1 Das Lebesgue-Maß

1.1 Etwas Maßtheorie

Sei stets X eine nichtleere Menge mit Potzenzmenge $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$.

Definition 1.1. Ein nichtleeres Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt <u>σ-Algebra</u>, wenn:

(A1) $X \in \mathcal{A}$

(A2) Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann auch $A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$

(A3) Wenn $A_j \in \mathcal{A}, (j \in \mathbb{N})$, dann auch $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

Beispiel 1.2. a) $\mathcal{P}(X)$ und $\{\emptyset, X\}$ sind σ-Algebren

b) Sei $\emptyset \neq A \subset X$. Dann ist $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ eine σ-Algebra

c) $\mathcal{A} := \{A \subset X : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$ ist σ-Algebra

Beweis. (A1) $X^c = \emptyset$ ist abzählbar, also $X \in \mathcal{A}$.

(A2) gilt per Definition.

(A3) Seien $A_j \in \mathcal{A}$ $(j \in \mathbb{N})$.

i. Seien alle A_j abzählbar. Dann ist $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ abzählbar, denn: Es gilt $A_j = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots\}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ und gewisse $a_{jk} \in X$. Schreibe:

   TODO: Grafik

   Nach Streichen mehrfach auftretender a_{jk} liefert der Streckenzug eine Abzählung von $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

ii. Wenn ein A_n nicht abzählbar ist, dann ist A_n^c abzählbar. Somit gilt: $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c \subset A_k^c \Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c$ abzählbar. Damit folgt $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

$\square$

Lemma 1.3. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $A_j \in \mathcal{A}$ $(j \in \mathbb{N})$. Dann:*

a) $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$

b) $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

c) $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

d) $A_1 \setminus A_2 := A_1 \cap A_2^c \in \mathcal{A}$

<u>Fazit:</u> Abzählbare Mengenoperationen bleiben in der σ-Algebra.

Beweis. a) Klar mit (A1) und (A2).

b) Folgt aus (A3) und a), da $A_1 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$

c) Nach (A2) und (A3): $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathcal{A} \overset{(A2)}{\Rightarrow} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c\right)^c \in \mathcal{A}$

d) Folgt aus c), (A1) und (A3), da $A_1 \cap A_2^c = A_1 \cap A_2^c \cap X \cap X$.

$\square$

Lemma 1.4. *Sei $\mathcal{F}$ eine nichtleere Famile von σ-Algebren $\mathcal{A}$ auf X. Dann ist*

$$\mathcal{A}_0 := \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \in \mathcal{F}\} := \{A \subset X : A \in \mathcal{A}\ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F})\}$$

eine σ-Algebra.

Beweis. (A1) $X \in \mathcal{A}\ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}) \Rightarrow X \in \mathcal{A}_0$.

(A2) Sei $A \in \mathcal{A}_0 \overset{(A2)}{\Rightarrow} A^c \in \mathcal{A}\ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_0$.

(A3) Sei $A_j \in \mathcal{A}_0\ (j \in \mathbb{N}) \overset{(A3)}{\Rightarrow} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}\ (\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}) \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}_0$.

$\square$

Ana III, 24.10.2008

Definition 1.5. Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ nicht leer. Dann heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\}$$

die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.

<u>Bemerkung:</u> Da $\mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra ist, ist $\sigma(\mathcal{E})$ nicht leer und nach Lem 1.4 ist $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra.

Lemma 1.6. *Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann gelten:*

a) *Wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist und $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, dann $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.*

b) *$\sigma(\mathcal{E})$ ist die einzige σ-Algebra, die a) erfüllt, d.h. $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste $\mathcal{E}$ enthaltende σ-Algebra auf X.*

c) *Wenn $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra ist, dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.*

d) *Wenn $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{E}} \subset \mathcal{P}(X)$, dann gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\overline{\mathcal{E}})$.*

Beweis. a) folgt direkt aus Def 1.5.

b) Sei $\mathcal{A}_0$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Wähle $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{A}_0 \subset \sigma(\mathcal{E})$. Nach a) gilt mit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 : \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}_0$.

c) folgt aus a) mit $\mathcal{A} = \mathcal{E}$.

d) folgt aus a) mit $\mathcal{A} = \sigma(\overline{\mathcal{E}})$.

$\square$

Beispiel 1.7. a) Sei $\mathcal{E} = \{A\}$ für ein nicht leeres $A \subset X$. Jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ umfasst $\{X, \emptyset, A, A^c\}$ nach (A1) und (A2).
Nach Beispiel 1.2b) ist dies eine σ-Algebra.
Lem 1.6 $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.

b) Sei $X = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{E} = \{\{1\},\{1,2\}\}$. Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ enthält folgende Elemente:
$\{1\}, \{2\} = \{1,2\} \setminus \{1\}$ und somit auch $\{1\}^c = \{2,3,4,5\}$ und $\{1,2\}^c = \{3,4,5\}$.
Ferner $\emptyset, X \in \sigma(\mathcal{E})$.
Prüfe: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, X\}$ ist eine σ-Algebra.
Aus Lem 1.6 folgt $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$.

Definition 1.8. Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ nicht leer und $\mathcal{O}(X)$ das System der in X offenen Mengen. Dann heißt

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}(X))$$

die Borel σ-Algebra von X. Setze $\mathcal{B}_d := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Bemerkung: $\mathcal{B}_d$ enthält alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$, alle abzählbaren Vereinigungen und Schnitte offener und abgeschlossener Menge, usw.

Intervalle in $\mathbb{R}^d$ sind Mengen der Form $I = I_1 \times \cdots \times I_d$, wobei $I_1, \ldots, I_d \subset \mathbb{R}$ Intervalle in $\mathbb{R}$ sind. Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b$ (d.h: $a_1 \leq b_1, \ldots, a_d \leq b_d$) schreibe:

$$(a,b) := (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_d,b_d),$$
$$(a,b] := (a_1,b_1] \times \cdots \times (a_d,b_d].$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \{1,\ldots,d\}$ schreibe $H_k^-(\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^d : x_k \leq \alpha\}$.

