3 Produktmaße und Unabhängigkeit

3.1 Der allgemeine Fall

Im Folgenden sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge. $\forall i \in I$ sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ein messbarer Raum. Weiter sei $\Omega := \times_{i \in I} \Omega_i$ ein neuer Ergebnisraum. Wir definieren die **Projektion** auf die i-te Koordinate $\Pi_i : \Omega \to \Omega_i$ durch $\Pi_i(\omega) = \omega_i$.

Definition *Die* ***Produkt-σ-Algebra*** $\mathcal{A} := \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$ *ist die kleinste σ-Algebra mit der Eigenschaft, dass für alle $i \in I$ die Abbildung Π_i $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i)$-messbar ist. Genauer:*

$$\mathcal{A} := \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \left\{\Pi_i^{-1}(A_i) | A_i \in \mathcal{A}_i\right\}\right)$$

Bemerkung Sei $J \subset I$, $\Pi_J : \Omega \to \times_{i \in J} \Omega_i$, $\Pi_J(\omega)(j) = \omega_j$ $(j \in J)$ die Projektion auf die J-Koordinaten, so bildet

$$\left\{\Pi_J^{-1}\left(A_J\right) | A_J \in \bigotimes_{i \in J} \mathcal{A}_i, J \subset I, J \text{ endlich}\right\}$$

ein durchschnittstabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$. Man nennt diese Mengen auch **Zylindermengen** mit endlicher Basis.

$$\left(A_J = A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_{|J|}}, \Pi_J^{-1}\left(A_J\right) = \bigcap_{k=1}^{|J|} \Pi_{i_k}^{-1}\left(A_{i_k}\right)\right)$$

Beispiel 3.1 Ist $I = \{1, \ldots, n\}$ endlich, so ist (vgl. Stochastik I, §8):

$$\mathcal{A} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = \sigma\left(\{A_1 \times \cdots \times A_n | A_i \in \mathcal{A}_i,\, i \in \{1, \ldots, n\}\}\right)$$

Wir betrachten zunächst den Fall $|I| = 2$. Gegeben seien zwei Maßräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$. Weiter sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Wir müssen nun ein Produktmaß konstruieren.

Lemma 3.1 *Für alle $A \in \mathcal{A}$, $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$ gilt:*

$$\begin{aligned} A_{\omega_1} &:= \{\omega_2 \in \Omega_2 | \,(\omega_1, \omega_2) \in A\} \in \mathcal{A}_2 \text{ und} \\ A_{\omega_2} &:= \{\omega_1 \in \Omega_1 | \,(\omega_1, \omega_2) \in A\} \in \mathcal{A}_1. \end{aligned}$$

A_{ω_i} heißt ω_i-Schnitt von A für $i = 1, 2$.

- hier fehlt eine Skizze -

Beweis Sei $\omega_1 \in \Omega_1$. Dann ist $\mathcal{A}' := \{A \in \mathcal{A} | A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2\} \subset \mathcal{A}$, also die Menge der Mengen, für die das Lemma gilt, eine σ-Algebra, denn:

(i)

$$\Omega_{\omega_1} = \Omega_2 \in \mathcal{A}_2 \quad \Longrightarrow \quad \Omega \in \mathcal{A}'$$

(ii)

$$\begin{aligned} (\Omega \backslash A)_{\omega_1} &= \{\omega_2 | \, (\omega_1, \omega_2) \notin A\} \\ &= \{\omega_2 | \, (\omega_1, \omega_2) \in A\}^C \\ &= \Omega_2 \backslash \underbrace{A_{\omega_1}}_{\in \mathcal{A}_2} \in \mathcal{A}_2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow (\Omega \backslash A)_{\omega_1} \in \mathcal{A}'$.

