I. Einführung in die Theorie der Finanzmärkte

1.1. Präferenzen

Modelle, die den Finanzmarkt beschreiben, müssen stochastisch sein, um *Risiko* adäquat modellieren zu können.

Ein *Markt* ist ein Ort, an dem Güter und Dienstleistungen von *Agenten* ausgetauscht werden, deren Handlungen durch ihre *Präferenzen* bestimmt werden.

Sei $\mathscr{X}$ eine nichtleere Menge. $x \in \mathscr{X}$ bezeichnet die Wahlmöglichkeit eines Agenten.

Definition 1.1.1
Eine binäre Relation $\succeq \subseteq \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ heißt *Präferenzrelation*, falls sie

- transitiv ist, also $\forall x, y, z \in \mathscr{X}\colon x \succeq y,\ y \succeq z \implies x \succeq z$
- vollständig ist, also $\forall x, y \in \mathscr{X}\colon x \succeq y$ oder $y \succeq x$

Falls $x \succeq y$ und $y \succeq x$, schreiben wir $x \sim y$ (*Indifferenzrelation*). Für $x \succeq y$ und $y \not\succeq x$ schreiben wir $x \succ y$.

Beispiel 1.1.2
$\mathscr{X} = \mathbb{R}$, $x \succeq y \iff x \geq y$

Definition 1.1.3
Eine *numerische Repräsentation* einer Präferenzordnung $\succeq$ ist eine Funktion $U : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$, so dass $x \succeq y \iff U(x) \geq U(y)$.

Bemerkung 1.1.4
Eine numerische Repräsentation ist nicht eindeutig: Sei f eine streng monoton wachsende Funktion. Dann ist $\tilde{U}(x) := f(U(x))$ auch eine numerische Repräsentation.

Beispiel 1.1.5
Sei $\succeq$ die lexikographische Ordnung auf $\mathscr{X} := [0,1] \times [0,1]$, also

$$(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2) \iff x_1 > x_2 \text{ oder } x_1 = x_2 \text{ und } y_1 > y_2.$$

Für $\succeq$ gibt es keine numerische Repräsentation.

Definition 1.1.6
Sei $\succeq$ Präferenzrelation auf $\mathscr{X}$. Eine Teilmenge $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{X}$ heißt *dicht* in $\mathscr{X}$ (bezüglich $\succeq$), falls für alle $x, y \in \mathscr{X}$ mit $x \succ y$ ein $z \in \mathscr{Z}$ gibt, so dass $x \succeq z \succeq y$.

Beispiel 1.1.7
$\mathscr{X} = \mathbb{R}$, $\mathscr{Z} = \mathbb{Q}$, $\succeq = \geq$.

Satz 1.1.8
Für die Existenz einer numerischen Repräsentation einer Präferenzrelation $\succeq$ ist es notwendig und hinreichend, dass $\mathscr{X}$ eine abzählbare Teilmenge $\mathscr{Z}$ enthält, die dicht in $\mathscr{X}$ liegt.

Insbesondere hat für abzählbare $\mathscr{X}$ jede Präferenzrelation eine numerische Repräsentation.

Beweis
siehe Föllmer & Schied, Beweis von Theorem 2.6 ■

1.1.1. Von Neumann-Morgenstern-Repräsentation

Im Folgenden betrachten wir das Konzept des erwarteten Nutzens.

Es seien alle Wahlmöglichkeiten eines Agenten durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einer vorgegebenen Menge von Szenarien gegeben. Sei $(S,\mathfrak{S})$ ein messbarer Raum und $M_1(S,\mathfrak{S})$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(S,\mathfrak{S})$. Wir betrachten eine Teilmenge $M \subseteq M_1(S,\mathfrak{S})$. Wir nehmen an, dass M konvex ist, das heißt für alle $\mu,\nu \in M$ und alle $\alpha \in [0,1]$ ist $\alpha\mu + (1-\alpha)\nu \in M$. Die Elemente von M werden auch *Lotterien* genannt.

Definition 1.1.9
Eine numerische Repräsentation einer Präferenzordnung wird *von-Neumann-Morgenstern-Repräsentation* genannt, falls sie sich darstellen lässt als:

$$U(\mu) = \int u(x)\mu(dx) \ \forall \mu \in M$$

wobei u eine reelle Funktion auf S ist.

Wir werden später die Funktion u, wenn sie gewisse Voraussetzungen erfüllt, Nutzenfunktion nennen.

Wir betrachten beispielsweise eine Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathscr{F},P)$, die die Auszahlung einer Anlagemöglichkeit angibt.

Ist etwa $S \subseteq \mathbb{R}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}$[1], dann bezeichnet das Integral in der Definition 1.1.9 den Erwartungswert von $u(X)$, wobei u messbar (später stetig) sei und X die Verteilung

$$\mu(B) := P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \ \forall B \in \mathfrak{B}$$

besitzt.

Wann existiert eine von-Neumann-Morgenstern-Repräsentation?

Sei M die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße μ auf S, die sich als Linearkombination $\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{x_i}$ von $x_1,\ldots,x_N \in S$ mit Koeffizienten $\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in (0,1]$ darstellen lässt. Das Dirac-Maß ist dabei definiert als

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

[1] Borelsche σ-Algebra

Dann existiert eine von-Neumann-Morgenstern-Repräsentation, falls $\succeq$ die folgenden Eigenschaften hat:

- *Unabhängigkeitseigenschaft*: Für alle $\mu, \nu \in M$ mit $\mu \succ \nu$, alle $\alpha \in (0,1]$ und beliebige $\lambda \in M$ gilt:
$$\alpha\mu + (1-\alpha)\lambda \succ \alpha\nu + (1-\alpha)\lambda$$
das heißt, dass die Präferenz $\mu \succ \nu$ in jeder Konvexkombination erhalten bleibt, unabhängig von der zusätzlichen Lotterie λ.

- *Archimedeseigenschaft*, Stetigkeitseigenschaft: Zu jedem Tripel $\mu \succ \lambda \succ \nu$ existieren Konstanten $\alpha, \beta \in (0,1)$, so dass gilt:
$$\alpha\mu + (1-\alpha)\nu \succ \lambda \succ \beta\mu + (1-\beta)\nu$$

Falls S eine endliche Menge ist, haben alle Maße die obige Darstellung als Konvexkombination von Dirac-Maßen.

Im allgemeinen Fall benötigt man für die Existenz einer von-Neumann-Morgenstern-Repräsentation neben der Unabhängigkeitseigenschaft und der Archimedeseigenschaft noch eine weitere Eigenschaft von $\succeq$ („sure thing principle“).

Für $\mu, \nu \in M$ und A mit $\mu(A) = 1$ gilt:

$$(\forall x \in A : \delta_x \succ \nu) \implies \mu \succ \nu$$
$$(\forall x \in A : \nu \succ \delta_x) \implies \nu \succ \mu$$

Beweise siehe Föllmer und Schied, Kapitel 2.2.

1.1.2. Risikoaversion

Wir betrachten Anlagemöglichkeiten (z.B. Aktien), deren Verteilung der Auszahlung zu einem festen Zeitpunkt bekannt ist. Die Verteilung wird als Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einem Intervall $S \subseteq \mathbb{R}$ angenommen. $\mathcal{M}$ sei die Menge aller Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße auf S. Wir nehmen an, dass $\mathcal{M}$ konvex ist und alle Punktmaße δ_x für $x \in S$ enthält. Wir nehmen an, dass für alle $\mu \in \mathcal{M}$ die Erwartung
$$m(\mu) := \int x\mu(dx) \in \mathbb{R}$$
wohldefiniert ist.

Definition 1.1.10

- Eine Präferenzrelation $\succeq$ auf $\mathcal{M}$ wird *monoton* genannt, wenn $x > y$ impliziert, dass $\delta_x \succ \delta_y$.

- Eine Präferenzrelation $\succeq$ wird *risikoavers* genannt, falls für alle $\mu \in \mathcal{M}$ mit $\mu \neq \delta_{m(\mu)}$ gilt, dass $\delta_{m(\mu)} \succ \mu$.

Satz 1.1.11
Eine Präferenzrelation $\succeq$ ist

(1) monoton, genau dann wenn u streng monoton wachsend ist.

(2) risikoavers, genau dann wenn u streng konkav ist.

Beweis

(1) Sei $x > y$. Monotonie ist äquivalent zu $u(x) = \int u(s)\delta_x(ds) = U(\delta_x) > U(\delta_y) = u(y)$.

(2) Sei $\succeq$ risikoavers. Dann gilt für verschiedene $x, y \in S$ und $\alpha \in (0,1)$

$$\delta_{\alpha x+(1-\alpha)y} \succ \alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y \implies u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$$

also ist u streng konkav.

Sei u streng konkav. Risikoaversion folgt aus der Jensen-Ungleichung, da

$$U(\delta_{m(\mu)}) = u(m(\mu)) = u\Big(\int x\mu(dx)\Big) \geq \int u(x)\mu(dx) = U(\mu)$$

Es gilt Gleichheit für $\mu = \delta_{m(\mu)}$. ■

Definition 1.1.12
Eine Funktion $u : S \to \mathbb{R}$ heißt *Nutzenfunktion*, falls sie streng monoton wachsend, streng konkav und stetig[2] auf S ist.

Im Folgenden betrachten wir nur noch Präferenzrelationen $\succeq$ auf $\mathcal{M}$, die eine von-Neumann-Morgenstern-Repräsentation $U(\mu) = \int u d\mu$ mit einer Nutzenfunktion $u : S \to \mathbb{R}$ haben.

Die Anwendung des Zwischenwertsatzes auf die streng monoton wachsende, stetige Funktion u liefert für jedes $\mu \in \mathcal{M}$ die Existenz einer eindeutigen reellen Zahl $c(\mu) \in S$ mit

$$u(c(\mu)) = U(\mu) = \int u d\mu$$

Dann gilt $\delta_{c(\mu)} \sim \mu$, das heißt der Agent ist indifferent zwischen der sicheren Auszahlung $c(\mu)$ und der Lotterie μ.

Definition 1.1.13
Das *Sicherheitsäquivalent* einer Lotterie $\mu \in \mathcal{M}$ ist die reelle Zahl $c(\mu) \in S$, die

$$u(c(\mu)) = U(\mu) = \int u d\mu$$

löst.

Die *Risikoprämie* von μ ist definiert als $\rho(\mu) := m(\mu) - c(\mu)$.

Risikoaversion impliziert über die Jensen-Ungleichung, dass $c(\mu) \leq m(\mu)$ gilt, und dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $\mu = \delta_{m(\mu)}$.

Beispiel 1.1.14
Siehe St. Petersburg-Paradox, Übungsblatt 1

Beispiel 1.1.15 (Beispiele für Nutzenfunktionen)

- $u(x) = -e^{-\gamma x}$, wobei $\gamma > 0$ der Koeffizient der absoluten Risikoaversion ist. Diese Funktion wird CARA ("constant absolute risk aversion") genannt. (Siehe Abbildung I.1)

[2] Wobei nur die Stetigkeit auf dem Rand von S extra zu fordern wäre.

