

21. Differenzierbarkeit

In diesem Paragraphen seien stets: $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition

- (1) f heißt in $x_0 \in I$ **differenzierbar** (db) genau dann, wenn der $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert und $\in \mathbb{R}$ ist. ($\iff \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ und ist $\in \mathbb{R}$). In diesem Fall heißt $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ die **Ableitung von f in x_0** .
- (2) f heißt auf I differenzierbar genau dann, wenn f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall wird durch $x \mapsto f'(x)$ eine Funktion $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die **Ableitung von f auf I** .

Beispiele:

- (1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c \ \forall x \in I$. f ist differenzierbar auf I , $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$.
- (2) Sei $I = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x^n$. Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x$. $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \stackrel{\S 1}{=} x^{n-1} + x_0^{n-2}x + x_0^{n-3}x^2 + \dots + x_0x^{n-2} + x^{n-1} \rightarrow nx_0^{n-1} \ (x \rightarrow x_0)$. f ist also differenzierbar auf \mathbb{R} und $f'(x) = nx^{n-1} \ \forall x \in \mathbb{R}$. Kurz: $(x^n)' = nx^{n-1}$ auf \mathbb{R} .
- (3) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. $x \neq 0 : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \implies f$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. (Beachte: f ist stetig in x_0)
- (4) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. 17.3 $\implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$. Kurz: $(e^x)' = e^x$.

Satz 21.1 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)

Ist f differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f stetig in x_0

Beweis

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \cdot 0 = 0 \ (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \blacksquare$$

Satz 21.2 (Ableitungsregeln)

$g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine weitere Funktion, f und g ableitbar in $x_0 \in I$.

- (1) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ differenzierbar in x_0 und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(2) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) Es sei $g(x) \neq 0 \forall x \in I$. $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 und

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis

(1) Klar. Für (2) und (3) beachte: $f(x) \rightarrow f(x_0), g(x) \rightarrow g(x_0)$ ($x \rightarrow x_0$) (wegen 21.1)

(2) $\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \rightarrow f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$ ($x \rightarrow x_0$)

(3) $h := \frac{f}{g} : \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \right) \rightarrow \frac{1}{g(x_0)^2} (f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0))$ ($x \rightarrow x_0$). ■

Beispiele:

(1) $f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}, f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x)^2} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x} \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $(\cosh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$ auf \mathbb{R} .
 $(\sinh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$ auf \mathbb{R} .

Satz 21.3 (Kettenregel)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionen und $g(J) \subseteq I$. Weiter sei g differenzierbar in $x_0 \in J$ und f differenzierbar in $y_0 := g(x_0)$. Dann ist $f \circ g : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

Beweis $\left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & , y \in I \setminus \{y_0\} \\ f'(y_0) & , y = y_0 \end{array} \right.$ ist differenzierbar in $y_0 \implies h(y) \rightarrow f'(y) = f'(g(x))$ ($y \rightarrow y_0$). 21.1 $\implies g(x) \rightarrow g(x_0) = y_0$ ($x \rightarrow x_0$) $\implies h(g(x)) \rightarrow f'(g(x_0))$ Es ist $f(y) - f(y_0) = h(y)(y - y_0) \forall y \in I \implies \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = h(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(g(x_0))g'(x_0)$ ($x \rightarrow x_0$) ■

Beispiele:

(1) Sei $I = \mathbb{R}, a > 0, a^x = e^{x \log a} = f(g(x))$ mit $f(x) = e^x, g(x) = x \log a \implies (a^x)' = f'(g(x))g'(x) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$ auf \mathbb{R}

(2) $I = [0, \infty), f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f'(0) = 0$
 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ($x \in [0, \infty)$).

Es gilt: $x = f(f^{-1}(x)) \forall x \geq 0$ Annahme: f^{-1} ist differenzierbar in $x_0 = 0 \xrightarrow{21.3, (*), x_0 = 0} 1 = \underbrace{f'(f^{-1}(0))}_{=0} \cdot (f^{-1})'(0) = 0$ Widerspruch!