Satz 1.9. *Es gilt:*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_d &= \sigma(\{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) =: A_1\\ &= \sigma(\{(a,b] : a,b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) =: A_2\\ &= \sigma(\{H_k^-(\alpha) : \alpha \in \mathbb{Q}, k \in \{1,\ldots,d\}\}) =: A_3\end{aligned}$$

Beweis. a) Es gilt:

$$(a,b] = \bigcap_{k=1}^{d} H_k^-(b_k) \cap H_k^-(a_k)^c \Rightarrow (a,b] \in A_3$$
$$\overset{\text{Lem 1.6}}{\Rightarrow} A_2 = \sigma(\{(a,b], a,b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) \subset A_3.$$

b) $H_k^-(\alpha)$ ist abgeschlossen, also $H_k^-(\alpha) \in \mathcal{B}_d$. Lem 1.6 $\Rightarrow A_3 \subset \mathcal{B}_d$.

c) Wenn ein $a_k = b_k$, dann $(a,b) = \emptyset \in A_2$. Anderenfalls

$$(a,b) = \bigcup_{n \geq n_0} (a, b - \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^T],$$

wobei $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_k + \frac{1}{n} \leq b_k \forall n \geq n_0, k = 1, \dots, d$. Dann folgt: $(a,b) \in A_2$. Mit Lem 1.6 folgt $\mathcal{A}_1 = \sigma(\{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}) \subset A_2$.

Bislang wurde gezeigt: $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \mathcal{B}_d$.

d) Sei $O \subset \mathbb{R}^d$ offen, $J := \{(a,b) \subset O : a,b \in \mathbb{Q}^d, a \leq b\}$

Zeige: $\bigcup\{I : I \in J\} = O$
Da die Vereinigung abzählbar ist, folgt $O \in A_1$. Damit $\mathcal{B}_d \subset A_1$ nach Lem 1.6 und $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^d))$. Damit folgt die Behauptung.

Zu $\supset$: Sei $y \in O$. Dann $\exists \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}$, sodass die $\|\cdot\|_\infty$-Kugel

$$I_0 = (y_1 - \epsilon, y_1 + \epsilon) \times \dots \times (y_d - \epsilon, y_d + \epsilon) \subset O.$$

Durch Verschiebung von y zu einem $z \in \mathbb{Q}^d$ nahe bei y erhält man ein $I \in J$ der Kantenlänge ϵ mit $y \in I \Rightarrow O \subset \bigcap\{I : I \in J\}$. Damit gilt die Gleichheit.

□

Für $Y \subset X, Y \neq \emptyset$ und $M \subset \mathcal{P}(X)$ definiert man die Spur:

$$M_y = M \cap Y := \{A \subset Y : A = \overline{M} \cap Y \text{ für ein } \overline{M} \in M\} \tag{1.1}$$

Lemma 1.10. *Sei $\emptyset \neq Y \subset X$. Dann gelten:*

a) Wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, dann ist auch $\mathcal{A}_y$ eine σ-Algebra auf Y. Ferner gilt $\mathcal{A}_y \subset \mathcal{A} \Leftrightarrow Y \in \mathcal{A}$.

b) Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann $\sigma(\mathcal{E} \cap Y) = \sigma(\mathcal{E}) \cap Y$.
(Beides sind σ-Algebren auf Y.)

Beweis. a) Zu (A1): $Y = X \cap Y \in \mathcal{A}_y$, da $X \in \mathcal{A}$.
Zu (A2), (A3): Seien $B_j = A_j \cap Y \in \mathcal{A}_y$, d.h. $A_j \in \mathcal{A}$ ($j \in \mathbb{N}$). Dann folgt

$$Y \backslash B_1 = Y \cap \underbrace{(X \backslash A_1)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}_y,$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = \underbrace{(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j)}_{\in \mathcal{A}} \cap Y \in \mathcal{A}_y.$$

Also ist $\mathcal{A}_y$ eine σ-Algebra.
Zweite Behauptung: $Y \in \mathcal{A} \Rightarrow M \cap Y \in \mathcal{A}$ ($\forall M \in \mathcal{A}$), also $\mathcal{A}_y \subset \mathcal{A}$. Wenn $\mathcal{A}_y \subset \mathcal{A}$, folgt also $Y \in \mathcal{A}$.

b) $\mathcal{E} \cap Y \subset \sigma(\mathcal{E}) \cap Y$ ist nach a) σ-Algebra.

Zu $\supset$: Prinzip der guten Mengen
Setze $\mathcal{C} := \{A \subset X : A \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)\}$

($*$) Behauptung: $\mathcal{C}$ ist eine σ-Algebra. Ferner gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, da $E \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)$ für alle $E \in \mathcal{E} \overset{\text{Lem 1.6}}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{C}$.
Aus der Definition von $\mathcal{C}$ folgt: $\sigma(\mathcal{E}) \cap Y \subset \sigma(\mathcal{E} \cap Y)$.

Beweis von ($*$): $Y = X \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y) \Rightarrow X \in \mathcal{C}$. Damit erfüllt $\mathcal{C}$ (A1).
Zu (A2) und (A3): Seien $A_j \in \mathcal{C}$ ($j \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow A_j \cap Y \in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)$. Dann gelten:

- $(X \backslash A_1) \cap Y = Y \backslash \underbrace{(A_1 \cap Y)}_{\in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)} \overset{(A2)}{\in} \sigma(\mathcal{E} \cap Y) \Rightarrow X \backslash A_1 \in \mathcal{C}$.
- $(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \cap Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \cap Y}_{\in \sigma(\mathcal{E} \cap Y)} \overset{(A3)}{\in} \sigma(\mathcal{E} \cap Y) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ ist σ-Algebra auf X.

□

Ana III, 27.10.2008

Korollar 1.11. *Sei $X \subset \mathbb{R}^d$. Dann gilt $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_d \cap X = \{B \cap X : B \in \mathcal{B}_d\}$. Wenn $X \in \mathcal{B}_d$, dann $\mathcal{B}_d = \{A \in \mathcal{B}_d : A \subset X\}$*

Beweis. Folgt aus Lem 1.10 mit $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, da $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \cap X$.
(Wobei X in Lem 1.10 $\mathbb{R}^d$ in Kor 1.11 entspricht und Y in Lem 1.10 X in Kor 1.11.) □

Beispiel. a) $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\} \in \mathcal{B}_d$, da $\{q_n\}$ abgeschlossen ist, wobei $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$.

b) Die Menge

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ für } x \leq 0 \text{ oder } x^2 + y^2 < 1 \text{ für } x > 0\} \\ &= B(0,1) \cup (\partial B(0,1) \cap \{x \leq 0\}) \end{aligned}$$

ist abgeschlossen. Damit folgt $A \in \mathcal{B}_2$.