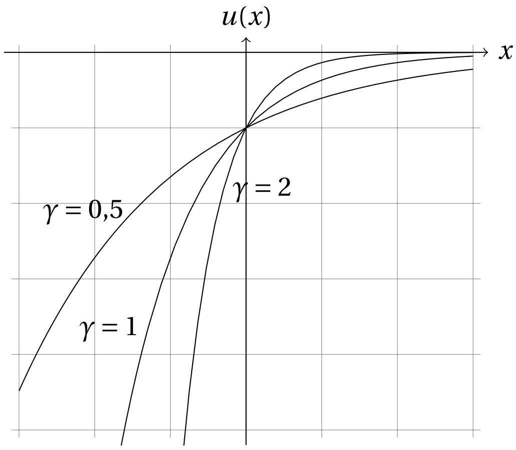


Abbildung I.1.: Die CARA-Funktion

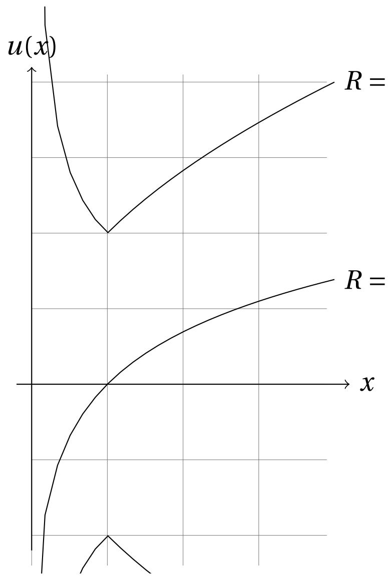


Abbildung I.2.: Die CRRA-Funktion

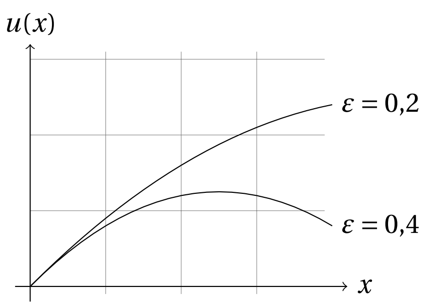


Abbildung I.3.: Die „Nutzenfunktion“ $u(x) = x - \frac{\varepsilon}{2}x^2$

- $u(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-R}}{1-R}, & x > 0 \\ -\infty, & x \leq 0 \end{cases}$, wobei $R > 0$, $R \neq 1$ der Koeffizient der relativen Risikoaversion ist. Diese Funktion wird CRRA ("constant relative risk aversion") genannt. (Siehe Abbildung I.2)

- $u(x) = \begin{cases} \log x, & x > 0 \\ -\infty, & x \leq 0 \end{cases}$ ist CRRA-Nutzenfunktionen für $R = 1$.

- Die Funktion $u(x) = x - \frac{\varepsilon}{2}x^2$, $\varepsilon > 0$, ist konkav, aber nicht monoton wachsend. Sie wird trotzdem manchmal als „Nutzenfunktion" verwendet, da sie einfach zu handhaben ist. (Siehe Abbildung I.3)

Bemerkung 1.1.16
Für zweimal stetig differenzierbare $u \in C^2$ gilt: u ist konkav genau dann, wenn $u'' \leq 0$ ist.

1.1.3. Arrow-Pratt-Maß

Im Folgenden definieren wir zwei Maße für Risikoaversion eines Agenten: Das Arrow-Pratt-Maß (APM) der absoluten Risikoaversion und das APM der relativen Risikoaversion.

Wir betrachten einen Agenten mit Vermögen x, dessen Präferenzen durch eine Nutzenfunktion $u \in C^2$ ausgedrückt werden. Wenn man ihm anbietet, einen Zahlungsanspruch (contingent claim) Y (Zufallsvariable) zu bekommen, wird er ihn genau dann annehmen, wenn

$$E[u(x+Y)] \geq E[u(x)] = u(x).$$

Unter der Annahme, dass Y „klein" ist, machen wir eine Taylorentwicklung um x:

$$0 \leq E[u(x+Y) - u(x)] \approx E[u'(x)Y + \frac{1}{2}u''(x)Y^2]$$

das heißt, der Agent wird Y haben wollen, falls

$$\frac{2EY}{E[Y^2]} \geq \frac{-u''(x)}{u'(x)} =: \mathrm{ARA}(x)$$

wobei $\mathrm{ARA}(\cdot)$ den *absoluten Risikoaversionskoeffizienten* bezeichnet.

Bemerkung 1.1.17

(1) Falls $\mathrm{ARA}(x)$ konstant ist, dann ist u die CARA-Nutzenfunktion.

(2) Es gilt: $\mathrm{ARA}(x) \geq 0$.

(3) Der Agent will Y lieber haben, falls EY groß oder $E[Y^2]$ klein ist.

Alternativ können wir den Fall betrachten, dass ein Agent in eine risikobehaftete Anlagemöglichkeit investieren kann, die zum Zeitpunkt 1 den Wert $x(1+Y)$ hat. Der Agent bevorzugt die Investition, falls $E[u(x(1+Y))] \geq u(x)$. Nach Taylor ist dann

$$0 \leq E[u(x(1+Y)) - u(x)] \approx E[u'(x)xY + \frac{1}{2}u''(x)x^2Y^2]$$

Der Agent zieht diese Investition vor, genau dann wenn

$$\frac{2EY}{E[Y^2]} \geq \frac{-xu''(x)}{u'(x)} =: \mathrm{RRA}(x)$$

ist, wobei $\mathrm{RRA}(\cdot)$ den *relativen* Risikoaversionskoeffizienten bezeichnet.

Bemerkung 1.1.18
Falls RRA(x) konstant ist, dann ist u die CRRA-Nutzenfunktion.

Definition 1.1.19
Eine Nutzenfunktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt HARA-Nutzenfunktion (“hyperbolic absolute risk aversion”), falls $u \in C^2(\mathbb{R})$ und für Konstanten α, β:

$$\mathrm{ARA}(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{\alpha x + \beta} > 0$$

Die CARA-, CRRA-Nutzenfunktionen sind HARA-Nutzenfunktionen.

1.1.4. Reservationspreise

Sei $\mathscr{A}$ die Menge, die das erreichbare Vermögen eines Agenten beschreibt. Der Agent wird versuchen, $\sup_{X \in \mathscr{A}} E[u(X)]$ zu bekommen. Wir nehmen an, dass das Supremum angenommen wird, das heißt es gibt $X^* \in \mathscr{A}$ mit $\sup_{X \in \mathscr{A}} E[u(X)] = E[u(X^*)]$.

Falls $\mathscr{A}$ ein affiner Raum ist, das heißt für alle $X_1, X_2 \in \mathscr{A}$ und $t \in \mathbb{R}$ ist $tX_1 + (1-t)X_2 \in \mathscr{A}$, können wir $\mathscr{A} = X^* + \mathscr{V}$ schreiben, wobei $\mathscr{V}$ ein Vektorraum ist. Dann gilt für $\xi \in \mathscr{V}$ und $t \in \mathbb{R}$, dass $E[u(X^* + t \cdot \xi)] \leq E[u(X^*)]$. Ableiten nach t liefert für alle $\xi \in \mathscr{V}$: $E[u'(X^*)\xi] = 0$ (ersetze für die Gleichheit ξ durch $-\xi$).

Im Folgenden werden wir das Konzept des erwarteten Nutzens verwenden, um zu entscheiden, ob man einen contingent claim Y zu einem Preis π kaufen sollte. (O.B.d.A. nehmen wir an, dass $Y \geq 0$).

Definition 1.1.20
Der *Reservations-Bid-Preis* $\pi(Y)$ eines contingent claim Y ist die größte reelle Zahl π, für die

$$\sup_{X \in \mathscr{A}} E[u(X + Y - \pi)] \geq E[u(X^*)]$$

erfüllt ist.

Bemerkung 1.1.21

(1) Der Reservations-Bid-Preis ist der (maximale) Preis, zu dem der Agent bereit ist, den contingent claim zu kaufen.

(2) Die Abbildung $Y \mapsto \pi(Y)$ ist konkav.

Beweis
Seien $X_1, X_2 \in \mathscr{A}$, so dass

$$E[u(X_1 + Y_1 - \pi(Y_1))] = E[u(X_2 + Y_2 - \pi(Y_2))] = E[u(X^*)].$$

Dann gilt für $p \in [0,1]$, dass

$$\begin{aligned} E[u(X^*)] &= p \cdot E[u(X_1 + Y_1 - \pi(Y_1))] + (1-p) \cdot E[u(X_2 + Y_2 - \pi(Y_2))] \\ &\leq E[u(p \cdot (X_1 + Y_1 - \pi(Y_1)) + (1-p) \cdot (X_2 + Y_2) + (1-p)\pi(Y_2))] \\ &= E[u(\underbrace{pX_1 + (1-p)X_2}_{\in \mathscr{A}} + \underbrace{pY_1 + (1-p)Y_2}_{=:\bar{Y}} - p\pi(Y_1) + (1-p)\pi(Y_2))] \\ &\leq \sup_{X \in \mathscr{A}} E[u(X + \bar{Y} - (p\pi(Y_1) + (1-p)\pi(Y_2)))] \end{aligned}$$

Daher gilt

$$p\pi(Y_1) + (1-p)\pi(Y_2) \leq \pi(\bar{Y}) = \pi(pY_1 + (1-p)Y_2)$$ ■

(3) Reservationspreise sind nicht homogen, das heißt in der Regel gilt: $\pi(\lambda Y) \neq \lambda\pi(Y)$.

(4) Reservationspreise sind abhängig vom Agenten, also von u und $\mathscr{A}$. Veränderungen des Anfangsvermögens ändern in der Regel den Reservationspreis.

(5) Reservationspreise als Bewertungsmethode zu verwenden ist schwierig, da sie selten in geschlossener Form vorliegen.

(6) Wir verwenden nun den Reservations-Bid-Preis, um Marginalpreise (Preise für unendlich kleine Mengen) zu bestimmen:

Sei $\mathscr{A}$ affin. Angenommen, ein Agent möchte t Einheiten von Y kaufen, wobei t klein ist. Dann ist

$$E[u(X^*)] = E[u(X_t^* + tY - \pi(tY))]$$

Duch Entwicklung als Taylorreihe ergibt das

$$\begin{aligned} 0 &= E[u(X_t^* + tY - \pi(tY)) - u(X^*)] \\ &= E[u'(X^*) \cdot (tY - \pi(tY))] + o(t) \end{aligned}$$

da $X_t^* - X^* \in \mathscr{A}$ und $E[u'(X^*)\xi] = 0$ für alle $\xi \in \mathscr{V}$ ist.