(iii)

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)_{\omega_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2 \Longrightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)_{\omega_1} \in \mathcal{A}'$$

$$\text{Wegen } \left(A_1 \times A_2\right)_{\omega_1} = \begin{cases} A_2 & , \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & , \omega_1 \notin A_1 \end{cases} \in \mathcal{A}_2 \text{ gilt:}$$

$$\sigma \left(\{A_1 \times A_2 | A_1 \in \mathcal{A}_1, \, A_2 \in \mathcal{A}_2\} \right) \subset \mathcal{A}', \text{ also gilt } \mathcal{A} = \mathcal{A}'$$

mit der Voraussetzung von oben. Aus Symmetriegründen gilt die entsprechende Aussage auch für A_{ω_2}, $\omega_2 \in \Omega_2$. ∎

Lemma 3.2 *Die Maße μ_1, μ_2 seien σ-endlich. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$:*

$$\begin{aligned} \omega_1 &\mapsto \mu_2(A_{\omega_1}) \text{ ist } (\mathcal{A}_1, \mathfrak{B}_{(-\infty,\infty]})\text{-messbar,} \\ \omega_2 &\mapsto \mu_1(A_{\omega_2}) \text{ ist } (\mathcal{A}_2, \mathfrak{B}_{(-\infty,\infty]})\text{-messbar.} \end{aligned}$$

Beweis μ_2 σ-endlich $\Longrightarrow \exists (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_2$ mit $B_n \uparrow \Omega_2$ und $\mu_2(B_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Setze $f_A(\omega_1) := \mu_2(A_{\omega_1})$, $f_{A,n}(\omega_1) := \mu_2(A_{\omega_1} \cap B_n)$. Sei $\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{A} | f_{D,n} \text{ ist } (\mathcal{A}_1, \mathfrak{B})\text{-messbar}\}$ für ein festes n. Dann gilt:

(i) $f_{\Omega,n} = \mu_2(\Omega_2 \cap B_n) = \mu_2(B_n)$

(ii) $f_{D^C,n} = \mu_2(B_n) - f_{D,n}$, also $D \in \mathcal{D} \implies D^C \in \mathcal{D}$

(iii) $f_{\sum_{i=1}^{\infty} D_i,n} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{D_i,n}$, also $D_i \in \mathcal{D} \implies \sum_{i=1}^{\infty} D_i \in \mathcal{D}$

Damit ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System (vgl. Stochastik 1).
Wegen $f_{A_1\times A_2,n}(\omega_1) = \mu_2(A_2 \cap B_n) \cdot \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1)$ ist $f_{A_1\times A_2,n}$ für $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ messbar und daher $A_1 \times A_2 \in \mathcal{D}$.
$\mathcal{D}$ enthält also das durchnittstabile Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$.
$\xRightarrow{\text{St.1, S.4.3}} \mathcal{D} = \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad f_{A,n}$ ist $(\mathcal{A}_1, \mathfrak{B})$-messbar $\forall A \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$.
Wegen $f_A = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_{A,n}\}$ folgt die Behauptung. ■

Definition 3.1 *und Satz:*
Sind μ_1, μ_2 σ-endlich, so existiert genau ein Maß μ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\cdot\mu_2(A_2)$ $\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2$. μ heißt ***Produktmaß*** *von μ_1 und μ_2, Schreibweise: $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Für μ gilt*[1]*:*

$$\mu(A) = \int \mu_2(A_{\omega_1})\, \mu_1(d\omega_1) = \int \mu_1(A_{\omega_2})\, \mu_2(d\omega_2) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Schließlich ist μ auch σ-endlich.

Beweis Es seien wieder $f_A(\omega_1) = \mu_2(A_{\omega_1})$. Seien $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, A_n$ paarweise disjunkt und $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int f_A \mathrm{d}\mu_1 &\overset{\text{stetig von unten}}{=} \int \lim_{n\to\infty} \left(f_{\sum_{i=1}^n A_i}\right) \mathrm{d}\mu_1 \\
&\overset{\text{monotone Konvergenz}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\int f_{\sum_{i=1}^n A_i} \mathrm{d}\mu_1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int f_{A_i} \mathrm{d}\mu_1\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int f_{A_i} \mathrm{d}\mu_1\right)
\end{aligned}$$