Sei $[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (wobei: $+\infty = \infty$) versehen mit den Rechenregeln:

- $\pm a + \infty = \infty \pm a = \infty \ \forall a \in \mathbb{R}_+$
- $\infty + \infty = \infty$
- Verboten: $\infty - \infty$!

Ordnung: $a < \infty \forall a \in \mathbb{R}_+$
Konvergenz: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Leftrightarrow \forall c > 0 \ \exists N_c \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq c \ \forall n \geq N_c$.
Für $a_j \in [0, \infty]$ ($j \in \mathbb{N}$) gilt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$, falls (mindestens) ein $a_j = \infty$ ist, oder falls die Reihe in $\mathbb{R}$ divergiert.
Da $a_j \geq 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$, kann die Reihe umgeordnet werden.

Definition. Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt (paarweise) disjunkt, wenn $\overline{M} \cap N \neq \emptyset$ für alle $\overline{M}, N \in \mathcal{M}$ mit $\overline{M} \neq N$. Für disjunkte Mengenvereinigung schreibe $\dot\cup$ und $\biguplus$.

Definition 1.12. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt Maß (auf $\mathcal{A}$), wenn gelten:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$

(M2) Für jede disjunkte Folge $A_j, j \in \mathbb{N}$ mit $A_j \in \mathcal{A}$ ($\forall j \in \mathbb{N}$) gilt

$$\mu\left(\biguplus_{j\in\mathbb{N}}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Erfüllt μ (M1) und (M2), dann heißt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.
Wenn $\mu(X) < \infty$, dann heißt μ endlich. Gilt $\mu(X) = 1$, dann heißt μ Wahrscheinlichkeitsmaß.

Bemerkung: Wenn $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt, dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_n) &= \mu(A_1 \dot\cup \cdots \cup A_n \dot\cup \emptyset \cup \emptyset \dot\cup \ldots) \\ &\overset{(M2)}{=} \mu(A_1) + \ldots \mu(A_n) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots \\ &\overset{(M1)}{=} \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n). \end{aligned}$$

Beispiel 1.13. a) Sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und $x \in X$ fest. Für $A \subset X$ definiere:

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in A \\ 0, & \text{für } x \notin A \end{cases}.$$

Dann heißt δ_x <u>Punktmaß</u> (Dirac-Maß).
(M1) gilt offensichtlich.
(M2): Seien $A_j \subset X$ disjunkt für $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x \in \biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_j \Leftrightarrow \exists! k \ \in \mathbb{N} : x \in A_k$.

$$\Rightarrow \delta_x(\biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_j) \overset{\text{Def}}{=} \begin{cases} 0, x \notin \biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_j \\ 1, x \in \biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_j \end{cases} = \begin{cases} 0, x \notin A_k \\ 1, x \in A_k \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, x \notin A_k \\ \delta_x(A_k), x \in A_k \end{cases} = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_x(A_j)$$

$\Rightarrow \delta_x$ ist Maß.

b) Sei $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Seien $p_k \in [0, \infty]$ für $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Setze

$$\mu(A) := \sum_{k\in A} p_k \text{ für } A \subset X.$$

Klar $\mu(\emptyset) = 0$. Seien $A_j \subset \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$ disjunkt. Dann gilt

$$\mu\left(\biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{k\in\biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_j} p_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\in A_j} p_k \overset{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

$\Rightarrow \mu$ ist Maß. μ heißt <u>Zählmaß</u>, wenn $p_k = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$. (Dann $\mu(A) = |A|$)

c) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $X_0 \subset X$ und $\mathcal{A}_0$ σ-Algebra auf X_0 mit $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$. Dann definiert $\mu_0(A) := \mu(A)$ (für alle $A \in \mathcal{A}_0$) ein Maß auf $\mathcal{A}_0$.
Für $X_0 \in \mathcal{A}$ setze $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_{X_0} := \{A \in \mathcal{A} : A \subset X_0\}$ (vgl. Lem 1.10). Dann ist $\mu|_{X_0}$ definiert durch $\mu|_{X_0}(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}_{X_0}$ ein Maß auf $\mathcal{A}_{X_0}$. $\mu|_{X_0} : \mathcal{A}_{X_0} \to [0, \infty]$ heißt Einschränkung von μ.

Satz 1.14. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B, A_j \in \mathcal{A}$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann gelten:*

a) Aus $A \subset B$ folgt $\mu(A) \leq \mu(B)$. (Monotonie)
Wenn zusätzlich $\mu(A) < \infty$, dann gilt: $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B)$.
(Speziell: $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A)$)

b) $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ (σ-Subadditivität)

c) Wenn $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, dann gilt

$$\mu(A_j) \xrightarrow{j\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right).$$

d) Wenn $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, und $\mu(A_1) < \infty$, dann gilt

$$\mu(A_j) \xrightarrow{j\to\infty} \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right).$$

Beweis. a) Es gilt: $B = A \dot\cup B \setminus A$ (beachte: $A \subset B$). Dann folgt

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\setminus A) \geq \mu(A).$$

b) Setze $B_1 := A_1,\ B_k := A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ für $k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$. Dann folgt $B_k \cap B_j = \emptyset\ \forall j < k \Rightarrow \{B_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ ist disjunkt.
Ferner gilt $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, da $B_k \subset A_k$ und jedes $x \in A_k$ in einem $B_j,\ j \in \mathbb{N}$, enthalten ist. Somit gilt

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(\biguplus_{k\in\mathbb{N}} B_k) \overset{(M2)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \underset{B_k \subset A_k}{\overset{a)}{\leq}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

c) Nach Voraussetzung gilt nun in a), dass $B_k = A_k \setminus A_{k-1},\ k \geq 2$.
Ferner gilt $A_n = \biguplus_{k=1}^{n} B_k$. Wie in b) folgt dann

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \\ &\overset{(M2)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(\biguplus_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

Somit folgt c).

