24. Projektive Geometrie

24.1. Projektive Räume

Zweck: Störende Ausnahmefälle der affinen Geometrie beseitigen durch geschickte Erweiterung affiner Räume zu sogenannten projektiven Räumen, wo die Ausnahmen nicht mehr auftreten.

Sei K ein beliebiger Körper, V ein K-Vektorraum.

Definition: Die Menge der eindimensionalen Teilräume von V

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}(V) := \{Kx \mid x \in V \setminus \{0\}\}$$

heißt **projektiver Raum**.

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ heißt **projektiver Teilraum** von $\mathbb{P}(V)$, falls ein Untervektorraum $U_x \leq V$ existiert mit

$$X = \mathbb{P}(U_x) := \{Kx \mid x \in U_x \setminus \{0\}\}$$

$\dim(\mathbb{P}) := \dim(U) - 1$ heißt **Dimension** von $\mathbb{P}$.

$$X \text{ heißt } \begin{Bmatrix} \text{Punkt} \\ \text{Gerade} \\ \text{Ebene} \end{Bmatrix} \text{ falls } \dim X = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}.$$

$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$ heißt der **projektive Standardraum**.

Bemerkung: Die leere Menge $\varnothing$ ist ein projektiver Raum mit $U_\varnothing = \{0\}$, also $\dim \varnothing = -1$.

Lemma:
Ist I eine beliebige Indexmenge und $\forall i \in X : X_i \subseteq \mathbb{P}(V)$ projektive Teilräume. Dann ist

$$X := \bigcap_{i \in I} X_i \subseteq \mathbb{P}(V)$$

ein projektiver Teilraum.

Insbesondere existiert für jede beliebige Teilmenge $M \subseteq \mathbb{P}(V)$ die **projektive Hülle**

$$[M] := \bigcap_{X \text{ proj. TR}; M \subseteq X} X$$

Speziell:

(1) $X, Y \subseteq \mathbb{P}(V)$ projektive Teilräume

$$[X \cup Y] = \mathbb{P}(U_x + U_y)$$

(2) Für $M = \{P_1, \dots, P_r\}$ setze

$$[M] := [P_1, \dots, P_r]$$

Beweis: Sei $X_i = \mathbb{P}(U_i)$ zu Teilvektorräumen $U_i \leq V$. Damit:

$$\begin{aligned} X &= \bigcap_{i \in I} \{Kx \mid x \in U_i \setminus \{0\}\} \\ &= \left\{ Kx \mid x \in \bigcap_{i \in I} U_i,\ x \neq 0 \right\} \\ &\overset{\text{Def.}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) \end{aligned}$$

■

Definition: Ein projektiver Teilraum $H \subsetneq \mathbb{P}(V)$ heißt **(proj.) Hyperebene**, falls ein Punkt $p = Kx \in \mathbb{P}(V)$ existiert mit

$$[H \cup \{p\}] = \mathbb{P}(V)$$

Bemerkung: Falls $n = \dim \mathbb{P}(V) < \infty$ ist, so gilt für projektive Teilräume $H \subseteq \mathbb{P}(V)$:

$$H \text{ Hyperebene} \Longleftrightarrow \dim H = n - 1$$

Satz 40:
Ist $\dim \mathbb{P}(V) < \infty$, so gilt:

(1) Für projektive Teilräume $X, Y \subseteq \mathbb{P}$ ist

$$\dim X + \dim Y = \dim[X \cup Y] + \dim X \cap Y$$

(2) Für jede Hyperebene H und jeden projektiven Teilraum $X \not\subseteq H$ ist

$$\dim(X \cap H) = \dim X - 1$$

Insbesondere besitzen zwei verschiedene Geraden in einer projektiven Ebene $\mathbb{P}(V)$ genau einen Schnittpunkt.

