

§ 17.

Normierte Räume, Banachräume, Fixpunktsatz

In diesem Paragraphen sei \mathbb{K} stets gleich \mathbb{R} oder \mathbb{C} und sei X ein Vektorraum (VR) über \mathbb{K} .

Definition

Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt genau dann eine **Norm** auf X , wenn folgendes erfüllt ist:

- (1) $\forall x \in X : \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- (2) $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- (3) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

In diesem Fall heißt $(X, \|\cdot\|)$ ein **normierter Raum** (NR).

Beispiele:

- (1) Sei $n \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{K}^n$ und für $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ die **euklidische Norm** gegeben:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$$

Dann ist $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum (vgl. §1).

- (2) Sei $X = C[a, b]$ und für $f \in X$ seien die folgenden Normen gegeben:

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &:= \int_a^b |f(x)| \, dx \\ \|f\|_2 &:= \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx} \\ \|f\|_\infty &:= \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}\end{aligned}$$

Leichte Übung: $(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ und $(X, \|\cdot\|_\infty)$ sind NRe.

- (3) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $X := C(K, \mathbb{R}^m)$ und sei für $f \in X$ die Norm

$$\|f\|_\infty := \max\{\|f(x)\| : x \in K\}$$

Leichte Übung: $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein NR.

Für den Rest dieses Paragraphen sei X stets ein NR mit Norm $\|\cdot\|$.

Bemerkung: Wie in §1 zeigt man die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\forall x, y \in X : |||x|| - ||y||| \leq \|x - y\|$$

Definition

- (1) Sei (x_n) eine Folge in X . (x_n) heißt genau dann **konvergent**, wenn ein $x_0 \in X$ existiert für das gilt:

$$\|x_n - x_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

In diesem Fall ist x_0 eindeutig bestimmt und man schreibt $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. x_0 heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (x_n) .

- (2) (x_n) heißt genau dann **divergent**, wenn (x_n) nicht konvergent ist.

- (3) (x_n) heißt genau dann eine **Cauchyfolge** (CF), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

- (4) Sei $x_0 \in X$ und $\delta > 0$. Definiere:

$$U_\delta(x) := \{x \in X \mid \|x - x_0\| < \delta\}$$

- (5) Sei $A \subseteq X$. A heißt **offen**, genau dann wenn gilt:

$$\forall x \in A \exists \delta = \delta(x) > 0 : U_\delta(x) \subseteq A$$

A heißt **abgeschlossen**, genau dann wenn $X \setminus A$ offen ist.

Satz 17.1 (Eigenschaften von Folgen in normierten Räumen)

Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen in X , (α_n) Folge in \mathbb{K} , $x, y \in X$ und $A \subseteq X$.

- (1) Gilt $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ und $\alpha_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{K}$, so folgt:

$$x_n + y_n \rightarrow x + y \quad \alpha_n x_n \rightarrow \alpha x \quad \|x_n\| \rightarrow \|x\|$$

D.h. die Addition und Skalarmultiplikation sind stetig.

- (2) Ist (x_n) konvergent, so ist (x_n) **beschränkt**, d.h.:

$$\exists c \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq c$$

und (x_n) ist eine CF.

- (3) Genau dann wenn A abgeschlossen ist, gilt für jede konvergente Folge (x_n) in A :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$$

- (4) Sei $(X, \|\cdot\|_\infty)$ wie in obigem Beispiel (3). Dann gilt für (f_n) in X und $f \in X$, dass (f_n) genau dann auf K **gleichmäßig** gegen f **konvergiert**, wenn gilt:

$$\begin{aligned} & \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ & : \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \forall x \in K \end{aligned}$$

Beweis

(1) Wie im \mathbb{R}^n .

(2) Wie im \mathbb{R}^n .

(3) Wie im \mathbb{R}^n .

(4) **In der großen Übung.** ■

Beispiel

Sei $X = C[-1, 1]$ mit $\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx}$. Definiere die Folge (f_n) wie folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & , -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & , \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Dann ist klar, dass $f_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In den **großen Übungen** wird gezeigt:

(1) (f_n) ist eine CF in X .

(2) Es existiert **kein** $f \in X$ mit $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$

Definition

X heißt ein **Banachraum** oder **vollständig**, genau dann wenn jede CF in X einen Grenzwert in X hat.

Beispiele:

(1) Sei $X = \mathbb{K}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$. Dann folgt aus §2, dass $(X, \|\cdot\|_2)$ ein BR ist.

(2) Sei $X = C[-1, 1]$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx}$. Dann ist $(X, \|\cdot\|_2)$ **kein** BR.

(3) Sei $(X, \|\cdot\|_\infty)$ wie in 17.1(4). In den **großen Übungen** wird gezeigt, dass $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein BR ist.

Satz 17.2 (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein BR, $\emptyset \neq A \subseteq X$ sei abgeschlossen und es sei $F : A \rightarrow X$ eine Abbildung mit:

(i) $F(A) \subseteq A$

(ii) F ist eine **Kontraktion**, d.h.:

$$\exists L \in [0, 1) : \forall x, y \in A : \|F(x) - F(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$$

Dann existiert genau ein $x^* \in A$ mit $F(x^*) = x^*$.

Ist $x_0 \in A$ beliebig und (x_n) definiert durch $x_{n+1} := F(x_n)$ ($n \geq 0$), so ist $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^*$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1 - L} \|x_1 - x_0\|$$

Diese Folge heißt Folge der **sukzessiven Approximationen**.

Beweis

Sei $x_0 \in A$ und (x_n) wie oben definiert. Es gilt:

$$\|x_2 - x_1\| = \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Induktiv lässt sich zeigen:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \|x_{k+1} - x_k\| \leq L^k \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Seien nun $m, n \in \mathbb{N}$ und $m > n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)\| \\ &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq L^{m-1}\|x_1 - x_0\| + \dots + L^n\|x_1 - x_0\| \\ &= (L^{m-1} + \dots + L^n) \cdot \|x_1 - x_0\| \\ &= L^n(1 + \dots + L^{m-n-1}) \cdot \|x_1 - x_0\| \\ &\leq L^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} L^j \right) \cdot \|x_1 - x_0\| \\ &= \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

Also ist (x_n) eine CF. Da X außerdem BR ist, existiert ein $x^* \in X$ mit $x_n \rightarrow x^*$. Wegen $(x_n) \subseteq A$ und A abgeschlossen ist außerdem $x^* \in A$.

Festes n und $m \rightarrow \infty$ liefert aus obiger Gleichung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

Für $F(x^*)$ gilt also:

$$\begin{aligned} \|F(x^*) - x^*\| &= \|F(x^*) - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*\| \\ &\leq \|F(x^*) - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x^*\| \\ &= \|F(x^*) - F(x_n)\| + \|x_{n+1} - x^*\| \\ &\leq L\|x^* - x_n\| + \|x_{n+1} - x^*\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\|F(x^*) - x^*\| = 0 \iff F(x^*) = x^*$$

Sei nun $z \in A$ und $F(z) = z$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|x^* - z\| &= \|F(x^*) - F(z)\| \leq L\|x^* - z\| \\ \implies (1-L)\|x^* - z\| &\leq 0 \\ \implies x^* &= z \end{aligned}$$

Also ist x^* eindeutig. ■