Das heißt $f^{-1}(x_0)$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Satz 21.4 (Ableitung der Umkehrfunktion)

$f \in C(I)$ sei streng monoton, f differenzierbar in $x_0 \in I$ und $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Beweis

Sei (y_n) eine Folge in $f(I) \setminus \{y_0\}$ und $y_n \rightarrow y_0$ und $\alpha_n = \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0}$. Zu zeigen: $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$ ($n \rightarrow \infty$) $x_n := f^{-1}(y_n) \implies y_n = f(x_n), x_n \in I, \forall n \in \mathbb{N} \implies \alpha_n = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$ ($n \rightarrow \infty$) ■

Beispiele:

- (1) $I = \mathbb{R}, f(x) = e^x, f^{-1}(y) = \log y$ ($y > 0$). Sei $y > 0$, also $y = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) $\implies (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$. Kurz: $(\log x)' = \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$.
- (2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f(x) = x^\alpha$ ($x > 0$), dann: $f(x) = e^{\alpha \log x} \implies f'(x) = e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \log x)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. Kurz: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ auf $(0, \infty)$
- (3) Für $\alpha = \frac{1}{2}$ liefert Beispiel (2): $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ auf $(0, \infty)$

Definition

Zu $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in M$. x_0 heißt ein **innerer Punkt** von M genau dann, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $U_\delta(x_0) \subseteq M$.

Beispiele:

- (1) M ist offen genau dann, wenn jedes $x \in M$ ein innerer Punkt von M ist.
- (2) Sei $a < b, M \in \{[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]\}$. $x_0 \in M$ ist innerer Punkt von M genau dann, wenn $x_0 \in (a, b)$
- (3) \mathbb{Q} hat keine inneren Punkte

Definition

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$, g hat in x_0 ein **relatives Maximum** : $\iff \exists \delta > 0 : g(x) \leq g(x_0) \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$.

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$, g hat in x_0 ein **relatives Minimum** : $\iff \exists \delta > 0 : g(x) \geq g(x_0) \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$.

Ein **relatives Extremum** ist ein relatives Maximum oder Minimum.

Satz 21.5 (Erste Ableitung am relativen Extremum)

f sei differenzierbar in $x_0 \in I$, f habe in x_0 ein relatives Extremum und x_0 sei ein innerer Punkt von I . Dann gilt: $f'(x_0) = 0$.

Beweis

f habe in x_0 ein relatives Maximum. Dann existiert $\delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I$ und $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in U_\delta(x_0)$.

$$\text{Sei } x \in U_\delta(x_0) \text{ und } x < x_0 \implies \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \implies f'(x_0) \quad (x \rightarrow x_0-) \\ > \leq \quad (x \rightarrow x_0+)$$

Also: $f'(x_0) = 0$. ■

Bemerkungen:

- (1) Die Voraussetzung „ x_0 ist ein innerer Punkt von I “ ist wesentlich. Beispiel: $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, $x_0 = 0$ oder $x_0 = 1$.
- (2) Ist f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = 0$, so muss f in x_0 *kein* relatives Extremum haben. Beispiel: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

Satz 21.6 (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)

Sei $I = [a, b]$ ($a < b$), $f, g \in C(I)$ und f und g seien differenzierbar auf (a, b) . Weiter sei $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$.

- (1) **Satz von Rolle:** Es sei $f(a) = f(b)$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = 0.$$

- (2) **Mittelwertsatz (MWS) der Differenzialrechnung:**

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

- (3) **Erweiterter Mittelwertsatz:** Es ist $g(b) \neq g(a)$ und $\exists \xi \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis

- (1) 18.3 $\implies \exists s, t \in [a, b] : f(s) \leq f(x) \leq f(t) \forall x \in [a, b]$.

Fall 1: $s, t \in \{a, b\} \implies f$ ist auf I konstant $\implies f' = 0$ auf $I \implies$ Beh.

Fall 2: $s \in (a, b)$ oder $t \in (a, b)$. Etwa: $s \in (a, b) \implies s$ ist ein innerer Punkt von I und f hat in s ein Minimum. 21.5 $\implies f'(s) = 0$.

- (2) folgt aus (3) mit $g(x) = x$.

- (3) $h(x) := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ ($x \in I$). Dann gilt: $h \in C(I)$, h ist differenzierbar auf (a, b) .

$$h(a) = h(b) \xrightarrow{(1)} \exists \xi \in (a, b) : 0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

$$\implies (f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Aus (1) folgt: $g(a) \neq g(b)$ (sonst existierte $x_0 \in (a, b)$ mit $g'(x_0) = 0$).

$$\implies \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

■

Folgerungen 21.7

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf I .

- (1) Ist $f' = 0$ auf $I \implies f$ ist auf I konstant
 \geq wachsend
 \leq fallend
 $>$ streng wachsend
 $<$ streng fallend

- (2) Ist $f' = g'$ auf $I \implies \exists c \in \mathbb{R} : f = g + c$ auf I .