Außerdem ist $\int f_\emptyset \mathrm{d}\mu_1 = \int 0 \mathrm{d}\mu_1 = 0$.
Also ist $\Pi : \mathcal{A} \to [0,\infty]$, $\Pi(A) := \int f_A \mathrm{d}\mu_1$ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Nach Konstruktion gilt: $\Pi(A_1 \times A_2) = \int \mu_2(A_2) \cdot \mathbf{1}_{A_1} \mathrm{d}\mu_1 = \mu_2(A_2) \cdot \mu_1(A_1)$.
Analog ist $\Pi'(A) := \int \mu_1(A_{\omega_2}) \cdot \mu_2(\mathrm{d}\mu_2)$ ein Maß mit $\Pi'(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$, d.h. Π und Π' stimmen auf dem durchschnittstabilen Erzeuger $\{A_1 \times A_2 | A_i \in \mathcal{A}_i\}$ überein. Der Eindeutigkeitssatz für Maße (vgl. Übung) liefert $\Pi = \Pi' =: \mu$ auf ganz $\mathcal{A}$. σ-Endlichkeit ist klar. ■

[1]Anmerkung: $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int f(\omega)\, \mu(\mathrm{d}\omega)$

Wie integriert man bzgl. $\mu_1 \otimes \mu_2$?
Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so sei

$$\begin{aligned} f_{\omega_1}: \quad & \Omega_2 \to \mathbb{R}, \quad f_{\omega_1}(\omega_2) := f(\omega_1, \omega_2), \\ f_{\omega_2}: \quad & \Omega_1 \to \mathbb{R}, \quad f_{\omega_2}(\omega_1) := f(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Lemma 3.3 *Ist $f(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$-messbar, so ist f_{ω_1} $(\mathcal{A}_2, \mathfrak{B})$-messbar $\forall \omega_1 \in \Omega_1$ und f_{ω_2} ist $(\mathcal{A}_1, \mathfrak{B})$-messbar $\forall \omega_2 \in \Omega_2$.*

Beweis

$$\begin{aligned} f_{\omega_1}^{-1}(B) &= \{\omega_2 \in \Omega_2 | f(\omega_1, \omega_2) \in B\} \\ &= (\{\omega \in \Omega | f(\omega) \in B\})_{\omega_1} \\ &= \Bigg(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}}\Bigg)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2 \quad \forall B \in \mathfrak{B}. \end{aligned}$$ ■

Satz 3.1 (Satz von Fubini, Teil I, auch: Satz von Tonelli)
Es seinen μ_1 und μ_2 σ-endlich sowie $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$-messbar[2]. Dann ist

$$\begin{aligned} \omega_1 \quad &\mapsto \quad \int f_{\omega_1} d\mu_2 \quad (\mathcal{A}_1, \mathfrak{B}_{(-\infty,\infty]})\text{-}\textit{messbar und} \\ \omega_2 \quad &\mapsto \quad \int f_{\omega_2} d\mu_1 \quad (\mathcal{A}_2, \mathfrak{B}_{(-\infty,\infty]})\text{-}\textit{messbar und es gilt:} \end{aligned}$$

$$\int f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1\right) \mu_2(d\omega_2) = \int \left(\int f_{\omega_1} d\mu_2\right) \mu_1(d\omega_1).$$

Beweis mit algebraischer Induktion.

(1) Falls $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ erhält man mit $(\mathbf{1}_A)_{\omega_2}(\omega_1) = \mathbf{1}_{A_{\omega_2}}(\omega_1)$ die Beziehung

$$\int f_{\omega_2} \mathrm{d}\mu_1 \overset{lin.}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \int \mathbf{1}_{(A_i)_{\omega_2}} \mathrm{d}\mu_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_1\left((A_i)_{\omega_2}\right)$$

$$\overset{\text{L.3.2}}{\Longrightarrow} \omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} \mathrm{d}\mu_1 \text{ist messbar.}$$

$$\Longrightarrow \int \left(\int f_{\omega_2} \mathrm{d}\mu_1\right) \mu_2(\mathrm{d}\omega_2) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int \mu_1\left((A_i)_{\omega_2}\right) \mu_2 \mathrm{d}(\omega_2)$$

$$\overset{D.3.1}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu_1 \otimes \mu_2(A_i) = \int f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

[2]Dass hier $f \geq 0$ gilt, ist wesentlich für Fubini I; den allgemeinen Fall behandelt Fubini II.

