6. Jacobi-Felder (Verbindung Geometrie–Krümmung)

6.1. Jacobi-Gleichung

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Für $v \in T_pM$ sei $\exp_p$ definiert. Wir betrachten die parametrisierte Fläche $f(t,s) \coloneqq \exp_p(tv(s))$ mit $0 \le t \le 1$ und $-\varepsilon \le s \le \varepsilon$, wobei $v(s)$ eine Kurve in T_pM mit $\|v(s)\| = \|v(0)\|$, $v(0) = v$, $v'(0) = w$ ist.

Es gilt (vergleiche Beweis Gauß-Lemma):

$$d\exp_p\big|_v w = \frac{\partial f}{\partial s}(1,0) \in T_{\exp_p(v)}M\,.$$

$\left\| d\exp_p\big|_v w \right\|$ ist ein Maß dafür, wie schnell die Geodätischen $t \mapsto f(t,s)$ auseinanderlaufen.

Betrachte dazu das Vektorfeld $d\exp_p\big|_{tv} tw = \frac{\partial f}{\partial s}(t,v)$ längs $\gamma(t) \coloneqq \exp_p(tv)$, $0 \le t \le 1$. Wir halten fest: Da γ eine Geodätische ist, gilt für alle t, s: $\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}(t,s) = 0$.

Lemma 6.1

$$f : \begin{array}{l} A \subset \mathbb{R}^2 \to M \\ (u,v) \mapsto f(u,v) \end{array}$$

sei eine parametrisierte Fläche und $V(u,v)$ sei ein Vektorfeld längs f. Dann gilt:

$$\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}V - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}V = R\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)V$$

wobei $\frac{D}{\partial u} = D_{\frac{\partial f}{\partial u}}$.

Beweis
Betrachte Karte (U,φ). Dann sind die Basisfelder also $V = \sum_{i=1}^n v^i X_i$, $v^i = v^i(u,v)$,
$\frac{D}{\partial u}V = \frac{D}{\partial u}\left(\sum_{i=1}^n v^i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial u}x_i + \sum_{i=1}^n v^i \frac{D}{\partial u}X_i$.
$\frac{D}{\partial v}\left(\frac{D}{\partial u}V\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v^i}{\partial v \partial u}X_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial u}\frac{D}{\partial v}X_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}X_i + \sum_{i=1}^n v_i \frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_i$
$\implies \frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}V - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}V = \sum_{i=1}^n v_i\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_i - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}X_i\right)$

Berechne $\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_i$: Für $f(u,v) = (x^1(u,v), \ldots, x^n(u,v))$ ist
$\frac{\partial f}{\partial u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial u}X_j$; $\frac{\partial f}{\partial v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial u}X_k$ und $\frac{D}{\partial u}X_i = D_{\frac{\partial f}{\partial u}}X_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial u}D_{X_j}X_j$.

$\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}X_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 x^j}{\partial v \partial u} D_{X_j}X_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial u} D_{\frac{\partial f}{\partial u}}\left(D_{X_j}X_i\right) = \sum_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial u \partial v} D_{X_j}X_i + \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial u}\left(\sum_k \frac{\partial x^k}{\partial u} D_{X_k}D_{X_j}X_i\right).$

$\implies \left(\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u} - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\right)X_i = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial u}\frac{\partial x^k}{\partial v} \underbrace{\left(D_{X_k}D_{X_j}X_i - D_{X_j}D_{X_k}X_i\right)}_{\overset{[X_j,X_k]=0}{=} R(X_j,X_k)X_i}$

$\implies \frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}V - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}V = \sum_{i,j,k} v_i \frac{\partial x^j}{\partial u}\frac{\partial x^k}{\partial v} R(X_j,X_k)X_i \overset{R \text{ multilinear}}{=} R\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$ ■

Weiter gilt:

$$0 = \frac{D}{\partial s}\left(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \overset{\text{Lemma 1}}{=} \frac{D}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\right) - R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$\overset{\substack{\text{Lemma 3 Kap 4}\\ +\text{ schiefsym.}}}{=} \frac{D}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}\right) - R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)\frac{\partial f}{\partial t}$$

Wir setzen $\gamma(t) = \exp_p(tv) = f(t,0)$ und $J(t) \equiv J(\gamma(t)) := \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ ein Vektorfeld längs γ. Dann gilt die Jacobi-Gleichung:

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}J(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

mit der Kurzschreibweise

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}J(t) =: J''(t)$$

Definition
Sei $\gamma : [0,a] \to M$ eine Geodätische. Ein Vektorfeld J längs γ heißt Jacobi-Feld, falls J für alle $t \in [0,a]$ die Jacobi-Gleichung erfüllt.

