Kapitel 3

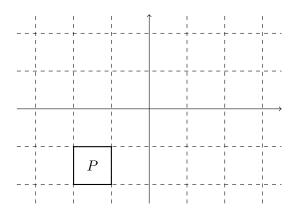
Hyperbolische Parkettierungen und Fuchssche Gruppen

3.1 Parkettierungen und Gruppen

Die allgemeine Situation ist die folgende: Gegeben sei ein metrischer Raum (X,d) sowie eine abgeschlossene Teilmenge $P \subseteq X$. Eine Parkettierung bzw. Pflasterung von X mit Fundamentalbereich P ist eine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} P_i$ mit einer abzählbaren Indexmenge I, sodass gilt:

- (i) Für jedes $i \in I$ ist $P_i = T_i(P)$ für eine Isometrie $T_i \in \text{Isom}(X)$. Insbesondere sind alle P_i kongruent zu P.
- (ii) Für je zwei $i \neq j$ in I gilt $\overset{\circ}{P_i} \cap \overset{\circ}{P_j} = \varnothing$.

Beispiel 3.1.1 (i) \mathbb{R}^2 lässt sich beispielsweise durch gleichseitige, kongruente Dreiecke oder Quadrate parkettieren. Auch Variationen sind möglich, haben aber eine geringere Symmetrie zur Folge. Die Symmetriegruppe der Parkettierung

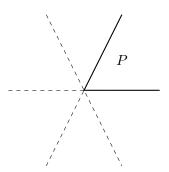


von \mathbb{R}^2 besitzt beispielweise \mathbb{Z}^2 als Untergruppe, denn sie ist invariant unter Translationen

in x- und y-Richtung. Allgemeiner gilt für eine Parkettierung \mathcal{P}

$$G := \langle \{T_i\}_{i \in I} \rangle \subseteq \operatorname{Isom}(X) \cap \operatorname{Sym}(\mathcal{P}).$$

- (ii) Die Sphäre $X = \mathbb{S}^2$ lässt sich durch die vier Viertelsphären parkettieren.
- (iii) Betrachte Die Parkettierung



Dann ist die Symmetriegruppe gegeben durch die zyklische Gruppe G der Ordnung 6, erzeugt von den Rotationen T_k um den Winkel $\frac{2\pi k}{6}$.

Operiert nun umgekehrt eine Gruppe G auf X, so erhalten wir eine dazugehörige Parkettierung auf X (Modell für den Bahnenraum). Dies wollen wir im Folgenden explizit beschreiben. Sei (X,d) ein zusammenhängender, metrischer Raum und $G\subseteq \mathrm{Isom}(X)$ eine Gruppe von Isometrien von X. Dann operiert G diskret auf X, falls jede Bahn $G\cdot x:=\{g\cdot x\mid g\in G\}\subseteq X$ diskret ist, das heißt für jedes $x\in X$ ein $\epsilon_x>0$ existiert, sodass

$$B_{\epsilon_x}(x) \cap B_{\epsilon_x}(g \cdot x) = B_{\epsilon_x}(x) \cap g \cdot B_{\epsilon_x}(x) = \emptyset$$

für alle $g \in G \setminus \{e_G\}$.

Beispiel 3.1.2 (i) \mathbb{Z} operiert diskret auf \mathbb{R} durch Translationen:

$$: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (k, t) \mapsto k \cdot t = k + t.$$

(ii) Analog opertiert \mathbb{Z}^2 diskret auf \mathbb{R}^2 durch

$$: \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad ((k,l),(x,y)) \mapsto (k,l) \cdot (x,y) = (x+k,y+l)$$

(iii) Betrachte nun die hyperbolische Isometrie

$$T: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \qquad z \mapsto 2z.$$

Dann ist $\langle T \rangle = \{\dots, T^{-2}, T^{-1}, \mathrm{id}, T, T^2, \dots\} \cong \mathbb{Z}$ und erhalten dadurch eine diskrete Operation auf \mathbb{H}^2 (Achtung: Funktioniert im Euklidischen nicht, da $z \mapsto 2z$ keine euklidische

Isometrie ist).

