

### 3. Topologie-Übung

Joachim Breitner

7. November 2007

#### Aufgabe 1

Sei  $(X, d)$  ein beschränkter metrischer Raum,  $\mathcal{C}_b(X) := \{\text{beschränkte reellwertige Fnktionen auf } X\}$ ,  $|f|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ , Metrik  $d_\infty(f, g) = |f - g|_\infty$  auf  $\mathcal{C}_b(X)$ .

**Behauptung:** Für jedes  $a \in X$  ist die Funktion  $f_a : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto d(a, x)$  stetig und beschränkt.

Seien  $x \in X$ ,  $f_a(x) := r \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt für alle  $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$  dass  $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) \leq d(a, x) + \frac{\varepsilon}{2}$  sowie dass  $d(a, x) \leq d(a, y) + d(y, x) \leq d(a, y) + \frac{\varepsilon}{2}$ . Also ist  $d(a, x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq d(y, a) \leq d(x, a) + \frac{\varepsilon}{2}$  und  $f_a(y) = d(a, y) \in B_\varepsilon(f_a(x))$ .

Mit  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  gilt also:  $f_a(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f_a(x)) = B_\varepsilon(r)$ , also ist  $f_a$  stetig.

$f_a$  ist beschränkt, da  $X$  beschränkt ist (klar nach Definition von  $f_a$ ). ■

**Behauptung:**  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{C}_b(X)$ ,  $x \mapsto f_x$  ist abstandserhaltend bezüglich  $d$  und  $d_\infty$ .

Zu zeigen ist:  $\forall x, y \in X : d_\infty(f_x, f_y) = d(x, y)$ . Einerseits gilt:  $d_\infty(f_x, f_y) = \sup_{t \in X} |f_x(t) - f_y(t)| = \sup_{t \in X} |d(x, t) - d(y, t)| \leq d(x, y)$  wegen der Dreiecksungleichung für  $d$ . Andererseits gilt:  $d_\infty(f_x, f_y) = \sup_{t \in X} |f_x(t) - f_y(t)| \geq |f_x(y) - f_y(y)| = |d(x, y) - 0| = d(x, y)$ . Insgesamt gilt also:  $d_\infty(f_x, f_y) = d(x, y)$  ■

#### Aufgabe 2

$(X, d)$  metrischer Raum,  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  monoton wachsend, nicht konstant, konkav mit  $f(0) = 0$ .

**Behauptung:**  $f \circ d$  ist Metrik auf  $X$ .

- Symmetrie: ✓
- $f(d(x, x)) = f(0) = 0$  für alle  $x \in X$ .
- $f(d(x, y)) = 0 \iff x = y$ ;

Da  $f$  monoton wachsend, nicht konstant und konkav ist, ist 0 die einzige Nullstelle von  $f$ : Es gibt ein  $\tilde{x} \in X : f(\tilde{x}) > 0$ , da  $f$  nicht konstant ist. Wäre  $x \neq 0$  eine weitere Nullstelle von  $f$ , so gelte  $x < \tilde{x}$ , da  $f$  monoton ist. Dann:  $0 = f(x) = f(\frac{x}{\tilde{x}} \cdot \tilde{x}) \geq \frac{x}{\tilde{x}} f(\tilde{x}) > 0$ , `.

- $\Delta$ -Ungleichung. Zu zeigen:  $f(a) + f(b) \geq f(a+b)$ , denn dann gilt  $\forall x, y, z \in X : f(d(x, y)) + f(d(y, z)) \geq f(d(x, y) + d(y, z)) \geq f(d(x, z))$

Es ist:  $f(a) = f(\frac{a}{a+b}(a+b)) = f(\frac{a}{a+b}(a+b) + 0) \geq \frac{a}{a+b}f(a+b) + (1 - \frac{a}{a+b})f(0) = \frac{a}{a+b}f(a+b)$ . Ebenso ist:  $f(b) \geq \frac{b}{a+b}f(a+b)$ . Addiert man diese Ungleichungen, erhält man  $f(a) + f(b) \geq \frac{a}{a+b}f(a+b) + \frac{b}{a+b}f(a+b) = f(a+b)$ . ■

**Behauptung:** Ist  $f$  streng monoton, dann definieren  $f$  und  $f \circ d$  die selbe Topologie auf  $X$ .

$f$  streng Monoton wachsend, also gilt  $\forall \varepsilon > 0 : d(x, y) < \varepsilon \iff f(d(x, y)) < f(\varepsilon)$ . Also ist:  $B_\varepsilon^d(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in X \mid f(d(x, y)) < f(\varepsilon)\} = B_{f(\varepsilon)}^{f \circ d}(x)$ . Also ist jeder offene Ball bezüglich  $d$  ein offener Ball bezüglich  $f \circ d$  und umgekehrt.

*Das ist falsch!* Gegenbeispiel:  $X \in \mathbb{R}$ ,  $d$  der euklidische Abstand,  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $0 \mapsto 0$ ,  $x \mapsto 1+x$  für  $x > 0$ . Dann ist  $B_{\frac{1}{2}}^{f \circ d}(x) = \{x\}$

Der Beweis funktioniert mit der zusätzlichen Annahme  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

**Behauptung** Auch wenn  $f$  streng monoton ist könnte  $X$  bezüglich  $f \circ d$  vollständig sein und bezüglich  $d$  nicht.

