

## 25. Stetige Abhängigkeit

In diesem Paragraphen:  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $D := I \times \mathbb{R}$ ,  $f \in C(D, \mathbb{R})$ .

### Satz 25.1

Sei  $(f_n)$  eine Folge in  $C(D, \mathbb{R})$ ,  $(x_n)$  eine Folge in  $I$ ,  $(\eta_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $M \geq 0$ . Es gelte:

- (a)  $|f_n(x, y)| \leq M$ ,  $|\eta_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (x, y) \in D$
- (b)  $(f_n)$  konvergiere auf  $R := I \times [-(b-a+1)M, (b-a+1)M]$  gleichmäßig gegen  $f$ .
- (c) Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  sei  $y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} y' = f_n(x, y) \\ y(x_n) = \eta_n \end{cases}$$

auf  $I$ .

Dann gilt:

- (1)  $(y_n)$  enthält eine auf  $I$  gleichmäßig konvergente Teilfolge  $(y_{n_k})$  und  $y(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}(x)$  ( $x \in I$ ) so gilt:  $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I$
- (2) Gilt  $x_n \rightarrow x_0$  ( $\in I$ ) und  $\eta_n \rightarrow y_0$  und hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf  $I$  genau eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so konvergiert  $(y_n)$  auf  $I$  gleichmäßig gegen  $y$ .

### Beweis

$$(1) \quad 12.1 \implies y_n(x) = \eta_n + \int_{x_n}^x f_n(t, y_n(t)) dt \quad \forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Für  $x, \tilde{x} \in I, n \in \mathbb{N}$ :  $|y_n(x)| \leq |\eta_n| + \left| \int_{x_n}^x |f_n(t, y_n(t))| dt \right| \leq M + M|x - x_n| \leq M + (b-a)M = (b-a+1)M \implies (x, y_n(x)) \in R \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad (**)$

$$|y_n(x) - y_n(\tilde{x})| \stackrel{\text{MWS}}{=} |y'_n(\xi_n)| |x - \tilde{x}| = |f_n(\xi_n, y_n(\xi_n))| |x - \tilde{x}| \leq M|x - \tilde{x}|$$

§1  $\implies (y_n)$  enthält eine auf  $I$  gleichmäßig konvergente Teilfolge. o.B.d.A.:  $(y_n)$  konvergiert auf  $I$  gleichmäßig.

$y(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$  ( $x \in I$ ); Analysis I  $\implies y \in C(I, \mathbb{R})$ .  $(**) \implies (x, y(x)) \in R \quad \forall x \in I$ .  $g(t) := f(t, y(t))$ ,  $g_n(t) := f_n(t, y_n(t))$  ( $t \in I$ ). Übung:  $(g_n)$  konvergiert auf  $I$

gleichmäßig gegen  $g$ . o.B.d.A:  $(x_n)$  konvergent,  $(\eta_n)$  konvergent, etwa  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $\eta_n \rightarrow y_0$ . (Bolzano-Weierstraß!).

$$\begin{aligned} (*) &\implies y_n(x) = \eta_n + \int_{x_n}^x g_n(t) dt \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt \quad \forall x \in I \\ &\implies y(x_0) = y_0 \text{ und } y'(x) = g(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

(2)  $a_n := \|y - y_n\|_\infty$ . Zu zeigen ist:  $a_n \rightarrow 0$ .

**Annahme:**  $a_n \not\rightarrow 0 \implies \exists \varepsilon_0 > 0$  und eine Teilfolge  $(a_{n_k}) : a_{n_k} \geq \varepsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

(1)  $\implies (y_{n_k})$  enthält eine auf  $I$  gleichmäßig konvergente Teilfolge  $y_{n_{k_l}}; z(x) := \lim_{l \rightarrow \infty} y_{n_{k_l}} (x \in I)$

(1) + Beweis von (1)  $\implies z$  löst das Anfangswertproblem  $y' = f(x, y); y(x_0) = y_0$ . Die eindeutige Lösbarkeit liefert  $z = y$  auf  $I \implies a_{n_{k_l}} = \|y - y_{n_{k_l}}\|_\infty = \|z - y_{n_{k_l}}\|_\infty \rightarrow 0$  ( $l \rightarrow \infty$ ), Widerspruch denn  $a_{n_{k_l}} \geq \varepsilon_0 \quad \forall l \in \mathbb{N}$ . ■

### Satz 25.2

Es sei  $x_0 \in I$ ,  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ ,  $L \geq 0$  und es gelte:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L(y - \tilde{y}) \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D.$$

Für  $i = 1, 2$  sei  $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  die (nach 13.1) eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \eta_i \end{cases}$$

Dann gilt:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{L(b-a)} |\eta_1 - \eta_2| \quad \forall x \in I.$$

### Beweis

$\alpha := \|y_1 - y_2\|_\infty = \max\{|y_1(x) - y_2(x)| : x \in I\}$ . Für  $x \in I$ :

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \eta_1 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt - (\eta_2 + \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt) \right| \\ &\leq |\eta_1 - \eta_2| + \left| \int_{x_0}^x \underbrace{|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|}_{L|y_1(t) - y_2(t)| \leq L\alpha} dt \right| \\ &\leq |\eta_1 - \eta_2| + L\alpha |x - x_0| \\ \text{Allgemein gilt: } &\leq \underbrace{\frac{L^{n+1}}{(n+1)!} \alpha |x - x_0|^{n+1}}_{=: \alpha_n(x)} + |\eta_1 - \eta_2| \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!}}_{=: \beta_n(x)} \end{aligned}$$

$$\beta_n(x) \rightarrow e^{L|x-x_0|} \ (n \rightarrow \infty), \ \alpha_n(x) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \implies |y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{L|x-x_0|} |\eta_1 - \eta_2| \leq e^{L(b-a)} |\eta_1 - \eta_2| \quad \blacksquare$$