(iv) Die Gruppe $PSL_2(\mathbb{Z}) \subseteq PSL_2(\mathbb{R})$ operiert diskret auf \mathbb{H}^2 (siehe später).

Satz 3.1.3 (Dirichlet-Parkettierung) Sei G eine abzählbare Gruppe, welche diskret auf einem metrischen Raum (X, d) operiere und $p \in X$ ein Punkt in X, der durch kein Element aus $G \setminus \{e_G\}$ fixiert werde. Dann ist der Dirichlet-Bereich von G zentriert in p

$$D_p(G) := \{x \in X \mid d(x,p) \leqslant d(x,g \cdot p) \text{ für alle } g \in G\}$$
$$= \{x \in X \mid d(x,p) \leqslant d(g \cdot x,p) \text{ für alle } g \in G\}$$

ein Fundamentalbereich P für eine Parkettierung P von X. Dabei gilt die Mengengleichheit wegen der Invarianz von d unter Isometrien.

Bemerkung: Jede Bahn von G trifft jeden Punkt von $D_p(G)$ genau einmal.

Beweis. Sei $D:=D_p(G)$ und $y\in X$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass y in einer Bahn $g\cdot D$ für ein $g\in G$ enthalten ist. Betrachte nun die Bahn $G\cdot y$ von y. Nach Voraussetzung ist $G\cdot y$ diskret, es existiert also $y_0\in G\cdot y$ mit $d(y_0,p)=\min_{g\in G}d(g\cdot y,p)$. Dann ist aber $d(y_0,p)\leqslant d(g\cdot y_0,p)$ für alle $h\in G$, also gerade $y_0\in D$. Wegen $G\cdot y=G\cdot y_0$ folgt der erste Teil der Behauptung. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Inneren der Translate disjunkt sind. Hierfür genüg es zu zeigen, dass falls $x_1,x_2\in \overset{\circ}{D}$ für $x_1\neq x_2$, dass dann x_1 und x_2 nicht zu derselben Bahn gehören. Wir überlegen uns hierfür zunächst, dass falls $d(x,p)=d(g\cdot x,p)$ für $g\in G\setminus\{e_G\}$ gilt, dass dann $d(x,p)=d(x,g^{-1}\cdot p)$ und x damit in der Mittelebene von p und $g^{-1}\cdot p$

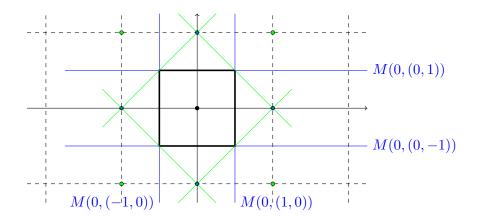
$$M(p, g^{-1}) := \{x \in X \mid d(x, p) = d(x, g^{-1} \cdot p)\}$$

liegt. Dann gilt entweder $x \notin D$ oder $x \in \partial D$. Insbesondere gilt dann für $x \in \overset{\circ}{D}$ also $d(x,p) < d(g \cdot x,p)$ für alle $g \in G \setminus \{e_G\}$. Sind nun also $x_1 \neq x_2$ in derselben Bahn, also $x_2 = g_0 \cdot x_1$, so folgt

$$d(x_1, p) < d(g_0 \cdot x_1, p) = d(x_2, p) < d(g_0^{-1} \cdot x_2, p) = d(x_1, p),$$

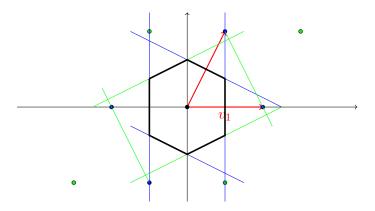
ein Widerspruch.

