

0.0 Übung 0, 01.11.2004

0.0.1 Aufgabe 2

- a) Über allen Gipfeln ist Ruh
Über einem Gipfel ist keine Ruh
- b) Es gibt einen Hund der Möhren frisst
Alle Hunde fressen keine Möhren
- c) Es gibt einen Topf auf den alle Deckel passen
Für alle Töpfe gibt es einen Deckel der nicht passt
- d) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Z} : [y \leq x \wedge (\forall z \in \mathbb{Z} : z \leq y)] \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{Z} : \neg[y \leq x \wedge (\forall z \in \mathbb{Z} : z \leq y)]$
- Es gilt: $\neg[A \wedge B] \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
 $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{Z} : [y > x \vee (\exists z \in \mathbb{Z} : z > y)]$

0.0.2 Aufgabe 3

$a, b \in \mathbb{N}$
 $a \mid b \in \mathbb{N} : \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a \cdot c = b$
 $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \Leftrightarrow 1$ und p sind die einzigen Teiler von p

Satz: Zu jeder natürlichen Zahl $n \neq 1$ gibt es eindeutig bestimmte Primzahlen p_1, \dots, p_k und $l_1, \dots, l_k \in \mathbb{N}$, so dass $n = p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_k^{l_k}$.

- a) Die Anzahl aller Primzahlen ist unendlich
 Widerspruchsbew.: Ann.: Es gibt nur endl. viele Primzahlen

$$\left. \begin{array}{l} n := p_1 \cdot \dots \cdot p_k + 1 \\ \text{Satz} \Rightarrow p_l \cdot m = n \end{array} \right\} p_l \cdot m = p_1 \cdot \dots \cdot p_k + 1 \Rightarrow p_l \cdot (m - p_1 \cdot \dots \cdot p_l \cdot \dots \cdot p_k) = 1$$

Es gibt also doch unendlich viele Primzahlen

- b) Widerspruchsbew.: Ann.: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d.h. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Wir dürfen annehmen, dass es keine Primzahl gibt, die sowohl m als auch n teilt.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{m}{n} &\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 2n^2 = m^2 \\ &\Rightarrow 2\tilde{m} = m \Rightarrow 2n^2 = 4\tilde{m}^2 \Rightarrow n^2 = 2 \cdot \tilde{m}^2 \Rightarrow 2 \mid n \end{aligned}$$

Also $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

0.0.3 Aufgabe 5

z.Z.: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Beweis: