.
  - (ii)  $\forall x \in I$  sind  $y^{(1)}(x), \dots, y^{(k)}(x)$  linear unabhängig im  $\mathbb{R}^n$ .
  - (iii)  $\exists \xi \in I : y^{(1)}(\xi), \dots, y^{(k)}(\xi)$  sind linear unabhängig im  $\mathbb{R}^n$ .
- (3)  $\dim \mathbb{L} = n$ .

**Beweis**

(1) Nachrechnen

(2) Der Beweis erfolgt durch Ringschluss:

(i)  $\implies$  (ii) Sei  $x_1 \in I$ . Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  und

$$0 = \alpha_1 y^{(1)}(x_1) + \dots + \alpha_k y^{(k)}(x_1)$$

$$\tilde{y} := \alpha_1 y^{(1)} + \dots + \alpha_k y^{(k)}$$

Aus (1) folgt:  $\tilde{y} \in \mathbb{L}$ . Weiter ist  $\tilde{y}$  eine Lösung des AwPs

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_1) = 0 \end{cases}$$

Da  $y \equiv 0$  dieses AwP ebenfalls löst und aus 22.1 folgt, dass das AwP eindeutig lösbar ist, muss gelten:

$$0 = \tilde{y} = \alpha_1 y^{(1)} + \dots + \alpha_k y^{(k)}$$

Aus der Voraussetzung folgt dann:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

Also sind  $y^{(1)}(x_1), \dots, y^{(k)}(x_1)$  sind linear unabhängig im  $\mathbb{R}^n$ .

(ii)  $\implies$  (iii) Klar ✓

(iii)  $\implies$  (i) Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  und  $0 = \alpha_1 y^{(1)} + \dots + \alpha_k y^{(k)}$ , dann folgt:

$$0 = \alpha_1 y^{(1)}(\xi) + \dots + \alpha_k y^{(k)}(\xi)$$

Aus der Voraussetzung folgt dann:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$  Also sind  $y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$  linear unabhängig in  $\mathbb{L}$ .

- (3) Aus (2) folgt, dass  $\dim \mathbb{L} \leq n$  ist.

Für  $j = 1, \dots, n$  sei  $y^{(j)}$  die eindeutig bestimmte Lösung des AwPs

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = e_j \end{cases} \quad (e_j = \text{j-ter Einheitsvektor im } \mathbb{R}^n).$$

Dann sind  $y^{(1)}(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0)$  linear unabhängig im  $\mathbb{R}^n$ . Aus (2) folgt, dass  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  linear unabhängig in  $\mathbb{L}$  sind, also ist  $\dim \mathbb{L} \geq n$ . ■

### Definition

Sei  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(x) = (b_{jk}(x))$  für alle  $x \in I$ .

$B$  heißt **differenzierbar** auf  $I$ , genau dann wenn  $b_{jk} : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$  differenzierbar sind ( $j, k = 1, \dots, n$ ).

In diesem Fall ist

$$B'(x) := (b'_{jk}(x)) \quad (x \in I)$$

### Definition

- (1) Seien  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)} \in \mathbb{L}$ .  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  heißt ein **Lösungssystem** (LS) von (H).

$$Y(x) := (y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x))$$

(j-te Spalte von  $Y = y^{(j)}$ ) heißt **Lösungsmatrix** (LM) von (H).

$$W(x) := \det Y(x)$$

heißt **Wronskideterminante**.

- (2) Sei  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  ein Lösungssystem von (H). Sind  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  linear unabhängig in  $\mathbb{L}$ , so heißt  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  ein **Fundamentalsystem** (FS) und  $Y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$  eine **Fundamentalmatrix** (FM).

- (3) Ist  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  ein FS von (H), so lautet die allgemeine Lösung von (H):

$$y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + \dots + c_n y^{(n)}(x) \quad (c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R})$$

### Satz 22.4 (Zusammenhang FS, FM und Wronskideterminante)

$y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  sei ein LS von (H).  $Y$  und  $W$  seien definiert wie oben. Dann:

- (1)  $Y'(x) = A(x)Y(x) \quad \forall x \in I$ .
- (2)  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  ist ein Fundamentalsystem von (H)
  - $\iff Y(x)$  invertierbar  $\forall x \in I$
  - $\iff \exists \xi \in I : Y(\xi)$  ist invertierbar
  - $\iff \forall x \in I : W(x) \neq 0$
  - $\iff \exists \xi \in I : W(\xi) \neq 0$ .

### Beweis

- (1) Nachrechnen

(2) folgt aus 22.3. ■

**Spezialfall:**  $n = 2$ .  $A(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & -a_2(x) \\ a_2(x) & a_1(x) \end{pmatrix}$ ;  $a_1, a_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $y^{(1)} = (y_1, y_2)$  eine Lösung von

$$y' = A(x)y \quad (*)$$

auf  $I$  und  $y^{(1)} \neq 0$ . Das heißt:

$$\begin{cases} y_1' = a_1(x)y_1 - a_2(x)y_2 \\ y_2' = a_2(x)y_1 + a_1(x)y_2 \end{cases}.$$

Setze  $y^{(2)} := (-y_2, y_1)$ . Dann ist:

$$A(x)y^{(2)} = \begin{pmatrix} -a_1(x)y_2 - a_2(x)y_1 \\ -a_2(x)y_2 + a_1(x)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2' \\ y_1' \end{pmatrix} = (y^{(2)})'$$

Das heißt:  $y^{(2)}$  löst ebenfalls (\*) auf  $I$ , oder:  $y^{(1)}, y^{(2)}$  ist ein Lösungssystem von (\*).

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & -y_2(x) \\ y_2(x) & y_1(x) \end{pmatrix}, W(x) = \det Y(x) = y_1(x)^2 + y_2(x)^2 \neq 0$$

Mit 22.4 folgt:  $y^{(1)}, y^{(2)}$  ist ein Fundamentalsystem von (\*).

**Beispiel**

$$(n = 2), A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$y' = Ay \quad (*)$$

und  $y = (y_1, y_2)$ . Also:  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$ .

$y^{(1)}(x) := \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$  ist eine Lösung von (\*) auf  $\mathbb{R}$ .  $y^{(2)}(x) := \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$  ist eine weitere

Lösung von (\*) auf  $\mathbb{R}$ .  $y^{(1)}, y^{(2)}$  ist ein Fundamentalsystem von (\*). Allgemeine Lösung von (\*):

$$y(x) = \begin{pmatrix} c_1 \cos(x) - c_2 \sin(x) \\ c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

**Ohne Beweis:**

#### **Satz 22.5 (Spezielle Lösung)**

Sei  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  ein Fundamentalsystem von (H),  $Y(x)$  sei definiert wie oben. Setze

$$y_s(x) := Y(x) \int Y(x)^{-1} b(x) dx \quad (x \in I).$$

Dann ist  $y_s$  eine spezielle Lösung von (S) auf  $I$ .

$$W_k(x) := \det \left( y^{(1)}(x), \dots, y^{(k-1)}(x), b(x), y^{(k+1)}(x), \dots, y^{(n)}(x) \right) \quad (k = 1, \dots, n)$$

Dann gilt:  $y_s(x) = \sum_{k=1}^n \left( \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx \right) y^{(k)}(x)$ .

**Beispiel**

Bestimme die allgemeine Lösung von

$$y' = Ay + \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}, \quad (+)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bekannt: Fundamentalsystem der homogenen Gleichung  $y' = Ay$ :

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} -\sin(x) & -\sin(x) \\ \cos(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 0.$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1.$$

$$y_s(x) := \left( \int 1 dx \right) y^{(2)}(x) = x y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -x \sin(x) \\ x \cos(x) \end{pmatrix} \text{ ist eine spezielle Lösung von (+).}$$

Allgemeine Lösung von (+):

$$\begin{aligned} y(x) &= \underbrace{c_1 \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}}_{\text{allg. Lsg. der hom. Glg.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x \sin(x) \\ x \cos(x) \end{pmatrix}}_{\text{spez. Lsg.}} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \cos(x) - c_2 \sin(x) - x \sin(x) \\ c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + x \cos(x) \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\text{Löse das AwP} \begin{cases} y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \cos(0) - c_2 \sin(0) - 0 \cdot \sin(0) \\ c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) + 0 \cdot \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Also:  $c_1 = c_2 = 0$ , d.h.: **die** Lösung des AwP ist:  $y(x) = \begin{pmatrix} -x \sin(x) \\ x \cos(x) \end{pmatrix}.$