Dann gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{\pi(tY)}{t} = \frac{E[u'(X^*)Y]}{E[u'(X^*)]}$$

Dieser Ausdruck ist linear in Y. Man kann diesen Preis als $\tilde{E}(Y)$ interpretieren:

$$\frac{E[u'(X^*)Y]}{E[u'(X^*)]} = \int_\Omega Y \underbrace{\frac{u'(X^*)}{E[u'(X^*)]} dP}_{=:d\tilde{P}} = \int Y d\tilde{P} = \tilde{E}Y.$$

das heißt $\frac{d\tilde{P}}{dP} = \frac{u'(X^*)}{E[u'(X^*)]}$. Dieses Maß $\tilde{P}$ wird auch *risikoneutrales Maß* genannt.

(7) Es gab viele Annahmen in dieser heuristischen Herleitung: Die Suprema werden angenommen, man kann unter dem Erwartungswert differenzieren. $\mathscr{A}$ ist affin...

(8) Trotzdem haben wir hier schon einmal gesehen, dass Preise hier als Erwartungen unter einem speziellen Maß verstanden werden können.

1.2. Optimale Portfolios

Notation und Annahmen:

- Es wird ein Einperiodenmodell mit Anfangszeitpunkt $t = 0$ und Endzeitpunkt $t = T$ betrachtet. Das heißt, wir stellen heute ($t = 0$) ein Portfolio zusammen und ändern dann nichts mehr an der Zusammensetzung bis zu $t = T$.

- Der Markt enthalte d Anlagemöglichkeiten, deren Preise zum Zeitpunkt $t = 0$ durch $S(0) = (S_1(0), \dots, S_d(0))^\top \in \mathbb{R}^d$ gegeben sind. Die Preise zum Zeitpunkt $t = T$ sind durch den Zufallsvektor $S(T) = (S_1(T), \dots, S_d(T))^\top \in \mathbb{R}^d$ gegeben.

- Es wird der zufällige Return (Ertrag)

$$R_i(T) = \frac{S_i(T)}{S_i(0)},\ i = 1,\dots,d$$

betrachtet und angenommen, dass dessen Erwartungswert

$$E[R_i(T)] =: m_i,\ i = 1,\dots,d$$

und Kovarianzmatrix

$$\mathrm{Cov}(R_i(T), R_j(T)) =: \sigma_{ij},\ i,j = 1,\dots,d$$

bekannt (oder geschätzt) sind.

- Die symmetrische Matrix $\Sigma = (\sigma_{ij})$ sei positiv definit (das heißt $\forall \pi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \pi^\top \Sigma \pi > 0$). Insbesondere ist Σ invertierbar und es wird garantiert, dass keine Anlagemöglichkeit überflüssig ist, in dem Sinne, dass sie als Linearkombination anderer Anlagemöglichkeiten dargestellt werden könnte.

- Wir bezeichnen mit $\varphi \in \mathbb{R}^d$ eine Handelsstrategie, wobei φ_i die Stückzahl der i-ten Anlagemöglichkeit angibt.

- Manchmal wird $\varphi_i \geq 0$ für alle $i = 1,\dots,d$ vorausgesetzt. (“no short selling”, „keine Leerverkäufe“)

Definition 1.2.1
Gegeben sei ein Investor mit Anfangsvermögen $x > 0$, der $\varphi_i > 0$ Stück einer Anlagemöglichkeit $i = 1,\dots,d$ besitzt, wobei

$$\sum_{i=1}^{d} \varphi_i S_i(0) = x \qquad \text{(Budgetgleichung)}$$

gilt. Dann bezeichnen wir mit $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_d)^\top \in \mathbb{R}^d$,

$$\pi_i := \frac{\varphi_i S_i(0)}{x}, \quad i = 1,\dots,d$$

den *Portfoliovektor* und

$$R^\pi := \sum_{i=1}^{d} \pi_i R_i(T)$$

den *Portfolio-Return.*

Bemerkung 1.2.2

(1) Die Elemente des Portfoliovektors bezeichnen die Anteile des Vermögens, die in die jeweilige Anlagemöglichkeit investiert wurden:

$$\sum_{i=1}^{d} \pi_i = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{d} \varphi_i S_i(0) = \frac{x}{x} = 1$$

(2) Sei $V^\pi(T)$ das Endvermögen zum Anfangsvermögen x und dem Portfoliovektors π, das heißt

$$V^\pi(T) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i S_i(T).$$

Damit ist

$$R^\pi = \sum_{i=1}^{d} \pi_i R_i(T) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\varphi_i S_i(0)}{x} \frac{S_i(T)}{S_i(0)} = \frac{V^\pi(T)}{x}$$

(3) Erwartungswert und Varianz des Portfolio-Returns sind

$$E[R^\pi] = \sum_{i=1}^{d} \pi_i m_i = \pi^\top m$$

$$\mathrm{Var}(R^\pi) = \sum_{i,j=1}^{d} \pi_i \sigma_{ij} \pi_j = \pi^\top \Sigma \pi$$

1.2.1. Portfolio-Optimierung nach Markowitz

Im Folgenden betrachten wir die Auswahl eines optimalen Portfolio. Harry M. Markowitz (Nobelpreisträger Wirtschaftswissenschaften 1990) schlug das Erwartungswert-Varianz-Kriterium also Optimierungskriterium vor, das heißt es wird nach einer Balance zwischen Risiko (Varianz) und Return (Erwartungswert) gesucht.

Definition 1.2.3
Ein Portfolio heißt *Grenzportfolio*, wenn es unter allen Portfolios mit gleichem Return die kleinste Varianz hat. Die Menge aller Grenzportfolios heißt *Portfoliogrenze*.

Satz 1.2.4
Ein Portfolio p heißt Grenzportfolio, genau dann, wenn der Portfoliovektor π_p Lösung des folgenden Optimierungsproblems ist:

$$\min_\pi \frac{1}{2} \pi^\top \Sigma \pi = \min_\pi \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \pi_i \sigma_{ij} \pi_j = \min_\pi \frac{1}{2} \mathrm{Var}(R^\pi)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\pi^\top m = \sum_{i=1}^{d} \pi_i m_i = E[R^\pi] = m_p$$

$$\pi^\top \mathbf{1} = \sum_{i=1}^{d} \pi_i = 1$$

wobei $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^d$, $m = (m_1, \ldots, m_d)^\top$ der erwartete Return der Anlagemöglichkeiten und m_p der vorgegebene Portfolio-Return ist.

Berechnung mit der Lagrange-Funktion

$$L(\pi) = \frac{1}{2} \pi^\top \Sigma \pi - \lambda_1 (\pi^\top m - m_p) - \lambda_2 (\pi^\top \mathbf{1} - 1)$$

ergibt den Gradienten (als Vektor in $\mathbb{R}^d$)

$$L'(\pi) = \Sigma \pi - \lambda_1 m - \lambda_2 1 \overset{!}{=} 0.$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$\pi = \lambda_1 \Sigma^{-1} m + \lambda_2 \Sigma^{-1} \mathbf{1}.$$

Die Lagrange-Multiplikatoren λ_1, λ_2 werden über die Nebenbedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned} m^\top \pi &= \lambda_1 m^\top \Sigma^{-1} m + \lambda_2 m^\top \sigma^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^\top m &= \lambda_1 \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} m + \lambda_2 \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} \end{aligned}$$

Lösen dieses lineraren Gleichungssystems liefert

$$\lambda_1 = \frac{Cm_p - A}{D} \qquad \lambda_2 = \frac{B - Am_p}{D}$$

wobei

$$\begin{aligned} A &:= m^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} m \\ B &:= m^\top \Sigma^{-1} m \\ C &:= \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} \\ D &:= BC - A^2 > 0 \end{aligned}$$

Dann ist das optimale Portfolio gegeben durch

$$\pi_p = \frac{Cm_p - A}{D} \Sigma^{-1} m + \frac{B - Am_p}{D} \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

was man schreiben kann als

$$\pi_p = g + h \cdot m_p$$

wobei

$$\begin{aligned} g &:= \frac{1}{D}(-A \cdot \Sigma^{-1} m + B \cdot \Sigma^{-1} \mathbf{1}) \\ h &:= \frac{1}{D}(C \cdot \Sigma^{-1} m - A \cdot \Sigma^{-1} \mathbf{1}) \end{aligned}$$

Wir sehen, dass für $m_p = 0$ das optimale Portfolio durch g gegeben ist, für $m_p = 1$ ist es durch $g + h$ gegeben. Für ein beliebiges m_q gilt

$$\pi_q = g + hm_q = (1 - m_q)g + m_q(g + h)$$

Das heißt, dass das optimale Portfolio eine Linearkombination aus zwei Portfolios g und $g+h$ ist. Jedes Grenzportfolio kann also als Linearkombination dieser zwei Grenzportfolios ausgedrückt werden ("two-fund separation").

Beide Portfolios haben positive Varianz:

$$g^\top \Sigma g = \frac{1}{D} B \qquad (g + h)^\top \Sigma (g + h) = \frac{1}{D}(B - 2AD + C)$$

Setzt man π in die Varianzgleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\text{Markowitz}}(m_p) := \pi_p^\top \Sigma \pi_p \\ &= \frac{1}{D}(2m_p A + m_p^2 C) \\ &= \frac{C}{D}\left(m_p - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C} \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt eine Parabel im Varianz-Erwartungswert-Raum und eine Hyperbel im Standardabweichungs-Erwartungswert-Raum mit Koordinaten $(\sigma_{\text{Markowitz}}, m_p)$.

Die globale minimale Varianz $\frac{1}{C}$ wird für $m_p = \frac{A}{C}$ erreicht.

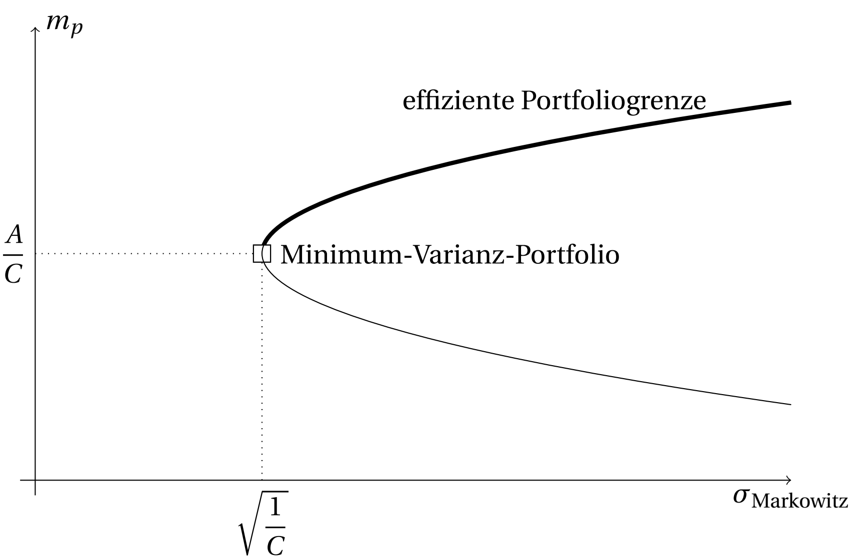
Bemerkung 1.2.5

(1) Das Portfolio mit der kleinsten Varianz wird *Minimum-Varianz-Portfolio* (mvp) genannt ($m_p = \frac{A}{C}$ und minimale Varianz $\frac{1}{C}$).

