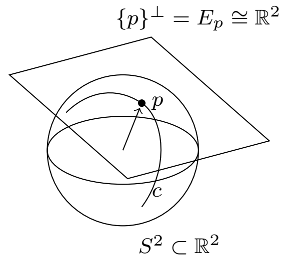
Kapitel 2.

Tangentialvektoren und Tangentialräume



Betrachte in der nebenstehenden Abbildung eine differenzierbare Kurve $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2$ mit $c(0) = p$. Dann gilt:

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \langle c(t), c(t)\rangle = 2\,\langle \dot{c}(0), c(0)\rangle = 2\,\langle \dot{c}(0), p\rangle \Rightarrow \dot{c}(0) \in p^\perp.$$

Die Kurven heißen **äquivalent**, wenn es eine Karte (φ, U) von M und p gibt, so dass gilt

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi \circ c_1) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi \circ c_2)$$

Lemma 2.1 *Der oben definierte Begriff der Äquivalenz ist unabhängig von der Wahl der Karte.*

Beweis Es sei (ψ, V) eine weitere Karte von M um p. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\psi \circ c_1) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_1) = \mathrm{D}(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi \circ c_1) \\ &= \mathrm{D}(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi \circ c_2) = \ldots = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\psi \circ c_2). \qquad \square\end{aligned}$$

Definition 2.2 (Geometrische Definition des Tangentialraums) *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein (geometrischer)* ***Tangentialvektor*** *an M in p ist eine Äquivalenzklasse von Kurven c mit $c(0) = p$. Die Menge*

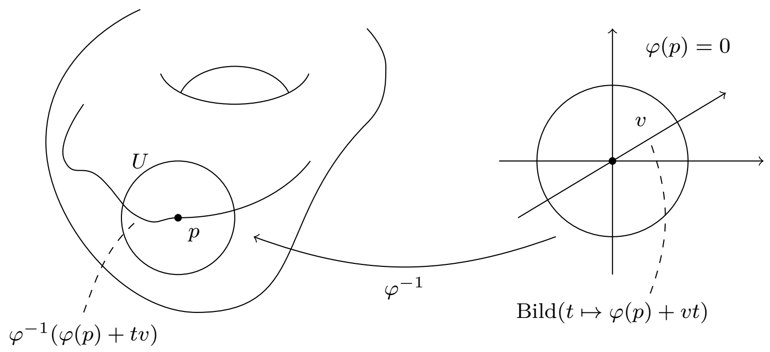
$$\mathrm{T}_p^{geo} M = \{[c] \mid c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \ \textit{glatt}, c(0) = p\}$$

heißt (geometrischer) ***Tangentialraum*** *an M in p.*

Bemerkung Mit den Bezeichnungen wie oben ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$A\colon\ \mathrm{T}_p^{\mathrm{geo}} M \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad [c] \mapsto \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi \circ c).$$

Beweis Zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ sei $B(v) = [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)]$ die Äquivalenzklasse der abgebildeten Kurve auf der Mannigfaltigkeit.



$$AB(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (\varphi \circ B(v)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (\varphi \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (\varphi(p) + tv) = v.$$

$$BA(\underbrace{[c]}_{\ni c}) = B(v_c) = [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv_c)] \text{ wobei } v_c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (\varphi \circ c).$$

Die Kurven c und $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv_c)$ sind äquivalent, also ist $BA[c] = [c]$ und somit A bijektiv. $\square$

Damit erhält $\mathrm{T}_p^{\mathrm{geo}} M$ die Struktur eines reellen Vektorraumes vermöge der folgenden Verknüpfung:

$$\lambda[c_1] + \mu[c_2] = A^{-1}(\lambda A[c_1] + \mu A[c_2]).$$

Dabei gilt $\lambda[c_1]+\mu[c_2] = [c]$ für $c(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p)+t(\lambda v_1+\mu v_2))$ mit $v_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} (\varphi \circ c_i)$.

Lemma 2.3 *Die oben definierte Lineare Struktur ist unabhängig von der Wahl der Karte.*

Beweis Es sei (ψ, V) eine Karte von M um p und $A'[c] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_t (\psi \circ c)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} AA'^{-1}(v) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (\varphi \circ (\psi^{-1}(\psi(p) + tv))) \\ &= \mathrm{D}(\varphi \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (\psi \circ \psi^{-1}(\varphi(p) + tv)) = \mathrm{D}(\varphi \circ \varphi^{-1}) \cdot v. \end{aligned}$$

Also ist AA'^{-1} linear,

$$\begin{aligned} A'^{-1}(\lambda A'[c_1] + \mu A'[c_2]) &= A^{-1}(AA'^{-1}(\lambda A'[c_1] + \mu A'[c_2])) \\ &= A^{-1}(\lambda AA'^{-1}[c_1] + \mu AA'^{-1}[c_2]) \\ &= A^{-1}(\lambda A[c_1] + \mu A[c_2]). \end{aligned}$$ $\square$