- Beispiel 3.1.4 (i) Betrachte die Gruppenoperation von \mathbb{Z} auf \mathbb{R} von oben. Dann wird p=0 in \mathbb{R} von keinem $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ fix gelassen und Anwenden von Satz 1.3 liefert den Fundamentalbereich $D_0(\mathbb{Z}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Die relevanten Mitteleben sind dabei $M(0,1): x = \frac{1}{2}$ sowie $M(0,-1): x = -\frac{1}{2}$.
 - (ii) Analog lässt sich dies für die Gruppenaktion von \mathbb{Z}^2 auf \mathbb{R}^2 anwenden.

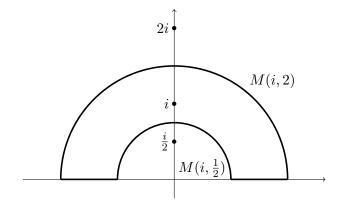


Als Fundamentalbereich er gibt sich nun $D_{(0,0)}(\mathbb{Z}^2)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |x|<\frac{1}{2},\ |y|<\frac{1}{2}\right\}$.

(iii) Das Beispiel aus (ii) lässt sich verallgemeinern. Für zwei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ ist $G := \{mv_1 + nv_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^2$ und wir erhalten durch die Mittelebenenkonstruktion ein Hexagon als Fundamentalbereich.



(iv) Betrachte $T: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$, $z \mapsto 2z$. Dann ist i nicht fixiert und $G = \langle T \rangle \cong \mathbb{Z}$ operiert auf \mathbb{H}^2 . Die Mittelebenen sind diesmal hyperboilsche Geodätische, also Halbkreise und wir erhalten folgenden Fundamentalbereich:



Satz 3.1.5 Die Gruppe

$$\mathrm{SL}_2\mathbb{Z} := \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

operiert durch Möbiustransformationen diskret auf \mathbb{H}^2 , d.h. alle Bahnen sind diskret.

Bemerkung 3.1.6 Die Gruppe $SL_2\mathbb{R}$ wird mit der von \mathbb{R}^4 induzierten Teilraumtopologie versehen.

Lemma 3.1.7 Sei $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H}^2$ und $K \subseteq \mathbb{H}^2$ kompakt. Dann ist die Menge

$$E_{z_0} := E = \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2 \mathbb{R} \mid T \cdot z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \in K \right\}$$

kompakt in $SL_2\mathbb{R}$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass E abgeschlossen und beschränkt bezüglich der von \mathbb{R}^4 induzierten Teilraumtopologie ist. Die Abbildung

$$\Psi: \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}$$

ist stetig, also ist $E = \Psi^{-1}(K)$ als stetiges Urbild einer kompakten Menge abgeschlossen. Es bleibt also noch die Beschränktheit zu zeigen. Dabei ist $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2\mathbb{R}$ bezüglich der Teilraumtopologie beschränkt genau dann, wenn die Koeffizienten a,b,c,d beschränkt in \mathbb{R} sind. Nun ist K beschränkt in \mathbb{H}^2 , das heißt es existiert eine Konstante $M_1 > 0$, sodass

$$|\Psi(T)| = \left| \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \right| \leqslant M_1$$

für alle $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2\mathbb{R}$, denn eine bezüglich d_h beschränkte Menge ist auch euklidisch beschränkt. Weiter ist K kompakt in \mathbb{H}^2 , es gibt also $M_2 > 0$, sodass

$$\operatorname{Im} \Psi(z_0) = \operatorname{Im} \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = \operatorname{Im} \frac{(az_0 + b)(c\overline{z}_0 + d)}{|cz_0 + d|^2} = \operatorname{Im} \frac{adz_0 + bc\overline{z}_0}{|cz_0 + d|^2} = \frac{\operatorname{Im} z_0}{|cz_0 + d|^2} \geqslant M_2.$$

Damit folgt

$$|cz_0 + d| \leqslant \sqrt{\frac{\operatorname{Im} z_0}{M_2}}$$

sowie

$$|az_0 + b| \le M_1|cz_0 + d| \le M_1\sqrt{\frac{\operatorname{Im} z_0}{M_2}}.$$

Wegen

$$|az_0 + b| = |a(x_0 + iy_0) + b| = \sqrt{(ay_0)^2 + (ax_0 + b)^2} \ge |ay_0|$$

folgt damit

$$|a| \leqslant \frac{M_1}{|y_0|} \sqrt{\frac{\operatorname{Im} z_0}{M_2}}$$

und

$$|b| = |az_0 + b - az_0| \le |az_0 + b| + |az_0| \le M_1 \sqrt{\frac{\operatorname{Im} z_0}{M_2}} \left(1 + \frac{|z_0|}{|y_0|} \right).$$

Analog zeigt man die Beschränktheit von c und d und erhält die Behauptung.

Beweis von Satz 3.1.5. Sicherlich ist $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ diskret in $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$. Sei nun $z_0\in\mathbb{H}^2$ und $\epsilon>0$. Die Menge

$$S = \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_{2}\mathbb{Z} \mid T \cdot z_{0} = \frac{az_{0} + b}{cz_{0} + d} \in B_{\epsilon}(z_{0}) \right\}$$
$$= \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_{2}\mathbb{R} \mid T \cdot z_{0} = \frac{az_{0} + b}{cz_{0} + d} \in B_{\epsilon}(z_{0}) \right\} \cap \operatorname{SL}_{2}\mathbb{Z}$$

ist als Durchschnitt einer kompakten mit einer diskreten Menge endlich. Durch verkleinern von ϵ erreicht man

$$B_{\epsilon}(z_0) \cap B_{\epsilon}(T \cdot z_0) = B_{\epsilon}(z_0) \cap T \cdot B_{\epsilon}(z_0) = \emptyset$$

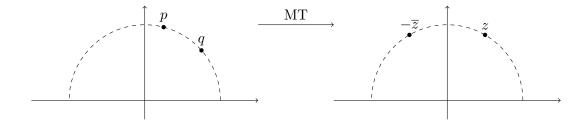
für alle $T \in SL_2\mathbb{Z}\setminus\{id\}$, was den Satz beweist.

Im Folgenden wollen wir nun den Dirichlet-Bereich für $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ konstruieren.

Bemerkung 3.1.8 Ist (X, d) ein metrischer Raum und $p, q \in X$, so ist die Mittelgerade gegeben durch

$$M_{pq} = \{x \in X \mid d(p, x) = d(q, x)\}.$$

Diese entspricht im Euklidischen der Mittelsenkrechten. Sind nun $p, q \in \mathbb{H}^2$ beliebige Punkte, so lassen sich wegen der 2-Punkt-Homogenität der hyperbolischen Ebene p, q in die spezielle Lage p = z und $q = -\overline{z}$ überführen:



Durch die expliziten Abstandsformeln rechnet man nach, dass in der speziellen Lage die Mittelgerade gerade durch die imaginäre Achse gegeben ist.

Für die Konstruktion des Dirichlet-Bereichs benötigen wir einen Punkt, der nicht fixiert wird.

Lemma 3.1.9 Für $\lambda > 1$ gilt $T(\lambda i) \neq \lambda i$ für alle Möbiustransformationen $T \in \mathrm{SL}_2\mathbb{Z} \setminus \{\pm \mathrm{id}\}.$

Beweis. Sei $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2\mathbb{Z}$, das heißt es gilt $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ sowie ad - bc = 1. Fixiert T nun λi , so erhalten wir

$$\lambda i = T(\lambda i) = \frac{\lambda ai + b}{\lambda ci + d} = \frac{(a\lambda i + b)(d - c\lambda i)}{c^2 \lambda^2 + d^2} = \frac{bd + ac\lambda^2}{c^2 \lambda^2 + d^2} + \frac{\lambda i}{c^2 \lambda^2 + d^2}.$$

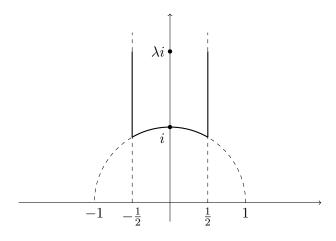
Koeffizientenvergleich liefert zum einen $c^2\lambda^2 + d^2 = 1$, woraus wegen $\lambda > 1$ bereits c = 0 und damit $d = \pm 1$ folgt. Weiter ist $bd + ac\lambda^2 = \pm b = 0$, also auch b = 0. Die Normiertheit impliziert schließlich a = d, also $T = \pm I_2$, womit die zu T assoziierte Möbiustransformation also bereits die Identität ist.

Wir können nun also $p = \lambda i$ als Zentrum für den Dirichlet-Bereich wählen.

Satz 3.1.10 Das geodätische Dreieck

$$\Delta = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| \geqslant 1, |\operatorname{Re} z| \leqslant \frac{1}{2} \right\}$$

ist der Dirichletbereich $D_{\lambda i}(\mathrm{SL}_2\mathbb{Z})$ von $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ zentriert in λi .



Beweis. Die Isometrien

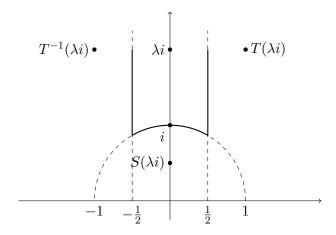
$$T(z) = z + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z$$

$$S(z) = -\frac{1}{z} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot z$$

sind in $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ (und erzeugen die Gruppe sogar) und es gilt

$$S(\infty) = 0,$$
 $S(0) = \infty,$ $S(i) = i,$ $S(\lambda i) = \frac{1}{\lambda}i.$

Die drei Mittelgeraden von $T(\lambda i)$, $T^{-1}(\lambda i)$, λi und $S(\lambda i)$ sind gerade die Seiten von Δ .



Dies zeigt bereits $D_{\lambda i}(\mathrm{SL}_2\mathbb{Z})\subseteq \Delta$. Angenommen es gelte keine Gleichheit. Dann ist Δ kein Fundamentalbereich, also überlappen sich die Translate von Δ , das heißt es gibt $z\in \overset{\circ}{\Delta}$ und $R\in\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ sodass $R(z)\in \overset{\circ}{\Delta}$. Sei $R=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$|cz + d|^{2} = c^{2}|z|^{2} + 2|cd|\operatorname{Re}z + d^{2}$$

$$> c^{2} + d^{2} - |cd|$$

$$= (|c| - |d|)^{2} + |cd|$$

$$\geqslant 1,$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da der Term ganzzahlig, nichtnegativ und verschieden von Null ist, denn andernfalls wäre |c| = |d| und $0 = |cd| = |c|^2$ und damit c = d = 0, ein Widerspruch zu ad - bc = 1. Damit erhalten wir die strikte Ungleichung

$$\operatorname{Im} R(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2} < \operatorname{Im} z.$$

Dasselbe Aurgument mit z und h ersetzt durch R(z) und R^{-1} liefert aber auch

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} R^{-1}(R(z)) < \operatorname{Im} R(z),$$

ein Widerspruch. Somit folgt $\Delta = D_{\lambda i}(SL_2\mathbb{Z})$.

Bemerkung 3.1.11 Analog wie im Beweis von Satz 3.1.5 zeigt man: Eine diskrete Untergruppe

von $SL_2\mathbb{R}$ oder $PSL_2\mathbb{R}$ operiert diskret auf \mathbb{H}^2 und liefert einen Dirichletbereich für eine Parkettierung von \mathbb{H}^2 . Solche Gruppen heißen Fuchssche Gruppen.

