1. Satz von Arzelà-Ascoli

In diesem Paragraphen sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}$ sei eine Familie (Menge) von Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$.

Definition
$\mathcal{F}$ heißt auf A

(1) **punktweise beschränkt** $:\iff \forall x \in A\ \exists c = c(x) \geq 0$:

$$|f(x)| \leq c\ \forall f \in \mathcal{F}$$

(2) **gleichmäßig beschränkt** $:\iff \exists \gamma \geq 0$:

$$|f(x)| \leq \gamma\ \forall x \in A\ \forall f \in \mathcal{F}$$

(3) **gleichstetig** $:\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall x, y \in A \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ und } \forall f \in \mathcal{F}$$

Satz (Satz von Arzelà-Ascoli)
A sei beschränkt und abgeschlossen, $\mathcal{F}$ sei punktweise beschränkt und gleichstetig auf A und (f_n) sei eine Folge in $\mathcal{F}$.

Dann enthält (f_n) eine Teilfolge, welche auf A gleichmäßig konvergiert.

Beweis
Analysis II, 2.3 $\implies$ es existiert eine abzählbare Teilmenge $B = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq A$ mit $\overline{B} = A$.

$(f_n(x_1))$ ist beschränkt $\xRightarrow{\text{Analysis I}}$ (f_n) enthält eine Teilfolge $(f_{1,n})$ mit $(f_{1,n}(x_1))$ konvergent.
$(f_{1,n}(x_2))$ ist beschränkt $\xRightarrow{\text{Analysis I}}$ $(f_{1,n})$ enthält eine Teilfolge $(f_{2,n})$ mit $(f_{2,n}(x_2))$ konvergent.

Wir erhalten Funktionenfolgen

$$\begin{aligned}
(f_{1,n}) &= (f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, \dots) \\
(f_{2,n}) &= (f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, \dots) \\
(f_{3,n}) &= (f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \dots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$(f_{k+1,n})$ ist eine Teilfolge von $(f_{k,n})$ und $(f_{k,n}(x_k))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert $(k \in \mathbb{N})$.

$g_j := f_{j,j}$ $(j \in \mathbb{N})$; (g_j) ist eine Teilfolge von (f_n).

$(g_k, g_{k+1}, g_{k+2}, \dots)$ ist eine Teilfolge von $(f_{k,n}) \implies (g_j(x_k))_{j=1}^{\infty}$ ist konvergent $(k = 1, 2, \dots)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen:

$$(*) \quad \exists j_0 \in \mathbb{N}: \ |g_j(x) - g_\nu(x)| < 3\varepsilon \ \forall j, \nu \geq j_0 \ \forall x \in A$$

(woraus die gleichmäßige Konvergenz von (g_j) folgt)

$\mathcal{F}$ gleichstetig $\implies$

$$(i) \quad \exists \delta > 0 : |g_j(x) - g_j(y)| < \varepsilon \ \forall x, y \in A \text{ und } |x - y| < \delta \ \forall j \in \mathbb{N}$$

$A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_{\frac{\delta}{2}}(x)$. Analysis II, 2.3 $\implies \exists y_1, \ldots, y_p \in A4$:

$$(ii) \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} U_{\frac{\delta}{2}}(y_j)$$

$\overline{B} = A \implies \forall q \in \{1, \ldots, p\} \ \exists z_q \in B : z_q \in U_{\frac{\delta}{2}}(y_q) \ (g_j)(z_q))_{j=1}^{\infty}$ ist konvergent für alle $q \in \{1, \ldots, p\} \implies \exists j_0 \in \mathbb{N}$:

$$(iii) \quad |g_j(z_q) - g_\nu(z_q)| < \varepsilon \ \forall j, \nu \geq j_0 \ (q = 1, \ldots, p)$$

■

Seien $j, \nu \geq j_0$ und $x \in A \overset{(ii)}{\implies} \exists q \in \{1, \ldots, p\} : x \in U_{\frac{\delta}{2}}(y_q) \implies |x - z_q| = |x - y_q + y_q - z_q| \leq |x - y_q| + |y_q - z_q| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \overset{(i)}{\implies} |g_j(x) - g_j(z_q)| < \varepsilon$, $|g_\nu(x) - g_\nu(z_q)| < \varepsilon \ (iv)$

$$\begin{aligned} \implies |g_j(x) - g_\nu(x)| &= |g_j(x) - g_j(z_q) + g_j(z_q) - g_\nu(z_q) + g_\nu(z_q) - g_\nu(x)| \\ &\leq \underbrace{|g_j(x) - g_j(z_q)|}_{<\varepsilon \ (iv)} + \underbrace{|g_j(z_q) - g_\nu(z_q)|}_{<\varepsilon \ (iii)} + \underbrace{|g_\nu(z_q) - g_\nu(x)|}_{<\varepsilon \ (iv)} \\ &< 3\varepsilon \implies (*) \end{aligned}$$