□

1.2 Das Lebesgue-Maß

Ansatz: Für $I = (a, b] \subset \mathbb{R}^d$ setze:

$$\lambda(I) := \lambda_d(I) := (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) \tag{1.2}$$

Setze ferner $\mathcal{J}_d := \{(a, b] \subset \mathbb{R}^d : a \leq b\}$. Beachte: $\sigma(\mathcal{J}_d) = \mathcal{B}_d$ (Satz 1.9).
Ziel: Setze λ_d von $\mathcal{J}_d$ auf $\mathcal{B}_d$ fort.

1. Schritt

Die Menge der Figuren ist

$$\mathcal{F}_d := \left\{ A = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ mit } n \in \mathbb{N},\ I_1, \dots, I_n \in \mathcal{J}_d \right\}.$$

Beachte: $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{F}_d \subset \sigma(\mathcal{J}_d) = \mathcal{B}_d$. Mit Lem 1.6 folgt dann $\sigma(\mathcal{F}_d) = \mathcal{B}_d$.

Lemma 1.15. *Seien $I, I' \in \mathcal{J}_d$. Dann gelten*

a) $I \cap I' \in \mathcal{J}_d$.

b) $I \backslash I'$ *ist eine endliche Vereinigung disjunkter Intervalle aus* $\mathcal{J}_d \Rightarrow I \backslash I' \in \mathcal{F}_d$.

c) Jedes $A \in \mathcal{F}_d$ *ist eine endliche Vereinigung disjunkter Intervalle aus* $\mathcal{J}_d$.

d) $\mathcal{F}_d$ *ist ein Ring, d.h. es gilt für alle* $A, B \in \mathcal{F}_d$

(R1) $\emptyset \in \mathcal{F}_d$

(R2) $B \backslash A \in \mathcal{F}_d$

(R3) $A \cup B \in \mathcal{F}_d$.

Beweis. a) Sei $I = (\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times (\alpha_d, \beta_d],\ I' = (\alpha_1', \beta_1'] \times \dots \times (\alpha_d', \beta_d']$. Dann folgt $I \cap I' = (\overline{\alpha_1}, \overline{\beta_1}] \times \dots \times (\overline{\alpha_d}, \overline{\beta_d}]$ mit:
$\overline{\alpha_k} = \max\{\alpha_k, \alpha_k'\},\ \overline{\beta} = \min\{\beta_k, \beta_k'\}$, wobei $I \cap I' = \emptyset$, wenn ein $\overline{\alpha_k} \geq \overline{\beta_k}$. Also $I \cap I' \in \mathcal{J}_d$.

b) (IA): Die Behauptung ist klar für $d = 1$.
(IV): Die Behauptung gelte für ein $d \geq 2$.
(IS): Seien $I, I' \in \mathcal{J}_{d+1}$. Dann gibt es $I_1, I_1' \in \mathcal{J}_1$ und $I_2, I_2' \in \mathcal{J}_d$ mit

$$\begin{aligned} &I = I_1 \times I_2,\ I' = I_1' \times I_2' \\ &\Rightarrow I \backslash I' = ((I_1 \backslash I_1') \times I_2) \cup ((I_1 \cap I_1') \times (I_2 \backslash I_2')). \end{aligned}$$

Nach (IV) ist dies eine disjunkte Vereinigung $\hat{I}_k \in \mathcal{J}_{d+1}$.

c) (IA): Die Behauptung ist klar, wenn $A = I_1$ für ein $I_1 \in \mathcal{J}_d$.
(IV): Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung für alle $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ mit beliebigen $I_j \in \mathcal{J}_d$.
(IS): Sei nun $A = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j$ für beliebige $I_j \in \mathcal{J}_d$
$\overset{\text{(IV)}}{\Rightarrow}$ Es existieren disjunkte $I_1', \dots, I_n' \in \mathcal{J}_d$ mit $\bigcup_{j=1}^{n} I_j = \biguplus_{k=1}^{m} I_k'$.

$$\Rightarrow A = I_{n+1} \cup \biguplus_{k=1}^{m} I_k' = I_{n+1} \cup \biguplus_{k=1}^{m} \underbrace{(I_k' \backslash I_{n+1})}_{\overset{\text{b)}}{=}\text{disjunkte, endliche Vereinigung von } I \text{ in } \mathcal{J}_d}.$$

d) (R1) gilt, da $\emptyset = (a,a] \in \mathcal{F}_d$.
(R3) gilt nach Definition von $\mathcal{F}_d$.
Zu (R2): Seien $A, B \in \mathcal{F}_d$, also $A = \bigcup_{j=1}^n I_j, B = \bigcup_{k=1}^m I'_k$ für beliebige $I_j, I'_k \in \mathcal{F}_d,\ n, m \in \mathbb{N}$. Sei m fest aber beliebig. Induktion über n:
(IA): Sei $n = 1$. Dann gilt $B \backslash A = \bigcup_{k=1}^m \underbrace{I'_k \backslash I_1}_{\in \mathcal{F}_d \text{nach b)}}$.
(IV): Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $B \backslash A \in \mathcal{F}_d$ für alle obigen A und B.
(IS): Sei nun $A' = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = A \cup I_{n+1}$ (für $I_j \in \mathcal{F}_d$). Dann gilt6

$$B \backslash A' = B \backslash (A \cup I_{n+1}) = \underbrace{(B \backslash A)}_{\in \mathcal{F}_d \text{nach (IV)}} \backslash I_{n+1} \Rightarrow B \backslash A' \in \mathcal{F}_d.$$

□

Schritt 2: Fortsetzung von λ_d aus (1.2) auf $\mathcal{F}_d$

Idee: TODO BILD

Lemma 1.16. *Seien $A = \biguplus_{j=1}^n I_j = \biguplus_{k=1}^m I'_k$ für disjunkte $I_j \in \mathcal{J}_d$ $(j = 1, \ldots, n)$ und disjunkte $I'_k \in \mathcal{J}_d$ $(k = 1, \ldots, m)$. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^n \lambda_d(I_j) = \sum_{k=1}^m \lambda_d(I'_k).$$

Beweis. 1) Sei $d = 2,\ I = (a,b] \times (c,d],\ \alpha \in (a,b]$. Dann folgt $I = ((a,\alpha] \times (c,d]) \cup ((\alpha,b] \times (c,d]) = I' \cup I''$.
Ferner $\lambda(I) \overset{(1.2)}{=} (b-a) \cdot (d-c) = ((b-\alpha) + (\alpha - a)) \cdot (d-c) \overset{(1.2)}{=} \lambda(I') + \lambda(I'')$.
Genauso: Dies gilt auch für $d \geq 3$ und für Zerlegungen in der der k-ten Koordinate. Per Induktion folgt: Wenn man ein $I \in \mathcal{J}_d$ mit endlich vielen Zwischenstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in Intervalle $\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_l$ zerlegt, dann gilt: $\lambda_d(I) = \lambda_d(\tilde{I}_1) + \cdots + \lambda_d(\tilde{I}_l)$.

