

21. Cauchyscher Integralsatz (Homotopieversionen)

Satz 21.1 (CIS, Version I)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ seien Wege mit $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq D$, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

Sind γ_0 und γ_1 in D homotop, so gilt:

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

Beweis

Ohne Beweis

Satz 21.2 (CIS, Version II)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und γ sei ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$.

Ist γ nullhomotop in D , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Beweis

21.1

Satz 21.3 (CIS, Version III)

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es sei $f \in H(G)$ und γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$. Dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Beweis

21.2

Satz 21.4 (Charakterisierung von Elementargebieten, II)

Sei G ein Gebiet in \mathbb{C} .

G ist ein Elementargebiet $\Leftrightarrow G$ ist einfach zusammenhängend

Beweis

„ \Rightarrow “ Fall 1: $G = \mathbb{C} \Rightarrow G$ konvex, also einfach zusammenhängend (siehe 20.4)

Fall 2: $G \neq \mathbb{C} \stackrel{19,1}{\Rightarrow} \exists f \in H(G) : f(G) = \mathbb{D}$ und f ist auf G injektiv.

Sei γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$. $z_0 := \text{Anfangspunkt von } \gamma$.

Zu zeigen: γ und γ_{z_0} sind in G homotop

$\Gamma := f \circ \gamma$. Γ ist ein geschlossener Weg in \mathbb{D} . \mathbb{D} ist konvex $\stackrel{10,4}{\Rightarrow} \mathbb{D}$ ist einfach zusammenhängend.

Also existiert eine Homotopie \tilde{H} von Γ nach $\gamma_{f(z_0)}$ in \mathbb{D} . $H := f^{-1} \circ \tilde{H}$ ist eine Homotopie von γ nach γ_{z_0} in G

„ \Leftarrow “ Zu zeigen: $\forall f \in H(G) \exists F \in H(G) : F' = f$ auf G

Sei $f \in H(G)$. Sei $z_0 \in G$ (fest).

Für $z \in G$ sei $\gamma^{(z)}$ ein Weg mit $\text{Tr}(\gamma^{(z)}) \subseteq G$, $\gamma^{(z)}(0) = z_0, \gamma^{(z)}(1) = z$. (Parameterintervall von $\gamma^{(z)}$ sei $[0,1]$)

$$F(z) := \int_{\gamma^{(z)}} f(w) dw \quad (z \in G)$$

Voraussetzung + 21.1, 21.3 \Rightarrow diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $\gamma^{(z)}$.

Fast wörtlich wie im Beweis von 9.2.: $F \in H(G), F' = f$ auf G . ■

Satz 21.5 (Charakterisierung von Elementargebieten, III)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (1) G ist ein Elementargebiet
- (2) G ist einfach zusammenhängend
- (3) $\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in H(G)$ und für jeden geschlossenen Weg γ mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$
- (4) $\forall f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset \exists g \in H(G) : g' = f$ auf G
- (5) $\forall f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset \exists g \in H(G) : g^2 = f$ auf G
- (6) $G = \mathbb{C}$ oder $G \sim \mathbb{D}$

Beweis

(1) \Leftrightarrow (2): 21.4

(3) \Rightarrow (1): wie im Beweisteil „ \Leftarrow “ von 21.4

(3) \Rightarrow (4),(5): 11.4

(4) \Rightarrow (5): siehe Beweis von 11.4

(5) \Rightarrow (6): 19.6

(6) \Rightarrow (1): wie im Beweisteil „ \Rightarrow “ von 21.4

(2) \Rightarrow (3): 21.2

■

Definition

Sei $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$. A heißt in $\widehat{\mathbb{C}}$ zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ jede lokal konstante Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ist auf A konstant.

Satz 21.6 (Charakterisierung von Elementargebieten, IV)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent:

(1) G ist einfach zusammenhängend

(2) $\widehat{\mathbb{C}} \setminus G$ ist zusammenhängend in $\widehat{\mathbb{C}}$

(3) Aus $\mathbb{C} \setminus G = A \cup K$, $A \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen, $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $A \cap K = \emptyset$ folgt:
 $K = \emptyset$

Beweis

Ohne Beweis.