(2) Ein Grenzportfolio ist *effizient*, genau dann, wenn es eine echt größere erwartete Rendite als das mvp hat.

(3) Ein Portfolio, dass weder das mvp noch effizient ist, heißt *ineffizient*.

(4) Die Effizienzgrenze ist der Teil der Kurve, der oberhalb der des globalen Minimums der Varianz liegt.



Satz 1.2.6
Sei Σ positiv definit. Dann ist π_p ein Grenzportfolio genau dann, wenn zwischen der Varianz des Portfolio-Returns und dem vorgegebenen Portfolioreturn m_p der folgende Zusammenhang bestelt:

$$\sigma^2_{\text{Markowitz}}(m_p) = \pi_p^\top \Sigma \pi_p = \frac{C}{D}\left(m_p - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C}$$

wobei

$$A = m^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} \qquad B = m^\top \Sigma^{-1} m$$
$$C = \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} \qquad D = BC - A^2.$$

Diese Hyperbel in der $(\sigma_{\text{Markowitz}}, m_p)$-Ebene ist die Portfoliogrenze. Effiziente Portfolios sind auf der Portfoliogrenze mit erwartetem Return $m_p > \frac{A}{C}$

1.2.2. Portfolio-Optimierung nach Tobin

Wir betrachten den Markt mit den Anlagemöglichkeiten wie bisher und fügen eine risikolose Anlagemöglichkeit S_0 hinzu. Der Markt enthält dann $d+1$ Anlagemöglichkeiten: $S_0, S_1, \ldots, S_d$. Weiterhin sei Σ, die Kovarianzmatrix der d risikobehafteten Anlagemöglichkeiten, regulär. Wir bezeichnen den erwarteten Return der Anlagemöglichkeiten mit m.

Da $\mathrm{Cov}(S_0, S_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, d$ können wir nicht wie zuvor vorgehen, da sonst die Kovarianzmatrix der $d+1$ Anlagemöglichkeiten singulär wäre.

Wir setzen also $R_0(T) = \frac{S_0(T)}{S_0(0)} =: R_0$ und $E[R_0(T)] = R_0$.

Sei $\tilde{\pi} = (\pi_0, \ldots, \pi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ der Portfoliovektor für das Investitionsproblem mit $d+1$ Anlagemöglichkeiten und deren Kovarianzmatrix $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{d+1 \times d+1}$, $\tilde{\Sigma} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma \end{smallmatrix}\right)$. Wir fordern weiterhin $\tilde{\pi}^\top \tilde{\mathbf{1}} = \pi_0 + \sum_{i=1}^d \pi_i = \pi_0 + \mathbf{1}^\top \pi = 1$, also $\pi_0 = 1 - \mathbf{1}^\top \pi$. Dann lässt sich der Return schreiben als

$$R^\pi = \sum_{i=0}^{d} \pi_i R_i(T) = \sum_{i=1}^{d} \pi_i R_i(T) + (1 - \sum_{i=1}^{d} \pi_i) R_0(T)$$

mit Erwartungswert

$$E[R^\pi] = \pi^\top m + R_0(1 - \pi^\top \mathbf{1}) = \pi^\top (m - R_0 \mathbf{1}) + R_0$$

und Varianz $\mathrm{Var}(R^\pi) = \pi^\top \Sigma \pi$. Das Optimierungsproblem ist dann

$$\min \frac{1}{2} \pi^\top \Sigma \pi$$

unter der Nebenbedingung

$$\pi^\top (m - R_0 \mathbf{1}) + R_0 = m_p$$

Wir verwenden die Lagrange-Methode:

$$\begin{aligned} L(\pi) &:= \frac{1}{2} \pi^\top \Sigma \pi - \lambda_1 (\pi^\top (m - R_0 \mathbf{1}) + R_0 - m_p) \\ L'(\pi) &= \Sigma \pi - \lambda_1 (m - R_0 \mathbf{1}) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\iff \pi = \lambda_1 \Sigma^{-1} (m - R_0 \mathbf{1}) =: \lambda_1 b \end{aligned}$$

Über die Nebenbedingung kann λ_1 bestimmt werden:

$$(\lambda_1 \Sigma^{-1} (m - R_0 \mathbf{1}))^\top (m - R_0 \mathbf{1}) + R_0 = m_p \iff \lambda_1 = \frac{m_p - R_0}{b^\top m - R_0 b^\top \mathbf{1}}$$

Dann ist das optimale Portfolio (für die Investition in die Aktien) gegeben durch

$$\pi = \lambda_1 b = \frac{m_p - R_0}{b^\top m - R_0 b^\top \mathbf{1}} b = \underbrace{\frac{m_p - R_0}{b^\top m - R_0 b^\top \mathbf{1}} \cdot \frac{b^\top \mathbf{1}}{1}}_{=:\alpha^*} \cdot \underbrace{\frac{1}{b^\top \mathbf{1}} \cdot b}_{=:\pi^*} = \alpha^* \pi^*$$

Insbesondere gilt

$$\alpha^* = \frac{(m_p - R_0) b^\top \mathbf{1}}{b^\top m - R_0 b^\top \mathbf{1}} = \frac{(m_p - R_0) b^\top \mathbf{1}}{(\frac{b^\top m}{b^\top \mathbf{1}} - R_0) b^\top \mathbf{1}} = \frac{m_p - R_0}{\pi^* m - R_0}$$

Die optimale Strategie für die risikolose Anlagemöglichkeit ist dann

$$\pi_0 = 1 - \mathbf{1}^\top \pi = 1 - \alpha^* \frac{b^\top \mathbf{1}}{b^\top \mathbf{1}} = 1 - \alpha^*.$$

Definition 1.2.7
Das obige π^* heißt *Tangentialportfolio*.

Bemerkung 1.2.8
Das optimale π^* hängt nicht von m_p ab! Ein Investor wird unabhängig von seiner Zielrendite immer das Tangentialportfolio als Investition in die risikobehafteten Anlagemöglichkeiten wählen. Die Wahl eines effizienten Portfolios bedeutet also, dass die Präferenzen des Investors nur durch seine Wahl des Anteils $(1-\alpha^*)$, den er risikolos investiert, ausgedrückt werden.

Die minimale Varianz ist dann gegeben durch

$$\sigma^2_{\text{Tobin}}(m_p) := (\alpha^*)^2 \pi^{*\top}\Sigma\pi^* = \frac{(m_p - R_0)^2}{b^\top \Sigma b} = \frac{(m_p - R_0)^2}{D\sigma^2_{\text{Markowitz}}(R_0)}$$

In der Varianz-Erwartungswert-Ebene wird dadurch eine Parabel beschrieben. In der Standardabweichungs-Erwartungswert-Ebene vereinfacht sich die Darstellung.

Satz 1.2.9
Im Markt mit zusätzlicher risikoloser Anlagemöglichkeit mit Return R_0 ist ein Portfolio ein Grenzportfolio genau dann, wenn der folgende Zusammenhang zwischen Standardabweichung der Portfoliorendite und erwarteter Rendite gilt:

$$\sigma_{\text{Tobin}} = |\alpha^*|\sqrt{\pi^{*\top}\Sigma\pi^*} = \left|\frac{m_p - R_0}{\pi^{*\top} m - R_0}\right| \sqrt{\pi^{*\top}\Sigma\pi^*}$$

Effizient sind alle Portfolios auf der so beschriebenen Portfoliogrenze, deren erwartete Rendite echt größer als R_0 ist.

Definition 1.2.10
Die effizienten Portfolios liegen auf der sogenannten *Kapitelmarktgeraden*:

$$m_p = R_0 + \sigma_{\text{Tobin}} \underbrace{\frac{\pi^{*\top} m - R_0}{\sqrt{\pi^{*\top}\Sigma\pi^*}}}_{\textit{Marktrisikoprämie}}$$

Das heißt, dass das Hinzufügen einer risikolosen Anlagemöglichkeit aus der Portfoliogrenze eine Gerade macht, die von $(0, R_0)$ tangential zur Portfoliogrenze der risikobehafteten Anlagemöglichkeiten geht. In dem Zusammenhang spricht man auch vom One-Fund-Theorem: Jedes effiziente Portfolio kann als Kombination aus dem Fund und der risikolosen Anlagemöglichkeit konstruiert werden.

Bemerkung 1.2.11
Für das optimale Markowitz-Portfolio gilt:

$$\pi_{\text{Markowitz}}(m_p) = \frac{C_{m_p} - A}{D}\Sigma^{-1} m + \frac{B - A_{m_p}}{D}\Sigma^{-1}\mathbf{1}$$

Für das Tangentialportfolio gilt:

$$\pi^* = \frac{1}{A - R_0 C}\Sigma^{-1} m + \frac{-R_0}{A - R_0 C}\Sigma^{-1}\mathbf{1}$$

Man kann nachrechnen, dass für

$$m^* := \pi^{*\top} m = \frac{B - R_0 A}{A - R_0 C}$$

und $m^* > R_0$ gilt:

$$\pi_{\text{Markowitz}}(m^*) = \pi^*$$

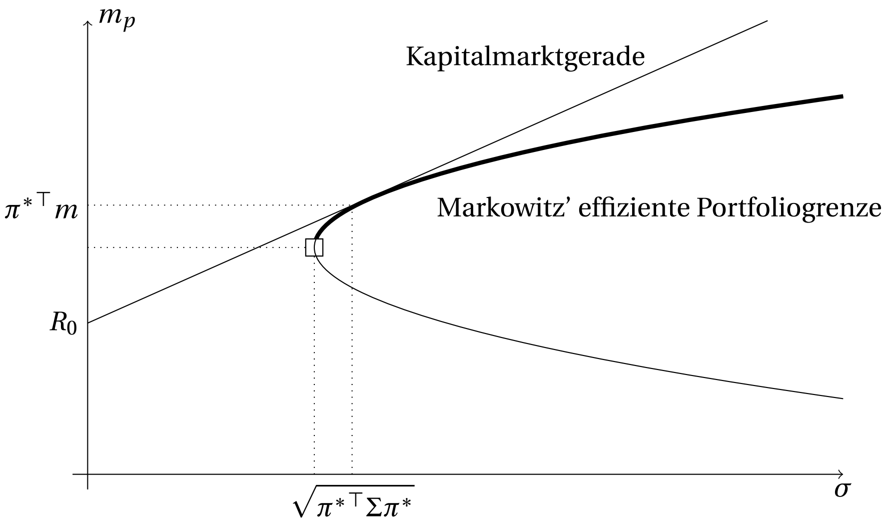
Insbesondere

$$\sigma_{\text{Markowitz}}(m^*) = \sigma_{\text{Tobin}}(m^*)$$

und

$$\sigma'_{\text{Markowitz}}(m^*) = \sigma'_{\text{Tobin}}(m^*)$$

Am Punkt m^* berühren sich die Portfoliogrenze und die Kapitelmarktlinie tangential.