TODO: BILD

2) Setze $I''_{jk} = I_j \cap I'_k \in \mathcal{J}_d$ $(j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m)$. Die I''_{jk} sind per Definition disjunkt und $I_j = \bigcup_{k=1}^m I''_{jk},\ I'_k = \bigcup_{j=1}^n I''_{jk}$. $(*)$
Zerlege alle I''_{jk} weiter durch Schneiden mit allen Hyperebenen, auf denen Seiten eines der I''_{jk} liegen.
Erhalte dabei disjunkte $\hat{I}_1, \ldots, \hat{I}_l \in \mathcal{J}_d$, wobei jedes $\hat{I}_i$ in genau einem I''_{jk} und damit in genau einem I_j und genau einem I'_k liegt. Weiter werden alle I_j und alle I'_k durch die jeweils in ihnen liegenden $\hat{I}_k$ wie in 1) zerlegt. Damit gilt:

$$\sum_{j=1}^n \lambda(I_j) \overset{1)}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{i:\hat{I}_i \subset I_j} \lambda(\hat{I}_j) = \sum_{i=1}^l \lambda(\hat{I}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{j:\hat{I}_j \subset I_k} \lambda(\hat{I}_j) \overset{1)}{=} \sum_{k=1}^m \lambda(I'_k)$$

□

Für $A \in \mathcal{F}_d$ setze

$$\lambda(A) := \lambda_d(A) := \sum_{j=1}^{n} \lambda_d(I_j), \tag{1.3}$$

wobei $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ für disjunkte $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{J}_d$. Nach Lem 1.16 definiert dies eine Abbildung $\lambda_d : \mathcal{F}_d \to \mathbb{R}_+$. Seien $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, $B = \bigcup_{k=1}^{m} I'_k$ für disjunkte $I_j, I'_k \in \mathcal{J}_d$ und es sei $A \cap B = \emptyset$. Setze

$$I''_i := \begin{cases} I_i, & i = 1, \ldots, n \\ I'_i, & i = n+1, \ldots, n+m \end{cases}.$$

Dann sind die I''_j disjunkt und es folgt

$$\lambda_d(A \cup B) \overset{(1.3)}{=} \sum_{i=1}^{n+m} \lambda_d(I''_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_d(I_j) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_d(I'_k) \overset{(1.3)}{=} \lambda_d(A) + \lambda_d(B).$$

Per Induktion folgt für disjunkte $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_d$, dass

$$\lambda_d(A \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n) = \lambda_d(A_1) + \cdots + \lambda_d(A_n). \tag{1.4}$$

Weiter gilt nach Lem 1.15 für $A, B \in \mathcal{F}_d$ und ein $I \in J_d$ mit $A, B \subset I$, dass

$$\begin{aligned} A \cap B &= I \cap ((I^c \cup A) \cap (I^c \cup B)) = I \cap ((I \cap A^c) \cup (I \cap B^c)^c \\ &= I \backslash ((I \backslash A) \cup (I \backslash B)) \in \mathcal{F}_d \end{aligned} \tag{1.5}$$

Wenn $A \subset B$, dann gilt

$$\lambda_d(A) \leq \lambda_d(B). \tag{1.6}$$

(Beweis genau wie in 1.14a))
Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \lambda_d(A \cup B) &= \lambda_d(A \cup B \backslash A) \\ &\overset{\text{Satz 1.14}}{=} \lambda_d(A) + \lambda_d(B \backslash A) \overset{(1.6)}{\leq} \lambda_d(A) + \lambda_d(B). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Satz 1.17. *Die Abbildung $\lambda_d : \mathcal{F}_d \to \mathbb{R}_+$ ist ein <u>Prämaß</u> auf dem Ring $\mathcal{F}_d$, d.h es gelten:*

(M1) $\lambda_d(\emptyset) = 0$

(M2) Für disjunkte $A_j \in \mathcal{F}_d$, $j \in N$ mit $A := \biguplus_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}_d$ gilt*

$$\lambda_d(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(A_j).$$

Beweis. (M1) folgt aus (1.2), da $\emptyset = (a, a]$.

1) Beh1: Seien $B_n \in \mathcal{F}_d$ mit $B_{n+1} \subset B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Dann gilt $\lambda_d(B_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
(Übung: 2.1, Beh1, Lem 1.15 und (1.4) $\Rightarrow$ Satz 1.17)

2) Beweis von Beh1:
Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists C_n \in \mathcal{F}_d$ mit $\overline{C_n} \subset B_n \subset B_1$ und

$$\lambda_d(\underbrace{B_n \backslash C_n}_{\in \mathcal{F}_d}) \leq 2^{-n} \cdot \epsilon.$$

(Ersetze in allen Teilintervallen von B_n der Form $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$ a_j durch $a_j + \delta_n(\epsilon)$ für ein genügend kleines $\delta_n(\epsilon) \geq 0$ und $\delta_n(\epsilon) = 0$ falls ein $a_j = b_j$)
Da weiterhin $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n} = \emptyset$, gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{C_n}^c = \mathbb{R}^d \Rightarrow \{\overline{C_n}^c,\ n \in \mathbb{N}\}$ ist eine offene Überdeckung von $\overline{B_1}$, wobei $\overline{B_1}$ beschränkt und abgeschlossen ist. Dann folgt mit Heine-Borel: $\exists n_1 < \cdots < n_m$ mit $\overline{B_1} \subset \overline{C_{n_1}}^c \cup \cdots \cup \overline{C_{n_m}}^c \Rightarrow \overline{C_{n_1}} \cap \cdots \cap \overline{C_{n_m}} \subset \overline{B_1}^c$.
Mit $C_{n_j} \subset B_1$ folgt dann $\overline{C_{n_1}} \cap \cdots \cap \overline{C_{n_m}} = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} \overline{C_j} = \emptyset\ \forall n \geq n_m =: N_\epsilon$ $(*)$
Setze $D_n := \bigcap_{j=1}^{n} C_j \in \mathcal{F}_d$ (nach (1.5)), $n \in \mathbb{N}$.

