

1. Der Raum \mathbb{R}^n

Sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ist mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum.

$e_1 := (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Definition

Seien $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

- (1) $x \cdot y := xy := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ heißt das **Skalar-** oder **Innenprodukt** von x und y .
- (2) $\|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ heißt die **Norm** oder **Länge** von x .
- (3) $\|x - y\|$ heißt der **Abstand** von x und y .

Beispiele:

- (1) $\|e_j\| = 1$ ($j = 1, \dots, n$)
- (2) $n = 3 : \|(1, 2, 3)\| = (1 + 4 + 9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14}$

Beachte:

- (1) $x \cdot y \in \mathbb{R}$
- (2) $\|x\|^2 = x \cdot x$

Satz 1.1 (Rechenregeln zur Norm)

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

- (1) $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$, $x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz)$
- (2) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- (3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (4) $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (CSU)**
- (5) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (6) $||x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$
- (7) $|x_j| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ ($j = 1, \dots, n$)

Beweis

- (1) , (2), (3) nachrechnen.

1. Der Raum \mathbb{R}^n

(6) Übung.

$$(4) \text{ O.B.d.A: } y \neq 0 \text{ also } \|y\| > 0. \ a := x \cdot x = \|x\|^2, \ b := xy, \ c := \|y\|^2 = y \cdot y, \ \alpha := \frac{b}{c}. \ 0 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - \alpha y_j)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2\alpha x_j y_j + \alpha^2 y_j^2) = a - 2\alpha b + \alpha^2 c = a - 2\frac{b}{c}b + \frac{b^2}{c^2}c = a - \frac{b^2}{c} \implies 0 \leq ac - b^2 \implies b^2 \leq ac \implies (xy)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

$$(5) \|x+y\|^2 = (x+y)(x+y) \stackrel{(1)}{=} x \cdot x + 2xy + y \cdot y = \|x\|^2 + 2xy + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|xy| + \|y\|^2 \stackrel{(4)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

$$(7) |x_j|^2 = x_j^2 \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2 \implies 1. \text{ Ungleichung; } x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \implies \|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \stackrel{(5)}{\leq} \|x_1 e_1\| + \dots + \|x_n e_n\| = |x_1| + \dots + |x_n| \quad \blacksquare$$

Seien $p, q, l \in \mathbb{N}$. Es sei A eine reelle $p \times q$ -Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \quad \|A\| := \left(\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \alpha_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ Norm von } A$$

Sei B eine reelle $q \times l$ -Matrix ($\implies AB$ existiert). **Übung:** $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Sei $x = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$. $Ax := A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$ (**Matrix-Vektorprodukt**).

Es folgt:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

Definition

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $A, U \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) $U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$ heißt δ -Umgebung von x_0 oder **offene Kugel** um x_0 mit Radius δ .

(2) U ist eine **Umgebung** von $x_0 : \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq U$.

(3) A heißt **beschränkt** : $\iff \exists c \geq 0 : \|a\| \leq c \forall a \in A$.

(4) $x_0 \in A$ heißt ein **innerer Punkt** von $A : \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A$.

$A^\circ := \{x \in A : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$ heißt das **Innere** von A . Klar: $A^\circ \subseteq A$.

(5) A heißt **offen** : $\iff A = A^\circ$. Zur Übung: A° ist offen.

Beispiele:

(1) offene Kugeln sind offen, \mathbb{R}^n ist offen, \emptyset ist offen.

(2) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$, $A^\circ = U_\delta(x_0)$

(3) $n = 2$: $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : x_2 = x_1^2\}$, $A^\circ = \emptyset$

Definition

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

(1) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von $A : \iff \forall \delta > 0 : (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$.

$\mathcal{H}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}$.

- (2) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Berührungspunkt** (BP) von $A : \iff \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$.
 $\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist ein Berührungspunkt von } A\}$ heißt die **Abschließung** von A . Klar:
 $A \subseteq \bar{A}$. Zur Übung: $\bar{A} = A \cup \mathcal{H}(A)$.
- (3) A heißt **abgeschlossen** : $\iff A = \bar{A}$. Zur Übung: \bar{A} ist abgeschlossen.
- (4) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Randpunkt** von $A : \iff \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$ und $U_\delta(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$. $\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist ein Randpunkt von } A\}$ heißt der **Rand** von A . Zur Übung: $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$.

Beispiele:

- (1) \mathbb{R}^n ist abgeschlossen, \emptyset ist abgeschlossen;
 $\bar{A} = U_\delta(\bar{x}_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$ (**abgeschlossene Kugel** um x_0 mit Radius δ)
- (2) $\partial U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = \delta\} = \partial U_\delta(\bar{x}_0)$
- (3) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = x_1^2\}$. $A = \bar{A} = \partial A$

Satz 1.2 (Offene und abgeschlossene Mengen)

- (1) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A ist abgeschlossen : $\iff \mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen.
- (2) Die Vereinigung offener Mengen ist offen.
- (3) Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (4) Sind $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\implies \bigcap_{j=1}^n A_j$ ist offen
- (5) Sind $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\implies \bigcap_{j=1}^n A_j$ ist abgeschlossen

Beispiel

($n = 1$). $A_t := (0, 1 + t)$ ($t > 0$). Jedes A_t ist offen. $\bigcap_{t>0} A_t = (0, 1]$ ist nicht offen.

Beweis

- (1) „ \implies “: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Annahme: $\forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \not\subseteq \mathbb{R}^n \setminus A \implies \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset \implies x_0 \in \bar{A} \stackrel{\text{Vor.}}{=} A$, Widerspruch
 „ \impliedby “: Annahme: $\subset \bar{A} \implies \exists x_0 \in \bar{A} : x_0 \notin A$; also $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Voraussetzung $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A \implies U_\delta(x_0) \cap A = \emptyset \implies x_0 \notin \bar{A}$, Widerspruch!
- (2) Sei $(A_\lambda)_{\lambda \in M}$ eine Familie offener Mengen und $V := \bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda$. Sei $x_0 \in V \implies \exists \lambda_0 \in M : x_0 \in A_{\lambda_0}$. A_{λ_0} offen $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A_{\lambda_0} \subseteq V$
- (3) folgt aus (1) und (2) (Komplemente!)
- (4) $D := \bigcap_{j=1}^m A_j$. Sei $x_0 \in D$. $\forall j \in \{1, \dots, m\} : x_0 \in A_j$, also existiert $\delta_j > 0 : U_{\delta_j}(x_0) \subseteq A_j$.
 $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\} \implies U_\delta(x_0) \subseteq D$
- (5) folgt aus (1) und (4) ■