Bestimmung von Kovarianzen

Sei π_1 ein Portfolio von der effizienten Portfoliogrenze und π_2 ein beliebiges Portfolio. Dann gilt

$$\Sigma\pi_1 = \lambda_1(m - R_0\mathbf{1}).$$

Durchmultiplizieren mit $\pi_1^\top, \pi_2^\top$ liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(R^{\pi_1}) &= \pi_1^\top \Sigma\pi_1 = \lambda_1\pi_1^\top(m - R_0\mathbf{1}) \\ \operatorname{Cov}(R^{\pi_1}, R^{\pi_2}) &= \pi_2^\top \Sigma\pi_1 = \lambda_1\pi_2^\top(m - R_0\mathbf{1}) \end{aligned}$$

Auflösen nach λ_1 und gleichsetzen liefert

$$\begin{aligned} &\frac{\operatorname{Var}(R^{\pi_1})}{\pi_1^\top m - R_0\pi_1^\top\mathbf{1}} = \frac{\operatorname{Cov}(R^{\pi_1}, R^{\pi_2})}{\pi_2^\top m - R_0\pi_2^\top\mathbf{1}} \\ \iff &\beta_{\pi_1,\pi_2} := \frac{\operatorname{Cov}(R^{\pi_1}, R^{\pi_2})}{\operatorname{Var}(R^{\pi_1})} = \frac{E[R^{\pi_1}] - R_0}{E[R^{\pi_2}] - R_0} \\ \iff &E[R^{\pi_2}] = R_0 + \beta_{\pi_2,\pi_1}(E[R^{\pi_1}] - R_0) \end{aligned}$$

Das heißt, dass die erwartete Rendite eines beliebigen Portfolios linear von seiner Kovarianz mit einem Portfolio minimaler Varianz abhängt. β_{π_1,π_2} bezeichnet das „Beta" eines Portfolios π_2 in Bezug auf ein Portfolio π_1. Dabei ist β_{π_2,π_1} der gewichtete Mittelwert des Betas der verschiedenen risikobehafteten Anlagemöglichkeiten:

$$\beta_{\pi_2,\pi_1} = \sum_{i=1}^{d} (\pi_2)_i \beta_{i,\pi_1}$$

1.2.3. Captial Asset Pricing Model (CAPM)

Bisher haben wir die Portfolioselektion aus der Perspektive eines einzelnen Investors betrachtet. Wir kommen nun zu einer Gleichgewichtsaussage über den gesamten Kapitalmarkt.

Dazu machen wir folgende Annahmen:

- Alle Marktteilnehmer haben homogene Informationen und dadurch homogene Erwartungen (gleiche Kovarianzmatrix, gleiche Erwartungswerte), denselben Investitionshorizont, Numeraire etc.
- Es gibt eine risikolose Anlagemöglichkeit. Bei dieser kann man zu demselben Zinssatz Kredite aufnehmen, zu dem auch Investitionen verzinst werden.
- Alle entscheiden sich nach dem Erwartungswert-Varianz-Kriterium.
- Daher halten alle Marktteilnehmer das gleiche Portfolio der risikobehafteten Anlagemöglichkeiten, das Tangentialportfolio.
- Im Gleichgewicht muss die Gesamtnachfrage nach Aktien gleich der umlaufenden Aktien sein, da dass Tangentialportfolio in unterschiedlichen Mengen von den Investoren gehalten wird, muss es aus allen risikobehafteten Anlagemöglichkeiten proportional zu ihrer Marktkapitalisierung bestehen. Das so entstehende *Marktportfolio* ist mit dem individuellen Tangentialportfolio strukturell identisch.

Satz 1.2.12
In einem Markt mit einer risikolosen Anlagemöglichkeit mit Rendite R_0 erfüllt die erwartete Rendite m_p eines beliebigen Portfolios p die Gleichung

$$m_p = R_0 + \beta_{p,M}(m_M - R_0)$$

wobei

$$\beta_{p,M} := \frac{\mathrm{Cov}(R^{\pi_p}, R^{\pi_M})}{\mathrm{Var}(R^{\pi_M})}$$

und m_M die erwartete Rendite des Marktportfolios ist.

Man kann auch einen Zusammenhang zwischen der erwarteten Rendite einer einzelnen Anlagemöglichkeit und der Rendite des Marktportfolios herstellen:

$$m_i = R_0 + \beta_i(m_M - R_0) \tag{$*$}$$

wobei

$$\beta_i := \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R^{\pi_M})}{\mathrm{Var}(R^{\pi_M}).}$$

Hier bezeichnet m_i die erwartete Rendite und β_i den „Beta"-Faktor der Anlagemöglichkeit i. Die Gleichung $(*)$ wird als Wertpapiermarktlinie ("security market line") bezeichnet. Sie zeigt, dass die erwarte Rendite einer Anlagemöglichkeit als lineare Funktion der Kovarianz der Anlagemöglichkeit mit dem gesamten Markt ausgedrückt werden kann.

1.2.4. Kurze Diskussion der Annahmen des Erwartungswert-Varianz-Ansatzes

- Statisches Problem: Investor investiert am Anfang und ändert sein Portfolio nicht mehr.
- Risiko wird nur durch die Varianz gemessen.
- Symmetrische Form der Varianz: Abweichungen nach oben werden genauso bestraft wie Abweichungen nach unten.
- Die Bevorzugung der erwarteten Rendite und die Aversion der Varianz wird durch die Monotonie und Konkavität der Nutzenfunktion impliziert. Aber für allgemeine Nutzenfunktionen kann erwarteter Nutzen nicht nur über erwartete Rendite und Varianz definiert werden. Sei $\mu \in \mathscr{M}$ (Wahrscheinlichkeitsmaß mit endlichem Erwartungswert). Konvergenz der Taylorentwicklung und Vertauschung von Summation und Integration liefert

  $$U(\mu) = \int u(x)\mu(dx) = \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} u^{(k)}(m)(x-m)^k \mu(dx) = u(m) + \frac{1}{2}u''(m)\mathrm{Var}(\mu) + R_3(\mu).$$

  Das Restglied $R_3(\mu)$ muss in der Regel auch berücksichtigt werden.
- Für quadratische Nutzenfunktionen $u(X) = x - \frac{\varepsilon}{2}x^2$, $\varepsilon > 0$ gilt

  $$U(\mu) = m - \frac{\varepsilon}{2}(\mathrm{Var}(\mu) + m^2).$$

  Aber $u'(X) = 1 - \varepsilon x \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

  Und:

  $$\mathrm{ARA}(x) = \frac{-u''(x)}{u'(X)} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon x}, \qquad \mathrm{ARA}'(x) = \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon x)^2} > 0$$

  also wachsende absolute Risikoaversion!
- Für multivariat-normalverteilte Anlagemöglichkeiten, also $R^\pi \sim N$, können Präferenzen über Erwartungswert und Varianz ansgedrückt werden.

1.3. Stochastische Dominanz

Im vorigen Kapitel wurden Präferenzrelationen über feste Nutzenfunktionen ausgedrückt. Wir wollen nun der Frage nachgehen, ob eine Verteilung (einer risikobehafteten Anlagemöglichkeit) einer anderen Verteilung unabhängig von der Wahl der Nutzenfunktion vorgezogen wird. Wir betrachten $S = \mathbb{R}$ als Menge aller möglichen Auszahlungen und betrachten $\mathscr{M}$ als Menge aller $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$

(Wahrscheinlichkeitsverteilungen) mit wohldefinierter Erwartung

$$m(\mu) = \int x\mu(dx).$$

Definition 1.3.1
Seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}$. Dann dominiert μ ν im Sinne der *Stochastischen Dominanz zweiter Ordnung*, falls

$$\int u\,d\mu \geq \int u\,d\nu$$

für alle Nutzenfunktionen u. Wir schreiben dafür $\mu \succeq_{\text{uni}} \nu$ (“uniform preference”).

Das heißt, $\mu \succeq_{\text{uni}} \nu$ gilt genau dann, wenn ein risikoaverser Agent μ ν vorzieht, unabhängig davon welche Nutzenfunktion er verwendet. In diesem Sinne drückt $\mu \succeq_{\text{uni}} \nu$ eine gleichmäßige Präferenz von $\mu \succeq_{\text{uni}} \nu$ aus.

Satz 1.3.2
Für beliebige $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $\mu \succeq_{\text{uni}} \nu$

(2) $\int f\,d\mu \geq \int f\,d\nu$ für alle wachsenden, konkaven Funktinen f.

(3) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int (c-x)^+ \mu(dx) \leq \int (c-x)^+ \nu(dx)$$

(4) Für die Verteilungsfunktionen F_μ und F_ν und alle $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{c} F_\mu(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^{c} F_\nu(x)\,dx$$

(5) Für die Quantilfunktionen q_μ, q_ν und $0 < t \leq 1$ gilt:

$$\int_0^t q_\mu(s)\,ds \geq \int_0^t q_\nu(s)\,ds$$

Beweis

- (4) $\iff$ (5): Übungsaufgabe
- (3) $\iff$ (4):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{c} F_{\mu(y)}\,dy &= \int_{-\infty}^{c}\int_{(-\infty,y]} \mu(dz)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{z\leq y\leq c\}}\,dy\,\mu(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (c-z)^+ \mu(dz)\end{aligned}$$

- (2) $\implies$ (3): Die Funktion $f(x) := -(c-x)^+$ ist konkav und monoton wachsend.

- (3) $\Longrightarrow$ (2): (Beweisidee) Sei f eine monoton wachsende, konkave Funktion. Dann ist $h := -f$ konvex und monoton fallend. Schreibe h so um, dass die Voraussetzung (3) angewendet werden kann.

  Sei h'_+ die monoton wachsende rechtsseitige Ableitung von h. Man kann sie als „Verteilungsfunktions" eines nicht-negativen Maßes γ auf $\mathbb{R}$ verstehen: Für $y < b$ gilt $h'(b) = h'(y) + \gamma((y,b])$.

  Dann gilt für $x < b$:

$$\begin{aligned} h(b) &= h(x) + \int_x^b h'(y)dy \\ &= h(x) + h'(b)(b-x) - \int_x^b \int_{(y,b]} \gamma(dz)dy \\ &= h(x) + h'(b)(b-x) - \int_{(-\infty,b]} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{y: x\le y\le z\}} dy\gamma(dz) \\ &= h(x) + h'(b)(b-x) - \int_{(-\infty,b]} (z-x)^+ \gamma(dz) \end{aligned}$$

  Dann gilt für alle $-\infty < x < b$:

$$h(x) = h(b) - h'(b)(b-x)^+ + \int_{(-\infty,b]} (z-x)^+ \gamma(dz)$$

  Berechne nun

$$\int_{(-\infty,b]} h(x)\mu(dx)$$

  mit obiger Darstellung von h, verwende (3) und lasse $b \to \infty$.