Beh2: $\lambda_d(B_n \backslash D_n) \leq (1 - 2^{-n}) \cdot \epsilon$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
Nach $(*)$ gilt: $D_n = \emptyset$ für $n \geq N_\epsilon$. Beh2 zeigt: $\lambda_d(B_n) = \lambda_d(B_n \backslash D_n) \leq (1 - 2^n) \cdot \epsilon < \epsilon$ $\forall n \geq N_\epsilon$. Damit ist der Beweis von Satz 1.17 erbracht.

3) Beweis von Beh2:
(IA): Beh2 gilt für $n = 1$ nach der Ungleichung zu Beginn von 2).
(IV): Beh2 gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
(IS): Es gilt mit $D_{n+1} = D_n \cap C_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\lambda_d(B_{n+1} \backslash D_{n+1}) &= \lambda_d(B_{n+1} \backslash (D_n \cap C_{n+1}) \\
&= \lambda((B_{n+1} \backslash D_n) \cup (B_{n+1} \backslash C_{n+1})) \\
&\overset{(1.7)}{\leq} \lambda(B_{n+1} \backslash D_n) + \lambda(B_{n+1} \backslash C_{n+1}) \\
&\overset{(1.6)}{\leq} \lambda(B_n \backslash D_n) + \lambda(B_{n+1} \backslash C_{n+1}) \\
&\overset{(IV)}{\leq} (1 - 2^{-n}) \cdot \epsilon + 2^{-(n+1)} \epsilon = (1 - 2^{-(n+1)}) \cdot \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Ana III, 03.11.2008

Schritt 3: Fortsetzung von λ_d auf $\mathcal{B}_d$

Theorem 1.18 (Caratheodory, Fortsetzungssatz, 1914). *Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß.*

Dann existieren eine σ-Algebra $\mathcal{A}(\mu)$ auf X und ein Maß $\overline{\mu}$ aud $\mathcal{A}(\mu)$, sodass $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}(\mu)$ und $\mu(A) = \overline{\mu}(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$ gelten. Also ist $\overline{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ (vgl. Beispiel 1.13c)).

Theorem 1.19 (Eindeutigkeitssatz). *Seien $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ und μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(E) = \nu(E)$ $\forall E \in \mathcal{E}$. Weiter gelte:*

A) $E, F \in \mathcal{E} \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{E}$ ($\cap$-stabil)

B) $\exists E_n \in \mathcal{E}$ mit $\mu(E_n) < \infty$, $E_n \subset E_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, und $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$

Dann gilt $\mu = \nu$ (auf $\mathcal{A}$).

Bemerkung. a) B) ist nötig.
Bsp: Seien μ, ν Maße auf X mit $\mu(X) = 1,\ \nu(X) = 0$, $\mathcal{E} = \{\emptyset\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, X\} \Rightarrow \mu \neq \nu$, aber $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset)$, d.h A) gilt.

b) A) ist nötig.
Bsp: Seien $X = \{a, b, c, d\}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(X) = \sigma(\mathcal{E})$,
$\mathcal{E} = \{X, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$ und μ, ν auf $\mathcal{P}(X)$ gegeben durch:

$$\mu(\{a\}) = \mu(\{d\}) = \nu(\{b\}) = \nu(\{c\}) = 1$$
$$\mu(\{b\}) = \mu(\{c\}) = \mu(\{a\}) = \mu(\{d\}) = 2$$

$\Rightarrow \mu \neq \nu$, aber $\mu(X) = \nu(X) = 6,\ \mu(E) = \nu(E)$ $\forall E \in \mathcal{E} \backslash \{X\}$, d.h. B) gilt ohne Monotonie.

Theorem 1.20. *Es gibt genau eine Fortsetzung von λ_d aus (1.2) auf $\mathcal{B}_d$. Man schreibt λ_d (oder λ) für diese Fortsetzung und nennt sie Lebesgue-Maß.*

Beweis. Aus Lem 1.15 und Satz 1.17 folgt: λ_d aus (1.2) hat eine Fortsetzung zu einem Prämaß λ_d auf dem Ring $\mathcal{F}_d$. Da $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{F}_d \subset \mathcal{B}_d$, liefern Satz 1.9 und Lem 1.6, dass $\sigma(\mathcal{F}_d) = \sigma(\mathcal{J}_d) = \mathcal{B}_d$. Aus Thm 1.18 folgt dann die Existenz der Fortsetzung von λ_d auf $\mathcal{B}_d$. Ferner folgt aus (1.5), dass $\mathcal{F}_d$ $\cap$-stabil ist. Da die Folge $E_n := (-n, n]^d$ B) aus Thm 1.19 erfüllt (wegen (1.2)), liefert Thm 1.19 die Eindeutigkeit der Fortsetzung. ☐

Bemerkung 1.21. a) Sei $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$. Gemäß Beispiel 1.13 und Korollar 1.11 definiert die Einschränkung von λ_d auf $\mathcal{B}(X) = \{\mathcal{A} \subset X : \mathcal{A} \in \mathcal{B}_d\} \subset \mathcal{B}_d$ ein Maß, das wir auch mit λ_d bezeichnen und Lebesque-Maß nennen.

b) $\lambda_1([a, b]) = \lambda_1(\bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, b]) \overset{\text{Satz 1.14}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\lambda_1((a - \frac{1}{n}, b])}_{\overset{1.2}{=} b-a+\frac{1}{n}} = b - a$
(Entsprechend für $d \geq 2$ und andere Intervalltypen.)
Sei $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$
$\Rightarrow \lambda_1(\mathbb{Q}) = \lambda_1(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}) \overset{\text{Def 1.12}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_1([q_n, q_n])}_{=0} = 0$

c) Sei $H := \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\} \Rightarrow H$ ist abgeschlossen, also $H \in \mathcal{B}_d$. Da $H = \bigcup_{n=1}^{\infty}([-n,n]^{d-1} \times \{0\})$ und $\lambda_d([-n,n]^{d-1} \times \{0\}) = 0$ (vgl. b)), gilt $\lambda_d(H) = \lambda_d(\bigcup_{n=1}^{\infty}([-n,n]^{d-1} \times \{0\}) \overset{\text{Satz 1.14}}{=} \lim_{n\to\infty} \lambda_d([-n,n]^{d-1} \times \{0\}) = 0$