(2) $f \geq 0$, f $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$-messbar.
$\Longrightarrow$ $\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ mit $u_n \uparrow f$ und $\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}(\int u_n \mathrm{d}\mu)$.
Wegen $(u_n)_{\omega_2} \uparrow f_{\omega_2}$ und $g_n(\omega_2) := \int (u_n)_{\omega_2} \mathrm{d}\mu_1 \uparrow \int f_{\omega_2} \mathrm{d}\mu_1 \forall\ \omega_2 \in \Omega_2$ ist nach Schritt 1 $\int g_n(\omega_2)\mu_2(\mathrm{d}\omega_2) = \int u_n \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt:

$$\begin{aligned}\int \left(\int f_{\omega_2} \mathrm{d}\mu_1\right) \mu_2(\mathrm{d}\omega_2) &= \lim_{n\to\infty} \left(\int g_n \mathrm{d}\mu_2\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int u_n \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)\right) \\ &= \int f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2).\end{aligned}$$

Wiederhole die Schritte mit ω_2 statt mit ω_1 und erhalte den Rest der Behauptung.■

Bevor wir den Satz von Fubini für allgemeine f beweisen, benötigen wir folgende Überlegung:

Bemerkung 3.1 Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A^C) = 0$, $f : A \to \mathbb{R}$, so nennen wir f $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$-messbar, μ-integrierbar, etc., wenn dies auf die folgende Fortsetzung $\bar{f}$ von f zutrifft:
$\bar{f} : \Omega \to \mathbb{R}$, $\bar{f}(\omega) := \begin{cases} f(\omega) & \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und schreiben dann $\int f \mathrm{d}\mu$ statt $\int \bar{f} \mathrm{d}\mu$.

Satz 3.2 (Satz von Fubini, Teil II)
Es seien μ_1 und μ_2 σ-endlich, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-integrierbar.
Dann sind μ_1-fast alle f_{ω_1} μ_2-integrierbar und μ_2-fast alle f_{ω_2} μ_1-integrierbar.
Weiter sind die Integrale

$$\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1} d\mu_2$$

und

$$\omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} d\mu_1$$

als Funktionen von ω_1 bzw. ω_2 im obigen Sinne μ_1- bzw. μ_2-integrierbar und es gilt:

$$\int f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1\right) \mu_2(d\omega_2) = \int \left(\int f_{\omega_1} d\mu_2\right) \mu_1(d\omega_1)$$

Beweis
Es gilt $|f|_{\omega_1} = |f_{\omega_1}|$, $f^+_{\omega_1} = (f_{\omega_1})^+$ und $f^-_{\omega_1} = (f_{\omega_1})^-$.
Also folgt aus Satz 3.1.:

$$\begin{aligned}\int |f| \mathrm{d}\mu &= \int \left(\int |f_{\omega_1}| \mathrm{d}\mu_2\right) \mu_1(\mathrm{d}\omega_1) < \infty \text{ (das ist die Voraussetzung)} \\ &\Longrightarrow \mu_1 \left(\left\{\omega_1 \middle| \int |f_{\omega_1}| \mathrm{d}\mu_2 = \infty\right\}\right) = 0 \\ &\Longrightarrow f_{\omega_1} \text{ ist } \mu_1\text{-f.ü. } \mu_2\text{-integrierbar.}\end{aligned}$$

Satz 3.1. angewandt auf $f_{\omega_1}^+$ und $f_{\omega_1}^-$ ergibt, dass

$$\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1} \mathrm{d}\omega_2 = \left(\int f_{\omega_1}^+ \mathrm{d}\mu_2 \; - \; \int f_{\omega_1}^- \mathrm{d}\mu_2 \right)$$

$(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$-messbar ist (auf einer μ_1-Nullmenge könnte "$\infty - \infty$"stehen und die Funktion wäre dort nicht definiert, siehe hierzu aber die vorstehende Bemerkung) und

$$\begin{aligned} \int \left(\int f_{\omega_1} \mathrm{d}\mu_2 \right) \mu_1 (\mathrm{d}\omega_1) &= \int \left(\int f_{\omega_1}^+ \mathrm{d}\mu_2 \; - \; \int f_{\omega_1}^- \mathrm{d}\mu_2 \right) \mu_1 (\mathrm{d}\omega_1) \\ &= \int f^+ \mathrm{d}\mu \; - \; \int f^- \mathrm{d}\mu \\ &= \int f \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Der Rest folgt mit dem Symmetrieargument. ∎

