

## 7 Bedingte Erwartungswerte und Bedingte Verteilungen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein W'Raum,  $(\Omega', \mathcal{A}')$  ein Messraum,  $Y : \Omega \rightarrow \Omega'$  sei  $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -messbar und nehme die Werte  $y_1, \dots, y_n \in \Omega'$  an.  $Y^{-1}(y_k) = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y_k\} =: A_k \Rightarrow \Omega = A_1 + \dots + A_n$  und  $\sigma(Y) = \{\sum_{k \in I} A_k \mid I \subset \{1, \dots, n\}\}$ .

**Definition** Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine ZV mit  $E|X| < \infty$ . Dann ist der bedingte Erwartungswert von  $X$  unter der Bedingung  $Y = y_k$  definiert durch:

$$E[X|Y = y_k] := \frac{1}{P(A_k)} \int_{A_k} X dP, \quad k = 1, \dots, n$$

Falls  $X$  diskret mit  $x_1, \dots, x_m$ :

$$\begin{aligned} E[X|Y = y_k] &= \frac{1}{P(Y = y_k)} \sum_{j=1}^m x_j \cdot P(X = x_j, Y = y_k) \\ &= \sum_{j=1}^m x_j \cdot P(X = x_j | Y = y_k) \end{aligned}$$

**Definition** Der *bedingte Erwartungswert von  $X$  gegeben  $Y$*  ist  $E[X|Y] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$E[X|Y](\omega) := \sum_{k=1}^n E[X|Y = y_k] \cdot \mathbf{1}_{[Y=y_k]}(\omega)$$

**Bemerkung** a) Offenbar ist  $E[X|Y]$   $(\sigma(Y), \mathfrak{B})$ -messbar.

b) Sei  $Z := E[X|Y]$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{A_k} Z dP &= \int_{\Omega} \mathbf{1}_{A_k} Z dP \\ &= E[X, Y = y_k] \cdot P(A_k) \\ &= \int_{A_k} X dP \end{aligned}$$

Wegen der Struktur von  $\sigma(Y)$  folgt auch

$$\int_A Z dP = \int_A X dP \quad \forall A \in \sigma(Y)$$

c)  $E[X|Y] = g(Y)$  mit

$$g(y) = \sum_{k=1}^n E[X|Y = y_k] \cdot \mathbf{1}_{\{y_k\}}(y)$$

- d) Offenbar hängt die Definition von  $E[X|Y]$  nur davon ab, auf welchen Mengen  $A_k$   $Y$  die verschiedenen Werte annimmt, nicht aber welche Werte das genau sind.

Deshalb schreibt man auch:

$$E[X|Y] = E[X|\sigma(Y)]$$

**Beispiel 7.1** Sei  $([0, 1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, \underbrace{\lambda_{[0,1)}}_{=:P}), X(\omega) = \omega$

- Hier fehlt ein Bild -

$$A_k = \left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right), k = 1, \dots, n, \quad \mathfrak{F} := \left\{ \sum_{k \in I} A_k \mid I \subset \{1, \dots, n\} \right\}$$

$$\begin{aligned} E[X, A_k] &= \frac{1}{P(A_k)} \int_{A_k} \omega P(d\omega) \\ &= n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \omega d\omega \\ &= \frac{1}{2} \frac{2k-1}{n} \end{aligned}$$

$E[X, \mathfrak{F}]$  ist also eine „Approximation“ oder „Vergröberung“ von  $X$ . Bezüglich einer beliebigen Sub- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{A}$  wird der bedingte Erwartungswert wie folgt definiert:

**Definition** Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $E|X| < \infty$  und  $\mathfrak{F} \subset \mathcal{A}$  eine Sub- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}$ . Dann heißt  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  **eine Version des bedingten Erwartungswertes  $E[X|\mathfrak{F}]$  von  $X$  unter  $\mathfrak{F}$** , wenn gilt

(i)  $Z$  ist  $\mathfrak{F}$ -messbar

(ii)  $\int_A Z dP = \int_A X dP \quad \forall A \in \mathfrak{F}$

**Satz 7.1**

Der bedingte Erwartungswert existiert und ist bis auf Nullmengen eindeutig.