Zum Fortsetzungssatz
Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R}$ und $A \subset X$. Setze

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : B_k \in \mathcal{R} \text{ für } n \in \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right\} \tag{1.8}$$

(Dabei ist $\inf \emptyset := \infty$.)
Ferner:

$$\mathcal{A}(\mu) := \{A \subset X : \forall B \subset X \text{ gilt } \mu^*(B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)\} \tag{1.9}$$

Lemma 1.22. *μ^* ist ein äußeres Maß, d.h.:*

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$

b) $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

c) $A_j \subset X,\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$

Beweis. a) folgt mit $B_1 = B_2 = \cdots = \emptyset$.

b) gilt, da in (1.8) die B_k für B auch für A $(\subset B)$ genommen werden können.

c) Die Behauptung gilt, wenn ein $\mu^*(A_j) = \infty$. Andernfalls wähle $\epsilon > 0$. Dann folgt mit (1.8):

$$\exists B_{jk} \in \mathcal{R}\ (j,k \in \mathbb{N}) \text{ mit } A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk},$$

$$\mu^*(A_j) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{jk}) - 2^{-j} \cdot \epsilon \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} B_{jk}$$

und

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \overset{(1.8)}{\leq} \sum_{j,k=1}^{\infty} \mu^*(B_{jk}) \leq \sum_{j=1}^{\infty}(\mu^*(A_j) + 2^{-j} \cdot \epsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \epsilon.$$

Grenzwertbildung für $\epsilon \to 0$ lieft die Behauptung.

□

Lemma 1.23. *$\mathcal{A}(\mu)$ ist eine σ-Algebra und die Einschränkung $\overline{\mu}$ von μ^* auf $\mathcal{A}(\mu)$ ist ein Maß.*

Beweis von Thm 1.18. Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{R}$.

1) Da $A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \ \ldots$, gilt $\mu^*(A) \le \mu(A)$.
Wenn $\mu^*(A) = \infty$, dann gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$. Sei also $\mu^*(A) < \infty$.
Wähle $\epsilon > 0$. Dann existieren $A_j \in \mathcal{R}$ $(j \in \mathbb{N})$ mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \le \mu^*(A) + \epsilon.$$

Ferner gilt

$$A = A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\underbrace{A \cap A_j}_{\in \mathcal{R} \text{ nach Def 1.5}}).$$

Damit folgt

$$\mu(A) \overset{\text{wie Satz 1.14}}{\le} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap A_j) \overset{\text{wie Satz 1.14}}{\le} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \le \mu^*(A) + \epsilon.$$

Mit $\epsilon \to 0$ folgt dann $\mu(A) = \mu^*(A)$ $\forall A \in \mathcal{R}$.

2) <u>Zeige</u>: $A \in \mathcal{A}(\mu)$.
Denn dann folgt mit Lem 1.6 $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}(\mu)$.

Sei $B \subset X$. Wenn $\mu^*(B) = \infty$, erfüllen A und B die Ungleichung in (1.9). Sei also $\mu^*(B) < \infty$. Wähle $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists A_j \in \mathcal{R}$ $(j \in \mathbb{N})$ mit

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \le \mu^*(B) + \epsilon.$$

Daraus folgt $B \cap A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \cap A}_{\in \mathcal{R}}$. Nun gilt außerdem

$$B \cap A^c \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{A_j \cap A^c}_{\in \mathcal{R}}. \quad (*)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\epsilon + \mu^*(B) \ge \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} (\mu(A_j \cap A) + \mu(A_j \cap A^c)) \\
&\underset{(1.8)}{\overset{(*)}{\ge}} \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).
\end{aligned}$$

Mit $\epsilon \to 0$ folgt (1.9), also $A \in \mathcal{A}(\mu)$ $(\forall A \in \mathcal{R})$.

$\square$

Satz 1.24. *Sei $x \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{B}_d$. Dann gelten:*

a) $x + A \in \mathcal{B}_d$

b) $\lambda_d(A) = \lambda_d(x + A)$

c) Wenn μ ein Maß auf $\mathcal{B}_d$ ist, dass b) erfüllt, dann:
$\mu(B) = \mu((0,1]^d) \cdot \lambda_d(B)\ \forall B \in \mathcal{B}_d$

Beweis. a) Seien $x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}_d$ fest. Setze $\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}_d \text{ mit } x + B \in \mathcal{B}_d\}$.
Zeige: $A \in \mathcal{A}$. Klar: $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{A}$, $\mathbb{R}^d \in \mathcal{B}_d$.
Wenn $B \in \mathcal{A}$, dann $x + B^c = \{y \in \mathbb{R}^d : y = x + d \text{ für ein } d \notin B\} \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ ist σ-Algebra.
Wenn $B_j \in \mathcal{A}$ $(j \in \mathbb{N})$, dann $x + B_j \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty}(x + B_j) = x + \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.
Lem 1.6 sagt uns: $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{J}_d) \subset \mathcal{A}$. Damit folgt $A \in \mathcal{A}$.

b) Sei $x \in \mathbb{R}^d$ fest. Setze $\mu(B) = \lambda_d(x + B)\ \forall B \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \mu(\emptyset) = \lambda_d(\emptyset) = 0 \Rightarrow$ (M1).
Seien $B_j \in \mathcal{B}_d$ disjunkt $(j \in \mathbb{N})$. Dann gilt:
$\mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j) = \lambda_d(x + \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = \lambda_d(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(x + B_j))$
$\overset{\lambda_d \text{ ist Maß}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(x + B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \Rightarrow$ (M2) gilt für μ.
Sei $I \in \mathcal{J}_d \Rightarrow \mu(I) = \lambda_d(x + I) \overset{(1.2)}{=} \lambda_d(I) \Rightarrow \mu(I) = \lambda_d(I)\ \forall I \in \mathcal{J}_d$. Da $\mathcal{J}_d$ A), B) in Thm 1.19 erfüllt und $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{J}_d)$, folgt mit Thm 1.19, dass $\mu = \lambda_d$ auf $\mathcal{B}_d$ gilt.

c) (Skizze für d=1). Sei μ wie in Behauptung c) und $c := \mu((0,1]) \in [0,\infty)$. Dann gilt
$c = \mu((0,\frac{1}{2}]) + \mu((\frac{1}{2},1]) \overset{\text{nach Vor.}}{=} 2 \cdot \mu((0,\frac{1}{2}])$
$\Rightarrow \mu((0,\frac{1}{2}]) = c \cdot \lambda_1((0,\frac{1}{2}])$
Induktiv zeigt man: $\mu((0,2^{-n}]) = c \cdot \lambda_1((1,2^{-n}])$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Durch Verschieben und disjunkte Vereinigungen folgt $\mu(I) = c \cdot \lambda_1(I)$ für alle Intervalle der Form $I = (a,b]$ mit $a, b = m \cdot 2^n$ für gewisse $m, n \in \mathbb{Z}$
Das System dieser Intervalle erzeugt $\mathcal{B}_1$ (Beweis von Satz 1.9) und erfüllt A), B) in Thm 1.19. Damit folgt die Behauptung.