Bemerkung 3.2

a) Der Satz von Fubini läßt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \int f \mathrm{d} (\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int \int f (\omega_1, \omega_2) \, \mu_1 (\mathrm{d}\omega_1) \, \mu_2 (\mathrm{d}\omega_2) \\ &= \int \int f (\omega_1, \omega_2) \, \mu_2 (\mathrm{d}\omega_2) \, \mu_1 (\mathrm{d}\omega_1) \end{aligned}$$

Die Integrationsreihenfolge spielt also keine Rolle.

b) Sind messbare Räume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i \in I)$ gegeben mit $|I|$ endlich und $|I| > 2$, so erhält man ein Maß $\mu := \bigotimes_{i \in I} \mu_i$ auf der Produkt-σ-Algebra durch schrittweises Ausführen von Produkten mit 2 Faktoren. Insbesondere gilt auf Rechteckmengen $A_1 \times \cdots \times A_n$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \Pi_{i=1}^n \mu_i(A_i).$$

Da die Rechteckmengen ein durchschnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$ sind, folgt wegen der Eindeutigkeit von μ:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) \quad \text{(Assoziativität des Maßprodukts)}$$

Satz 3.3
Auf $(\Omega, \mathcal{A})$ *existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $P := \otimes_{i \in I} P_i$ *mit*

$$P^{\Pi_J} = \bigotimes_{i \in J} P_i \quad \forall \, J \subset I, J \, endlich.$$

Beweis Siehe z.B. Bauer, Henze, Stochastik II S.8.13. ∎

$$\begin{array}{ccc} \mu & & \mu^T \\ (\Omega,\mathcal{A}) & \xrightarrow{T} & (\Omega',\mathcal{A}') \\ P & & P^{\Pi_J} \\ (\Omega,\mathcal{A}) & \xrightarrow{\Pi_J} & (\times_{i\in J}\Omega_i, \otimes_{i\in J}\mathcal{A}_i) \end{array}$$

z.B. $P((\times_{i\in J}A_i) \ \times \ (\times_{j\notin J}\Omega_j)) = \prod_{i\in J} P_i(A_i),\ A = \times_{i\in J}A_i$

Definition *Sei $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega_i',\mathcal{A}_i')$ ein messbarer Raum $\forall i \in I$. $X_i : \Omega \to \Omega_i'$ seien Zufallsgrößen. Die Familie $(X_i)_{i\in I}$ heißt **stochastisch unabhängig** genau dann, wenn $\forall J \subset I, J$ endlich und $\forall A_j' \in \mathcal{A}_j', j \in J$*

$$\underbrace{P(\cap_{j\in J}\{X_j \in A_j'\})}_{P^X(\times_{j\in J}A_j' \times \times_{i\notin J}\Omega_i)} = \prod_{j\in J} \underbrace{P(X_j \in A_j')}_{P^{X_j}(A_j')}$$

Bemerkung Bei der Überprüfung der Bedingung kann man sich auf $A_j \in \mathcal{E}_j$ beschränken, wobei $\mathcal{E}_j$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ ist.

In der Situation der vorigen Definition gilt für $\Omega' := \times_{i\in I}\Omega_i, \mathcal{A}' := \otimes_{i\in I}\mathcal{A}_i$:

$$X : \Omega \to \Omega',\ (X(\omega))(i) := X_i(\omega),\ \forall\, i \in I, \omega \in \Omega$$

ist $(\mathcal{A},\mathcal{A}')$-messbar (vgl. Ü 2.1), d.h. X transportiert P zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß P^X auf $(\Omega',\mathcal{A}')$. P^X nennt man auch **gemeinsame Verteilung** der Zufallsgrößen $X_i, i \in I$.

Satz 3.4
Die Familie $X = (X_i)_{i\in I}$ ist genau dann unabhängig, wenn

$$P^X = \otimes_{i\in I}P^{X_i}$$

Beweis Folgt aus der Definition und S.3.3. ■

Bemerkung

(i) Unabhängigkeit der $(X_i)_{i\in I}$ ist äquivalent dazu, dass jede endliche Teilfamilie $(X_i)_{i\in J}, J \subset I$, ($J$ endlich), unabhängig ist.