Beispiel: Sei  $(X, d)$  ein nicht vollständiger Raum und  $f$  wie im letzten Gegenbeispiel. Dann sind Cauchyfolgen gerade die, die konstant wird, also konvergieren sie.

## Aufgabe 3

Sei  $X = \mathbb{R}^2$  versehen mit der SNCF-Metrik:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & x = \lambda y, y \in \mathbb{R} \\ |x| + |y|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Einfach zu zeigen:  $d$  ist eine Metrik. Skizzen für  $B_1((\frac{2}{0}))$  und  $B_3((\frac{2}{0}))$  hier ausgelassen.

**Behauptung:**  $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| \leq 2\}$  ist beschränkt und abgeschlossen.

$K$  ist beschränkt, da  $\forall x, y \in K, x \neq \lambda y : d(x, y) = |x| + |y| \leq 2 + 2 \leq 4$  und  $\forall x, y \in K, x = \lambda y : d(x, y) \leq 4$ .

$K$  ist abgeschlossen: Wir zeigen, dass  $\mathbb{R}^2 \setminus K$  offen ist. Sei  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ . Ist  $\varepsilon < |x|$ , so ist  $B_\varepsilon(x) \subseteq \{y \mid y = tx, t \in \mathbb{R}\}$ . Wählt man  $\varepsilon$  klein genug, so ist  $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^1 \setminus K$ , also ist  $\mathbb{R}^2 \setminus K$  offen.

**Behauptung:**  $K$  ist nicht kompakt.

$K$  hat eine offene Überdeckung  $U = \{B_1(x) \mid x \in K_{\frac{3}{2}}\}$ , wobei  $K_{\frac{3}{2}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = \frac{3}{2}\}$ , aus der man keine endliche Teilüberdeckung auswählen kann.

## Aufgabe 4

Sei  $p \geq 3$  eine Primzahl und  $d$  der  $p$ -Adische Abstand auf  $\mathbb{Q}$ :  $d(x, y) = |x - y|_p$ , wobei für  $x \in \mathbb{Q}$  gilt:  $x = p^k \frac{a}{b}$ , mit  $p \nmid a, b$  und  $|x|_p = p^{-k}$ .

**Behauptung:** Die Abbildung  $x \mapsto x^2$  ist stetig auf  $\mathbb{Q}$ .

Zu zeigen:  $\forall x \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ . Seien also  $x \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ , und sei  $y \in B_{\sqrt{x}}(x)$ , dann ist  $|x - y|_p < \sqrt{x} \implies y - x = p^k \frac{a}{b} - p^l \frac{c}{d}$  mit  $p^{-k} < \sqrt{\varepsilon}$ . O.B.d.A:  $k < l, p \nmid a, b, c, d$ . Dann ist  $(y - x)^2 = p^{2k} \frac{a^2}{b^2} - p^k p^l \frac{ac}{bd} + p^{2l} \frac{c^2}{d^2} = p^{2k} (\frac{a^2}{b^2} - p^{l-k} \frac{ac}{bd} + p^{2(l-k)} \frac{c^2}{d^2})$ , also ist  $|(y - x)^2|_p = p^{-2k} = (p^{-k})^2 < (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$ . Hier wurde ein Denkfehler in der Beweisführung entdeckt, und eine korrekte Version für später, im Internet, angekündigt.

**Behauptung:** Sei  $a \in \mathbb{Z}$  mit  $d(a^2, -1) \leq \frac{1}{p^k}$  für  $k \geq 1$ . Dann gibt es ein  $c \in \mathbb{Z}$  mit  $d((a + cp^k)^2, -1) \leq \frac{1}{p^{k+1}}$ .

$|a^2 - (-1)|_p = |a^2 + 1|_p \leq \frac{1}{p^k}$ , also  $a^2 + 1 = p^k b$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ . Gesucht ist ein  $c \in \mathbb{Z}$  mit  $|(a + cp^k)^2 + 1| \leq \frac{1}{p^{k+1}}$ , also  $(a + cp^k)^2 + 1 = a^2 + 2p^k ac + p^{2k} c^2 + 1 = p^k b + 2p^k ac + p^{2k} c^2 = p^k(2ac + b) + p^{2k} c^2 \stackrel{!}{=} p^{k+1} \tilde{a}$ . Es muss gelten:  $2ac + b \equiv 0 \pmod{p}$ . So ein  $c$  existiert, da  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  Körper ist.

**Behauptung:** Es gibt eine Cauchyfolge in  $\mathbb{Q}$ , die bezüglich  $d$  für  $p = 5$  nicht konvergiert.

Setze  $x_0 := 2$ , denn  $d(x_0^2, -1) = |4 + 1|_p = \frac{1}{5}$ . Nach der letzten Teilaufgabe gibt es ein  $c_1 \in \mathbb{Z}$ , so dass  $d((x_0 + c_1 p)^2, -1) \leq \frac{1}{5^2}$ . Setze  $x_1 := x_0 + c_1 p$ , und analog  $x_2, \dots$

Das ist eine Cauchy-Folge:  $|x_{n+1} - x_n|_p \leq \frac{1}{p^n}$  nach Konstruktion, und wegen  $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$  ist  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge. Nach Konstruktion konvergiert  $(x_n^2)$  gegen  $-1$ . Wir wissen, dass  $x \mapsto x^2$  stetig ist. Konvergierte also die Folge  $(x_n)$ , so müsste für den Grenzwert  $x$  gelten:  $x^2 = -1$ , im Widerspruch zu  $x \in \mathbb{Q}$ .