□

Ana III, 07.11.2008

Theorem 1.25. *λ_d ist regulär, d.h.: $\forall A \in \mathcal{B}_d$ gelten:*

a) $\lambda_d(A) = \inf\{\lambda_d(O) : O \text{ offen, } A \subset O\}$

b) $\lambda_d(A) = \sup\{\lambda_d(K) : K \text{ kompakt, } K \subset A\}$

Beweis. a) "$\leq$" folgt aus der Monotonie von λ_d
"'=' klar. wenn $\lambda_d(A) = \infty$. Sei also $\lambda_d < \infty$. Wähle $\epsilon > 0$. Nach (1.8) gilt:
$\exists I_j \in \mathcal{J}_d$ $(j \in \mathbb{N})$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(I_j) \leq \underbrace{\lambda_d(A)}_{=\lambda_d^*(A)} + \epsilon$ $(*)$

Wie im Beweis von Satz 1.17 findet man offene O_j mit $I_j \subset O_j$ und $\lambda_d(O_j) \leq \lambda_d(I_j) + 2^{-j} \cdot \epsilon$ $(\forall j \in \mathbb{N})$ $(**)$
$\Rightarrow O := \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$ ist offen und $A \overset{(*)}{\subset} \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$.
$\Rightarrow \lambda_d(O) \overset{\text{Satz 1.14}}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(O_j) \overset{(**)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(I_j) + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}}_{=2} \cdot \epsilon \overset{(*)}{\leq} \lambda_d(A) + 2 \cdot \epsilon.$

Mit $\epsilon \to 0$ folgt a).

b) "$\geq$" folgt aus der Monotonie von λ_d. Sei A $\in \mathcal{B}_d$.
   1) Sei zuerst $A \subset \overline{B}(0,r) =: B$ für ein $r > 0$. Sei $\epsilon > 0$. Nach a) für $B \backslash A$:
      $\exists$ offenes O mit $B \backslash A \subset O$ und $\lambda_d(0) \leq \lambda_d(B \backslash A) + \epsilon \overset{\text{Satz 1.14}}{=} \lambda_d(B) - \lambda_d(B) + \epsilon$ $(+)$
      Daraus folgen:
      - $K := B \backslash O = B \cap O^c$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.
      - $K \subset B \cap (B \backslash A)^c = B \cap (B \cap A^c)^c = A$
      - $\lambda_d(B) \overset{B \subset K \cup B}{\leq} \lambda_d(K \cup O) \overset{\text{Satz 1.14}}{\leq} \lambda_d(K) + \lambda_d(O) \overset{(+)}{\leq} \lambda_d(K) + \lambda_d(B) - \lambda_d(A) + \epsilon$

      $\overset{\text{alles in } \mathbb{R}}{\Rightarrow} \lambda_d(A) \leq \lambda_d(K) + \epsilon$. Damt folgt b) für beschränkte A.
   2) Sei $A \in \mathcal{B}_d$ beliebig. Setze $A_n := A \cap \overline{B}(0,n)$ $(n \in \mathbb{N})$
      $\Rightarrow A_n \subset A_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n = A$. Mit 1) folgt:
      $\exists K_n$ kompakt, mit $K_n \subset A_n$ und $\lambda_d(A_n) \leq \lambda_d(K_n) + \frac{1}{n}$.
      Durch Grenzwertbildung für $n \to \infty$ folgt mit Satz 1.14:
      $\lambda_d(K_n) \xrightarrow{n \to \infty} \lambda_d(A)$, weiter $K_n \subset A$.

□

Bemerkung. Der Beweis von Thm 1.25a) zeigt, dass man O als eine Vereinigung offener Intervalle nehmen darf.

Auswahlaxiom. Sei M eine nichtleeres System nichtleerer Mengen $A \subset X$.
Dann gibt es eine Abbildung $\phi : M \to \bigcup_{A \in M} A \subset X$ mit $\phi(A) \in A$ $\forall A \in M$.

Satz 1.26. $\exists \Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \backslash \mathcal{B}_d$.

Beweis. Betrachte auf $(0,1]^d$ die Äquivalenzrelation gegeben durch $X \sim Y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^d$.
Sei $\Omega := \{\phi(A) : A \in M\}$, wobei M die Menge der Äquivalenzklasse zu $\sim$ ist und ϕ aus dem Auswahlaxiom. Damit folgt: $\Omega \subset (0,1]^d$.
Sei $\{q_1, q_2, \dots\} := \mathbb{Q}^d \cap [-1,1]^d$. Dann folgt

$$(0,1]^d \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + \Omega) \subset [-1,2]^d. \quad (*)$$

Diese Vereinigung ist disjunkt, da jedes $x \in (0,1]^d$ in genau einer Äquivalenzklasse liegt.

Annahme: $\Omega \in \mathcal{B}_d$.

Dann $3^d = \lambda_d([-1,2]^d) \overset{\sigma\text{-Subadd.}}{\geq} \lambda_d(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} q_n + \Omega) \overset{\text{(M2)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(q_n + \Omega) \overset{\text{Satz 1.24}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(\Omega) \Rightarrow \lambda_d(\Omega) = 0$

Aber: $1 = \lambda_d((0,1]^d) \overset{(*)}{\leq} \lambda_d(\bigcup_{n=1}^{\infty}(q_n + \Omega)) \overset{\text{wie oben}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(\Omega) = 0$, was ein Widerspruch ist. $\square$