Es gilt: Ein Jacobi-Feld ist eindeutig bestimmt durch die Anfangsbedingungen $J(0)$ und $J'(0) := D_{\gamma'}J(0)$.

Begründung: Betrachte orthonormale Parallelfelder $E_1(t), \dots, E_n(t)$, wobei $E_i(t) = E_i(\gamma(t))$, längs γ. Dann kann man schreiben: $J(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)E_i(t)$ mit $f_i \in C^\infty$. Also $J'(t) = D_{\gamma'}J(t) = \sum_{i=1}^n D_{\gamma'}(f_iE_i) = \sum_{i=1}^n (f_i'E_i + f_i \underbrace{D_{\gamma'}E_i}_{=0}) = \sum_{i=1}^n f_i'(t)E_i(t)$ und $J''(t) = \sum_{i=1}^n f_i''(t)E_i(t)$.

Weiter sei $a_{ij}(t) := \langle R(\gamma'(t), E_i(t))\gamma'(t), E_j(t)\rangle_{\gamma(t)}$. Dann gilt $R(\gamma', J)\gamma' = \sum_j \langle R(\gamma', J)\gamma', E_j\rangle E_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_i \langle R(\gamma' E_i)\gamma', E_j\rangle E_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_i a_{ij}(t)E_j(t)$

Damit ist die Jacobi-Gleichung äquivalent zum System linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$f_j''(t) + \sum_{i=1}^n a_{ij}(t)f_i(t) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Die Lösungen bilden einen Vektorraum Jac_γ der Dimension $2n$, wobei $n = \dim M$. Zu gegebener Anfangsbedingung $J(0)$, $J'(0)$ bzw. $f_1(0), \dots, f_n(0), f_1'(0), \dots, f_n'(0)$ existiert genau ein Jacobi-Feld längs ganz γ, also eine Lösung des obigen Differentialgleichungssystems für alle $t \in [0,a]$.

Folgerung: Längs der Geodätischen $\gamma : [0,a] \to M$ existieren $2n$ linear unabhängige Jacobi-Felder, wobei $n = \dim M$.

Bemerkung: Gewisse Jacobi-Felder kann man direkt angeben: $J(t) := \gamma'(t)$ ist ein Jacobi-Feld, da $J'' + R(\gamma', J)\gamma' = \gamma''' + R(\gamma', \gamma')\gamma' = D_{\gamma'}\gamma'' + 0 = D_{\gamma'}D_{\gamma'}\gamma' = 0$.

Ansatz: $J(t) := a(t)\gamma'(t)$ für $a : I \to \mathbb{R}$ ist Jacobi-Feld, genau dann, wenn $a(t)$ linear (affin) ist. Also: $J'' = a''\gamma'$, $R(\gamma', J)\gamma' = R(\gamma', a\gamma')\gamma' = aR(\gamma', \gamma')\gamma' = 0$. Das heißt die Jacobi-Gleichung gilt $\iff a''\gamma' = 0 \iff a'' = 0 \iff a(t) = \alpha + t\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Folgerung: $J_1(t) := \gamma'(t)$ und $J_2(t) := t\gamma'(t)$ sind verschieden, da $J_1(0) = \gamma'(0) \neq J_2(0) = 0$, und spannen einen 2-dimensionalen Untervektorraum des Vektorraumes Jac_γ aller Jacobi-Felder längs γ auf.

Es genügt dann den $2(n-1)$-dimensionalen Untervektorraum aller Jacobi-Felder orthogonal zu γ' zu verstehen.

Jacobi-Felder für Riemann'sche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung k_0, etwa $(\mathbb{R}^2, \mathrm{kan}) : k_0 = 0$, $(S^2, \mathrm{kan}) : k_0 = 1$, $(H^2\mathbb{R}, \mathrm{kan}) : k_0 = -1$.