Beweis

- (1) Seien $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$. 21.6 (2) $\implies \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \implies$ Beh.

- (2) $h := f - g \implies h' = 0$ auf $I \xrightarrow{(1)} \text{Beh.}$

■

Beispiele:

- (1) Es existiert genau ein $x_0 \in \mathbb{R} : e^{-x_0} = x_0$.

Beweis

$f(x) := e^{-x} - x$ ($x \in \mathbb{R}$) $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$. 18.2 $\implies \exists x_0 \in (0, 1) : f(x_0) = 0$, also: $e^{-x_0} = x_0$.

$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{21.7} f$ ist streng fallend $\implies f$ hat genau eine Nullstelle, nämlich x_0 . \implies Beh.

■

- (2) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf \mathbb{R} und $f' = f$ auf $\mathbb{R} \implies \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = ce^x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Beweis

$h(x) := \frac{f(x)}{e^x} \implies h'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{(e^x)^2} = 0 \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{21.7} \exists c \in \mathbb{R} : h(x) = c \forall x \in \mathbb{R} \implies$
Beh.

■

Satz 21.8 (Die Regeln von de l'Hospital)

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ seien auf (a, b) differenzierbar und es sei $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ ($a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen). Weiter existiere $L := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ($L = \pm\infty$ zugelassen) und es gelte

$$(I) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0 \text{ oder}$$

$$(II) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \pm\infty.$$

Dann gilt: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Beweis

Nur unter der Voraussetzung (I) und nur für $x \rightarrow a$.

Fall 1: $a \in \mathbb{R}$. $f(a) := g(a) := 0 \xrightarrow[21.1]{(I)} f, g \in C[a, b]$.

Sei $x \in (a, b)$. 21.6 (3) $\implies \exists \xi = \xi(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \rightarrow L$ (für $x \rightarrow a$, da dann auch $\xi \rightarrow a$).

Fall 2: $a = -\infty$. Substituiere $x = \frac{1}{t}$, also $t = \frac{1}{x}$ ($x \rightarrow a = -\infty \iff t \rightarrow 0-$).

$\varphi(t) := f(\frac{1}{t}) = f(x)$, $\psi(t) := g(\frac{1}{t}) = g(x)$. z.z.: $\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \rightarrow L$ ($t \rightarrow 0-$)

$$\varphi'(t) = f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2}) = f'(x)(-x^2)$$

$$\psi'(t) = g'(x)(-x^2)$$

$$\implies \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow L \quad (t \rightarrow 0-) \xrightarrow{\text{Fall 1}} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \rightarrow L \quad (t \rightarrow 0-).$$

■

Beispiele:

$$(1) \quad a, b > 0 : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1$$

$$(4) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+tz)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+tz} \cdot t}{1} = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(5) \quad \text{Für } t \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{t}{x})^x = e^t \quad (\text{insbesondere } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{t}{n})^n = e^t, \quad n \in \mathbb{N})$$

Beweis

$$\varphi(x) := (1 + \frac{t}{x})^x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \log(1 + \frac{t}{x}) \stackrel{z=\frac{1}{x}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+tz)}{z} = t$$

$$\implies \varphi(x) \rightarrow e^t \quad (x \rightarrow \infty).$$

■

Satz 21.9 (Ableitung von Potenzreihen)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I := (x_0-r, x_0+r)$, ($I = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ($x \in I$)

(1) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ hat den Konvergenzradius r .

(2) f ist auf I differenzierbar und $f'(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1} \quad \forall x \in I$, also $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)'$

Beweis

(1) $\limsup \sqrt[n]{|n a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \implies \text{Behauptung.}$

(2) Später

■

Beispiele:

- (1) $(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$ auf \mathbb{R} .
- (2) $(\cos x)' = -\sin x$

Satz 21.10 (Eigenschaften trigonometrischer Funktionen)

- (1) $\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2 x + \sin^2 x = 1, |\cos x| \leq 1, |\sin x| \leq 1, |\sin x| \leq |x|$
- (2) Additionstheoreme: $\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- (3) $\sin x > x - \frac{x^3}{3!} > 0 \forall x \in (0, 2)$; insbesondere: $\sin 1 > \frac{5}{6}$.
- (4) $\exists \xi_0 \in (0, 2)$ mit $\cos \xi_0 = 0$ und $\cos x \neq 0 \forall x \in [0, \xi_0), \pi := 2\xi_0$ (Pi). Also: $\pi \in (0, 4)$ ($\pi \approx 3,14\dots$), $\cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos x \neq 0 \forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$.
- (5) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
- (6) $\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x$
 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
 $\sin(x + \pi) = -\sin x, \cos(x + \pi) = -\cos x$
 $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x$
- (7) Für $x \in [0, \pi] : \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$
- (8) $\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$.
 $\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Beweis

