DER QUOTIENTENLOGARITHMUS

JOACHIM BREITNER

Zusammenfassung. Analog zum Differenzenquotient, der das additive Wachstum einer Funktion angibt (ihre Steigung), definieren wir den Quotientenlogarithmus, der die gleichen Prinzipien um eine Operation „verschiebt“

Dieses Dokument ist noch ein Entwurf, oft wurden Voraussetzungen nicht überprüft und Fehler hats sicher auch noch genug.

1. Motivation

Der Differenzenquotient ist definiert durch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Wenn wir – etwas unexakt – den Limes ignorieren, können wir die Gleichung umformen zu

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)\,.$$

Die Analogie zum Mittelwertsatz ist offensichtlich. Nun verschieben wir die Ordnung der Operationen – aus Addition wird Multiplikation und aus Multiplikation wird Potenzierung – und benennen f' in f° um, dann ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{f(x)}{f(x_0)} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{f^\circ(x_0)}$$

Wir führen das wieder auf die Form mit Limes zurück:

$$f^\circ(x_0) := \lim_{x \to x_0} \log_{\frac{x}{x_0}} \frac{f(x)}{f(x_0)}$$

und bringen es auf eine besser lesbare Form, um die Defintion des Quotientenlogarithmus zu erhalten:

2. Definition

Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^+$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion. Dann wird im Existenzfall des Grenzwertes durch

$$f^\circ(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{\log f(x) - \log f(x_0)}{\log x - \log x_0}$$

der **Quotientenlogarithmus** von f an der Stelle x_0 definiert und f heißt an der Stelle x_0 bebleitbar.

Ist f auf allen $x_0 \in U$ bebleitbar, so heißt f bebleitbar auf U und die Funktion $f^\circ : U \to \mathbb{R}^+$ heißt die Bebleitung von f.

3. Beispiele

Betrachten wir nun einige übliche Funktionen und ihre Bebleitungen.

(1) $f(x) = c$, $c > 0$:

$$f^\circ(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\log c - \log c}{\log x - \log x_0} = 0$$

(2) $f(x) = x$, $x > 0$:

$$f^\circ(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\log x - \log x_0}{\log x - \log x_0} = 1$$

(3) $f(x) = e^x$:

$$f^\circ(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{\log x - \log x_0} = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} \right)^{-1} = (\frac{1}{x_0})^{-1} = x_0$$

(4) $f(x) = x^p$, $x > 0$:

$$f^\circ(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{p \log x - p \log x_0}{\log x - \log x_0} = p$$

(5) $f(x) = \log x$, $x > 0$:

$$f^\circ(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\log \log x - \log \log x_0}{\log x - \log x_0} = \lim_{u \to u_0} \frac{\log u - \log u_0}{u - u_0} = \frac{1}{u} = \frac{1}{\log x}$$

4. Rechenregeln

Auch beim Quotientenlogarithmus lassen sich Regeln wie Produkt- und Potenzregeln definieren:

4.1. **Produktregel.** Seien f und g bebleitbare Funktionen auf D:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^\circ(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\log f(x)g(x) - \log f(x_0)g(x_0)}{\log x - \log x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\log f(x) - \log f(x_0) + \log g(x) - \log g(x_0)}{\log x - \log x_0} \\ &= f^\circ(x_0) + g^\circ(x_0)\end{aligned}$$

Dies ist soweit wenig überraschend und erinnert an die Linearität der Ableitung. Eine Folgerung dieser Regel ist, wegen $c^\circ = 0$, dass die Bebleitung bei Funktionen, die sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden, gleich ist. Daraus folgt die interessante Bebachtung, dass $(\log_b x)^\circ = \frac{1}{\log x}$, also dass die Basis des Logarithmus irrelevant ist und stets der Kehrwert des natürlichen Logarithmuses heraus kommt. Wieder einmal taucht eine Konstante, hier e, völlig unerwartet in einem Satz auf.