Motivation: Richtungsableitungen im $\mathbb{R}^n$

Bemerkung Für $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ x, y \in \mathbb{R}^n$ ist die **Richtungsableitung** wie folgt definiert:

$$\partial_v f(x) = \mathrm{D}\, f(x) \cdot v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f(x + tv).$$

Diese erfüllt die Leibniz-Regel:

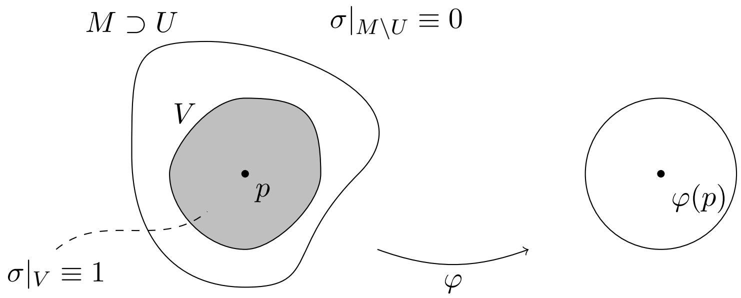
$$\partial_v(fg)(x) = \partial_v f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \partial_v g(x).$$

Definition 2.4 (Algebraische Definition des Tangentialraumes) *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein (algebraischer)* ***Tangentialvektor*** *an M in p ist eine Lineare Abbildung $X_p\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, welche die Leibniz-Regel erfüllt:*

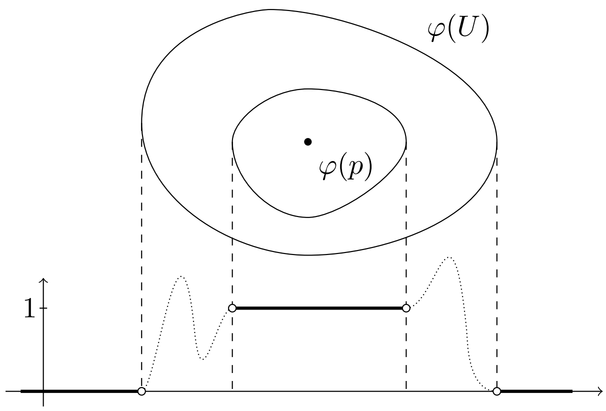
$$X_p(fg) = X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g).$$

Die algebraischen Tangentialvektoren bilden einen reellen Vektorraum $\mathrm{T}_p^{alg} M$, den Tangentialraum an M in p.

Lemma 2.5 *Es sei U eine Umgebung von $p \in M$. Dann existiert eine Umgebung $V \subset U$ von p und eine glatte reellwertige Funktion $\sigma \in C^\infty(M)$ mit den Eigenschaften $\sigma|_V = 1$ und $\mathrm{supp}(\sigma) \subset U$.*



Beweis Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass U das Kartengebiet einer Karte φ von M um p ist und $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Es sei nun $\varepsilon > 0$ so, dass $\overline{B}_\varepsilon(0) \subset \varphi(U)$ gilt.



Ist dann η eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}$ mit $\eta \equiv 1$ auf $\left[\frac{-\varepsilon^2}{2}, \frac{\varepsilon^2}{2}\right]$ und $\eta \equiv 0$ auf $\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon^2, \varepsilon^2)$, so hat für $U_1 = \varphi^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0))$ die Funktion

$$\sigma(q) = \begin{cases} \eta(\|\varphi(q)\|^2) & \text{für } q \in U_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Lemma 2.6 *Für alle $X_p \in \mathrm{T}_p^{alg} M$ gilt:*

(i) $X_p(f) = 0$ falls f in einer Umgebung von p konstant ist.

(ii) $X_p(f) = X_p(g)$ falls f und g auf einer Umgebung übereinstimmen.

Beweis (ii) Es sei U eine Umgebung von p mit $f|_U = g|_U$. Ist dann σ wie in Lemma 2.5, so gilt $\sigma f = \sigma g$ und aus

$$X_p(\sigma)f(p) + \sigma(p)X_p(f) = X_p(\sigma f) = X_p(\sigma g) = X_p(\sigma)g(p) + \sigma(p)X_p(g)$$

folgt $X_p(f) = X_p(g)$.