**Beweis** Sei  $X \geq 0$ . Durch

$$Q(A) := \int_A X(\omega) P(d\omega) \quad \forall A \in \mathfrak{F}$$

wird ein Maß auf  $(\Omega, \mathfrak{F})$  definiert (Satz 2.7).

Sei  $P_{\mathfrak{F}}$  die Einschränkung von  $P$  auf  $\mathfrak{F}$ . Offenbar  $Q \ll P_{\mathfrak{F}}$ . Satz von Radon-Nikodym  $\implies Q$  besitzt eine Dichte  $Z$  bzgl.  $P_{\mathfrak{F}}$  und  $Z$  ist nach Definition  $\mathfrak{F}$ -messbar.

Falls  $X$  beliebig:  $X = X^+ - X^-$

P-f.s. Eindeutigkeit: Seien  $Z, \tilde{Z}$  Versionen von  $E[X, \mathfrak{F}]$ .

$$\implies \int_A (Z - \tilde{Z}) dP = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{F}$$

Wegen  $\{Z > \tilde{Z}\} \in \mathfrak{F}, \{Z < \tilde{Z}\} \in \mathfrak{F}$  folgt:

$$E|Z - \tilde{Z}| = \int_{\{Z > \tilde{Z}\}} (Z - \tilde{Z}) dP - \int_{\{Z < \tilde{Z}\}} (Z - \tilde{Z}) dP = 0$$

$\implies Z = \tilde{Z}$  P-f.s. ■

**Bemerkung** Der bedingte Erwartungswert ist also eigentlich die Äquivalenzklasse

$$E[X|\mathfrak{F}] = \left\{ Z \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P) \mid \int_A Z dP = \int_A X dP \ \forall A \in \mathfrak{F} \right\}$$

Ein Element davon nennt man „Version“. Oft wird  $E[X|\mathfrak{F}]$  mit einer Version identifiziert.

**Definition** Sei  $A \in \mathfrak{F}$ . Eine Version von  $E[\mathbf{1}_A|\mathfrak{F}]$  bezeichnet man als **Version der bedingten Wahrscheinlichkeit**  $P(A|\mathfrak{F})$ .

**Bemerkung** Es gilt für  $B \in \mathfrak{F}$ :

$$\int_B P(A|\mathfrak{F}) dP \stackrel{(ii)}{=} \int_B \mathbf{1}_A dP = P(A \cap B)$$

### Satz 7.2

Sei  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit  $\|X\|^2 = EX^2$ . Dann gilt:

$$\|X - E[X|\mathfrak{F}]\|^2 = \inf \{ \|X - Y\|^2 \mid Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P) \}$$

**Beweis** siehe Henze Stochastik II, S.214 ■

### Satz 7.3 (Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte)

Es seien  $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  Sub- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{A}$ . Dann gilt:

a)  $E[aX + bY|\mathfrak{F}] = aE[X|\mathfrak{F}] + bE[Y|\mathfrak{F}]$  P-f.s.  $a, b \in \mathbb{R}$

b)  $E[E[X|Y]] = EX$

c)  $X \leq Y \implies E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$  P-f.s.

d) Für  $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$  gilt  $E[E[X|\mathfrak{F}_2]|\mathfrak{F}_1] = E[X|\mathfrak{F}_1]$