3.2 Dreiecksgruppen und zugehörige Parkettierungen

Sir betrachten zunächst die Spiegelung an Geodätischen in den uns drei bekannten Modellen der Geometrie. In der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 ist die Spiegelung an der euklidischen Geodätischen $g_0: x = 0$ (der y-Achse) gegeben durch

$$\sigma_{g_0}: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2, \qquad (x,y) \mapsto (-x,y).$$

Ist g nun beliebig, so wähle eine euklidische Isometrie $\phi \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ mit $\phi(g_0) = g$ und setze $\sigma_g := \phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1}$. Dan ist σ_g die Spiegelung an der Geraden g. Man sieht leicht ein, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von ϕ ist.

Auf der Sphäre \mathbb{S}^2 verfahren wir analog. Die sphärischen Geodätischen sind gerade die Großkreise, also speziellen Großkreis wählen wir g_0 in der x-z-Ebene. Dann ist durch

$$\sigma_{g_0}: \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2, \qquad (x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$$

die Spiegelung and g_0 gegeben. Für einen beliebigen Großkreis g wähle eine sphärische Isometrie ϕ mit $\phi(g_0) = g$ und setze $\sigma_g := \phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1}$. In der hyperbolischen Halbebene funktioniert das genau so: Als spezielle hyperbolische Geodätische wählen wir die imaginäre Achse $i\mathbb{R}$. Die Formel

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}d_h(z,w)\right) = \frac{|z-w|^2}{4\operatorname{Im} z\operatorname{Im} w}$$

zeigt, dass die Abbildung

$$\sigma_{g_0}: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \qquad z \mapsto -\overline{z}$$

eine hyperbolische Isometrie ist, die g_0 punktweise festhält und $\sigma_{g_0}^2 = \mathrm{id}_{He^2}$ erfüllt, also eine Spiegelung an g_0 ist. Ist g nun eine beliebige hyperbolische Geodätische, so wähle eine hyperbolische Isometrie ϕ mit $\phi(g_0) = g$ und setze $\sigma_g := \phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1}$.

Proposition 3.2.1 Seien g_1, g_2 zwei sich in einem Punkt p schneidene Geodätische in \mathbb{E}^2 (bzw. in \mathbb{S}^2 oder \mathbb{H}^2) sowie σ_1, σ_2 die Spieglungen an g_1, g_2 . Dan ist $\sigma_1 \circ \sigma_2$ eine Drehung um p um den Winkel $2 \not\prec (g_1, g_2)$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für den euklidischen Fall; der sphärische und hyperbolische verbleiben als Übung. Es sei ohne Einschränkung p = 0 und g_1, g_2 seien euklidische Geodätische

gegeben durch

$$g_1 = \{(x, \tan \theta) \mid x \in \mathbb{R}\}, \qquad g_2 = \{(x, \tan \psi) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

mit $\mu, \lambda \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ und ohne Einschränkung gelte $\psi > \theta$. Es ist dann $\chi_p(g_1, g_2) = \psi - \theta$. Wir wollen die Spiegelungen an g_1 und g_2 nun wie oben beschreiben. Wir suchen also Isometrien A und B, welche g_0 auf g_1 und g_2 abbilden. Diese sind aber gerade gegeben durch Drehungen um die Winkel $\theta - \frac{\pi}{2}$ bzw. $\psi - \frac{\pi}{2}$, also durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\sigma_{g_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\sigma_{g_1} = A \circ \sigma_{g_0} \circ A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & -2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ -2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & -\sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos(2\theta - \pi) & -\sin(2\theta - \pi) \\ -\sin(2\theta - \pi) & \cos(2\theta - \pi) \end{pmatrix},$$

