9 Übung vom 23.06.

29. Aufgabe

Gegeben: Bewerber $B_1, \ldots, B_m$; Posten $P_1, \ldots, P_n$
Wir definieren

$$\alpha_{i,j} := \begin{cases} 1, & B_i \text{ ist für } P_j \text{ geeignet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_{i,j} := \begin{cases} 1, & B_i \text{ erhält } P_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Zuordungsproblem hat die Form

$$(\text{ZP}) \boxed{\begin{array}{rcl} f(x){=}\sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j} x_{i,j} & = & \max \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{i,j} & \leq & 1 \;\; i = 1, \ldots, m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{i,j} & \leq & 1 \;\; j = 1, \ldots, n \\ x_{i,j} & \leq & 0 \; \forall i, j \end{array}}$$

Wir definieren ein Netzwerk (NW):

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{K} & := & \{B_i |\ i = 1, \ldots, m\} \cup \{P_j |\ j = 1, \ldots, n\} \cup \{Q\} \cup \{S\} \\ \mathcal{B} & := & \{(Q, B_i)|\ i = 1, \ldots, m\} \cup \{(B_i, P_j)|\ i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\} \\ & & \cup \{(P_j, S)|\ j = 1, \ldots, n\} \end{array}$$

Auf dem Bogen (Q, B_i), (P_j, S) seien die Kapazitäten jeweils 1, auf den Bögen (B_i, P_j) seien sie gerade $\alpha_{i,j}$.

Für jeden Fluss von (NW) gilt:

$$(*)\ \forall i : \sum_{j=1}^{n} \underbrace{y_{i,j}}_{\text{Fluss von } B_i \text{ zu } P_j} = y_{Q,i}; \qquad \forall j : \sum_{i=1}^{m} y_{i,j} = y_{j,S}$$

1. Es sei y zulässiger Fluss in (NW). Mit $(*)$ folgt für y:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{i,j} = y_{Q,i} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{m} y_{i,j} = y_{j,S} \leq 1.$$

Da $y_{i,j} \geq 0$ ist, ist y auch zulässig in (ZP).

Es sei x zulässig in (ZP). Aufgrund der Nebenbedingungen von (ZP) erfüllen die $x_{i,j}$ auch $(*)$.

Wir setzen

$$y_{i,j} := \alpha_{i,j} x_{i,j} \text{ für } i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$$

Dann gilt:

$$x_{i,j} \leq 1 \Rightarrow y_{i,j} \leq \underbrace{\alpha_{i,j}}_{\text{Kapazität des Bogens } B_i \text{ zu } P_j} \cdot 1$$

Setzen wir weiter

$$y_{Q,i} = \sum_{j=1}^{n} y_{i,j} \text{ und } y_{j,S} = \sum_{i=1}^{m} y_{i,j}$$

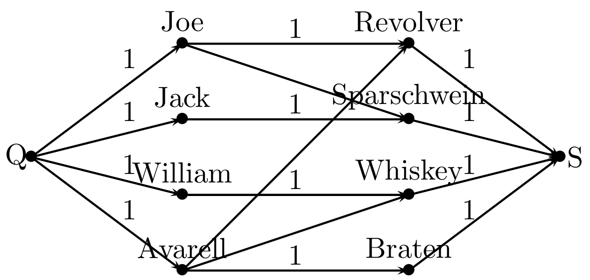
für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$, so ist $(*)$ erfüllt, y ist also zulässig in (NW).

2. Es sei y zulässiger Fluss, $y_{S,Q}$ ist zu maximieren. Weiter sei x der zu y gehörende Punkt in (ZP). Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{i,j} \underbrace{\alpha_{i,j} x_{i,j}}_{=\alpha_{i,j} y_{i,j} = y_{i,j}} = \sum_{i} \left(\sum_{j} y_{i,j} \right) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} y_{Q,i} = y_{S,Q}$$

30. Aufgabe

Als (NW) erhalten wir:



`Anmerkung:` Jeder Bogen hat Kapazität 1!!

Das ist ein maximaler Fluss in (NW), also eine Lösung unseres Zuordnungsproblems (ZP) und die Lösung ist eindeutig.

[...]

31. Aufgabe

Wir wählen $A, B \in G$ beliebig und betrachten das (zunächst ungerichtete) Netzwerk mit Anfang A, Ende B und die zughörigen Kanten aus G. Die Kapazität setzen wir überall auf 1. Außerdem ersetzen wir jede ungerichtete Kante durch zwei gerichtete *(jeweils mit gleicher Kapazität wie die alte Kante).*
Jeder disjunkte Kantenzug von A nach B ermöglicht den Transport einer Einheit von A nach B und umgekehrt. Die Behauptung folgt also, falls der maximale Fluss größer als m+1 ist.
Nach dem Satz von Ford-Fulkerson ist dies äquivalent dazu, dass die minimale Schnittkapazität mindestens m+1 ist.

Es sei $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ ein beliebiger Schnitt unseres Netzwerkes mit $A \in \mathcal{K}_1$, $B \in \mathcal{K}_2$. Die Schnittkapazität ist dann

$$k(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{C} \\ i \in \mathcal{K}_1, j \in \mathcal{K}_2}} c_{i,j} = \#\{(i,j) \in \underbrace{\mathcal{C}}_{\text{Kantenmenge}} \mid i \in \mathcal{K}_1, j \in \mathcal{K}_2\}$$

Annahme: $k(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) \leq m$
Dann gibt es nur m Kanten, die Punkte aus $\mathcal{K}_1$ mit Punkten aus $\mathcal{K}_2$ verbinden. Wenn diese m Kanten entfernt werden, kann kein Punkt aus $\mathcal{K}_1$ mit keinem Punkt aus $\mathcal{K}_2$ mehr verbunden werden. Dies gilt insbesondere für A und B. Also ist der ursprüngliche Graph nicht m-zusammenhängend. Widerspruch!

Also ist $k(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) \geq m + 1$. Dies gilt auch für die minimale Schnittkapazität. Also folgt die Behauptung.

32. Aufgabe

`Anmerkung:` Eigener Lösungsweg, eventuelle Abweichungen vom vorgestellten Lösungsweg in der Übung!

Startfluss $X \equiv 0$

Durch scharfes Hinsehen zunächst (auch mit Markierungsverfahren möglich):
$1 \xrightarrow{+2} 2 \xrightarrow{+2} 6$
$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 6$
$1 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 6$

Markierungsverfahren:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 6 & & 1 & 1 & & \\ & & & & 4 & 5 \end{array} \Longrightarrow 1 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 6$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 6 & & 1 & & & \\ & 3 & & & & 2 \end{array} \Longrightarrow 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 2 \xrightarrow{+2} 6$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 6 & & 1 & & & \\ & & & 3 & 4 & 5 \end{array} \Longrightarrow 1 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5 \xrightarrow{+1} 6$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 6 & & 1 & & & \\ & & & 3 & & \end{array} \Rightarrow \text{Der Algorithmus ist am Ende, weil 6 nicht markiert wurde.}$$

Damit ist dies ein maximaler Fluss im Netzwerk:

$$\widehat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } i \xrightarrow{\widehat{x}_{i,j}} j \quad i,j = 1, \cdots, 6$$

[...]