Für  $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$  gilt  $E[E[X|\mathfrak{F}_2]|\mathfrak{F}_1] = E[X|\mathfrak{F}_2]$

e) Falls  $Y$   $\mathfrak{F}$ -messbar und  $EXY < \infty$  gilt:

$$E[XY|\mathfrak{F}] = YE[X|\mathfrak{F}]$$

f) Falls  $X$  von  $\mathfrak{F}$  unabhängig ist (d.h. falls die  $X$  und  $\mathbf{1}_A \ \forall A \in \mathfrak{F}$  unabhängig sind), dann gilt:

$$E[X|\mathfrak{F}] = EX$$

**Bemerkung** Aus Satz 7.3 bekommt man:

1.  $X \equiv c \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{f)}} E[c|\mathfrak{F}] = c$
2.  $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\} \xrightarrow{\text{f)}} E[X|\mathfrak{F}] = EX$
3.  $X$   $\mathfrak{F}$ -messbar  $\xrightarrow{\text{e)}} E[X|\mathfrak{F}] = X$
4.  $X \geq 0 \xrightarrow{\text{c)}} E[X|\mathfrak{F}] \geq 0$  P-f.s.

**Beweis** von Satz 7.3:

a)

$$\begin{aligned}
 \int_A E[aX + bY|\mathfrak{F}]dP &= \int_A aX + bYdP \\
 &\stackrel{\text{Linearität}}{=} a \int_A XdP + b \int_A YdP \\
 &= a \int_A E[X|\mathfrak{F}]dP + b \int_A E[Y|\mathfrak{F}]dP \\
 &= \int_A (aE[X|\mathfrak{F}] + bE[Y|\mathfrak{F}])dP \quad \forall A \in \mathfrak{F}
 \end{aligned}$$

$\implies$  Behauptung, da  $aE[X|\mathfrak{F}] + bE[Y|\mathfrak{F}]$   $\mathfrak{F}$ -messbar und Radon-Nikodym-Dichte  $P$ -f.s. eindeutig.

b)

$$E[E[X|\mathfrak{F}]] = \int_{\Omega} E[X|\mathfrak{F}]dP = \int_{\Omega} XdP = EX$$

c)

$$\begin{aligned}
 A &:= \{\omega \in \Omega \mid E[X|\mathfrak{F}](\omega) > E[Y|\mathfrak{F}](\omega)\} \in \mathfrak{F} \\
 &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ \omega \in \Omega \mid E[X|\mathfrak{F}](\omega) > E[Y|\mathfrak{F}](\omega) + \frac{1}{n} \right\}}_{A_n}
 \end{aligned}$$

Annahme:  $P(A) > 0 \implies \exists n \in \mathbb{N}$  mit  $P(A_n) > 0$

$$\begin{aligned}
 \implies 0 &\leq \int_{A_n} (Y - X)dP \\
 &= \int_{A_n} E[Y|\mathfrak{F}]dP - \int_{A_n} E[X|\mathfrak{F}]dP \\
 &= \int_{A_n} (E[Y|\mathfrak{F}] - E[X|\mathfrak{F}])dP \\
 &\leq -\frac{1}{n} \cdot P(A_n) \\
 &< 0 \quad \text{Widerspruch!}
 \end{aligned}$$

d) Z.z. Für  $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$  gilt:  $E[E[X|\mathfrak{F}_2]|\mathfrak{F}_1] = E[X|\mathfrak{F}_1]$ . Sei  $A \in \mathfrak{F}_1 \implies A \in \mathfrak{F}_2$  und

$$\int_A E[X|\mathfrak{F}_1]dP = \int_A XdP = \int_A E[X|\mathfrak{F}_2]dP = \int_A E[E[X|\mathfrak{F}_2]|\mathfrak{F}_1]dP$$

$\implies$  Behauptung, da Radon-Nikodym-Dichte eindeutig.

Für  $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$  ähnlich.

e) Mit algebraischer Induktion:

– Sei  $Y = \mathbf{1}_B$ ,  $B \in \mathfrak{F}$  und  $A \in \mathfrak{F}$  beliebig.

$$\int_A Y \cdot E[X|\mathfrak{F}]dP = \int_{A \cap B} E[X|\mathfrak{F}]dP = \int_{A \cap B} XdP = \int_A YXdP$$

Außerdem ist  $Y \cdot E[X|\mathfrak{F}]$   $\mathfrak{F}$ -messbar  $\implies$  Behauptung, da Radon-Nikodym-Dichte  $P$ -f.s. eindeutig.