und genau so

$$\sigma_{g_2} = \begin{pmatrix} -\cos(2\psi - \pi) & -\sin(2\psi - \pi) \\ -\sin(2\psi - \pi) & \cos(2\psi - \pi) \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Hintereinanderausführung der beiden Spiegelungen gerade

$$\sigma_{1} \circ \sigma_{2} = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta - \pi) & -\sin(2\theta - \pi) \\ -\sin(2\theta - \pi) & \cos(2\theta - \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(2\psi - \pi) & -\sin(2\psi - \pi) \\ -\sin(2\psi - \pi) & \cos(2\psi - \pi) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(2(\psi - \theta)) & \sin(2(\psi - \theta)) \\ -\sin(2(\psi - \theta)) & \cos(2(\psi - \theta)) \end{pmatrix},$$

was also der Drehung um den doppelten Schnittwinkel entspricht.

Sei nun $\Delta = ABC$ ein euklidisches (bzw. sphärisches oder hyperbolisches) Dreieck mit Winkeln α, β, γ und Schenkeln a, b, c. Wir spiegeln nun das Dreieck an den Seiten von Δ . Als eine notwendige Bedingung dafür, dass sich dadurch eine Parkettierung des zugrundeliegenden Raumes

ergibt, müssen sich die Innenwinkel α, β und γ jeweils zu 2π vervielfachen, d.h. $l\alpha = 2\pi$ für ein $l \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$ und ebenso für β und γ . Weiter fordert man, dass sich die von 2 Spiegelungen erzeugten Drehungen ebenfalls zu 2π vervielfachen, also $2k\alpha = 2\pi$ für $k \geqslant 2$ und analog für β und γ . Dies führt zu folgender Definition:

Definition 3.2.2 Sei $\Delta = ABC$ ein euklidisches (bzw. sphärisches oder hyperbolisches Dreieck) mit Schenkeln a, b, c und Winkeln $\alpha = \frac{\pi}{l}, \beta = \frac{\pi}{m}, \gamma = \frac{\pi}{n}$ für $l, m, n \ge 2$. Dann heißt die von den Spiegelungen $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ erzeugte Gruppe Dreiecksgruppe und wird notiert als $\Delta(l, m, n) := \langle \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c \rangle \subseteq \text{Isom}(X)$, wobei $X = \mathbb{E}^2$ (bzw. $X = \mathbb{S}^2$ oder $X = \mathbb{H}^2$). Es gelten folgende Relationen in $\Delta(l, m, n)$:

$$\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_c^2 = \mathrm{id}_X, \qquad (\sigma_c \circ \sigma_b)^l = \mathrm{id}_X, \qquad (\sigma_c \circ \sigma_a)^m = \mathrm{id}_X, \qquad (\sigma_a \circ \sigma_b)^n = \mathrm{id}_X$$

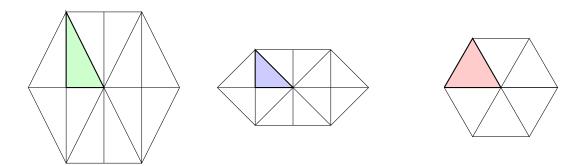
Im Folgende wollen wir die Möglichkeiten für l, m, n untersuchen. Dies müssen wir für jede Geometrie separat tun.

Satz 3.2.3 (Satz von Gauß-Bonnet für euklidische Dreiecke) Ist $\Delta \subseteq \mathbb{E}^2$ ein euklidisches Dreieck mit Innenwinkeln α, β, γ , so ist $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Eine euklidische Dreiecksgruppe erfüllt also

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

mit $l, m, n \ge 2$. Es ergeben sich durch sukzessives Steigern der Konstanten die 3 Lösungen $\Delta_1 = \Delta(2,3,6), \Delta_2 = \Delta(2,4,4)$ sowie $\Delta_3 = \Delta(3,3,3)$. Diese liefern folgende Parkettierungen:



