

# 15. $g$ -adische Entwicklungen

**Vereinbarung:** Stets in diesem Paragraphen:  $g \in \mathbb{N}$ ,  $g \geq 2$ ,  $G := \{0, 1, \dots, g-1\}$ .

## Satz 15.1 (Konvergenz $g$ -adischer Entwicklungen)

(1) Sei  $(z_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $G \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$  ist konvergent.

(2) Ist  $m \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} = \frac{1}{g^{m-1}}$

## Beweis

(1)  $\frac{|z_n|}{g^n} = \frac{z_n}{g^n} \leq \frac{g-1}{g^n} \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}$  ist konvergent  $\xrightarrow{12.2}$  Behauptung.

(2)  $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} = \frac{g-1}{g^m} + \frac{g-1}{g^{m+1}} + \dots = \frac{g-1}{g^m} \cdot (1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \dots) = \frac{g-1}{g^m} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{g}} = \frac{1}{g^{m-1}}$ . ■

## Definition

Sei  $(z_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $G$  und es gelte  $(*) z_n \neq g-1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ . Dann heißt  $0, z_1 z_2 z_3 \dots := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$  ein  $g$ -adischer Bruch oder eine  $g$ -adische Entwicklung.

## Beispiele:

(1)  $g = 10$  (Dezimalentwicklung);  $0,333\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$ .

(2)  $g = 2$  (Dualentwicklung);  $0,111000\dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ .

**Bemerkung:** (1) Die Negation von  $(*)$  lautet:  $z_n = g-1$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .

(2) Ist  $0, z_1 z_2 z_3 \dots$  ein  $g$ -adischer Bruch und existiert ein  $m \in \mathbb{N} : z_n = 0$  für  $n > m$ , so schreibt man:  $0, z_1 z_2 z_3 \dots z_m$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  seien konvergent und es gelte  $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Gilt zusätzlich  $a_n < b_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (Beweis in Übung).

## Satz 15.2 (Eindeutigkeit der $g$ -adischen Entwicklung)

Sei  $a = 0, z_1 z_2 z_3 \dots$  ein  $g$ -adischer Bruch.

(1)  $a \in [0, 1)$

(2) Ist  $0, w_1 w_2 w_3 \dots$  eine weitere  $g$ -adische Entwicklung von  $a$ , so gilt  $z_n = w_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis**

$$(1) \quad 0 \leq a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} \stackrel{(*), \text{Bem. (2)}}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} \stackrel{15.1}{=} 1.$$

(2) **Annahme:**  $\exists n \in \mathbb{N} : z_n \neq w_n$ . Sei  $m$  der kleinste solche Index, also  $z_m \neq w_m$  und  $z_j = w_j$  für  $j = 1, \dots, m-1$ . Etwa  $z_m < w_m \implies z_m - w_m < 0 \stackrel{z_m - w_m \in \mathbb{Z}}{\implies} z_m - w_m \leq -1$ .  
 $\forall n \in \mathbb{N} : z_n - w_n \leq z_n \leq g-1$ .  $\exists \nu \in \mathbb{N}$  mit  $\nu \geq m+1$  und  $z_\nu - w_\nu < g-1$ .  
(andererseits falls  $z_\nu - w_\nu = g-1 \forall \nu \geq m+1 \implies z_\nu = w_\nu + g-1 \forall \nu \geq m+1 \implies w_\nu = 0 \forall \nu \geq m+1 \implies z_\nu = g-1 \forall \nu \geq m+1$ . Widerspruch zu (\*)). Dann:  

$$0 = a - a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{g^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n}$$

$$= \underbrace{\frac{z_m - w_m}{g^m}}_{\leq -\frac{1}{g^m}} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n}}_{< \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}} < -\frac{1}{g^m} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}}_{\stackrel{15.1}{=} \frac{1}{g^m}} = 0$$

$$\implies 0 < 0 \text{ Widerspruch.} \quad \blacksquare$$

**Satz 15.3 (Existenz der  $g$ -adischen Entwicklung)**

Ist  $a \in [0, 1)$ , so lässt sich  $a$  eindeutig als  $g$ -adischer Bruch darstellen.

**Beweis**

Eindeutigkeit siehe 15.2.

Existenz: Definiere  $(z_n)_{n \geq 1}$  wie folgt:  $z_1 := [a \cdot g]$ ,  $z_{n+1} := [(a - \frac{z_1}{g} - \frac{z_2}{g^2} - \dots - \frac{z_n}{g^n}) \cdot g^{n+1}]$  ( $n \geq 1$ ).

In der Übung:  $z_n \in G \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Es gilt: } (**) \quad \underbrace{\frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \dots + \frac{z_n}{g^n}}_{=: s_n} \leq a < \underbrace{\frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \dots + \frac{z_n}{g^n}}_{=: s_n} + \frac{1}{g^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies s_n \leq a < s_n + \frac{1}{g^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}.$$

Noch zu zeigen ist:  $z_n \neq g-1$  für unendlich viele  $n$ . **Annahme:**  $\exists m \in \mathbb{N} : z_n = g-1 \forall n \geq m$ .

$$\text{Dann: } a = \sum_{n=1}^{\infty} z_n g^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{m-1} \frac{z_n}{g^n}}_{=: s_{m-1}} + \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}}_{=: \frac{1}{g^{m-1}}} \implies a = s_{m-1} + \frac{1}{g^{m-1}} \text{ Widerspruch zu } (**). \quad \blacksquare$$

**Bemerkung:** Ist  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ , so lässt sich  $a$  eindeutig in der Form  $a = [a] + 0, z_1 z_2 z_3 \dots$  darstellen. Ist  $g = 10$ , so schreibt man dafür  $a = [a], z_1 z_2 z_3 \dots$ . Beispiel:  $1,333\dots$

**Satz 15.4 ( $\mathbb{R}$  ist überabzählbar)**

Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

**Beweis**

Es genügt zu zeigen:  $[0, 1)$  ist überabzählbar.

**Annahme:**  $[0, 1)$  ist abzählbar, also  $[0, 1) = \{a_1, a_2, \dots\}$ ,  $a_j \neq a_k$  für  $j \neq k$ . Für  $j \in \mathbb{N}$  sei  $a_j = 0, z_1^{(j)} z_2^{(j)} z_3^{(j)} \dots$  die 3-adische Entwicklung von  $a_j$ . ( $z_k^{(j)} \in \{0, 1, 2\}$ ).

$$z_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } z_k^{(k)} \in \{0, 2\} \\ 0 & \text{falls } z_k^{(k)} = 1 \end{cases}$$

Dann:  $z_k \neq z_k^{(k)} \forall k \in \mathbb{N}$ ,  $z_k \neq g - 1 \forall k \in \mathbb{N}$ .  $a := 0, z_1 z_2 z_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$ . 15.2  $\implies a \in [0, 1) \implies \exists m \in \mathbb{N} : a = a_m \implies 0, z_1 z_2 z_3 \dots = 0, z_1^{(m)} z_2^{(m)} z_3^{(m)} \dots$ . 15.2  $\implies z_j = z_j^{(m)} \forall j \in \mathbb{N} \implies z_m = z_m^{(m)}$ . Widerspruch! ■