– Linearität des Integrals + Teil a)  $\implies$  Aussage für  $Y \in \mathcal{E}, Y \geq 0$  :  
Bedingte Version des Satzes von der monotonen Konvergenz ( $\rightarrow$  Übung).

– Dann  $Y = Y^+ - Y^-$

f)

$$\begin{aligned} \int_A E[X|\mathfrak{F}]dP &= \int_A XdP \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{1}_A XdP \\ &\stackrel{\text{unabh.}}{=} \int \mathbf{1}_A dP \cdot \underbrace{\int XdP}_{=EX} \\ &= \int_A EXdP \end{aligned}$$

$\implies$  Behauptung, da  $EX$   $\mathfrak{F}$ -messbar. ■

#### Satz 7.4 (Faktorisierungssatz)

Es seien  $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$  Messräume und  $Y : \Omega \rightarrow \Omega'$  ein Zufallsgröße. Ist  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(\sigma(Y), \mathfrak{B})$ -messbare Zufallsvariable. Dann gibt es eine  $\mathfrak{B}$ -messbare Funktion  $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$X = g \circ Y.$$

**Beweis** Algebraische Induktion:

- (i) Sei  $X = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{A_j} \in \mathcal{E}$  mit  $a_j \geq 0, A_j \in \sigma(Y)$ .  
 $\implies A_j = Y^{-1}(A'_j), A'_j \in \mathcal{A}'$ . Wähle  $g = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{A'_j}$   
 $\implies X = g \circ Y$   
 $\implies$  Behauptung

- (ii) Sei  $X \geq 0$  und  $(\sigma(Y), \mathfrak{B})$ -messbar.  $\implies \exists (X_n) \subset \mathcal{E}, 0 \leq X_n \uparrow X$  und wegen  
 (i)  $\exists (\mathcal{A}', \mathfrak{B})$ -messbare Funktion  $g_n$  mit  $X_n = g_n \circ Y, n \in \mathbb{N}$ .

$$\implies X = \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (g_n \circ Y) = (\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n) \circ Y$$

Wähle also  $g = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$

- (iii)  $X = X^+ - X^- \xrightarrow{(ii)} X = g_1 \circ Y - g_2 \circ Y$ . Wähle  $g = g_1 - g_2$ . ■

**Bemerkung** Statt  $E[X|\sigma(Y)]$  schreiben wir auch  $E[X|Y]$  und wegen Satz 7.4  $\exists g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$   $(\mathcal{A}', \mathfrak{B})$ -messbar mit  $E[X|Y] = g \circ Y$   $P$ -f.s.. Die Funktion  $g$  ist  $P^Y$ -f.s. eindeutig.

**Definition** Ist  $E[X|Y] = g \circ Y$  wie oben, so heißt  $E[X|Y = y] = g(y)$  (ein) **bedingter Erwartungswert von  $X$  unter der Bedingung  $Y = y$** .

**Satz 7.5**

Für alle  $A' \in \mathcal{A}'$  gilt:

$$\int_{A'} E[X|Y = y] P^Y(dy) = \int_{Y^{-1}(A')} X dP$$

**Beweis**

$$\int_{A'} E[X|Y = y] P^Y(dy) = \int_{A'} g dP^Y \stackrel{\text{Sa. 2.4}}{=} \int_{Y^{-1}(A')} g \circ Y dP = \int_{Y^{-1}(A')} X dP.$$

**Bemerkung** Für  $A \in \mathcal{A}$  heißt  $P(A|Y = y) := E[\mathbf{1}_A|Y = y]$  (eine) **bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  unter der Bedingung  $Y = y$** . Bedingte Wahrscheinlichkeiten treten oft bei gekoppelten Zufallsexperimenten auf. Die folgende Sichtweise ist konstruktiver:

**Definition** Es seien  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  messbare Räume. Eine Abbildung  $Q : \Omega_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, 1]$  mit

(i)  $\omega_1 \mapsto Q(\omega_1, A_2)$  ist  $\mathcal{A}_1$ -messbar  $\forall A_2 \in \mathcal{A}_2$ .