(ii) Sei $\Omega_i' = \mathbb{R}, X = (X_1,\ldots,X_d)$ ein Zufallsvektor und $x = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d$. $F_X(x_1,\ldots,x_d) = P^X((-\infty,x_1] \times \cdots \times (-\infty,x_d]) = P(X_1 \le x_1,\ldots,X_d \le x_d)$ ist die gemeinsame Verteilungsfunktion. Da $\mathcal{E} = \{(-\infty,x] : x \in \mathbb{R}^d\}$ durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}^d$ ist, sind
$X_1,\ldots,X_d$ unabhängig $\Longleftrightarrow F_X(x_1,\ldots,x_d) = F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_d}(x_d)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^d$.
Falls Dichten existieren:
$X_1,\ldots,X_d$ unabhängig $\Longleftrightarrow f_X(x_1,\ldots,x_d) = f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_d}(x_d)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^d$

(iii) Als Wahrscheinlichkeitsraum für das Experiment "$\infty-$oft Münze werfen" kann man z.B. $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A} = \otimes_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{P}(\{0,1\}), P = \otimes_{i\in\mathbb{N}}(\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1))$ wählen. S.3.3 impliziert, dass es zu jedem vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsmaß eine Folge von unabhängigen und indentisch verteilten Zufallsvektoren gibt. Man kann beim Münzexperiment auch $([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, \lambda_{[0,1)}), X_n(\omega) = \lfloor 2^n \cdot \omega \rfloor \bmod 2$ wählen. (vgl. Bsp 13.2 St I)

3.2 Reellwertige Abbildungen, Rechnen mit Verteilungen

Wir betrachten den Spezialfall $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ für $i = 1, \ldots, d$. Hier folgt: $\Omega = \mathbb{R}^d, \mathcal{A} = \otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i = \sigma(\{(a_1, b_1]\times\cdots\times(a_d, b_d] : a_i \leq b_i,\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, d\}) = \mathfrak{B}^d$.
$P = \lambda^d, \lambda^d((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \hat{=}$ Volumen. Was passiert, wenn $(a, b]$ mit einer Abbildung Ψ transformiert wird?

Satz 3.5 (Transformationssatz für das $d-$dimensionale Lebesgue-Maß)
Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\Psi : U \to V$ eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung. Gilt dann $\det(\Psi')(x) \neq 0\ \forall\, x \in U$, so hat das Bildmaß der Einschränkung von λ^d auf U unter Ψ bzgl. der Einschränkung von λ^d auf V die Dichte

$$\frac{d(\lambda_U^d)^\Psi}{d\lambda_V^d}(y) = \frac{1}{|\det \Psi'(\Psi^{-1}(y))|} \quad \forall\, y \in V.$$

Beweis Henze, Stochastik II. ∎

Bemerkung

(a) Unter den Voraussetzungen von S.3.5 ist auch Ψ^{-1} stetig differenzierbar und die Kettenregel liefert:

$$\det(\Psi'(\Psi^{-1})(y)) \cdot \det((\Psi^{-1})')(y) = 1.$$

Es gilt also

$$\frac{d(\lambda_U^d)^\Psi}{d\lambda_V^d}(y) = |\det(\Psi^{-1})'(y)|\ \forall\, y \in V.$$

(b) Mit S.2.4 gilt:

$$\int_U f(\Psi(x))\mathrm{d}x \overset{S.2.4}{=} \int_V f(y)\mathrm{d}(\lambda_U^d)^\Psi = \int_V f(y)\ |\det(\Psi^{-1})'(y)|\ \mathrm{d}y$$

bzw.

$$\int_U g(x)\mathrm{d}x = \int_V g(\Psi^{-1}(y))\ |\det(\Psi^{-1})'(y)|\ \mathrm{d}y$$

Beispiel 3.2 Transformation auf Polarkoordinaten
Hier: d=2. $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ oder } x_2 \neq 0\}$, $V = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$, $\Psi : U \to V, (x_1, x_2) \xrightarrow{\Psi} (r, \Phi)$ bijektiv. $(\Psi^{-1})_1(r, \Phi) = r \cos \Phi, (\Psi^{-1})_2(r, \Phi) = r \sin \Phi$.

$$\Longrightarrow \; (\Psi^{-1})'(r, \Phi) = \begin{pmatrix} \cos \Phi & -r \sin \Phi \\ \sin \Phi & r \cos \Phi \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \; \frac{\mathrm{d}(\lambda_U^d)^\Psi}{\mathrm{d}(\lambda_V^d)} = r \cos^2 \Phi + r \sin^2 \Phi = r \; \forall \, (r, \Phi) \in V.$$

Wir bekommen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} r \cdot g(r \cos \Phi, r \sin \Phi) \mathrm{d}r \mathrm{d}\Phi$$

Im Folgenden sei $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein Zufallsvektor.

