

## 7. Der komplexe Logarithmus

### Definition

Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $e^z = w$  heißt **ein Logarithmus von  $w$** . Man schreibt in diesem Fall (ungenau):  $z = \log w$ .

### Satz 7.1

Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $w = |w|e^{i\text{Arg}w}$  ( $\text{Arg}w \in (-\pi, \pi]$ )

Für  $z \in \mathbb{C}$  gilt:  $e^z = w \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \log |w| + i\text{Arg}w + 2k\pi i$  ( $\log |w|$  ist der reelle Log)

### Beweis

$$" \Leftarrow " : e^z = \underbrace{e^{\log |w|}}_{|w|} e^{i\text{Arg}w} \underbrace{e^{2k\pi i}}_1 = |w|e^{i\text{Arg}w} = w$$

$$" \Rightarrow " \text{ Sei } z = x + iy (x, y \in \mathbb{R}) \text{ und } e^z = w. \text{ Dann: } |w| = |e^z| = e^x \implies x = \log |w|$$

$$|w|e^{i\text{Arg}w} = w = e^z = e^x e^{iy} = |w|e^{iy}$$

$$\implies e^{iy} = e^{i\text{Arg}w} \implies e^{i(y - \text{Arg}w)} = 1 \xrightarrow{6.3} \exists k \in \mathbb{Z} : iy - i\text{Arg}w = 2k\pi i$$

$$\implies z = \log |w| + i\text{Arg}w + 2k\pi i$$

■

### Definition

Die Funktion  $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  def. durch  $\text{Log}w := \log |w| + i\text{Arg}w$  heißt der **Hauptzweig des Logarithmus**.

### Beispiele:

- (1) Alle Log von  $w = 1$ :  $2k\pi i$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\text{Log } 1 = 0$$

- (2)  $\text{Log}(-1) = i\pi$

- (3)  $w = 1 + i$ ,  $|w| = \sqrt{2}$ ,  $\text{Arg}w = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Log}(1 + i) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

**Satz 7.2**

Sei  $A = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$

$f := \exp|_A$

- (1)  $f$  ist auf  $A$  injektiv.
- (2)  $f(A) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- (3)  $f^{-1}(w) = \operatorname{Log} w$  ( $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ )
- (4) Die Funktion  $\operatorname{Log}$  ist unstetig in jedem  $w \in \mathbb{R}$  und  $w < 0$

**Beweis**

- (1) 6.3, 7.1
- (2) 6.3, 7.1
- (3) 6.3, 7.1
- (4) §3 Beispiel:  $w \mapsto \operatorname{Arg} w$  ist in  $w < 0$  unstetig. ■

**Definition**

$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\} (\subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\})$

Für  $w \in \mathbb{C}_-$  ist  $\operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$ .

**Satz 7.3**

$\operatorname{Log} \in C(\mathbb{C}_-)$

**Beweis**

Sei  $w_0 \in \mathbb{C}_-$ ,  $z_0 := \operatorname{Log} w_0$ ,  $x_0 := \operatorname{Re} z_0$ ,  $y_0 := \operatorname{Im} z_0$ ; also:  $x_0 = \log |w_0|$ ,  $y_0 = \operatorname{Arg} w_0 \in (-\pi, \pi)$ .

$R := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \log 2, |y| \leq \pi\}$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $K := R \cap (\mathbb{C} \setminus U_\varepsilon(z_0)) \neq \emptyset$ . Klar:  $K$  ist kompakt,  $z_0 \notin K$ .

Definiere  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\varphi(z) := |e^z - w_0| = |e^z - e^{z_0}|$ .

Dann:  $\varphi \in C(K)$ . 3.3  $\Rightarrow \exists \varrho := \min \varphi(K)$ .

Annahme:  $\varrho = 0$ . Also existiert ein  $z \in K : e^z = e^{z_0} \Rightarrow e^{z-z_0} = 1$ . 6.3  $\Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : z - z_0 = 2j\pi i \Rightarrow 2j\pi = \operatorname{Im}(z - z_0) = \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0 \Rightarrow 2|j|\pi = |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0| \leq \underbrace{|\operatorname{Im} z|}_{\leq \pi} + \underbrace{|\operatorname{Im} z_0|}_{< \pi} < 2\pi \Rightarrow$

$j = 0 \Rightarrow z_0 = z \in K$ . Wid!

