

9. Oberer und unterer Limes

Vereinbarung: In diesem Paragraphen sei (a_n) stets eine *beschränkte* Folge in \mathbb{R} . 8.2 $\implies \mathcal{H}(a_n) \neq \emptyset$.

Satz 9.1 (Beschränktheit und Abgeschlossenheit der Häufungswerte)

$\mathcal{H}(a_n)$ ist beschränkt. Weiter existieren $\max \mathcal{H}(a_n)$ und $\min \mathcal{H}(a_n)$

Beweis

$\exists c > 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\alpha \in \mathcal{H}(a_n)$. 8.1 $\implies \exists \text{TF}(a_{n_k})$ von (a_n) mit $a_{n_k} \rightarrow \alpha \ (k \rightarrow \infty)$,
6.2 $\implies |a_{n_k}| \rightarrow |\alpha| \ (k \rightarrow \infty); |a_{n_k}| \leq c \ \forall k \in \mathbb{N} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\alpha| \leq c$. Also: $|\alpha| \leq c \ \forall \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$. $\mathcal{H}(a_n)$ ist also beschränkt. Sei $s := \sup \mathcal{H}(a_n)$, z.Z.: $s \in \mathcal{H}(a_n)$ (analog zeigt man: $\inf \mathcal{H}(a_n) \in \mathcal{H}(a_n)$)

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\mathcal{H}(a_n) \implies \exists \alpha \in \mathcal{H}(a_n) : \alpha > s - \varepsilon$.

Wähle $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(\alpha) \subseteq U_\varepsilon(s) \implies a_n \in U_\delta(\alpha)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(s)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \implies s \in \mathcal{H}(a_n)$. ■

Definition

$\limsup a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := \max \mathcal{H}(a_n)$ heißt **oberer Limes** oder **Limes superior** von (a_n)

$\liminf a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n := \min \mathcal{H}(a_n)$ heißt **unterer Limes** oder **Limes inferior** von (a_n)

Beachte: $\liminf a_n \leq \alpha \leq \limsup a_n \ \forall \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$.

Beispiele:

(1) Ist (a_n) konvergent $\xrightarrow{8.1} \mathcal{H}(a_n) = \{\lim a_n\} \implies \limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$.

(2) $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})^n; |a_n| = (1 + \frac{1}{n})^n \stackrel{7.6}{\leq} 3 \implies (a_n)$ ist beschränkt.

$a_{2n} = (1 + \frac{1}{2n})^{2n} \implies (a_{2n})$ ist eine Teilfolge von (a_n) und von der Folge $((1 + \frac{1}{n})^n) \xrightarrow{8.1} e$ ($a_{2n} \rightarrow e \ (n \rightarrow \infty)$). Analog: $a_{2n-1} = -(1 + \frac{1}{2n-1})^{2n-1} \rightarrow -e$. Also: $e, -e \in \mathcal{H}(a_n)$. Sei $\alpha \in \mathbb{R} : e \neq \alpha \neq -e$.

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass: $\underbrace{(U_\varepsilon(e) \cup U_\varepsilon(-e))}_{=:U} \cap U_\varepsilon(\alpha) \neq \emptyset \ (*)$

Etwa $\varepsilon := \frac{1}{2} \min\{|\alpha - e|, |\alpha + e|\}$. $a_{2n} \rightarrow e \implies a_n \in U_\varepsilon(e)$ ffa gerade n . $a_{2n-1} \rightarrow -e \implies a_n \in U_\varepsilon(-e)$ ffa ungerade n . $\implies a_n \in U$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N} \implies \alpha \notin \mathcal{H}(a_n)$. Fazit: $\mathcal{H}(a_n) = \{e, -e\}$, $\limsup a_n = e$, $\liminf a_n = -e$.

Satz 9.2 (Eigenschaften des Limes superior und inferior)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\alpha = \liminf a_n \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

- (1) $\alpha - \varepsilon < a_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$
- (2) $a_n < \alpha + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

$$\alpha = \limsup a_n \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt:}$$

- (1) $\alpha - \varepsilon < a_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$
- (2) $a_n < \alpha + \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

nur für \liminf .

„ \implies “: Sei $\alpha = \liminf a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. $\alpha \in \mathcal{H}(a_n) \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \implies$ (ii).

Annahme: (i) gilt nicht. D.h.: $a_n \leq \alpha - \varepsilon$ für unendlich viele n , etwa für n_1, n_2, n_3, \dots mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Dann ist a_{n_k} eine Teilfolge von (a_n) mit $a_{n_k} \leq \alpha - \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}$. a_{n_k} ist beschränkt.

$\xrightarrow{8.2} (a_{n_k})$ enthält eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_j}})$; $\beta := \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{k_j}}$. $(a_{n_{k_j}})$ ist auch eine Teilfolge

von $(a_n) \xrightarrow{8.1} \beta \in \mathcal{H}(a_n) \implies \alpha \leq \beta$. $a_{n_{k_j}} \leq \alpha - \varepsilon \forall j \in \mathbb{N} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \beta \leq \alpha - \varepsilon \implies \alpha \leq \alpha - \varepsilon$, Widerspruch!

„ \Leftarrow “: für jedes $\varepsilon > 0$ gelte (i) und (ii). Sei $\varepsilon > 0 \xrightarrow{(i),(ii)} \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ für unendlich viele $n \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für unendlich viele $n \implies \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$. Sei $\beta < \alpha$. Zu zeigen: $\beta \notin \mathcal{H}(a_n)$.
 $\varepsilon := \frac{\alpha - \beta}{2} \implies \beta + \varepsilon = \alpha - \varepsilon$. (i) $\implies a_n > \alpha - \varepsilon = \beta + \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(\beta)$ für höchstens endlich viele $n \implies \beta \notin \mathcal{H}(a_n)$. ■

Satz 9.3 (Äquivalenzaussagen zur Konvergenz)

Die folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) $\liminf a_n = \limsup a_n$
- (2) (a_n) hat genau einen Häufungswert
- (3) (a_n) ist konvergent

Beweis

(1) (1) \iff (2) Klar.

(2) (3) \implies (2) 8.1.

- (3) (2) \implies (3) Sei $\mathcal{H}(a_n) = \{\alpha\} \implies \limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$.
 Sei $\varepsilon > 0 \xrightarrow{9.2} \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \implies a_n \rightarrow \alpha \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}.$ ■

Folgerung 9.4

Sei (b_n) eine Folge in \mathbb{R} . (b_n) ist konvergent genau dann, wenn (b_n) beschränkt ist und genau einen Häufungswert hat. **Beweis** „ \implies “: 6.1, 9.3; „ \Leftarrow “: 9.3

Beispiel

auf die Voraussetzung „ (b_n) beschränkt“ kann in 9.4 nicht verzichtet werden!

Beispiel: $(b_n) = (1, 0, 3, 0, 5, 0, \dots)$

Satz 9.5 (Rechenregeln für den Limes superior und inferior)

Sei (b_n) eine weitere beschränkte Folge in \mathbb{R} .

- (1) aus $a_n \leq b_n \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup a_n \leq \limsup b_n$
 aus $a_n \leq b_n \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$ folgt $\liminf a_n \leq \liminf b_n$
- (2) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$
 $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$
- (3) $\limsup(\alpha a_n) = \alpha \limsup a_n \quad \forall \alpha \geq 0$
 $\liminf(\alpha a_n) = \alpha \liminf a_n \quad \forall \alpha \geq 0$
- (4) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$
 $\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$

Beweis: Übung