Satz 3.6 (Transformationssatz für Wahrscheinlichkeitsdichten)
Es seien U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ und $\Psi : U \to V$ eine bijektive, stetige und differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft

$$\det \Psi'(x) \neq 0 \quad \forall x \in U.$$

Ist dann X ein Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P(X \in U) = 1$ und Dichte f_X, so ist auch $Y := \Psi(X)$ absolutstetig und eine Dichte f_Y von Y auf V ist gegeben durch

$$f_Y(y) = |\det(\Psi^{-1})'(y)| f_X(\Psi^{-1}(y)) \quad \forall y \in V$$

Beweis Seien $A \subset V, A \in \mathfrak{B}^d$. Mit Satz 3.5 folgt:

$$\begin{aligned} P(Y \in A) &= P(X \in \Psi^{-1}(A)) \\ &= \int_U \mathbf{1}_{\Psi^{-1}(A)}(x) f_X(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_V \mathbf{1}_{\Psi^{-1}(A)}(\Psi^{-1}(y)) f_X(\Psi^{-1}(y)) \cdot |\det(\Psi^{-1})'(y)| \mathrm{d}y \\ &= \int_A |\det(\Psi^{-1})'(y)| f_X(\Psi^{-1}(y)) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

■

Beispiel 3.3 (Box-Muller-Algorithmus zur Erzeugung von $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen)
Seien $U_1, U_2 \sim U(0,1)$ und unabhängig. Definiere:

$$X_1 := \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2) = \Psi_1(U_1, U_2)$$

$$X_2 := \sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2) = \Psi_2(U_1, U_2)$$

Dann sind $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ und unabhängig. Beweis mit Satz 3.6. Sei $U = (0,1)^2$

$$
\begin{aligned}
& V && = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_1 < 0 \text{ oder } X_2 \neq 0\} \\
& \Psi'(u) && = \begin{pmatrix} -(-2\log(u_1))^{-\frac{1}{2}} \frac{\cos(2\pi u_2)}{u_1} & -(-2\log u_1)^{\frac{1}{2}} 2\pi \sin(2\pi u_2) \\ -(-2\log(u_1))^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi u_2)}{u_1} & (-2\log u_1)^{\frac{1}{2}} 2\pi \cos(2\pi u_2) \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \quad & \det \Psi' && = -\frac{2\pi}{u_1} \text{ und} \\
& u_1 && = e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \\
\Longrightarrow \quad & f_X(x) && = \frac{1}{|\det \Psi'(\Psi^{-1}(x))|} \cdot 1 \\
& && = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \\
& && = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_2^2}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Behauptung

Satz 3.7
Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Dichten f_X und f_Y, so ist auch die Zufallsvariable $Z := X + Y$ absolutstetig und eine zugehörige Dichte ist gegeben durch:

$$f_Z(z) = \int f_X(x) \cdot f_Y(z - x) dx \quad \text{„}\textit{Faltung}\text{“}$$

Beweis Verwende Satz 3.6 mit $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \Psi(x,y) = (x, x+y)$ $(\Psi^{-1}(x,z) = (x, z-x))$

$$\Longrightarrow f_{X,Z}(x,z) = f_{X,Y}(x, z-x) = f_X(x) \cdot f_Y(z-x)$$

Die „Randdichte“ f_Z bekommt man durch Integration über x. ∎

Beispiel 3.4 a) Sind die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_d$ unabhängig und $X_i \sim \exp(\lambda), i = 1, \ldots, d, \lambda > 0$, so hat $X_1 + \ldots + X_d$ die Dichte

$$f_{X_1 + \ldots + X_d}(z) = \frac{\lambda^d}{(d-1)!} z^{d-1} e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(z)$$

($\to$ Gamma-Verteilung bzw. Erlang-Verteilung)

b) Sind $X_1, \ldots, X_d$ unabhängig und $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, d$ so gilt falls $\sum a_i^2 \neq 0$

$$\sum_{i=1}^d a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^d a_i \mu_i, \sum_{i=1}^d a_i^2 \sigma_i^2)$$