- (2) $\Longrightarrow$ (1): Klar

- (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei u_0 eine Nutzenfunktion, für die $\int u_0 d\mu$ und $\int u_0 d\nu$ endlich sind, z.B.

$$u_0(x) = \begin{cases} x - e^{\frac{x}{2}} + 1, & x \le 0 \\ \sqrt{x+1} - 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

  Sei f eine konkave und monoton wachsende Funktion, $\alpha \in [0,1)$. Dann ist $u_\alpha(x) := \alpha f(x) + (1-\alpha)u_0(x)$ eine Nutzenfunktion und damit gilt

$$\int f d\mu = \lim_{\alpha\to 1} \int u_\alpha d\mu \ge \lim_{\alpha\to 1} \int u_\alpha d\nu = \int f d\nu$$

■

Bemerkung 1.3.3
Sei $\mu \ge_{\text{uni}} \nu$. Wähle $f(x) = x$ als monoton wachsende konkave Funktion. Dann gilt $m(\mu) \ge m(\nu)$.

Im Folgenden betrachten wir die stochastische Dominanz zweiter Ordnung im Zusammenhang mit Normalverteilungen. Die Dichte einer $N(\mu,\sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen ($\sigma^2 > 0$) ist

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

und die Verteilungsfunktion ist

$$\tilde{\Phi}(x) = \int_{-\infty}^x \tilde{\varphi}(z)dz.$$

Satz 1.3.4
Für zwei Normalverteilungen gilt

$$N(\mu,\sigma^2) \succeq_{\text{uni}} N(\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^2) \iff \mu \geq \tilde{\mu} \text{ und } \sigma^2 \leq \tilde{\sigma}^2$$

Beweis
Übungsblatt. ∎

Wir haben in der klassischen Portfoliotheorie gesehen, dass zum Vergleich zweier Portfolios mit bekannter Verteilung der Auszahlung das Erwartungs-Varianz-Kriterium (MV, "mean variance") verwendet wird. Dieses basiert auf der Relation

$$\mu \succeq_{\text{mv}} \nu \iff m(\mu) \geq m(\nu) \text{ und } \operatorname{Var}(\mu) \leq \operatorname{Var}(\nu)$$

wobei $m(\mu) = \int x\mu(dx)$ und $\operatorname{Var}(\mu) = \int (x - m(\mu))^2 \mu(dx)$.

Wir haben gerade gesehen, dass $\succeq_{\text{mv}}$ und $\succeq_{\text{uni}}$ äquivalent sind, falls μ und ν Normalverteilungen sind. Das gilt aber nicht im Allgemeinen.

Beispiel 1.3.5
Sei μ eine Gleichverteilung auf $[-1,1]$, also $m(\mu) = \int_{-1}^{1} \frac{x}{2} dx = 0$ und $\operatorname{Var}(\mu) = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx - 0^2 = \frac{1}{3}$. Sei weiter $\nu = p \cdot \delta_{-0\,5} + (1-p) \cdot \delta_2$ mit $p = \frac{4}{5}$, also $m(\nu) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} = 0$ und $\operatorname{Var}(\nu) = (-\frac{1}{2})^{\cdot} \frac{4}{5} + 2^2 \cdot \frac{1}{5} = 1$.

Daher ist $m(\mu) = m(\nu)$ und $\operatorname{Var}(\mu) \leq \operatorname{Var}(\nu)$, aber

$$\int (-\frac{1}{2} - x)^+ \mu(dx) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-\frac{1}{2} - x) dx = \frac{1}{16}$$
$$\int (-\frac{1}{2} - x)^+ \nu(dx) = 0.$$

Daher gilt *nicht* $\mu \succeq_{\text{uni}} \nu$ (Siehe Theorem 1.3.2 Punkt 2).

Definition 1.3.6
Eine reellwertige Zufallsvariable Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ heißt lognormalverteilt mit Parametern $\alpha \in R$, $\sigma \geq 0$, falls sie dargestellt werden kann als

$$Y = \exp(\alpha + \sigma X)$$

wobei $X \sim N(0,1)$.

Satz 1.3.7
Seien $\mu, \tilde{\mu}$ zwei Lognormalverteilungen mit Parametern (α, σ) und $(\tilde{\alpha}, \tilde{\sigma})$. Dann gilt

$$\mu \succeq_{\text{uni}} \tilde{\mu} \iff \sigma^2 \leq \tilde{\sigma}^2 \text{ und } \alpha + \frac{\sigma^2}{2} \geq \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}.$$

Definition 1.3.8
Seien μ, ν zwei beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$. Dann dominiert μ ν im Sinne der *Stochastischen Dominanz erster Ordnung*, falls

$$\int f\,d\mu \geq \int f\,d\nu$$

für alle beschränkten, monoton wachsenden Funktionen $f \in C(\mathbb{R})$. Wir schreiben dafür $\mu \succeq_{\text{mon}} \nu$ ("monotone preference").

Satz 1.3.9
Für $\mu, \nu \in M_1(\mathbb{R})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $\mu \succeq_{\text{mon}} \nu$

(2) Die Verteilungsfunktionen von μ und ν erfüllen $F_\mu(x) \leq F_\nu(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3) Jedes Paar von Quantilfunktionen von μ und ν erfüllt $q_\mu(t) \geq q_\nu(t)$ für fast alle $t \in (0,1)$.

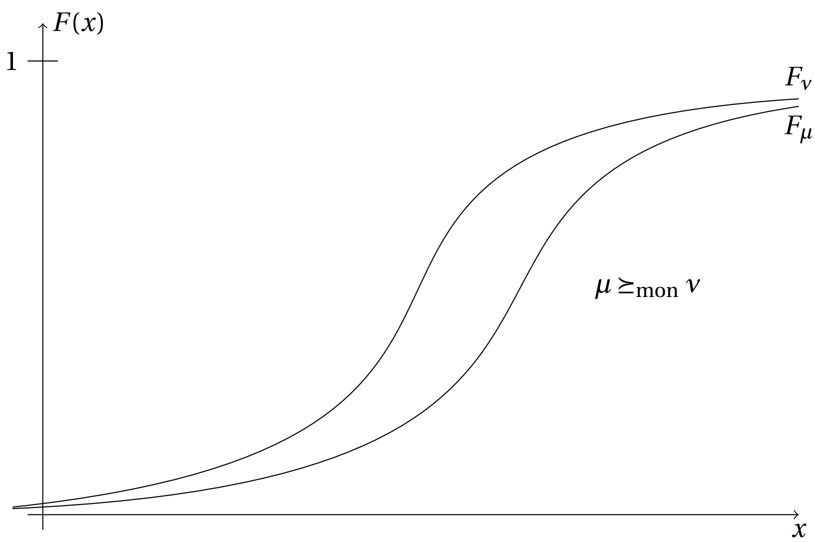
(4) Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ mit Zufallsvariablen X_μ, X_ν mit Verteilungen μ, ν, so dass P-fast-sicher $X_\mu > X_\nu$ gilt.

Insbesondere gilt

$$\mu \succeq_{\text{mon}} \nu \implies \mu \succeq_{\text{uni}} \nu.$$

Die Menge aller beschränkten, monoton wachsenden, stetigen Funktionen in Definition 1.3.8 kann ersetzt werden durch die Menge aller monoton wachsenden Funktionen, für die beide Integrale wohldefiniert sind.

Beweis
Siehe Föllmer-Schied, Theorem 2.70 ∎



1.4. Risikomaße

1.4.1. Kohärenz

Sei Ω eine gegebenene Menge, die verschiedene Szenarien beschreibt. Wir beschreiben eine Finanzposition durch eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei $X(\omega)$ der diskontinierte Nettowert einer Position am Ende einer Handelsperiode ist, wenn Szenario $\omega \in \Omega$ eingetreten ist. Unser Ziel ist es nun, das Risiko von X durch eine Zahl $\rho(X)$ zu quantifizieren, wobei X zu einer Klasse von Finanzpositionen $\mathscr{X}$ gehört. $\mathscr{X}$ sei ein linearer Raum von beschränkten Funktionen, der auch die Konstanten enthält.

Definition 1.4.1
Eine Abbildung $\rho : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ wird *monetäres Risikomaß* genannt, falls es die folgenden zwei Bedingungen für alle $X, Y \in \mathscr{X}$ erfüllt:

- Monotonie: Falls $X \leq Y$, dann gilt $\rho(X) \geq \rho(Y)$.
- Translationsinvarianz, "cash invariance": Für $m \in \mathbb{R}$ gilt $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.

Diesen Eigenschaften können folgende Bedeutungen im Finanz-Kontext zugewiesen werden:

- Montonie: Das Downside-Risiko einer Position ist reduziert, wenn das Auszahlungsprofil größer ist.
- Translationsinvarianz: $\rho(X)$ kann als Kapitalanforderung interpretiert werden, das heißt $\rho(X)$ ist der Wert, der zur Position X hinzugefügt werden muss, um diese Position akzeptabel aus der Perspektive einer Aufsichtsinstanz zu machen. Das heißt, wenn die Menge m zu der Position hinzugefügt wird und risikolos investiert wird, reduziert das die Kapitalanforderung um den gleichen Betrag.

Aus der Translationsinvarianz folgt sofort $\rho(X+\rho(X)) = \rho(X)-\rho(X) = 0$ und $\rho(m) = \rho(0+m) = \rho(0)-m$ für alle $m \in \mathbb{R}$. Manchmal fordert man die Normalisierung $\rho(0) = 0$.

Satz 1.4.2
Jedes monetäre Risikomaß ρ ist Lipschitz-stetig im Bezug auf die Supremumsnorm $\|\cdot\|$, das heißt $|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|$ wobei $\|X\| = \sup_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|$.

Beweis
Es gilt $X \leq Y + \|X - Y\|$. Aus der Monotonie folgt $\rho(Y + \|X - Y\|) \leq \rho(X)$ und aus der Translationsinvarianz $\rho(Y) - \|X - Y\| \leq \rho(X)$. Vertausche nun X und Y und führe dieselbe Argumentation durch, woraus die Behauptung folgt. ∎

Definition 1.4.3
Ein monetäres Risikomaß $\rho : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ heißt *konvexes Risikomaß*, falls

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$$

für $0 \leq \lambda \leq 1$, $X, Y \in \mathscr{X}$.

Die Bedeutung dieser Definition ist: Angenommen ein Investor kann zwischen zwei Investitionsstrategien wählen. Die eine liefert Auszahlung X, die andere Y. Wenn der Investor nun diversifiziert, das heißt nur einen Anteil λ in der ersten Investitionsmöglichkeit investiert und den restlichen Anteil $(1-\lambda)$ in die zweite, erhält er $\lambda X + (1-\lambda)Y$. Die Annahme der Konvexität bedeutet letztendlich, dass Diversifikation nicht das Risiko erhöhen sollte.

Falls ρ konvex und normalisiert ist, dann gilt $\rho(\lambda X) \leq \lambda \cdot \rho(X)$ für $0 \leq \lambda \leq 1$, $\rho(\lambda X) \geq \lambda \cdot \rho(X)$ für $\lambda \geq 1$.