Beweis: (1)

$$\begin{aligned}\dim X + \dim Y &\overset{\text{Def.}}{=} \dim U_x - 1 + \dim U_y - 1\\ &= \dim(U_x + U_y) + \dim(U_x \cap U_y) - 2\\ &= \dim[X \cup Y] + \dim(X \cap Y)\end{aligned}$$

(2) $X \subseteq H$ impliziert $[X \cup H] = \mathbb{P}(V)$. Damit folgt:

$$\dim[X \cup H] = \dim \mathbb{P}(V) = \dim H + 1$$

$$\dim X \cap H \overset{(1)}{=} \dim H + \dim X - \dim[X \cup H] = \dim X - 1$$

■

24.2. projektive Koordinaten

Definition: Die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$ heißen **unabhängig**, wenn gilt

$$\dim[p_0, p_1, \ldots, p_k] = k$$

Lemma:
Für $p_\varkappa = K \cdot v_\varkappa \quad (v_\varkappa \in V)$ gilt:

$$p_0, p_1, \ldots, p_k \text{ unabhängig} \Longleftrightarrow \dim(Kv_0 + \ldots + Kv_k) = k + 1 \text{ linear unabhängig}$$

Beweis:

$$p_0, \ldots, p_k \text{ unabhängig} \Longleftrightarrow \dim(Kv_0, \ldots, Kv_k) = k + 1$$

■

Definition: Sei $\dim \mathbb{P} = n < \infty$ und seien $p_0, \ldots, p_k, e \in \mathbb{P}$.

Das $n+2$-Tupel $(e; p_0, \ldots, p_n)$ heißt ein **Koordinatensystem** von $\mathbb{P}$, wenn je $n+1$ Punkte hiervon linear unabhängig sind.

Beachte: Ein Koordinatensystem legt eine (bijektive) **Koordinatenabbildung**

$$D : \mathbb{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(K^{n+1})$$

fest wie folgt:

(1) Jede Wahl von Erzeugern $v'_\varkappa$ der $p_\varkappa$ ergibt eine Basis $\{v'_0, \ldots, v'_n\}$ von V.

Insbesondere hat jedes $v \in V$ mit $e = Kv$ die Darstellung

$$v = \sum_{\nu=0}^{n} \underbrace{x'_\nu v'_\nu}_{=:v_\nu}$$

mit $x'_\nu \neq 0 \,\forall \nu$ (wegen der Voraussetzung über lineare Unabhängigkeit). Dabei sind die v_ν unabhängig von der Wahl der v'_ν.

(2) Zu festem v existiert also eine eindeutig bestimmte Basis $\{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v = \sum_{\nu=0}^{n} v_\nu$. Zu einem beliebigen anderen $v' = \lambda \cdot v \in K \cdot v$ gehört die Basis $\{\lambda v_0, \dots, \lambda v_n\}$.

(3) Für einen beliebigen Punkt $p = K \cdot w$ mit Basisdarstellung

$$w = \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu v_\nu$$

setze $D(p) := K \cdot (x_0, \dots, x_n) =: (x_0 : \dots : x_n)$.

Das ist wohldefiniert, da für $w' = \lambda \cdot w$ mit $\lambda \neq 0$ gilt:

$$w' = \sum_{\nu=0}^{n} \underbrace{\lambda x_\nu}_{=: x'_\nu} v_\nu$$

Daher:

$$K(x'_0, \dots, x'_n) = K(x_0, \dots, x_n)$$

$D(p)$ ist unabhängig von der speziellen Wahl von v.

$(x_0 : \dots : x_n)$ heißen **homogene Koordinaten** von $\mathbb{P}$.

(4) Es gilt offenbar:

$$\begin{aligned} D(p_\nu &= (0 : \dots : \overset{\nu}{1} : 0 : \dots : 0) \\ D(e) &= (1 : \dots : 1) \end{aligned}$$

24.3. Projektivitäten

Vorbemerkung: Jede injektive lineare Abbildung $\phi : V \to W$ von K-Vektorräumen definiert eine Abbildung der zugehörigen projektiven Räume.

$$\tilde{\phi} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W),\ p = K \cdot v \mapsto \tilde{\phi}(p) := \phi(Kv) = K\phi(v)$$

Definition: Eine Permutation φ von $\mathbb{P}$ heiß t **Projektivität**, wenn ein Vektorraumautomorphismus $\phi \in \mathrm{Aut}(V)$ existiert mit $\tilde{\phi} = \varphi$.