4.2. **Potenzregel.** Seien f und g bebleitbare Funktionen auf D:

$$\begin{aligned}
(f^g)^\circ(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\log f(x)^{g(x)} - \log f(x_0)^{g(x_0)}}{\log x - \log x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)\log f(x) - g(x_0)\log f(x_0)}{\log x - \log x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)\log f(x) - g(x)\log f(x_0) + g(x)\log f(x_0) - g(x_0)\log f(x_0)}{\log x - \log x_0} \\
&= g(x_0)f^\circ(x_0) + \log f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{\log x - \log x_0} \\
&= g(x_0)f^\circ(x_0) + \log f(x_0) \lim_{u\to u_0} \frac{g(e^u) - g(e^{u_0})}{u - u_0} \\
&= g(x_0)f^\circ(x_0) + \log f(x_0)(g(e^{u_0}))' \\
&= g(x_0)f^\circ(x_0) + \log f(x_0)(e^{u_0} \cdot g'(e^{u_0})) \\
&= g(x_0)f^\circ(x_0) + x_0 g'(x_0)\log f(x_0)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist schon neuartiger, und hier haben wir eine Verbindung zur Ableitung. Auch macht sich hier die nicht-kommutiativität der Potenzierung bemerkbar. Eine Ähnlichkeit zur Produktregel der Ableitung wird sichtbar, wenn man den Term $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{\log x - \log x_0}$ durch $(e^{g(x_0)})^\circ$ ersetzt:

$$(f^g)^\circ(x_0) = f^\circ(x_0)g(x_0) + \log f(x_0)(e^{g(x_0)})^\circ$$

Aus der Potenzregel können wir nun die Kehrwert- und Quotientenregel bilden:

4.3. **Quotientenregel.** Seien f und g bebleitbare Funktionen auf D:

$$(\frac{1}{f})^\circ = (f^{-1})^\circ = f^\circ(-1) + \log f(e^{-1})^\circ = -f^\circ$$

sowie

$$(\frac{g}{f})^\circ = (gf^{-1})^\circ = g^\circ - f^\circ$$

4.4. **Kettenregel.** Die Kettenregel ist analog zur Kettenregel der Ableitung:

$$\begin{aligned}
(f\circ g)^\circ(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\log f(g(x)) - \log f(g(x_0))}{\log x_0 - \log x} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\log f(g(x)) - \log f(g(x_0))}{\log g(x) - \log g(x_0)} \cdot \frac{\log g(x) - \log g(x_0)}{\log x_0 - \log x} \\
&= \lim_{u\to u_0} \frac{\log f(u) - \log f(u_0)}{\log u - \log u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\log g(x) - \log g(x_0)}{\log x - \log x_0} \\
&= f^\circ(g(x_0)) \cdot g^\circ(x_0)
\end{aligned}$$

5. Stetigkeit

Wie bei der Ableitung folgt auch aus der Existenz der Bebleitung die Stetigkeit:

$$\log f(x) - \log f(x_0) = \frac{\log f(x) - \log f(x_0)}{\log x - \log x_0} \cdot (\log x - \log x_0) \overset{x\to x_0}{\to} f^\circ(x_0)\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \log f(x) = \log f(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

6. Differenzierbarkeit

Folgt auch die Differenzierbarkeit? Der Mittelwertsatz liefert uns für den Logarithmus die Abschätzung $\log x - \log y = \frac{1}{\xi}(x-y)$ mit $\xi \in (x,y)$ für $0 < x < y$. Also:

$$\begin{aligned} f^\circ(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\log f(x) - \log f(x_0)}{\log x - \log x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{\eta}(f(x) - f(x_0)}{\frac{1}{\xi}(x - x_0)} \text{ mit } \eta \text{ zwischen } f(x) \text{ und } f(x_0) \\ &= \frac{x_0}{f(x_0)} f'(x_0) \end{aligned}$$

Das liefert leider mehr als nur die Differenzierbarkeit: Ableitung und Bebleitung stehen in direktem Zusammenhang, und der Quotientenlogarithmus ist also keine Bereicherung. Als letztes Goodie können wir dafür berechnen, welche Funktionen die „Quotientialgleichung“ $f^\circ = f$ erfüllen:

$$\begin{aligned} f &= f^\circ \\ f &= f' \cdot \frac{x}{f} \\ f^2 &= f' \cdot x \\ f' &= \frac{f^2}{x} \\ \int \frac{1}{f^2} df &= \int \frac{1}{x} dx \\ \frac{-1}{f} &= \log x + \log c,\ c \in \mathbb{R}^+ \\ f &= \frac{-1}{\log cx} \end{aligned}$$