2. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

31. Oktober 2007

Nachtrag

F heißt Faserprodukt von A und B über S, $:\Leftrightarrow$ wenn für jede Menge M und jedes Paar von Abb. g_A, g_B nach A bzw. B mit $f_A \circ g_A = f_B \circ g_B$ genau eine Abb. $h : M \to F$ ex. mit $g_A = \pi_a \circ h, g_B = \pi_B \circ h$.

Aufgabe 1

$(X, d), (Y, d)$ metr. Räume, $f_2 : X \times Y \to \mathbb{R}_{\geq}$ gegeben durch ÜB
Behauptung: F_2 ist Metrik.

- Symmetrie: klar
- Definitheit: klar, da d, e Metriken.
- Dreiecksungleichung: Sei $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$
  $\Rightarrow f_2\big((x_1, y_1), (x_3, y_3)\big) = \big(d(x_1, x_3)^2 + e(y_1), y_3)^2\big)^{\frac{1}{2}}$
  $\leq \Big(\big(d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)\big)^2 + \big(e(y_1, y_2) + e(y_2, y_3)\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$
  $\leq \big(d(x_1, x_2)^2 + e(y_1, y_2)^2\big)^{\frac{1}{2}} + \big(d(x_2, x_3)^2 + e(y_2, y_3)^2\big)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow f_2$ ist Metrik.
2te Metrik

- Symmetrie: klar
- Definitheit: klar
- Dreiecksungl. Sei $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$
  $\Rightarrow f_\infty\big((x_1, y_1), (x_3, y_3)\big) = \max\big(d(x_1, x_3), e(y_1, y_3)\big)$
  $\leq \max\big(d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3), e(y_1, y_2) + e(y_2, y_3)\big)$
  $\leq \max\big(d(x_1, x_2), e(y_1, y_2)\big) + \max\big(d(x_2, x_3), e(x_2, x_3)\big)$

$\Rightarrow f_\infty$ ist Metrik.
Gesucht: $c > 0$ mit: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y : \frac{1}{c} f_2(\ldots) \leq f\infty(\ldots) \leq c f_2(\ldots)$.
z.B. $\sqrt{2}$ erfüllt das, denn: Seien $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann gilt

- $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\max(x,y)^2+\max(x,y)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2\max(x,y)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\max(x,y)$ $\Rightarrow (1)$
- $\max(x,y) = \sqrt{\max(x,y)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow (2)$

Aufgabe 2

Definiere $D := X \uplus Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$
Disjunkte Vereinigung von X und Y.
$f : X \to D, x \mapsto (x,0)$
$g : Y \to D, y \mapsto (y,1)$.
Definiere $c : D \to Z$ durch $m \mapsto \begin{cases} k(x) & \text{, falls} m = (x,0) \\ l(y) & \text{, falls} m = (y,1) \end{cases}$
c erfüllt das Gewünschte. Soll gelten:
$\forall x \in X : c(f(x)) = k(x)$
$\forall y \in Y : c(g(y)) = l(y)$, dann muss nach Def. von f,g gelten:
$c((x,0)) = k(x)$
$c((y,1)) = l(y)$.
Seien D_1, D_2 Mengen mit obiger Eigenschaft

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \exists! c_1 : D_1 \to D_2 : & f_2 = c_1 \circ f_1 \\ & g_2 = c_1 \circ g_1 \\ \exists! c_2 : D_2 \to D_1 : & f_1 = c_2 \circ f_2 \\ & g_2 = c_1 \circ g_1 \end{array}$$

$\Rightarrow c_2 \circ c_1$ ist Abb. mit $c_2 \circ c_1 \circ f_1 = f_1, c_2 \circ c_1 \circ g_1 = g_1$
$\Rightarrow c_2 \circ c_1 = \mathrm{id}_{D_1}$ genauso $c_1 \circ c_2 = \mathrm{id}_{D_2}$
c_1 ist Bijektion zw. D_1 und D_2, und zwar die einzig sinnvolle.

Aufgabe 3

Beweis:
Nachrechnen: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet z = z$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}\right) \bullet z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \bullet z\right)$$

Noch zu zeigen:
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z \in L \backslash K$ für alle $z \in L \backslash K$.
Wäre $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z = \frac{az+b}{cz+d} = k \in K$ dann wäre das äquivalent zu
$(a-ck)z = dk-b \Leftrightarrow a-ck = 0 = dk-b \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$
lin. abh. über $K \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}_2(K)$
Sei $K = \mathbb{R}, L = \mathbb{C}$, dann ist die Operation transitiv, denn:
Alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ liegen in der Bahn von i.
Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, dann ist $\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{yi+x}{1} = x + iy = z$.
Welche Elemente aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ haben Fixpunkte in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$?

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1.Fall $c \neq 0$. Dann gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z = z \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z$

$\Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$

Mitternachtsformel: Diese Gleichung hat

(i) 1 reelle Lösung, falls $(a-d)^2 + 4bc = 0$

(ii) 2, reelle Lösungen, falls $(a-d)^2 + 4bc > 0$

(iii) 2 echt komplexe Lösungen, falls $(a-d)^2 + 4bc < 0$

(iii) $\Leftrightarrow \mathrm{Spur}(A)^2 < 4\det(A)$

2.Fall $c = 0$

(i) $a = d : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \bullet z = z \Leftrightarrow az + b = az \Leftrightarrow b = 0$

Daraus folgt $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ fixiert alle Elemente aus $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$

(ii) $a \neq d : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \bullet z = z \Leftrightarrow \frac{az+b}{d} = \frac{b}{d-a} \in \mathbb{R} \Rightarrow A$ hat keine Fixpunkte in $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$

Insgesamt: Fixpunkte in $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ haben Matrizen der Form $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ und Matrizen mit $\mathrm{Spur} A^2 < 4 \det A$