Weiter sei $\gamma : [0, a] \to M$ eine normale Geodätische und J ein Jacobi-Feld längs γ, so dass $J(t) \perp \gamma'(t)$.

Für ein beliebigs Vektorfeld X längs γ gilt die Formel (vgl. 5.2, Ergänzende Sätze):

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', X\rangle = k_0 \big(\underbrace{\langle\gamma', \gamma'\rangle}_{=1}\langle J, X\rangle - \langle\gamma', X\rangle\underbrace{\langle J, \gamma'\rangle}_{=0}\big) = k_0\langle J, X\rangle$$

also

$$R(\gamma', J)\gamma' = k_0 J$$

Die Jacobi-Gleichung lautet hier:

$$J'' + k_0 J = 0 \quad (*)$$

Es sei $E(t)$ ein Parallelfeld längs γ mit $\|E(t)\|_{\gamma(t)} = 1$ und $\langle E(t), \gamma'(t)\rangle_{\gamma(t)} = 0$ für alle t. Dann ist

$$J(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k_0}} \cdot \sin(t\sqrt{k_0}) \cdot E(t), & k_0 > 0 \\ t \cdot E(t), & k_0 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k_0}} \cdot \sinh(t\sqrt{-k_0}) \cdot E(t), & k_0 < 0 \end{cases}$$

eine Lösung von $(*)$ mit Anfangsbedingung $J(0) = 0$ und $J'(0) = E(0)$.

Beispiele

(1) $(\mathbb{R}^2, \mathrm{kan})$, $k_0 = 0$:
Geodätische = Gerade; Parallelfeld = konstantes Vektorfeld $E(t) = e\ \forall t$
$\implies J(t) = tE(t) = te$

(2) (S^2, kan), $k_0 = 1$:

$$X(s,t) = (\cos s \sin t, \sin s \sin t, \cos t)$$
$$\frac{\partial X}{\partial s}(s,t) = (-\sin s \sin t, \cos s \sin t, 0)$$
$$\frac{\partial X}{\partial t}(s,t) = (\cos s \cos t, -\sin s \cos t, -\sin t)$$

Mit $s = 0$ (= Großkreis in x-z-Ebene = Geodätische = γ):

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t}(0,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\gamma(t) = \gamma'(t) = (\cos t, 0, -\sin t)\\ \frac{\partial X}{\partial s}(0,t) &= (0, \sin t, 0) =: J(t)\\ E(t) &= \frac{J(t)}{\|J(t)\|} = (0,1,0)\end{aligned}$$

(3) (H^2, kan), $k_0 = -1$:
$H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \mathrel{\hat=} \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Betrachte $\gamma(t) = (0, \mathrm{e}^t) \mathrel{\hat=} \mathrm{i}\mathrm{e}^t$.
$T_{(x,y)}H^2 = \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x} \oplus \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial y}$, $\left\|\frac{\partial}{\partial x}(x,y)\right\|_{\text{hyp}} = \frac{1}{y}\|(1,0)\|_{\text{eukl}} = \frac{1}{y}$, $\left\|\frac{\partial}{\partial y}(x,y)\right\|_{\text{hyp}} = \frac{1}{y}$
$\gamma'(t) = (0, \mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^t\frac{\partial}{\partial y} \implies \|\gamma'(t)\|_{\text{hyp}} = \mathrm{e}^t \left\|\frac{\partial}{\partial y}\right\|_{\text{hyp}} = \mathrm{e}^t\frac{1}{\mathrm{e}^t} = 1.$
Parallelfeld: $E(t) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(0,\mathrm{e}^t)}{\left\|\frac{\partial}{\partial x}(0,\mathrm{e}^t)\right\|_{\text{hyp}}} = \frac{(1,0)}{\frac{1}{\mathrm{e}^t}} = (\mathrm{e}^t, 0)$, $\|E(t)\|_{\text{hyp}} = 1$
$\implies J(t) = \sinh t \cdot E(t) = (\sinh t \cdot \mathrm{e}^t, 0)$, $\|J(t)\|_{\text{hyp}} = \sinh t$.

Satz 6.1
Sei $\gamma : [0,a] \to M$ eine normale Geodätische (also $\|\gamma'\| = 1$) und J ein Jacobi-Feld längs γ mit $J(0) = 0$ und $J'(0) = \frac{D}{\partial t}J(0) = \left(D_{\gamma'}J\right)(0) =: w$. Schließlich sei $v := \gamma'(0)$.