Also:  $\varrho > 0$

$\delta := \min\{\varrho, \frac{1}{2}e^{x_0}\}$ . Sei  $w \in \mathbb{C}_-$  und  $|w - w_0| < \delta$ ;  $z := \log w$ . Z.z:  $|z - z_0| < \varepsilon$ .

Sei  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ );  $y = \operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$ , also:  $|y| \leq \pi$ .

Annahme:  $x > x_0 + \log 2$ . Dann:

$\frac{1}{2}e^{x_0} \geq \delta > |w - w_0| = |e^z - e^{z_0}| \geq ||e^z| - |e^{z_0}|| = |e^x - e^{x_0}| \geq e^x - e^{x_0} > e^{x_0 + \log 2} - e^{x_0} = e^{x_0}$  Wid!

Also:  $x \leq x_0 + \log 2$ . Analog:  $x \geq x_0 - \log 2$ .

Fazit:  $z \in R$ .

Annahme:  $|z - z_0| \geq \varepsilon \Rightarrow z \in K \Rightarrow \delta \leq \varrho \leq \varphi(z) = |e^z - e^{z_0}| = |w - w_0| < \delta$ . Wid! ■

#### Satz 7.4

$\text{Log} \in H(\mathbb{C}_-)$  und  $\text{Log}' w = \frac{1}{w} \forall w \in \mathbb{C}_-$

#### Beweis

Sei  $w_0 \in \mathbb{C}_-$ ;  $(w_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}_-$  mit:  $w_n \neq w_0 \forall n \in \mathbb{N}$  und  $w_n \rightarrow w_0$ ,  $z_0 := \text{Log} w_0$ ,  $z_n := \text{Log} w_n$ . 7.3  $\Rightarrow z_n \rightarrow z_0$ . Dann:

$$\frac{\text{Log} w_n - \text{Log} w_0}{w_n - w_0} = \frac{z_n - z_0}{e^{z_n} - e^{z_0}} = \left( \frac{e^{z_n} - e^{z_0}}{z_n - z_0} \right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}$$

D.h. Log ist in  $w_0$  komplex differenzierbar und  $\text{Log}' w_0 = \frac{1}{w_0}$  ■

**Bezeichnung:**  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = U_1(0)$

Beachte: Für  $z \in \mathbb{D}$  ist  $1 - z \in \mathbb{C}_-$

#### Satz 7.5

Für alle  $z \in \mathbb{D}$  gilt:

$$\text{Log}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

#### Beweis

7.4, 5.4  $\Rightarrow f(z) := \text{Log}(1 + z) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$  ist auf  $\mathbb{D}$  holomorph und  
 $f'(z) = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-(-z)} = 0 \forall z \in \mathbb{D}$

$\mathbb{D}$  ist ein Gebiet  $\stackrel{4.2}{\Rightarrow} f$  ist auf  $\mathbb{D}$  konstant.  $f(0) = 0 \Rightarrow \text{Beh.}$  ■

#### Definition

Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $a \in \mathbb{C}$ .

$w^a := e^{a \text{Log} w}$  (**Hauptzweig der allgemeinen Potenz**)

#### Beispiele:

(1) Für  $a = k \in \mathbb{Z}$  ist obige Definition die frühere Potenz von  $w$ . Denn:  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$e^{k \text{Log} w} = e^{\text{Log} w + \text{Log} w + \dots + \text{Log} w} = (e^{\text{Log} w})^k = w^k$$

$$e^{-k \text{Log} w} = \frac{1}{e^{k \text{Log} w}} \stackrel{s.o.}{=} \frac{1}{w^k} = w^{-k}$$

(2)  $w = a = i$ ,  $\log |w| = 0$ ,  $\text{Arg} w = \frac{\pi}{2}$ ,  $\text{Log} w = i \frac{\pi}{2} \Rightarrow i^i = e^{i \cdot i \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$

#### Satz 7.6

Sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $f : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $f(w) := w^a$ . Dann:

$f \in H(\mathbb{C}_-)$  und  $f'(w) = a w^{a-1} \forall w \in \mathbb{C}_-$

## 7. Der komplexe Logarithmus

### Beweis

$$7.4, 4.4 \Rightarrow f \in H(\mathbb{C}_-) \text{ und } f'(w) = e^{a \operatorname{Log} w} (a \operatorname{Log} w)' = a e^{a \operatorname{Log} w} \frac{1}{w} \stackrel{Bsp(1)}{=} a e^{a \operatorname{Log} w} e^{-\operatorname{Log} w} = a e^{(a-1) \operatorname{Log} w} = a w^{a-1} \quad \blacksquare$$