

## § 4.

# Partielle Ableitungen

Stets in diesem Paragraphen:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  sei offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion.  $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$ . Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$  (fest).

Die Gerade durch  $x_0$  mit der Richtung  $e_j$  ist gegeben durch folgende Menge:  $\{x_0 + te_j : t \in \mathbb{R}\}$ .  $D$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$ .  $\|x_0 + te_j - x_0\| = \|te_j\| = |t| \implies x_0 + te_j \in D$  für  $t \in (-\delta, \delta)$ .  $g(t) := f(x_0 + te_j)$  ( $t \in (-\delta, \delta)$ ) Es ist  $g(t) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{j-1}^{(0)}, x_j^{(0)} + t, x_{j+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

### Definition

$f$  heißt in  $x_0$  **partiell differenzierbar** nach  $x_j : \iff$  es existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t}$$

und ist  $\in \mathbb{R}$ . In diesem Fall heißt obiger Grenzwert die **partielle Ableitung von  $f$  in  $x_0$  nach  $x_j$**  und man schreibt für diesen Grenzwert:

$$f_{x_j}(x_0) \text{ oder } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

Im Falle  $n = 2$  oder  $n = 3$  schreibt man  $f_x, f_y, f_z$  bzw.  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

### Beispiele:

$$(1) \quad f(x, y, z) = xy + z^2 + e^{x+y}; \quad f_x(x, y, z) = y + e^{x+y} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z). \quad f_x(1, 1, 2) = 1 + e^2.$$

$$f_y(x, y, z) = x + e^{x+y}. \quad f_z(x, y, z) = 2z = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z).$$

$$(2) \quad f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$\text{Sei } x \neq 0: f_{x_j}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} 2x_j = \frac{x_j}{\|x\|}$$

Sei  $x = 0$ :  $\frac{f(t, 0, \dots, 0) - f(0, 0, \dots, 0)}{t} = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \implies f$  ist in  $(0, \dots, 0)$  nicht partiell differenzierbar nach  $x_1$ . Analog:  $f$  ist in  $(0, \dots, 0)$  nicht partiell differenzierbar nach  $x_2, \dots, x_n$

$$(3) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0) \implies f$  ist in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar nach  $x$  und  $f_x(0, 0) = 0$ . Analog:  $f$  ist in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar nach  $y$  und  $f_y(0, 0) = 0$ . Aber:  $f$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig.

**Definition**

- (1)  $f$  heißt in  $x_0$  **partiell differenzierbar** :  $\iff f$  ist in  $x_0$  partiell differenzierbar nach allen Variablen  $x_1, \dots, x_n$ . In diesem Fall heißt  $\text{grad } f(x_0) := \nabla f(x_0) := (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$  der **Gradient** von  $f$  in  $x_0$ .
- (2)  $f$  ist auf  $D$  **partiell differenzierbar** nach  $x_j$  oder  $f_{x_j}$  ist auf  $D$  vorhanden :  $\iff f$  ist in jedem  $x \in D$  partiell differenzierbar nach  $x_j$ . In diesem Fall wird durch  $x \mapsto f_{x_j}(x)$  eine Funktion  $f_{x_j} : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert die **partielle Ableitung** von  $f$  auf  $D$  nach  $x_j$ .
- (3)  $f$  heißt **partiell differenzierbar** auf  $D$  :  $\iff f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  sind auf  $D$  vorhanden.
- (4)  $f$  heißt auf  $D$  **stetig partiell differenzierbar** :  $\iff f$  ist auf  $D$  partiell differenzierbar und  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  sind auf  $D$  stetig. In diesem Fall schreibt man  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ .

**Beispiele:**

- (1) Sei  $f$  wie in obigem Beispiel (3).  $f$  ist in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar und  $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$
- (2) Sei  $f$  wie in obigem Beispiel (2).  $f$  ist auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  partiell differenzierbar und  $\text{grad } f(x) = (\frac{x_1}{\|x\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|}) = \frac{1}{\|x\|} x$  ( $x \neq 0$ )

**Definition**

Seien  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  und  $f_{x_j}$  sei auf  $D$  vorhanden. Ist  $f_{x_j}$  in  $x_0 \in D$  partiell differenzierbar nach  $x_k$ , so heißt

$$f_{x_j x_k}(x_0) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) := (f_{x_j})_{x_k}(x_0)$$

die **partielle Ableitung zweiter Ordnung** von  $f$  in  $x_0$  nach  $x_j$  und  $x_k$ . Ist  $k = j$ , so schreibt man:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x_0)$$

Entsprechend definiert man partielle Ableitungen höherer Ordnung (soweit vorhanden).