Lemma:
Für ϕ_1, $\phi_2 \in \mathrm{Aut}(V)$ gilt:

$$\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2 \iff \exists c \in K,\ c \neq 0 :\ \phi_1 = c \cdot \phi_2$$

Beweis: $\Longrightarrow$: klar

$\Longleftarrow$: Für alle x gilt: $\phi_1(Kx) = \phi_2(Kx)$, d.h. es existiert ein $c_x \in K$ mit $\phi_1(x) = c_x \cdot \phi_2(x)$.

Für x, y linear unabhängig setze $z := x + y$.

$$\phi_1(z) = c_z \cdot \phi_2(z) = c_z\left(\phi_2(x) + \phi_2(y)\right)$$
$$\phi_1(z) = \phi_1(x) + \phi_1(y) = c_x\phi_2(x) + c_y\phi_2(y)$$

Da x, y linear unabhängig und ϕ_i Automorphismus folgt: $\phi_2(x)$, $\phi_2(y)$ linear unabhängig.

Koeffizientenvergleich liefert $c_x = c_z = c_y$. Damit sind alle c_x gleich $=: c$. ■

Bemerkung:
(1) Die Projektivitäten von $\mathbb{P}$ bilden eine Gruppe, wobei $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2 = \widetilde{\phi_1 \circ \phi_2}$ und $\tilde{\phi}_1^{-1} = \widetilde{\phi_1^{-1}}$ ist.

(2) Jede Projektivität bildet einen projektiven Teilraum auf einen projektiven Teilraum gleicher Dimension ab.

Satz 41:
Zu verschiedenen Koordinatensystemen $(e; p_0, \ldots, p_n)$ und $(e'; p_0', \ldots, p_n')$ von $\mathbb{P}$ existiert genau eine Projektivität φ, die sie ineinander überführt, d.h.

$$\varphi(p_\nu) = p_\nu'$$
$$\varphi(e) = e'$$

Beweis: Übung. ■

24.4. Der Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Räumen

Sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, fixiere eine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{P}$ und $a = Ky \in \mathbb{P} \setminus H$. Also $\mathbb{P} = [H, a]$ und $V = U_H \oplus Ky$.

Vorbemerkung: Jedes $p \in \mathbb{P} \setminus H$ ist von der Form $p = K(u_p + y)$ mit $u_p \in U_H$ eindeutig.

Für $p = Kx \in \mathbb{P}$ gilt:
$$p \in H \Longleftrightarrow p = Kx \leq U_H$$
Also gilt: $p \in \mathbb{P} \setminus H \Longleftrightarrow p = Kx \not\leq U_H$.

Wegen direkter Summe ist x eindeutig zerlegbar:

$$x = u_p' + \lambda y \qquad (u_p' \in U_H)$$

$$x \notin U_H \Longleftrightarrow \lambda \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad Kx = K(\underbrace{\lambda^{-1}u_p'}_{=:u_p} + y)$$

Satz 42:
Die Menge $\mathbb{A} := \mathbb{P} \setminus H$ ist ein affiner Raum mit U_H als Translationsvektorraum bezüglich der Operation
$$(u, p) \mapsto K(u + u_p + y)$$
wobei $p = K(u_p + y)$ gilt, mit eindeutig bestimmtem $u_p \in U_H$.
Dabei ist die Translation $\overrightarrow{pq} = u_q - u_p$.

Beachte:
$$\dim \mathbb{A} = \dim U_H = \dim V - 1 = \dim \mathbb{P}(V)$$

Definition: Die Punkte von $\mathbb{A}$ heiß en **eigentliche Punkte**, die von H **uneigentlich**.