Definition 1.4.4
Ein konvexes Risikomaß heißt *kohärentes Risikomaß*, falls es positiv homogen ist, also für alle $\lambda \geq 0$ gilt:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \cdot \rho(X).$$

Bemerkung 1.4.5

- Wenn ein monetäres Risikomaß positiv homogen ist, dann ist es normalisiert, da $\rho(0) = \rho(0+0) = \rho(2 \cdot 0) = 2 \cdot \rho(0)$ und damit $\rho(0) = 0$.
- Unter der Annahme der positiven Homogenität ist die Konvexität äquivalent zur Subadditivität $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
- Die Subadditivität erlaubt es, das Risikomanagement zu dezentralisieren. Das Risiko der Gesamtposition ist nach oben durch die Summe der individuellen Risiken begrenzt. Diese können einzeln vorgegeben werden.
- In vielen Situationen wächst das Risiko nicht linear zu der Höhe der Investition. Daher ist häufig positive Homogenität eine zu starke Forderung, weshalb häufig auch konvexe statt kohärenter Risikomaße betrachtet werden.

Definition 1.4.6
Sei $\rho : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ ein monetäres Risikomaß. Wir bezeichnen die Menge

$$\mathscr{A}_\rho := \{x \in \mathscr{X} : \rho(X) \leq 0\}$$

als die *Akzeptanzmenge* von ρ.

$\mathscr{A}_\rho$ beschreibt die Positionen, die akzeptabel sind in dem Sinne, dass sie kein zusätzliches Kapital erfordern.

Satz 1.4.7
Sei ρ ein monetäres Risikomaß mit Akzeptanzmenge $\mathscr{A}_\rho = \mathscr{A}$. Dann gilt:

(1) $\mathscr{A} \neq \emptyset$ und erfüllt

  (i) $\inf\{m \in \mathbb{R} : m \in \mathscr{A}\} > -\infty$

  (ii) $X \in \mathscr{A}$, $Y \in \mathscr{X}$, $Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathscr{A}$

  Außerdem hat $\mathscr{A}$ die Eigenschaft: Für $X \in \mathscr{A}$, $Y \in \mathscr{X}$ ist die Menge $\{\lambda \in [0,1] : \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathscr{A}\}$ abgeschlossen in $[0,1]$.

(2) ρ kann von $\mathscr{A}$ bestimmt werden: $\rho(X) = \inf\{m : m + X \in \mathscr{A}\}$.

(3) ρ ist ein konvexes Risikomaß $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ ist konvex.

(4) ρ ist positiv homogen $\Leftrightarrow \mathscr{A}$ ist ein Kegel.

ρ ist kohärent $\Leftrightarrow \mathscr{A}$ ist ein konvexer Kegel.

Beweis

(1) Sei $X \in \mathscr{X}$. Dann ist $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0 \leq 0. \Rightarrow X + \rho(X) \in \mathscr{A}$

(i) $\inf\{m \in \mathbb{R} : m \in \mathscr{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} : \rho(m) \leq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} : \rho(0) \leq m\} = \rho(0) > -\infty$

(ii) $Y \geq X \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X) \leq 0 \Rightarrow Y \in \mathscr{A}$

Die Funktion $\lambda \mapsto \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y)$ ist stetig (Satz 1.4.2). Daher ist die Menge aller $\lambda \in [0,1]$ mit $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq 0$ abgeschlossen.

(2) Sei $X \in \mathscr{X}$. Aus der Translationsinvarianz folgt $\inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in \mathscr{A}_\rho\} = \inf\{m \in \mathbb{R} : \rho(m + X) \leq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} : \rho(X) \leq m\} = \rho(X)$.

(3) Sei ρ konvex. Seien $X, Y \in \mathscr{A}$, $\lambda \in [0,1]$.

$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda \cdot \underbrace{\rho(X)}_{\leq 0} + (1-\lambda)\underbrace{\rho(Y)}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathscr{A}$.

Sei $\mathscr{A}$ konvex, $X, Y \in \mathscr{X}$, $\lambda \in [0,1]$.

Dann ist $X + \rho(X), Y + \rho(Y) \in \mathscr{A}$ und damit $\lambda(X + \rho(X)) + (1-\lambda)(Y + \rho(Y)) \in \mathscr{A}$. Wegen der Translationsinvarianz gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &\geq \rho(\lambda(X + \rho(X)) + (1-\lambda)(Y + \rho(Y))) \\ &= \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y + (\lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y))) \\ &= \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) - (\lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)) \end{aligned}$$

also gilt

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$$

Damit ist ρ konvex.

(4) Sei ρ positiv homogen. Sei $X \in \mathscr{A}$, $\lambda \geq 0$. Dann gilt: $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \leq 0$ und daher $\lambda X \in \mathscr{A}$.

Sei $\mathscr{A}$ ein Kegel, $X \in \mathscr{X}$, $\lambda \geq 0$. Dann ist $X + \rho(X) \in \mathscr{A}$ und wegen der Kegeleigenschaft $\lambda(X + \rho(X)) = \lambda X + \lambda\rho(X) \in \mathscr{A}$. Daher folgt mit der Translationsinvarianz $\rho(\lambda X + \lambda\rho(X)) = \rho(\lambda X) - \lambda\rho(X) \leq 0 \Rightarrow \rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X)$.

Wir zeigen nun die umgekehrte Ungleichung: Sei $X \in \mathscr{X}$, $\epsilon > 0$, $\lambda \geq 0$. Dann ist $\rho(X) > \rho(X) - \epsilon$ und wegen der Translationsinvarianz $0 < \rho(X) - (\rho(X) - \epsilon) = \rho(X + \rho(X) - \epsilon)$. Daher ist $X + (\rho(X) - \epsilon) \notin \mathscr{A}$. Wegen Kegeleigenschaft ist $\lambda(X + (\rho(X) - \epsilon)) \notin \mathscr{A}$. Daher $0 < \rho(\lambda(X + (\rho(X) - \epsilon))) = \rho(\lambda X) - \lambda(\rho(X) - \epsilon) \Rightarrow \rho(\lambda X) > \lambda(\rho(X) - \epsilon)$. Für $\epsilon \downarrow 0$ folgt die Behauptung.

Sei ρ kohärent, das heißt konvex ($\Rightarrow \mathscr{A}$ konvex) und positiv homogen ($\Rightarrow \mathscr{A}$ Kegel). Dann ist $\mathscr{A}$ ein konvexer Kegel.

Rückrichtung wie vorher! ∎

Umgekehrt kann man auch eine Klasse $\mathscr{A} \subset \mathscr{X}$ von akzeptierten Positionen vorgeben und als primäres Objekt betrachten. Für eine Position $X \in \mathscr{X}$ kann man dann eine Kapitalanforderung als minimalen Betrag m, der $m + X$ akzeptal definiert: $\rho_{\mathscr{A}}(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in \mathscr{A}\}$.

Satz 1.4.8
Sei $\mathscr{A}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathscr{X}$ mit den zwei Eigenschaften

$$\inf\{m \in \mathbb{R} : m \in \mathscr{A}\} > -\infty \quad \text{und} \quad X \in \mathscr{A},\, Y \in \mathscr{X},\, Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathscr{A}.$$

Dann hat $\rho_{\mathscr{A}}$ die folgenden Eigenschaften:

(1) $\rho_{\mathscr{A}}$ ist ein monetäres Risikomaß.

(2) Falls $\mathscr{A}$ konvex, dann ist $\rho_{\mathscr{A}}$ konvex.

(3) Falls $\mathscr{A}$ ein Kegel ist, dann ist $\rho_{\mathscr{A}}$ positiv homogen.

Insbesondere: $\rho_{\mathscr{A}}$ ist kohärentes Risikomaß, wenn $\mathscr{A}$ ein konvexer Kegel ist.

(4) $\mathscr{A}$ ist Teilmenge von $\mathscr{A}_{\rho_{\mathscr{A}}}$. Falls für $X \in \mathscr{A}$, $Y \in \mathscr{X}$ die Menge

$$\{\lambda \in [0,1] : \lambda X + (1-\lambda) Y \in \mathscr{A}\}$$

abgeschlossen in $[0,1]$ ist, dann ist $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\rho_{\mathscr{A}}}$.

Beweis
Föllmer & Schied, Proposition 4.7 ■

Beispiel 1.4.9
Das Worst-case-Risikomaß $\rho_{\max}$ ist definiert als $\rho_{\max} = -\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega)$ für alle $X \in \mathscr{X}$.

$\rho_{\max}$ ist die kleinste obere Schranke für einen Verlust, der in einem beliebigen Szenario passieren kann.

Für die Akzeptanzmenge gilt: $\mathscr{A}_{\rho_{\max}} = \{X \in \mathscr{X} : \rho_{\max}(X) \leq 0\} = \{X \in \mathscr{X} : -\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) \leq 0\} = \{X \in \mathscr{X} : \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) \geq 0\}$, das heißt $\mathscr{A}_{\rho_{\max}}$ ist der konvexe Kegel aller nicht-negativen Funktion in $\mathscr{X}$. Daher ist $\rho_{\max}$ ein kohärentes Risikomaß.

Es ist das konservativste Risikomaß in dem Sinne, dass für jedes normalisierte Risikomaß ρ auf $\mathscr{X}$ gilt: $X \geq \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega)$, daher $\rho(X) \leq \rho(\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega)) = \rho(0) - \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) = \rho_{\max}(X)$.

1.4.2. Value at Risk

Ein häufiger Ansatz der Risikomessung von Finanzpositionen X besteht darin, ein Quantil der Verteilung von X unter einem Wahrscheinlichkeitsmaß P zu bestimmen. Sei X Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $\lambda \in [0,1]$. Das λ-Quantil von X ist eine reelle Zahl q, so dass $P(X \leq q) \geq \lambda$, $P(X < q) \leq \lambda$.

Die Menge aller λ-Quantile von X ist ein Intervall $[q_X^-(\lambda), q_X^+(\lambda)]$ mit

$$\begin{aligned} q_X^-(\lambda) &= \sup\{x : P(X < x) < \lambda\} = \inf\{x : P(X \leq x) \geq \lambda\} \\ q_X^+(\lambda) &= \inf\{x : P(X \leq x) > \lambda\} = \sup\{x : P(X < x) \leq \lambda\} \end{aligned}$$

und mit Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X \leq x)$ gilt:

$$\begin{aligned} q_X^-(\lambda) &= \inf\{x : F_X(x) \geq \lambda\} \\ q_X^+(\lambda) &= \inf\{x : F_X(x) > \lambda\}. \end{aligned}$$

In dieser Lektion werden wir uns auf Eigenschaften von $q_X^+(\lambda)$ konzentrieren, wobei X eine Finanzposition beschreibt.