(ii)  $A_2 \mapsto Q(\omega_1, A_2)$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) \forall \omega_1 \in \Omega_1$

nennt man **Übergangskern** oder **Kern** von  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  nach  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ .

**Satz 7.6**

Es seien  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  ein Messraum und  $Q$  ein Übergangskern von  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  nach  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ . Dann wird durch

$$P(A) := \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2) Q(\omega_1, d\omega_2) \right) P_1(d\omega_1)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P =: P_1 \otimes Q$  auf  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  definiert.  $P$  heißt **Koppelung** und ist das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$  mit der Eigenschaft

$$P(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} Q(\omega_1, A_2) P_1(d\omega_1) \quad (*)$$

## Beweis

1. Ähnlich wie in §3 zeigt man: für  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f$   $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ -messbar ist  $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) Q(\omega_1, d\omega_2)$   $\mathcal{A}_1$ -messbar.
2. Für  $A = A_1 \times A_2$  ist  $\mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1) \mathbf{1}_{A_2}(\omega_2) \implies (*)$ .
3.  $P(\Omega_1 \times \Omega_2) = 1$  wegen  $(*)$ .  $P \geq 0$  ist klar.

$$\begin{aligned}
 P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} \underbrace{\mathbf{1}_{\sum_{n=1}^{\infty} A_n}(\omega_1, \omega_2)}_{=\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega_1, \omega_2)} Q(\omega_1, d\omega_2) \right) P_1(d\omega_1) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_n}(\omega_1, \omega_2) Q(\omega_1, d\omega_2) \right) P_1(d\omega_1) \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).
 \end{aligned}$$

4. Eindeutigkeitssatz für Maße. ■

**Satz 7.7** Es seien  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  ein messbarer Raum,  $Y : \Omega \rightarrow \Omega_1$   $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1)$ -messbar und  $X$  ein  $d$ -dimensionaler Zufallsvektor. Dann existiert ein Kern  $Q$  von  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  nach  $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$  derart, dass

$$P^{X,Y} = P^Y \otimes Q.$$

$Q$  ist eine Version der bedingten Verteilung von  $X$  unter  $Y$ . Schreibweise:

$$Q(y, \cdot) = P^X(\cdot | Y = y).$$

**Beweis** - ohne Beweis - ■

**Bemerkung** Für  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathfrak{B}^d$  gilt:

$$P(X \in B, Y \in A) = \int_A Q(y, B) P^Y dy = \int_A P^X(B | Y = y) P^Y(dy)$$

## Satz 7.8

Es seien  $\mu$  und  $\nu$   $\sigma$ -endliche Maße auf  $\mathcal{A}_1$  bzw.  $\mathfrak{B}^d$ .  $P^{(Y,X)}$  besitze eine Dichte  $f$  bezüglich  $\mu \otimes \nu$ . Es sei  $f_Y(y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) \nu(dx)$  die (Rand-)Dichte von  $P^Y$  bzgl.  $\mu$ . Weiterhin sei

$$f(x|y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad \text{und} \quad \frac{0}{0} := 0.$$

So wird durch

$$P^X(B | Y = y) := \int_B f(x|y) \nu(dx) \quad \forall B \in \mathfrak{B}^d, y \in \Omega_1$$

eine bedingte Verteilung von  $X$  unter der Bedingung  $Y = y$  definiert.

$f(\cdot | y)$  heißt **bedingte  $\nu$ -Dichte von  $X$  unter der Bedingung  $Y = y$** .

**Beweis**

$y \mapsto \int_B f(x|y)\nu(dx)$  ist messbar  $\forall B \in \mathfrak{B}^d$  (Satz von Tonelli),

$B \mapsto \int_B f(x|y)\nu(dx)$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\forall y \in \Omega_1$ .