Wir betrachten w als Element von $T_{av}\left(T_{\gamma(0)}M\right)$ und wählen Kurve $v(s)$ in $T_{\gamma(0)}M$ mit $v(0) = av$, $v'(0) = aw$. Für die parametrisierte Fläche $f(t,s) := \exp_{\gamma(0)}\left(\frac{t}{a}v(s)\right)$, $|s| < \varepsilon$, $0 \le \frac{t}{a} \le 1$ ist $\bar{J}(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ ein Jacobi-Feld längs γ mit $J(t) = \bar{J}(t)$ für alle $t \in [0,a]$.

Beweis
Jacobi-Feld is durch Anfangsbedingungen vollständig bestimmt, das heißt es genüg zu zeigen: $J(0) = \bar{J}(0)$ und $J'(0) = \bar{J}'(0)$.

Es ist einfach zu sehen, dass $\bar{J}(0) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = 0$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\bar{J}'(t) = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = \frac{D}{\partial t}\left(d\exp_p\big|_{\frac{t}{a}v(0)} \cdot \frac{t}{a}v'(0)\right) &= \frac{D}{\partial t}\left(d\exp_p\big|_{tv}\, tw\right)\\ &= \frac{D}{\partial t}\left(t \cdot d\exp_p\big|_{tv}\, w\right) = 1 \cdot d\exp_p\big|_{tv}\, w + t\frac{D}{\partial t}\left(d\exp_p\big|_{tv}\, w\right).\end{aligned}$$

Daher ist $\bar{J}'(0) = d\exp_p\big|_0\, w = w = J'(0)$. ∎

Bemerkungen: (1) Es gilt folgende Formel für ein Jacobi-Feld längs einer normalen Geodätischen $\gamma : [0,a] \to M$ mit $J(0) = 0$:

$$J(t) = d\exp_p\big|_{t\gamma'(0)}\left(tJ'(0)\right), \quad t \in [0,a]$$

(2) Eine analoge Konstruktion (Jacobi-Felder erzeugen durch Variation einer Geodätischen) gilt auch für Jacobi-Felder mit Anfangsbedingung $J(0) \neq 0$.

6.2. Jacobi-Felder und Schnittkrümmung

Satz 6.2
Sei $p \in M$, $\gamma : [0,a] \to M$ eine normale Geodätische mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ und $w \in T_v(T_pM) \cong T_pM$ mit $\|w\| = 1$. Weiter sei $J(t) = d\exp_p\big|_{tv}(tw)$, $0 \leq t \leq a$ ein Jacobi-Feld längs γ.

Dann gilt für die Taylorentwicklung von $\|J(t)\|^2_{\gamma(t)} = \langle J(t), J(t)\rangle_{\gamma(t)}$ bei $t = 0$:

$$\|J(t)\|^2_{\gamma(t)} = t^2 - \frac{1}{3}\langle R(v,w)v, w\rangle_p t^4 + o(t^4)$$

Beweis
Es ist $J(0) = 0$, $J'(0) = w$, $\|w\| = 1$. Für die ersten drei Koeffizienten der Taylorreihe in t folgt:

(0) $\|J(p)\|^2_p = \langle J, J\rangle(0) = 0$

(1) $\langle J, J\rangle'(0) = 2\langle J', J\rangle(0) = 0$

(2) $\langle J, J\rangle''(0) = 2\langle J'', J\rangle(0) + 2\langle J', J'\rangle(0) = 0 + 2\|w\|^2 = 2$

(3) $\langle J, J\rangle'''(0) = 2\langle J''', J\rangle(0) + 2\langle J'', J'\rangle(0) + 4\langle J'', J'\rangle(0) = 0 + 6\langle -R(\gamma', J)\gamma', J'\rangle(0) = 6\langle -R(\gamma', 0)\gamma', J'\rangle(0) = 6\langle 0, J'\rangle(0) = 0$

(4) $\langle J, J\rangle''''(0) = 2\langle J'''', J\rangle(0) + 2\langle J''', J'\rangle(0) + 6\langle J''', J'\rangle(0) + 6\langle J'', J''\rangle(0) = 8\langle J''', J'\rangle(0) = -8\langle R(\gamma', J')\gamma', J'\rangle(0) = -8\langle R(v,w)v, w\rangle_p$