(i) Wegen der $\mathbb{R}$-Linearität und (ii) genügt es $f \equiv 1$ zu betrachten. Es gilt

$$X_p(1) = X_p(1 \cdot 1) = X_p(1) \cdot 1 + 1 \cdot X_p(1) = 2 \cdot X_p(1),$$

also $X_p(1) = 0$. □

Bemerkung Also gilt für $f \in C^\infty(M)$ und $g \in C^\infty(U)$ direkt:

$$\sigma g = \begin{cases} \sigma g|_U & \sigma g \in C^\infty(M) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus $\sigma g \in C^\infty(M)$ folgt $X_p(g) = X_p(\sigma g)$. Für eine Karte $\varphi\colon U \to V$ von M und p seien algebraische Tangentialvektoren definiert:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \in \mathrm{T}_p^{\text{alg}} M \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (f) = \partial_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \mathrm{D}(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} e_i.$$

Satz 2.7 *Die Vektoren* $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$ *bilden eine Basis von* $T_p^{alg} M$.

Lemma 2.8 *Es sei* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *und* $g \in C^\infty(B_\varrho(x_0))$. *Dann existieren glatte Funktionen* $h_i \in C^\infty(B_\varrho(x_0))$ *mit* $h_i(x_0) = \partial_i g(x_0)$ *und*

$$g(x) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) h_i(x).$$

Beweis (Beweis des Satzes) Die j-te Komponente φ^j der Karte ist glatt und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (\varphi^j) = \partial_i(\varphi^j \circ \varphi^i)(\varphi(p)) = \partial_i x^j(\varphi(p)) = \delta_i^j.$$

Damit sind die Vektoren linear unabhängig.
Es sei $X_p \in \mathrm{T}_p^{\text{alg}} M$ und $f \in C^\infty(M)$. Für $x_0 = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$, $B_\varrho(x_0) \subset \varphi(U)$ und für $g = f \circ \varphi^{-1}|_{B_\varrho(x_0)}$ gilt mit den Bezeichnungen wie im letzten Lemma:

$$\begin{aligned}
X_p(f) = X_p(g \circ \varphi) &= X_p\left((g(\varphi(p))) + \sum (\varphi^i - \varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi)\right) \\
&= \underbrace{X_p(g(\varphi(p)))}_{=0} + \sum X_p\left((\varphi^i - \varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi)\right) \\
&= \sum X_p(\varphi^i)(h_i \circ \varphi)(p) - X_p(\varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi)(p) + \sum (\varphi^i - \varphi(p)^i)(p) X_p(h_i \circ \varphi) \\
&= \sum_{i=1}^n X_p(\varphi^i) \underbrace{(h_i \circ \varphi)(p)}_{\substack{= h_i(\varphi(p)) = h_i(x_0) = \partial_i g(x_0) \\ = \partial_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p (f)}} \\
&= \sum_{i=1}^n X_p(\varphi^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (f).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung Ist $X_p = \sum \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, so gilt $\xi^i = X_p(\varphi^i)$.

Beweis (Beweis des Lemmas) Es gilt:

$$g(x) - g(x_0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(tx + (1-t)x_0)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) \underbrace{\int_0^1 \partial_i g(tx + (1-t)x_0)\mathrm{d}t}_{=:h_i(x)} \square$$

Satz 2.9 (Äquivalenz der Tangentialraumbegriffe) *Die Abbildung*

$$J_p \colon \mathrm{T}_p^{geo} M \to \mathrm{T}_p^{alg} M \qquad\qquad J_p[c](f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ c)$$

ist ein linearer Isomorphismus „$c(0)(f)$“.

Beweis Wegen

$$\begin{aligned} J_p[c](f) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ c) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c) \\ &= \mathrm{D}(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi \circ c) = \mathrm{D}(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} A[c] \end{aligned}$$

ist $J_p = \mathrm{D}(\cdot) \circ A$ linear.
Ist $[c] \in \operatorname{Kern} J_p$, so folgt aus $0 = J_p[c](\varphi^i) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi^i \circ c)$, dass $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi \circ c) = 0$ gilt, also $[c] = 0$. Damit ist J_p injektiv, also ein Isomorphismus. $\square$

Bemerkung

1) Ist $X_p = \sum \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, so gilt $X_p = \dot{c}(0)$ für $c(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\xi)$.
2) Für jede glatte Kurve c durch p ist $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi \circ c)$ der Koeffizientenvektor von $\dot{c}(0)$ in der Basis $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.

Satz 2.10 (Transformationsverhalten bei Kartenwechsel) *Es seien φ und ψ Karten in M um p und es bezeichnen $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ und $\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$ die damit assoziierten Basen von $\mathrm{T}_p M$. Dann gilt*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_j \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p .$$

Es sei $X_p = \sum \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum \eta^i \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$. Dann gilt:

$$\eta^j = \sum \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\xi^i \qquad \textit{bzw.} \qquad \eta = \mathrm{D}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\xi.$$

Beweis Es gelte $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum \alpha_i^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$ und nach obiger Bemerkung zum vorletzten Satz gilt:

$$\alpha_i^j = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (\psi^j) = \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \qquad \square$$