Für  $A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathfrak{B}^d$  gilt:

$$\begin{aligned} P^{(Y,X)}(A \times B) &= \int_{A \times B} f d(\mu \otimes \nu) \\ &= \int_A \left( \int_B f(x, y) \nu(dx) \right) \mu(dy) \\ &= \int_A \left( \int_B f(x|y) \nu(dx) \right) f_Y(y) \mu(dy) \\ &\stackrel{!}{=} \int_A P^X(B|Y=y) \underbrace{P^Y(dy)}_{=f_Y(y)\mu(dy)} \end{aligned}$$

■

**Satz 7.9**

Es seien  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein Zufallsvektor und  $X$  eine Zufallsvariable mit  $E|X| < \infty$ . Dann ist

$$h(y) := \int_{\mathbb{R}} x P^X(dx|Y=y)$$

ein bedingter Erwartungswert von  $X$  unter der Bedingung  $Y = y$ .

**Beweis** Nach 7.5:

$$\int_B E[X|Y=y] P^Y(dy) = \int_{Y^{-1}(B)} X dP.$$

Für  $B \in \mathfrak{B}^d$  und  $T(Y, X) := X \cdot (\mathbf{1}_B \circ Y)$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_{Y^{-1}(B)} X dP &= \int T(Y, X) dP \\ &\stackrel{2.4}{=} \int T(y, x) P^{(Y,X)}(dy, dx) \\ &= \int x \mathbf{1}_B(y) P^{(Y,X)}(dy, dx) \\ &= \int_B \left( \int_{\mathbb{R}} x P^X(dx|Y=y) \right) P^Y(dy) \end{aligned}$$

$\stackrel{7.5}{\implies}$  Beh.

■

**Beispiel 7.2**

$U$  und  $V$  seien unabhängig und  $U(0, 1)$ -verteilt und entsprechen den zufälligen Seitenlängen eines Rechtecks. Es sei  $X = \text{Flächeninhalt des Rechtecks}$  und  $Y = \text{Umfang des Rechtecks}$ . Klar:  $X$  und  $Y$  sind nicht unabhängig.



Weiter ist  $f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 1 & 0 < u < 1 \text{ und } 0 < v < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  die gemeinsame Dichte von  $U$

und  $V$ .

$\implies$  (Transformationssatz für Dichten)  $f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{y^2-16x}}$  für  $0 < x < 1$  und

$4\sqrt{x} < y < 2 + 2x$ ;  $f_X(x) = -\log x$  für  $0 < x < 1$ .

$\implies f(y|x) = -\frac{2}{\log x \sqrt{y^2-16x}}$  für  $4\sqrt{x} < y < 2 + 2x$ .

$\implies E[Y|X=x] = \int y \cdot f(y|x) dy = -\frac{4(1-x)}{\log x}$ .

### Beispiel 7.3 (Buffonsches Nadelproblem)

Wir werfen eine Nadel der Länge 1 zufällig auf einen unendlich langen Streifen der Breite 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel mindestens eine Wand des Korridors schneidet?

$X$  = Abstand der Nadelmitte von der linken Wand

$Y$  = Winkel der Nadel zum Lot

Annahme:  $X \sim U(0,1)$ ,  $Y \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $X, Y$  unabhängig.

$A$  = Nadel schneidet die Wand =  $\{\omega \mid (X,Y)(\omega) \in B\}$  mit

$B = \{(x,y) \mid |y| < \frac{\pi}{2}, x \in [0, \frac{1}{2} \cos y] \cup [1 - \frac{1}{2} \cos y, 1]\}$

- hier fehlt eine Skizze -

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(A) &= P^{X,Y}(B) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \mathbf{1}_B(x,y) P^X(dx|Y=y) P^Y(dy) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P^X\left([0, \frac{\cos y}{2}] \cup [1 - \frac{\cos y}{2}, 1] \mid Y=y\right) P^Y(dy) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \cdot \frac{1}{\pi} dy \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

So lässt sich zum Beispiel auch  $\pi$  näherungsweise bestimmen.