Nebenrechnung für $J''' = -\frac{D}{\partial t}R(\gamma', J)\gamma'$. Dazu betrachten wir ein beliebiges Vektorfeld Z mit $Z' = \frac{D}{\partial t}Z = D_{\gamma'}Z$. Es ist

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{D}{\partial t}R(\gamma', J)\gamma', Z\right\rangle &= \frac{d}{dt}\langle R(\gamma', J)\gamma', Z\rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', Z'\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\langle R(\gamma', Z)\gamma', J\rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', Z'\rangle \\
&= \left\langle \frac{D}{dt}R(\gamma', Z)\gamma', J\right\rangle + \langle R(\gamma', Z)\gamma', J'\rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', Z'\rangle\,.
\end{aligned}$$

Für $t = 0$ ist $J(0) = 0$, also:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{D}{\partial t}R(\gamma', J)\gamma', Z\right\rangle(0) &= 0 + \langle R(\gamma', Z)\gamma', J'\rangle(0) - 0 \\
&= \langle R(\gamma', J')\gamma', Z\rangle(0)
\end{aligned}$$

Da Z beliebig war, gilt $J'''(0) = -\frac{D}{\partial t}R(\gamma', J)\gamma'(0) = -R(\gamma', J')\gamma'(0)$ ∎

Korrolar
Falls $\langle v, w\rangle_p = 0$, ($v, w$ also orthonormiert) gilt: $\langle R(v,w)v, w\rangle_p = K(p,\sigma) =$ Schnittkrümmung der von v und w aufgespannten Ebene σ, also

$$\|J(t)\|^2_{\gamma(t)} = t^2 - \frac{1}{3}K(p,\sigma)t^4 + o(t^4)$$

sowie

$$\|J(t)\|_{\gamma(t)} = t - \frac{1}{6}K(p,\sigma)t^3 + o(t^3)$$

Beweis
Die Formel für $\|J(t)\|_{\gamma(t)}$ folgt aus einem Koeffizientenvergleich der Taylorreihen:

$$\begin{aligned} f(t) &= a + bt + ct^2 + dt^3 + \cdots \\ (f(t))^2 &= a^2 + 2abt + \cdots \end{aligned}$$

■

Anwendung Länge von geodätischen Kreisen. $p \in M$, $v, w \in T_pM$, $v \perp w$, $\|v\| = \|w\| = 1$, $f(r,\theta) \coloneqq \exp_p(r(\cos\theta \cdot v + \sin\theta \cdot w))$. Für ein festes r heißt $K_r(\theta) = f(r,\theta)$ für $0 \le \theta \le 2\pi$ ein geodätischer Kreis von Radius r.

Die Länge von K_r ist $L(K_r) \coloneqq \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d}{d\theta} K_r(\theta)\right\| d\theta = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta}\right\| d\theta$, wobei $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ ein Jacobi-Feld längs $\gamma_\theta(r) = \exp_p(rv(\theta))$ ist. Daher

$$L(K_r) = \int_0^{2\pi} \left[r - \frac{1}{6}K(p,\sigma)r^3 + o(r^3)\right] d\theta = 2\pi r\left(1 - \frac{1}{6}K(p,\sigma)r^2 + o(r^2)\right).$$

Das ist die klassiche Formel von Betrand-Puiseux (1848) für Flächen in $\mathbb{R}^3$.

Umgekehrt hat man $K(p,\sigma) = \frac{3}{\pi r^3}\left(2\pi r - L(K_r) + o(r^3)\right)$ oder

$$K(p,\sigma) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi r^3}(2\pi r - L(K_r)).$$

Im euklidischen ist $L(K_r) = 2\pi r$, also $K(p,\sigma) = 0$. Im Sphärischen ist $L(K_r) = 2\pi \sin r = 2\pi\left(r - \frac{r^3}{3!} + \cdots\right)$, also $K(p,\sigma) = +1$. Im Hyperbolischen ist $L(K_r) = 2\pi\sinh r = 2\pi\left(r + \frac{r^3}{3!} + \cdots\right)$, also $K(p,\sigma) = -1$.