Beispiel 3.5 (Gemeinsame Verteilung der Ordnungsstatistiken)
Es seien $X_1, \ldots, X_d$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte f. Weiter sei $(X_{1:d}, \ldots, X_{d:d})$ eine Permutation von $X_1, \ldots, X_d$, so dass

$$X_{1:d} < \ldots < X_{d:d}$$

$X_{r:d}$ heißt **r-te Ordnungsstatistik** von X.
Sei S_d die Menge der Permutationen der Zahlen $1, \ldots, d$. Dann gilt für $\pi \in S_d$:

$$(X_{1:d}, \ldots, X_{d:d}) = (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(d)}), \text{ falls } X_{\pi(1)} < \ldots < X_{\pi(d)}$$

Für jede messbare Funktion $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gilt:

$$g(X_{1:d}, \ldots, X_{d:d}) = \sum_{\pi \in S_d} g(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(d)}) \cdot \mathbf{1}_{[X_{\pi(1)} < \ldots < X_{\pi(d)}]}$$

Es gilt:

$$f_{X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(d)}}(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} f(x_i) = f_X(x)$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} Eg(X_{1:d}, \ldots, X_{d:d}) &= \sum_{\pi \in S_d} \int_{x_1 < \ldots < x_d} g(x) \prod_{i=1}^{d} f(x_i) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_d \\ &= d! \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \prod_{i=1}^{d} f(x_i) \mathbf{1}_{[x_1 < \ldots < x_d]}(x) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_d \end{aligned}$$

Sei $g(x) = \mathbf{1}_B(x)$ mit $B \in \mathfrak{B}^d$, dann folgt:

$$f_{X_{1:d}, \ldots, X_{d:d}}(x_1, \ldots, x_d) = d! \prod_{i=1}^{d} f(x_i) \mathbf{1}_{[x_1 < \ldots < x_d]}(x)$$

Konkrete Anwendung:
Gegeben 12 Trinkgläser. Lebensdauer unabhängig $\exp(\lambda)$-verteilt. Nach der vorigen Überlegung gilt

$$\begin{aligned}
& f_{(X_{1:d}, \ldots, X_{d:d})}(x) &&= \begin{cases} d! \lambda^d e^{-\lambda(x_1 + \ldots + x_d)} & \text{, falls } x_1 < \ldots < x_d \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \\
\Longrightarrow \quad & f_{(X_{1:d}, X_{2:d})}(x) &&= \begin{cases} d(d-1)\lambda^2 e^{-(d-2)\lambda x_2} e^{-\lambda(x_1 + x_2)} & \text{, falls } x_1 < x_2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \\
\overset{\text{Satz 3.6}}{\Longrightarrow} \quad & f_{(X_{2:d} - X_{1:d}, X_{1:d})}(y_1, y_2) &&= \begin{cases} d(d-1)\lambda^2 e^{-d\lambda y_2} e^{-(d-1)\lambda y_1} & \text{, falls } y_1, y_2 > 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \\
\Longrightarrow \quad & f_{X_{2:d} - X_{1:d}}(y_1) &&= \begin{cases} (d-1)\lambda e^{-(d-1)\lambda y_1} & \text{, falls } y_1 > 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \\
& f_{X_{1:d}}(y_2) &&= \begin{cases} d\lambda e^{-d\lambda y_2} & \text{, falls } y_2 > 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

also $X_{1:d} \sim \exp(\lambda d), X_{2:d} - X_{1:d} \sim \exp(\lambda(d-1))$ und unabhängig.

$$\Longrightarrow X_{k:d} - X_{(k-1):d} \sim \exp((d - k + 1)\lambda)$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
& E[X_{k:d} - X_{(k-1):d}] && = \frac{1}{(d-k+1)\lambda} \\
\Longrightarrow \quad & \tfrac{E[X_{d:d} - X_{(d-1):d}]}{EX_{d:d}} && = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\sum_{k=1}^{d} \frac{1}{(d-k+1)\lambda}} \\
& && = \left(\sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k} \right)^{-1} \\
& && = (\log d)^{-1} + O(1)
\end{aligned}
$$

Für $d = 12 : 0.32$