**Schreibweisen:**  $f_{xxyz} = \frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y \partial z^2}$ , vergleiche:  $\frac{\partial^{180} f}{\partial x^{179} \partial y}$

**Beispiele:**

- (1)  $f(x, y) = xy + y^2$ ,  $f_x(x, y) = y$ ,  $f_{xx} = 0$ ,  $f_y = x + 2y$ ,  $f_{yy} = 2$ ,  $f_{xy} = 1$ ,  $f_{yx} = 1$ .
- (2)  $f(x, y, z) = xy + z^2 e^x$ ,  $f_x = y + z^2 e^x$ ,  $f_{xy} = 1$ ,  $f_{xyz} = 0$ .  $f_z = 2z e^x$ ,  $f_{zy} = 0$ ,  $f_{zyx} = 0$ .
- (3)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Übungsblatt:  $f_{xy}(0, 0)$ ,  $f_{yx}(0, 0)$  existieren, aber  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

**Definition**

Sei  $m \in \mathbb{N}$ .  $f$  heißt auf  $D$   **$m$ -mal stetig partiell differenzierbar** :  $\iff$  alle partiellen Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $\leq m$  sind auf  $D$  vorhanden und auf  $D$  stetig. In diesem Fall schreibt man:  $f \in C^m(D, \mathbb{R})$

$$C^0(D, \mathbb{R}) := C(D, \mathbb{R}), \quad C^\infty(D, \mathbb{R}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(D, \mathbb{R})$$

**Satz 4.1 (Satz von Schwarz)**

Es sei  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in D$  und  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ . Dann:  $f_{x_j x_k}(x_0) = f_{x_k x_j}(x_0)$

**Satz 4.2 (Folgerung)**

Ist  $f \in C^m(D, \mathbb{R})$ , so sind die partiellen Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $\leq m$  unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.

**Beweis**

O.B.d.A:  $n = 2$  und  $x_0 = (0, 0)$ . Zu zeigen:  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ .  $D$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(0, 0) \subseteq D$ . Sei  $(x, y) \in U_\delta(0, 0)$  und  $x \neq 0 \neq y$ .

$$\nabla := f(x, y) - f(x, 0) - (f(0, y) - f(0, 0)), \quad \varphi(t) := f(t, y) - f(t, 0)$$

für  $t$  zwischen 0 und  $x$ .  $\varphi$  ist differenzierbar und  $\varphi'(t) = f_x(t, y) - f_x(t, 0)$ .  $\varphi(x) - \varphi(0) = \nabla$ . MWS, Analysis 1  $\implies \exists \xi = \xi(x, y)$  zwischen 0 und  $x$ :  $\nabla = x\varphi'(\xi) = x(f_x(\xi, y) - f_x(\xi, 0))$ .  $g(s) := f_x(\xi, s)$  für  $s$  zwischen 0 und  $y$ ;  $g$  ist differenzierbar und  $g'(s) = f_{xy}(\xi, s)$ . Es ist  $\nabla = x(g(y) - g(0)) \stackrel{\text{MWS}}{=} xyg'(\eta)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$  zwischen 0 und  $y$ .  $\implies \nabla = xyf_{xy}(\xi, \eta)$ . (1)  
 $\psi(t) := f(x, t) - f(0, t)$ ,  $t$  zwischen 0 und  $y$ .  $\psi'(t) = f_y(x, t) - f_y(0, t)$ .  $\nabla = \psi(y) - \psi(0)$ . Analog:  $\exists \bar{\eta} = \bar{\eta}(x, y)$  und  $\bar{\xi} = \bar{\xi}(x, y)$ ,  $\bar{\eta}$  zwischen 0 und  $y$ ,  $\bar{\xi}$  zwischen 0 und  $x$ .  $\nabla = xyf_{yx}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ . (2)

Aus (1), (2) und  $xy \neq 0$  folgt  $f_{xy}(\xi, \eta) = f_{yx}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ .  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \implies \xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta} \rightarrow 0 \xrightarrow{f \in C^2} f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$  ■