Umgekehrt lässt sich jeder affine Raum $\mathbb{A}$ erweitern zu einem projektiven Raum durch disjunkte Vereinigung mit einer projektiven Hyperebene H gleicher Dimension:
ohne Einschränkung sei $\mathbb{A} = K^n$. Zum Beispiel haben wir die injektive Abbildung
$$j_1 : \mathbb{A} \to \mathbb{P}(K^{n+1}),\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n)$$
$H := \mathbb{P}(\underbrace{0 \times K^n}_{\leq K^{n+1}})$.

Für eigentliche Punkte $p = (y_0 : y_1 : \ldots : y_n)$, d.h. $p \notin H$, gilt: $y_0 \neq 0$, also $p = \left(1 : \frac{y_1}{y_0} : \ldots : \frac{y_n}{y_0}\right)$, d.h. p hat die affinen Koordinaten $\left(\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}\right)$ in $\mathbb{A}$.

Es gilt: $j_1(\mathbb{A}) \mathbin{\dot\cup} H = \mathbb{P}(K^{n+1})$

Ferner gilt mit den den Einbettungen
$$j_\nu : K^n \to \mathbb{P}(K^{n+1}),\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 : \ldots : x_{\nu-1} : 1 : x_{\nu+1} : \ldots : x_n)$$
folgende Gleichheit:
$$\mathbb{P}(K^{n+1}) = \bigcup_{\nu=1}^{n+1} j_\nu(\mathbb{A})$$
Aber: nicht disjunkt.

Beispiel: (1) Die reelle projektive Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Es gibt zwei Modelle:
$$\left\{\mathbb{R} \cdot x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\right\} \longleftrightarrow \left\{G \subseteq \mathbb{R}^2 \mid G \text{ affine Gerade mit } 0 \in G\right\}$$
Dies ist das sogenannten **Büschelmodell** von $\mathbb{P}^1$.

Fixiere g (die Hyperebene besteht hier aus einem Punkt)
$$\mathbb{P}^1 \setminus \{g\} \underset{\text{bijekt.}}{\longleftrightarrow} g' \quad (\text{affine Gerade } \neq g,\ g' \parallel g)$$

eigentliche Punkte $g_a \mapsto g_a \cap g'$

g ist der einzige uneigentliche Punkt; das entspricht anschaulich einem unendlich fernen Punkt F auf g'. Sprich: **Fernpunkt**.

Wir erhalten das **Punktmodell** von $\mathbb{P}^1 : g' \dot{\cup} \{F\}$.

Ein einheitliches Modell liefert der Einheitskreis um $(0,1) \in \mathbb{R}^2$

$$S := \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y - (0,1)\| = 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbb{R}x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \right\} &\xleftrightarrow{\text{bij.}} S \\ \mathbb{R}x &\mapsto \mathbb{R}x \cap S \rightsquigarrow \{s_x\} \quad (s_x \neq (0,0)) \end{aligned}$$

(2) Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
Bündelmodell:

$$\left\{ \mathbb{R}x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \right\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \left\{ \text{affine Gerade } g \leq \mathbb{R}^3,\, 0 \in g \right\}$$

Fixiere die affine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $0 \notin E$ und eine dazu parallele E' mit $0 \in E'$.

Dabei entsteht eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 \setminus \{g' \subseteq E'\} &\longleftrightarrow E \\ g &\mapsto g \cap E \\ A &\mapsto g = 0A \end{aligned}$$

Jedem $g' \in E'$ ordnet man genau einen **Fixpunkt** $F_{g'} \in \mathbb{P}^2$ zu.

$\{g' \in E'\}$ ist projektive Gerade. $f := \{F_{g'} \mid g' \subseteq E'\}$ heißt **Ferngerade**.

$E \dot{\cup} f$ ist das Punktmodell des $\mathbb{P}^2$.

Analog lassen sich generell Bündel- und Punktmodell des $\mathbb{P}^n$ mittels $\mathbb{A}^{n+1}$ beschreiben.

Stichwortverzeichnis