Für den sphärischen Fall betrachte zunächst folgende Proposition:

Proposition 3.2.4 (Satz von Gauß-Bonnet für sphärische Dreiecke) Ist $\Delta \subseteq \mathbb{S}^2$ ein sphärisches Dreieck mit Innenwinkeln α, β, γ , so ist $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

Beweis. Für zwei Großkreise auf der Sphäre, die sich im Winkel $\alpha \leqslant \pi$ schneiden bezeichne $M(\alpha)$ die eingeschlossene Fläche. Für diese gilt $M(\alpha) = M(\mathbb{S}^2_R) \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$. Weiter ist

$$\mathbb{S}_R^2 = 2(M(\alpha) + M(\beta) + M(\gamma)) - 2\Delta,$$

also

$$4\pi R^2 = A(\mathbb{S}_R^2) = 4R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2A(\Delta),$$

und folglich

$$0 < A(\Delta) = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

woraus $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ folgt.

Für die Sphäre erhalten wir also als Bedingung für eine Dreiecksgruppe

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$$

mit $l, m, n \ge 2$. Durch sukzessives Steigern der Konstanten erhalten wir die Lösungen $\Delta_{1_n} = \Delta(2, 2, n), \Delta_2 = \Delta(2, 3, 3), \Delta_3 = \Delta(2, 3, 4)$ und $\Delta_4 = \Delta(2, 3, 5)$ für $n \ge 2$ beliebig.

Für \mathbb{H}^2 wissen wir bereits, dass gilt $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, die Bedingung für Dreiecksgruppen ergibt sich hier also zu

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$$

für $l, m, n \ge 2$. Hierfür gibt es unendlich viele Lösungen. Beachte: $l = m = n = \infty$ ist erlaubt.

Bemerkung 3.2.5 Wir haben nun für die euklidische, sphärische und hyperbolische Geometrie jeweils eine Version des Satzes von Gauß-Bonnet gesehen. Doch was haben diese mit dem Satz aus der Topologie zu tun? Für eine zweidimensionale, kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M , Gaußkrümmung κ und geodätische Randkrümmung k_g auf ∂M gilt:

$$2\pi\chi(M) = \int_{M} \kappa \, dA + \int_{\partial M} k_g \, ds.$$

Betrachte $M = \Delta = \Delta(\alpha, \beta, \gamma) \subseteq X$ mit $X \in \{\mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2\}$. Aus der Differentialgeometrie wissen wir, dass diese drei Räume von konstanter Krümmung 0,1 bzw. -1 sind. Weiter ist die Eulercharakteristik eines Dreiecks sicherlich 1 und die geodätische Krümmung des Randes verschwindet überall außer in den Ecken. Damit ergibt sich das Integral zu

$$2\pi = \int_{\Delta} \kappa \, dA + \int_{\partial \Delta} k_g \, ds = \mu(\Delta)\kappa + k_g(A) + k_g(B) + k_g(C) = \mu(\Delta)\kappa + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma).$$

Wir erhalten damit

- (i) Im Euklidischen $2\pi = \pi \alpha + \pi \beta + \pi \gamma$, also $\pi = \alpha + \beta + \gamma$,
- (ii) Im Sphärischen $2\pi = \mu(A) + \pi \alpha + \pi \beta + \pi \gamma$, also $\mu(A) = \alpha + \beta + \gamma \pi$ und
- (iii) Im Hyperbolischen $2\pi = -\mu(A) + \pi \alpha + \pi \beta + \pi \gamma$, also $\mu(A) = \pi \alpha \beta \gamma$, also gerade die drei vorgestellten Versionen.

Bemerkung 3.2.6 Man kann zeigen: Hyperbolische Dreiecksgruppen operieren diskret auf \mathbb{H}^2 und induzieren also hyperbolische Parkettierungen (Siehe z.B. [Caratheodory, Funktionentheorie II, S: 159 ff]).