Definition 1.4.10
Sei $\lambda \in [0,1]$. Wir definieren für eine Finanzposition X den Value at Risk zum Niveau λ als

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) := -q_X^+(\lambda) = q_{-X}^-(1-\lambda) = \inf\{m : P(X + m < 0) \leq \lambda\}.$$

Bemerkung 1.4.11

- Im Finanzkontext ist $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ die kleinste Kapitalmenge, die, sobald sie zu X hinzugefügt und risikolos investiert wird, die Wahrscheinlichkeit eines negativen Endvermögens unter dem Niveau λ hält.

- $\mathrm{V@R}_\lambda$ kontrolliert nur die Wahrscheinlichkeit eines Verlusts, aber nicht dessen Größe, falls er eintritt.

- $\mathrm{V@R}_\lambda$ ist ein monetäres Risikomaß auf $\mathscr{X} = L^0$ (Menge aller P-fast-sicheren endlichen Zufallsvariablen) und ist positiv homogen.

  Beweis
  - Monotonie: Sei $X \leq Y$. Dann ist $F_X(x) = P(X \leq x) \geq P(Y \leq x) = F_Y(x)$ und $q_X^+(\lambda) \leq q_Y^+(\lambda)$ (Siehe Satz 1.3.9). Daher gilt $\mathrm{V@R}_\lambda(Y) = -q_Y^+(\lambda) \leq -q_X^+(\lambda) = \mathrm{V@R}_\lambda(X)$.

  - Translationsinvarianz: Sei $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_\lambda(X + x) &= \inf\{m : P(X + x + m < 0) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{\tilde{m} - x : P(X + x + \tilde{m} - x < 0) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{\tilde{m} - x : P(X + \tilde{m} < 0) \leq \lambda\} \\ &= \mathrm{V@R}_\lambda(X) - x \end{aligned}$$

  - Positive Homogentiät: Sei $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_\lambda(X) &= \inf\{m : P(\alpha X + m < 0) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{\alpha\tilde{m} : P(\alpha X + \alpha\tilde{m} < 0) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{\alpha\tilde{m} : P(X + \tilde{m} < 0) \leq \lambda\} \\ &= \alpha \mathrm{V@R}_\lambda(X) \end{aligned}$$

  ■

- $\mathrm{V@R}_\lambda$ ist in der Regel nicht konvex und damit kein konvexes Risikomaß. Das heißt, dass der Value at Risk manchmal Diversifikation bestraft.

Beispiel 1.4.12
Wir betrachten zwei Finanzpositionen X_1, X_2:

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0{,}99 \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0{,}01 \end{cases}, \qquad X_2 = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0{,}99 \\ -10^{10} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0{,}01 \end{cases}$$

Dann ist $\mathrm{V@R}_{0{,}01}(X_1) = \inf\{m : P(m + X_1 < 0) \leq 0\ 01\} = -1 = \mathrm{V@R}_{0{,}01}(X_2)$. Der Value at Risk unterscheidet nicht zwischen diesen beiden Positionen, obwohl X_2 im Falle eines Verlustes den viel höheren Verlust erleidet. Beide Positionen sind akzeptabel in dem Sinne, dass sie keinen positiven V@R haben.

Beispiel 1.4.13
Wir betrachten zwei unabhängige Finanzpositionen X_1 und X_2, wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p = 0{,}5 \\ -1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit} (1-p) = 0{,}5 \end{cases}$$

für $i = 1{,}2$. Dann ist das diversifizierte Portfolio gegeben durch

$$\frac{X_1 + X_2}{2} = \begin{cases} 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \cdot p = 0{,}25 \\ 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 2 \cdot p(1-p) = 0{,}5 \\ -1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit} (1-p)(1-p) = 0{,}25. \end{cases}$$

Dann ist $\mathrm{V@R}_{0{,}5}(X_i) = -1$ für $i = 1{,}2$ und $\mathrm{V@R}_{0{,}5}(\frac{1}{2}(X_1 + X_2)) = 0$. Das heißt, nach dem Value at Risk ist das diversifizierte Portfolio das riskantere Portfolio, verglichen zu den Einzelpositionen. Insbesondere gilt:

$$\frac{1}{2}\mathrm{V@R}_{0{,}5}(X_1) + \frac{1}{2}\mathrm{V@R}_{0{,}5}(X_2) = -1 \ngeq \mathrm{V@R}_{0{,}5}(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2)$$

1.4.3. Average Value at Risk

Im Folgenden betrachten wir ein Risikomaß, das über den Value at Risk definiert wird, aber im Gegensatz dazu ein kohärentes Risikomaß ist.

Definition 1.4.14
Der Average Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ einer Position $x \in \mathscr{X}$ ist

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\gamma(X)\,d\gamma$$

Daraus bekommt man sofort die Darstellung

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda q_X^+(\gamma)\,d\gamma.$$

Bemerkung 1.4.15
Im Satz 1.3.2 haben wir gesehen, dass

$$\mu \succeq_{\text{uni}} \nu \iff \forall t \in (0,1] : \int_0^t q_\mu(s)\,ds \geq \int_0^t q_\nu(s)\,ds$$

für Quantilfunktionen q_μ, q_ν von μ, ν. Seien nun X_μ, X_ν Zufallsvariablen mit Verteilung μ, ν.

$$\mu \succeq_{\text{uni}} \nu \iff \forall \lambda \in (0,1] : \mathrm{AV@R}_\lambda(X_\mu) \leq \mathrm{AV@R}_\lambda(X_\nu)$$

Lemma 1.4.16
Sei $\lambda \in (0,1)$ und q ein λ-Quantil von X. Dann gilt:

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} E[(q-X)^+] - q = \frac{1}{\lambda} \inf_{r\in\mathbb{R}} (E[(r-X)^+] - \lambda r)$$

Beweis
Übungsblatt. ■

Satz 1.4.17
Für $\lambda \in (0,1)$ ist AV@R ein kohärentes Risikomaß.

Beweis
Monotonie, Translationsinvarianz und positive Homogenität rechnet man leicht nach. Wir zeigen nur die Subadditivität, also $\mathrm{AV@R}_\lambda(X+Y) \le \mathrm{AV@R}_\lambda(X) + \mathrm{AV@R}_\lambda(Y)$.

Aus Lemma 1.4.16 folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{AV@R}_\lambda(X) &= \frac{1}{\lambda} E[(q-X)^+] - q \\
&= \frac{1}{\lambda} E[(q-X)1_{\{X<q\}}] - q \\
&= \frac{1}{\lambda} (qP(X<q) + E[(-X)1_{\{X<q\}}]) - q \\
&= -\frac{1}{\lambda} E[X 1_{\{X<q\}} + q(\lambda - P(X<q))]
\end{aligned}$$

Betrachte die Zufallsvariable

$$1^{(\lambda)}_{\{X<q\}} := \frac{1}{\lambda}(1_{\{X<q\}} + \kappa 1_{\{X=q\}}),$$

wobei q ein λ-Quantil von X ist und

$$\kappa = \begin{cases} 0, & \text{falls } P(X=q)=0 \\ \frac{\lambda - P(X<q)}{P(X=q)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
E[-X\cdot 1^{(\lambda)}_{\{X<q\}}] &= \int (-X)\cdot \frac{1}{\lambda}(1_{\{X<q\}} + \kappa 1_{\{X=q\}}) dP \\
&= -\frac{1}{\lambda} E[X 1_{\{X<q\}}] - \frac{\kappa}{\lambda} E[X\cdot 1_{\{X=q\}}] \\
&= -\frac{1}{\lambda} E[X 1_{\{X<q\}}] - \frac{\kappa}{\lambda} qP(X=q) \\
&= \mathrm{AV@R}_\lambda(X)
\end{aligned}$$

Wir verwenden nun diese Darstellung, um die Subadditivität zu zeigen. Seien q_X, q_Y und q_{X+Y} λ-Quantile von X, Y und $X+Y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AV@R}_\lambda(X) + \mathrm{AV@R}_\lambda(Y) - \mathrm{AV@R}_\lambda(X+Y) \\
=&E[-X1^{(\lambda)}_{\{X<q_X\}}] + E[-Y1^{(\lambda)}_{\{Y<q_Y\}}] - E[-(X+Y)1^{(\lambda)}_{\{(X+Y)<q_{(X+Y)}\}}] \\
=&E[X(1^{(\lambda)}_{\{X+Y<q_{X+Y}\}} - 1^{(\lambda)}_{\{X<q_X\}})] + E[Y(1^{(\lambda)}_{\{X+Y<q_{X+Y}\}} - 1^{(\lambda)}_{\{Y<q_Y\}})] \\
\geq& q_X E[1^{(\lambda)}_{\{X+Y<q_{X+Y}\}} - 1^{(\lambda)}_{\{X<q_X\}}] + q_Y E[1^{(\lambda)}_{\{X+Y<q_{X+Y}\}} - 1^{(\lambda)}_{\{Y<q_Y\}}] \\
=&q_X(1-1) + q_Y(1-1) \\
=&0
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass

- $E[1^{(\lambda)}_{\{X<q_X\}}] = 1$
- $1^{(\lambda)}_{\{X+Y<q_{X+Y}\}} - 1^{(\lambda)}_{\{X<q_X\}} \geq 0$ für $X > q_X$
- $1^{(\lambda)}_{\{X+Y<q_{X+Y}\}} - 1^{(\lambda)}_{\{X<q_X\}} \leq 0$ für $X \leq q_X$ ■

Bemerkung 1.4.18

(1) Seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf der gleichen σ-Algebra $\mathscr{F}$ definiert sind. Q ist *absolut stetig* bezüglich P (Notation: $Q \ll P$), falls für alle $A \in \mathscr{F}$ mit $P(A) = 0$ gilt $Q(A) = 0$.

(2) Für $Q \ll P$ nennt man die $\mathscr{F}$-messbare Funktion (Zufallsvariable) X mit

$$\forall A \in \mathscr{F} : Q(A) = \int_A X dP$$

die *Radon-Nikodym-Ableitung*. Schreibweise:

$$\frac{dQ}{dP} = X.$$

(3) Falls $Q \ll P$ und $P \ll Q$ gilt, nennt man P und Q *äquivalente Maße* und schreibt $P \sim Q$.

Satz 1.4.19

Für $\lambda \in (0,1)$ hat der $\mathrm{AV@R}_\lambda(X)$ die Form

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \max_{Q \in Q_\lambda} E_Q[-X],$$

wobei Q_λ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße ist, die absolut stetig bezüglich P sind und deren Dichte durch $\frac{1}{\lambda}$ beschränkt ist. Das Maximum wird von dem Maß $\tilde{Q}$ angenommen mit

$$\frac{d\tilde{Q}}{dP} = 1^{(\lambda)}_{\{X<q\}}.$$

Beweis

Föllmer und Schied, Beweis von Theorem 4.47. ■

Man kann für geeignete Räume zeigen, dass ein Risikomaß ρ genau dann kohärent ist, wenn es als $\rho(X) = \sup_{Q \in \mathscr{Q}} E_Q[-X]$ dargestellt werden kann. (Siehe Föllmer und Schied, Proposition 4.14)