- (1) $f(x) := \cos^2 x + \sin^2 x - 1. f'(x) = 2 \cos x (-\sin x) + 2 \sin x \cos x = 0. 21.7 \implies f$
ist auf \mathbb{R} konstant. $f(0) = 0 \mid \cos x| = \sqrt{\cos^2 x} \leq \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$, ObdA $x \neq 0$.
 $\sin x = \sin x - \sin 0 \stackrel{\text{MWS}}{=} \underbrace{|\cos \xi|}_{\leq 1} |x| \leq |x|$
- (2) Sei $y \in \mathbb{R}$ und $f(x) := (\sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y)^2 + (\cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y)^2$. Klar: $f(0) = 0$. Nachrechnen: $f' = 0$ auf $\mathbb{R}. 21.7 \implies f \equiv 0$ auf \mathbb{R} .
- (3) Für $x \in (0, 2) : \sin x = \underbrace{(x - \frac{x^3}{3!})}_{>0} + \underbrace{(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!})}_{>0} + \dots \implies$ Behauptung.
- (4) $\cos 0 = 1 > 0. \cos 2 = \cos(1+1) = \cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos^2 1 + \sin^2 1 - 2 \sin^2 1 = 1 - 2 \sin^2 1 \stackrel{(3)}{<} 1 - 2 \frac{25}{36} < 0. 18.2 \implies \exists \xi_0 \in (0, 2) : \cos \xi_0 = 0$, In $(0, 2) : (\cos x)' = -\sin x \stackrel{(3)}{<} 0 \implies \cos x$
ist in $(0, 2)$ streng monoton fallend $\implies \cos x \neq 0 \forall x \in [0, \xi_0)$
- (5) $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \implies \sin \frac{\pi}{2} = \pm 1. (3) \implies \sin \frac{\pi}{2} > 0 \implies \sin \frac{\pi}{2} = 1$.
- (6) Die erste Behauptung mit kann mit Potenzreihen, der Rest mit den Additionstheoremen bewiesen werden.

(7) „ \Leftarrow “: klar, „ \Rightarrow “: Sei $x \in [0, \pi]$ und $\cos x = 0 \xrightarrow{(4)} x \geq \frac{\pi}{2}, y := \pi - x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $\cos y = \cos(x + \pi) \stackrel{(6)}{=} -\cos(-x) = -\cos(x) \xrightarrow{(4)} y \leq \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$.

(8) In den gr. Übungen ■

Definition 21.11 (Tangens)

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$I := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; $f(x) := \tan x$ ($x \in I$). Dann: $f \in C(I)$. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$,

$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist auf I streng monoton wachsend $\Rightarrow \exists f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow I, \arctan x := f^{-1}(x) (x \in \mathbb{R})$ **Arcustangens**. Sei $y = \tan x$ ($x \in I$). $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$. Also: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ auf \mathbb{R} .

Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall; $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. f wird in einer Umgebung von x_0 durch eine Potenzreihe dargestellt : $\iff \exists \delta > 0$ und \exists eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ mit Konvergenzradius $\geq \delta$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \forall x \in I \cap U_{\delta}(x_0)$.

Beispiele:

(1) $I = (-\infty, 1), f(x) = \frac{1}{1-x}$. Bekannt: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $x \in (-1, 1)$. Also: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $x \in (-1, 1)$

(2) $I = \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ ($x \in (-1, 1)$)

(3) $I = (-1, \infty), f(x) = \log(1+x)$. Behauptung: (*)

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x \in (-1, 1))}$$

Beweis

$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ($x \in (-1, 1)$) 21.9 $\Rightarrow g$ ist auf $(-1, 1)$ differenzierbar und $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = f'(x) \forall x \in (-1, 1)$. 21.7 $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + c \forall x \in (-1, 1) \xrightarrow{x=0} 0 = f(0) = g(0) + c = c \Rightarrow f(x) = g(x) \forall x \in (-1, 1) \Rightarrow$ Behauptung. In den gr. Übungen wird gezeigt (Abelscher Grenzwert-Satz): (*) gilt noch für $x = 1$. Also: $\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ■