

# 21. Affine Koordinaten und affine Abbildungen

## 21.1. Grundbegriffe

**Definition:** Sei  $A$  ein affiner Raum mit Richtungs-VRm  $V$  der Dimension  $n$ .

(a) Sei  $\mathcal{B}$  die Menge aller Basen von  $V$ . Ein Paar  $\mathcal{K} := (\mathcal{O}, B) \in A \times \mathcal{B}$  heißt **affines Koordinatensystem**, wobei  $\mathcal{O}$  der **Ursprung** heißt.

(b) Durch die Koordinatendarstellung  $D_B : V \rightarrow K^n$  zur Basis  $B$  definiert:

$$D_{\mathcal{K}} : A \rightarrow K^n, P \mapsto D_B(\overrightarrow{\mathcal{O}P})$$

den **Koordinatenvektor**  $D_{\mathcal{K}}(P)$  von  $P$  bezüglich  $\mathcal{O}$ .

(c) Die Abbildung  $D_{\mathcal{K}} : A \rightarrow \mathbb{A}^n(K)$  heißt **Koordinatendarstellung** zum Koordinatensystem  $\mathcal{K}$ .

**Aufgabe:** Was entspricht Homomorphismen von VRmen bei affinen Räumen?

**Definition:** Seien  $A, B$  affine Räume mit Richtungen  $V, W$ . Eine Abbildung  $\varphi : A \rightarrow B$  heißt **affine Abbildung** oder **Morphismus affiner Räume**, falls ein  $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$  existiert, sodass gilt:

$$\forall x \in V, \forall P \in A : \varphi(x + P) = \Phi(x) + \varphi(P)$$

Schreibe:  $\text{Hom}_{\text{aff}}(A, B) := \{\varphi : A \rightarrow B \mid \varphi \text{ affin}\}$ .

**Beispiel:** (1) Die Identität  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  ist affin mit zugehörigem  $\Phi = \text{id}_V$ .

(2) Für festes  $Q \in B$  ist die konstante Abbildung  $\varphi_Q : A \rightarrow B, P \mapsto Q$  affin, mit der Nullabbildung als zugehörigem Homomorphismus.

**Bemerkung:** (1)  $\varphi : A \rightarrow B$  mit zugehörigem  $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$  ist genau dann affin, wenn gilt:

$$\exists P_0 \in A : \forall x \in V : \varphi(x + P_0) = \Phi(x) + \varphi(P_0)$$

(2) Ist  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$ , so ist der zugehörige Homomorphismus  $\Phi =: \Lambda_{\varphi}$  eindeutig bestimmt.

(3) Die Hintereinanderausführung affiner Abbildungen ist affin, d.h.:

$$\text{Hom}_{\text{aff}}(A, B) \times \text{Hom}_{\text{aff}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\text{aff}}(A, C), (\varphi, \psi) \mapsto \psi \circ \varphi$$

(4)  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$  ist genau dann injektiv (bzw. surjektiv), wenn  $\Lambda_\varphi$  injektiv (bzw. surjektiv) ist.

(5) Ist  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$  bijektiv, so existiert  $\varphi^{-1} \in \text{Hom}_{\text{aff}}(B, A)$ .

**Definition:** Ein bijektives  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$  heißt **Isomorphismus affiner Räume** oder **Affinität**.

Ist zusätzlich  $A = B$ , so heißt  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, A)$  **Automorphismus**. Diese Automorphismen bilden die Gruppe  $\text{Aut}_{\text{aff}}(A)$ , genannt die **affine Gruppe** von  $A$ .

**Beweis:** (1) Sei  $P \in A$  beliebig und  $y := \overrightarrow{P_0 P}$ . Dann gilt für alle  $x \in V$ :

$$\begin{aligned}\varphi(x + P) &= \varphi(x + y + P_0) \\ &= \Phi(x + y) + \varphi(P_0) \\ &= \Phi(x) + \Phi(y) + \varphi(P_0) \\ &= \Phi(x) + \varphi(y + P_0) \\ &= \Phi(x) + \varphi(P)\end{aligned}$$

(2) Sei  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$  gegeben, dann gilt für alle  $P \in A, x \in V$ :

$$\begin{aligned}\varphi(x + P) &= \Phi(x) + \varphi(P) \\ \implies \Phi(x) &= \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(x + P)}\end{aligned}$$

Also ist  $\Phi$  durch  $\varphi$  eindeutig bestimmt.

(3) Sei  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$ ,  $\psi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(B, C)$ . Dann gilt für alle  $P \in A, x \in V$ :

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi(x + P) &= \psi(\varphi(x + P)) \\ &= \psi(\Lambda_\varphi(x) + \varphi(P)) \\ &= \Lambda_\psi(\Lambda_\varphi(x)) + \psi(\varphi(P)) \\ &= \Lambda_{\psi \circ \varphi}(x) + \psi \circ \varphi(P)\end{aligned}$$

Also ist  $\psi \circ \varphi$  affin mit zugehörigem Homomorphismus  $\Lambda_{\psi \circ \varphi} = \Lambda_\psi \circ \Lambda_\varphi$ .

(4) Es gilt für  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$ :

$$\begin{aligned}\varphi \text{ injektiv} &\iff (\varphi(P) = \varphi(Q) \implies P = Q) \\ &\iff (\varphi(\overrightarrow{QP}) + \varphi(Q) = \varphi(Q) \implies P = Q) \\ &\iff (\Lambda_\varphi(\overrightarrow{QP}) + \varphi(Q) = \varphi(Q) \implies P = Q) \\ &\iff (\Lambda_\varphi(\overrightarrow{QP}) = 0 \implies \overrightarrow{QP} = 0) \\ &\iff \Lambda_\varphi \text{ ist injektiv}\end{aligned}$$

Der Beweis für Surjektivität erfolgt analog.

(5) Leichte Übung! ■

**Satz 28:**

Seien  $A, B$  affine Teilräume mit Richtungen  $V, W$ . Zu  $(P_0, Q_0) \in A \times B$  und  $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$  existiert genau eine affine Abbildung  $\varphi : A \rightarrow B$  mit  $\Lambda_\varphi = \Phi$  und  $\varphi(P_0) = Q_0$ .

**Beweis:** Es ist  $A = V + P_0$ . Definiere  $\varphi(x + P_0) := \Phi(x) + Q_0$ , so ergibt sich nach Bemerkung (1) eine affine Abbildung mit  $\varphi(P_0) = Q_0$ . Dies legt  $\varphi$  bereits eindeutig fest. ■

**Satz 29:**

Die Koordinatenabbildung  $D_K : A \rightarrow \mathbb{A}^n(K)$  zu einem Koordinatensystem  $K = (\mathcal{O}, B)$  ist ein affiner Isomorphismus (mit zugehöriger linearer Abbildung  $D_B : V \rightarrow K^n$ ).

**Beweis:** Es gilt:

$$\begin{aligned} D_K(x + \mathcal{O}) &\stackrel{\text{Def.}}{=} D_B(x) \\ &= D_B(x) + 0 \\ &= D_B(x) + D_K(\mathcal{O}) \end{aligned}$$

Nach Satz 29 existiert genau eine affine Abbildung, die dies tut. Dass es sich bei  $D_K$  um eine Isometrie handelt, wurde bereits früher eingesehen, da  $D_B$  Isometrie ist. ■

**Korollar:**

Affine Räume über festen Körper sind genau dann isomorph, wenn ihre Dimension gleich ist.

**Satz 30 (Erhaltung von Teilräumen):**

Sei  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$  und  $C \subseteq A$ . Falls  $C$  affiner Teilraum mit Richtung  $U := U_C$  ist, so ist  $\varphi(C) \subseteq B$  affiner Teilraum mit Richtung  $\Lambda_\varphi(U)$ .

Ist  $\varphi$  Isomorphismus, so gilt:

(1)  $C \subseteq A$  ist genau dann affiner Teilraum, wenn  $\varphi(C) \subseteq B$  affiner Teilraum ist.

(2) Es gilt  $\dim C = \dim \varphi(C)$  für jeden affinen Teilraum  $C$ .

(3) Sind  $C, C' \subseteq A$  affine Teilräume, so gilt:

$$\varphi([C \cup C']) = [\varphi(C) \cup \varphi(C')]$$

und:

$$\varphi(C \cap C') = \varphi(C) \cap \varphi(C')$$

(4)  $C \parallel C' \implies \varphi(C) \parallel \varphi(C')$

**Beweis:** Sei  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$ ,  $P \in C$  (d.h.  $C = U + P$ ). Nach Teilraumkriterium gilt dann:

$$\varphi(C) = \Phi(U) + \varphi(P)$$

Daraus folgt, dass  $\varphi(C)$  affiner Teilraum ist.

(1) Leichte Übung!

(2) Leichte Übung!

(3) Sogar für beliebige Teilmengen  $C, C' \subseteq A$  gilt, wenn  $\varphi$  bijektiv ist:

$$\varphi(C \cap C') = \varphi(C) \cap \varphi(C')$$

Für alle affinen Teilräume  $D$ , die  $C \cup C'$  enthalten, gilt:

$$\varphi(D) \supseteq \varphi(C) \cup \varphi(C')$$

Also gilt insbesondere auch für  $D := [C \cup C']$ :

$$\varphi([C \cup C']) \supseteq \varphi(C) \cup \varphi(C')$$

Daraus folgt (für jede affine Abbildung, also insbesondere auch für  $\varphi^{-1}$ ):

$$\varphi([C \cup C']) \supseteq [\varphi(C) \cup \varphi(C')]$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} [C \cup C'] &\supseteq \varphi^{-1}([\varphi(C) \cup \varphi(C')]) \\ &\supseteq [\varphi^{-1}(\varphi(C)) \cup \varphi^{-1}(\varphi(C'))] \\ &= [C \cup C'] \end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichheit.

(4) Leichte Übung! ■

### 21.1.1. Grundaufgaben im affinen Standardraum $\mathbb{A}_n(K)$

Seien  $P_0, \dots, P_m, Q_0, \dots, Q_s \in K^n$  und  $B := [P_0, \dots, P_m], C := [Q_0, \dots, Q_s]$  gegeben. Ziel ist es  $[B \cup C]$  und  $B \cap C$  zu berechnen.

Mit  $x_i := \overrightarrow{P_0 P_i} = P_i - P_0$  gilt:

$$B = \langle x_1, \dots, x_m \rangle + P_0$$

Analog gilt mit  $z_j := \overrightarrow{Q_0 Q_j} = Q_j - Q_0$ :

$$C = \langle z_1, \dots, z_s \rangle + Q_0$$

Daraus folgt dann mit  $y := \overrightarrow{P_0 Q_0}$ :

$$[B \cup C] = \langle x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_s, y \rangle + P_0$$

- (1) Finde mit dem Gauß-Algorithmus eine Basis  $\{b_1, \dots, b_r\}$  von  $U$ , dann gilt:

$$[B \cup C] = [b_1 + P_0, \dots, b_r + P_0, P_0]$$

mit erzeugenden Punkten in allgemeiner Lage.

- (2) Interpretiere  $B$  als Lösungsmenge  $\mathcal{L}(A, b)$  eines LGS  $Ax = b$ .  
Sei  $x_0 = P_0 \in K^n$ , dann liefert der Spezialfall  $B = C$  in (1):

$$B = U + x_0$$

wobei  $b_1, \dots, b_r$  Basis von  $U$  ist.

Ziel ist es nun, eine Matrix  $A \in K^{n-r \times n}$  zu finden, mit  $U = \text{Kern}(\Lambda_A)$ . Dazu betrachte die Matrix:

$$M := (b_1 \quad \dots \quad b_r)$$

Offensichtlich gilt  $\text{rg}(M) = r$ .

Betrachte nun die Rechtsmultiplikation:

$$P_M : K^n \rightarrow K^r, y \mapsto yM$$

Dann hat der Kern von  $\rho_M$  Dimension  $n-r$  und eine Basis aus Zeilenvektoren  $\{c_1, \dots, c_{n-r}\}$ .  
Damit lässt sich nun die Matrix  $A$  wie folgt definieren:

$$A := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

Da der Rang von  $A$  offensichtlich  $n-r$  ist, ist die Dimension des Kerns genau  $r$ , und es gilt:

$$\begin{aligned} \forall t \in \{1, \dots, n-r\} : c_t M &= 0 \\ \iff \forall t \in \{1, \dots, n-r\}, j \in \{1, \dots, r\} : c_t \cdot b_j &= 0 \\ \iff \forall j \in \{1, \dots, r\} : A b_j &= 0 \end{aligned}$$

Also ist  $U$  Unterraum von  $\text{Kern}(\Lambda_A)$  und aus der Gleichheit der Dimensionen beider Räume folgt dann:

$$B = \mathcal{L}(A, b)$$

- (3) Durchschnittsberechnung:

Finde mit Hilfe von (2) Matrizen  $A, A'$  und  $b, b' \in K^n$ , sodass  $B = \mathcal{L}(A, b), C = \mathcal{L}(A', b')$  ist. Dann gilt:

$$B \cap C = \mathcal{L}(D, d) \text{ mit } D := \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$$

Es genügt nun das LGS  $Dx = d$  zu lösen, um  $B \cap C$  zu erhalten.

**Beispiel:** Betrachte den affinen Raum  $\mathbb{A}_3(\mathbb{F}_2) = \{0, 1\}^3$ . Gegeben seien die Ebenen:

$$\begin{aligned} E &:= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [e_1, e_2, 0] \\ F &:= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [e_2, e_1 + e_2, e_2 + e_3] \end{aligned}$$

## 21. Affine Koordinaten und affine Abbildungen

Zur Bestimmung von  $E \cap F$  werden zunächst die zu  $E$  und  $F$  gehörigen Gleichungssysteme aufgestellt:

$$E = \{x \in \mathbb{F}_2^3 \mid x_3 = 0\} = \mathcal{L}((0, 0, 1), 0)$$

$$F = \text{Kern}(\Lambda_{(0,1,0)}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}((0, 1, 0), 1)$$

Daraus folgt:

$$E \cap F = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \{e_2, e_1 + e_2\}$$

### Satz 31 (Satz von Pappos):

In einem affinen Raum  $A$  mit Dimension 2 seien  $G, G'$  verschiedene Geraden mit  $G \cap G' = \{O\} \in A$ . Ferner seien  $P_1, P_2, P_3 \in G \setminus \{O\}$  und  $Q_1, Q_2, Q_3 \in G' \setminus \{O\}$ , sodass gilt:

$$P_1Q_3 \parallel P_3Q_1 \text{ und } P_1Q_2 \parallel P_2Q_1$$

Daraus folgt:

$$P_2Q_3 \parallel P_3Q_2$$

**Beweis:** Da  $Q_3 \notin G$  ist, sind  $O, P_1, Q_3$  in allgemeiner Lage. Daraus erhalten wir folgendes Koordinatensystem:

$$\mathcal{K} := (O, \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OQ_3}\})$$

Da die Koordinatendarstellung  $D_{\mathcal{K}} : A \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_2(K)$  Parallelitäten und Schnittpunkte erhält, können wir o.B.d.A annehmen:

$$A = \mathbb{A}_2(K) \text{ und } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} P_1 = \overrightarrow{OP_1} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & P_2 &= \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} & P_3 &= \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Q_3 = \overrightarrow{OQ_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & Q_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 \end{pmatrix} & Q_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wobei  $\lambda_2, \lambda_3, \mu_2, \mu_3 \neq 0$  sind. Daraus folgt für die Richtungen:

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{1, 2, 3\} : U_{P_iQ_j} &= \langle \overrightarrow{P_iQ_j} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_i \\ -\mu_j \end{pmatrix} \right\rangle \\ \implies U_{P_1Q_3} &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $\lambda_3 = \mu_1$  und es existiert ein  $\rho \in K^\times$ , sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ -\mu_1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt mit  $\lambda_3 = \rho\mu_2 = \lambda_2\mu_2$ :

$$\begin{aligned} U_{P_2Q_3} &= \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ -\mu_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_2\mu_2 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= U_{P_3Q_2} \end{aligned}$$

Also sind  $P_2Q_3$  und  $P_3, Q_2$  parallel. ■

## 21.2. Koordinatenwechsel und Darstellung affiner Abbildungen

### Lemma:

Seien  $\mathcal{K} = (O, B)$  und  $\mathcal{L} = (Q, C)$  Koordinatensysteme des affinen Raums  $A$  mit Richtung  $V$ . Sei  $M_{CB} := D_{CB}(\text{id}_V)$  die Basiswechselmatrix.

Dann rechnen sich Koordinaten eines Punktes  $P$  bzgl.  $\mathcal{K}$  in die Koordinaten bzgl.  $\mathcal{L}$  wie folgt um:

$$D_{\mathcal{L}}(P) = M_{CB} \cdot (D_{\mathcal{K}}(P) - D_{\mathcal{K}}(Q))$$

**Beweis:** Es gilt:

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{L}}(P) &= D_C(\overrightarrow{QP}) \\ &= M_{CB} \cdot D_B(\overrightarrow{QP}) \\ &= M_{CB} \cdot D_B(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) \\ &= M_{CB} \cdot (D_B(\overrightarrow{OP}) - D_B(\overrightarrow{OQ})) \\ &= M_{CB} \cdot (D_{\mathcal{K}}(P) - D_{\mathcal{K}}(Q)) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Anwendung:** Ist ein beliebiges Koordinatensystem  $\mathcal{L} = (Q, B)$  gegeben, so lässt sich ein Punkt  $P$  einfach in das Koordinatensystem  $\mathcal{K} = (O, S)$  von  $\mathbb{A}_n(K)$  mit Standardbasis  $S$  überführen. Schreibe dazu  $B$  als:

$$B = (b_1 \quad \dots \quad b_n) \in K^{(n \times n)}$$

Dann ist  $M_{SB} = B$  und es gilt:

$$D_{\mathcal{L}}(P) = M_{BS}(P - Q) = B^{-1}(P - Q)$$

**Lemma:**

(1) Die Abbildung  $\psi : K^n \rightarrow K^m$  ist genau dann affin, wenn gilt:

$$\exists A \in K^{m \times n}, a \in K^m : \psi(x) = Ax + a$$

Schreibe daher kurz:  $\psi =: (A, a)$

(2) Ist ferner  $C \in K^{t \times m}, c \in K^t$ , so gilt:

$$(C, c) \circ (A, a) = (CA, Ca + c)$$

(3) Ist  $m = n$  und  $A \in \text{GL}_n(K)$ , so ist  $(A, a)$  bijektiv und es gilt:

$$(A, a)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}a)$$

**Beweis:** (1) Die Abbildung  $\psi$  ist genau dann affin, wenn ein  $\Lambda_\varphi = \Lambda_A \in \text{Hom}_{\text{aff}}(K^n, K^m)$  für ein  $A \in K^{m \times n}$ , sodass gilt:

$$\psi(x) = \psi(x + 0) = \Lambda_\varphi(x) + \psi(0)$$

Die Behauptung folgt mit  $a := \psi(0)$ .

(2) Leichte Übung!

(3) Leichte Übung! ■

**Definition:** Seien  $A, A'$  affine Räume mit Koordinatensystemen  $\mathcal{K} = (O, B), \mathcal{K}' = (O', B')$  und zugehörigen Koordinatenisomorphismen  $D_{\mathcal{K}}, D_{\mathcal{K}'}$ . Definiere:

$$D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi) := D_{\mathcal{K}'} \circ \varphi \circ D_{\mathcal{K}}^{-1} \in \text{Hom}_{\text{aff}}(K^n, K^m)$$

**Lemma:**

Es gilt:

$$D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi) = (D_{B'B}(\Lambda_\varphi), D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}))$$

**Beweis:** Sei  $P \in A$  beliebig, so entspricht es  $D_{\mathcal{K}}(P) \in K^n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi)(D_{\mathcal{K}}(P)) &\stackrel{\text{Def.}}{=} D_{\mathcal{K}'}(\varphi(P)) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(P)}) \\ &= D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}) \\ &= D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) + D_{B'}(\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}) \\ &= D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) + D_{B'}(\Lambda_\varphi(\overrightarrow{OP})) \\ &= D_{B'B}(\Lambda_\varphi) \cdot D_B(\overrightarrow{OP}) + D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) \\ &= (D_{B'B}(\Lambda_\varphi), D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}))(D_{\mathcal{K}}(P)) \end{aligned}$$



Da also beide Abbildungen auf einen beliebigen Punkt  $P$  die selbe Wirkung haben, müssen sie gleich sein. ■

**Bemerkung:** Das Zusammenfügen von kommutativen Diagrammen liefert für einen weiteren affinen Raum  $A''$  mit Koordinatensystem  $\mathcal{K}'' = (O'', B'')$  und einer affinen Abbildung  $\Psi : A' \rightarrow A''$ :

$$D_{\mathcal{K}''\mathcal{K}}(\psi \circ \varphi) = D_{\mathcal{K}''\mathcal{K}'}(\psi) \circ D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi)$$

**Korollar:**

(1) Speziell für eine affine Abbildung  $\varphi : A \rightarrow A$  und zwei Koordinatensysteme  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  gilt:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = D_{\mathcal{L}\mathcal{K}}(\text{id}) \circ D_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\varphi) \circ D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(\text{id})$$

(2) Insbesondere gilt für  $\varphi = \text{id}$ :

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = D_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\varphi)$$

(3) Für  $\mathbb{A}_n(K)$  mit Standardkoordinatensystem  $\mathcal{K} = (0, S)$ , sei  $D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(\text{id}) =: (M, b)$ . Dann gilt für  $\varphi = (A, a) = D_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\varphi)$ :

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = (M^{-1}AM, M^{-1}((A - I)b + a))$$

**Beweis:** (1) Folgt aus zweimaligem anwenden der obigen Bemerkung.

(2) Folgt aus (1).

(3) Es gilt:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{K}}(\text{id}) = (M, b)^{-1} = (M^{-1}, -M^{-1}b)$$

Der restliche Beweis ergibt sich aus (1). ■

## 21.3. Geometrische Eigenschaften von affinen Abbildungen

Wir haben gesehen, dass Koordinaten für den Umgang mit affinen Abbildungen **nützlich** sind. Nun stellen wir die Frage, inwiefern Koordinaten **nötig** sind, d.h. welche Eigenschaften von der Koordinatenwahl abhängen.

**Definition:** Sei  $A$  affiner Raum und  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, A)$ .

(a)  $P \in A$  heißt **Fixpunkt** von  $\varphi$ , falls gilt:

$$\varphi(P) = P$$

- (b) Ein affiner Teilraum  $\emptyset \neq B \subseteq A$  heißt **Fixraum** von  $\varphi$ , falls gilt:

$$\varphi(B) \subseteq B$$

- (c) Ein Untervektorraum  $U$  des Richtungsvektorraums  $U_A$  heißt **Fixrichtung** von  $\varphi$ , falls gilt:

$$\Lambda_\varphi(U) \subseteq U$$

**Beispiel:** (1) Sei  $x \in V := U_A$  fest und eine **Translation**

$$\varphi = \tau_x : A \rightarrow A, P \mapsto x + P$$

gegeben, dann gilt:

- (a) Für alle  $U \leq V$  ist  $U$  Fixrichtung, da  $\Lambda_\varphi = \text{id}_V$  ist.

- (b) Für  $x \neq 0$  existieren keine Fixpunkte.

- (c) Für eine Fixgerade  $G$  muss gelten:

$$\varphi(G) = x + G \subseteq G$$

$$\iff x \in U_G$$

Also ist die Menge aller Fixgeraden für  $x \neq 0$ :

$$\{Kx + P \mid P \in A\}$$

Beachte dass eine Fixgerade hier **keinen** Fixpunkt enthält.

- (2) Seien  $\mu \in K \setminus \{0\}$  und  $P \in A$  fest und eine **Streckung**

$$\varphi : A \rightarrow A, x + P \mapsto \mu x + P$$

mit Zentrum  $P$  und Streckungsfaktor  $\mu$  gegeben.

Da im Fall  $\mu = 1$   $\varphi = \text{id} = \tau_0$  gilt, wollen wir im Folgenden  $\mu \neq 1$  annehmen.

- (a) Die Menge der Fixpunkte ist gleich  $\{P\}$ .

- (b) Für alle  $U \leq V$  ist  $U$  Fixrichtung.

- (c) Fixgeraden sind genau die Geraden, die  $P$  enthalten.

**Lemma:**

Für  $A \in K^{n \times n}$ ,  $a \in K^n$  und  $\varphi = (A, a)$  gilt:

- (1) Die Fixpunkte bilden den affinen Teilraum  $\mathcal{L}(A - I, -a)$ .
- (2) Genau dann, wenn 1 kein Eigenwert von  $A$  ist, ist die Menge der Fixpunkte einelementig.
- (3)  $B$  ist genau dann Fixraum von  $\varphi$ , wenn  $U_B$  Fixrichtung ist und ein Punkt  $P \in B$  mit  $\varphi(P) \in B$  existiert.

**Beweis:** (1) Es ist  $\varphi = Ax + a$ , also gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = x &\iff Ax + a = x \\ &\iff Ax - x = -a \\ &\iff (A - I)x = -a \\ &\iff x \in \mathcal{L}(A - I, -a)\end{aligned}$$

(2) Ist 1 kein Eigenwert von  $\varphi$ , so existiert  $(A - I)^{-1}$ , daraus folgt für einen Fixpunkt  $x$ :

$$x = (A - I)^{-1}(-a)$$

Also ist  $x$  eindeutig bestimmt.

(3)  $B = U + P$  ist genau dann Fixraum, wenn gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(B) \subseteq B &\iff \varphi(U + P) \subseteq U + P = B \\ &\iff \Lambda_\varphi(U) + \varphi(P) \subseteq U + P \\ &\iff \varphi(P) \in B \wedge \Lambda_\varphi(U) \subseteq U\end{aligned}$$

Also ist  $U$  Fixrichtung. ■

## 21.4. Geometrische Charakterisierung von Affinitäten

**Definition:** Sei  $A$  ein affiner Raum mit einer (nicht notwendigerweise affinen) Abbildung  $\varphi : A \rightarrow A$ .  $\varphi$  heißt **geradentreu**, wenn für  $G \subseteq A$  gilt:

$$G \text{ Gerade} \iff \varphi(G) \text{ Gerade}$$

**Beispiel:** (1) Affinitäten sind geradentreu.

(2) Die Abbildung:

$$\varphi : \mathbb{A}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{A}_2(\mathbb{C}), (\alpha, \beta) \mapsto (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$$

ist geradentreu, aber **nicht** affin.

**Lemma:**

Sei  $A$  ein affiner Raum über  $K \neq \mathbb{F}_2$  und sei  $\varphi : A \rightarrow A$  bijektiv und geradentreu.

Dann gilt für  $O, P, Q \in A$  :  $\varphi([P, Q]) = [\varphi(Q), \varphi(P)]$  und  $\varphi([O, P, Q]) = [\varphi(O), \varphi(P), \varphi(Q)]$ .

Falls  $\dim(A) = 2$ , so gilt:

- (1) Sind  $P \neq Q$  Fixpunkte von  $\varphi$ , so folgt:  $G := [P, Q]$  ist Fixgerade
- (2) Sind  $H \nparallel G$  Fixgeraden, so folgt:  $H \cap G = \{Q\}$  mit Fixpunkt  $Q$ .
- (3) Ist  $G$  Fixgerade und  $P$  Fixpunkt, so folgt:  $H$  mit  $H \parallel G \wedge P \in H$  ist Fixgerade.

**Vorbemerkung:** Auch  $\varphi^{-1}$  ist geradentreu

$$\underbrace{\varphi^{-1}(G)}_{=:L} \text{ Gerade} \iff \underbrace{\varphi(L)}_{=:G} \text{ Gerade}$$

**Beweis:** Ohne Einschränkung sei  $P \neq Q$ .

Aus  $\varphi$  geradentreu folgt

$$\varphi([P, Q]) \text{ Gerade} \ni \varphi(P), \varphi(Q) \supseteq [\varphi(P), \varphi(Q)]$$

Daraus folgt die Gleichheit, da die Dimension gleich ist.

**Behauptung:**  $B := \varphi([O, P, Q])$  ist ein affiner Teilraum.

Wende das Teilraumkriterium an

[Sei  $\varphi(R), \varphi(S) \in B$  mit  $R, S \in [O, P, Q]$ , dann folgt  $[\varphi(R), \varphi(S)] = \varphi([R, S]) \subseteq B$   
und  $B \supseteq \underbrace{\varphi(O)}_{=:O'}, \underbrace{\varphi(P)}_{=:P'}, \underbrace{\varphi(Q)}_{=:Q'}$ ]

Gleicher Schluss für  $\varphi^{-1}$ :

$$\varphi^{-1}([O', P', Q']) \supseteq [\varphi^{-1}(O'), \varphi^{-1}(P'), \varphi^{-1}(Q')] = [O, P, Q]$$

Wende  $\varphi$  an:

$$[O', P', Q'] \supseteq \varphi([O, P, Q]) = B$$

Damit folgt die Gleichheit.

Speziell für  $\dim A = 2$ :

(1) Für  $G := [P, Q]$  gilt:

$$\varphi(G) = [\varphi(P), \varphi(Q)] = [P, Q] = G$$

(2)  $G \parallel H$ ,  $G \cap H =: \{Q\}$ ; dann folgt

$$\{\varphi(Q)\} = \varphi(G \cap H) \subseteq \varphi(G) \cap \varphi(H) = G \cap H$$

Daraus folgt  $\{\varphi(Q)\} \subseteq G \cap H = \{Q\}$ , also  $\varphi(Q) = Q$ .

(3) Fall  $P \in G$ : also  $H = G$ . Fertig.

Fall  $P \notin G$ :

$$H \parallel G \implies H \cap G = \emptyset \xrightarrow{\varphi \text{ bij.}} \varphi(H) \cap \underbrace{\varphi(G)}_G = \emptyset \implies \varphi(H) \parallel G$$

Aus  $P = \varphi(P) \in \varphi(H)$  folgt  $H = \varphi(H)$ . ■

**Satz 32:**

- (1) Sei  $A$  ein affiner Raum mit  $\dim A > 1$  über dem Körper  $K = \mathbb{F}_p$  ( $p > 2$ ) oder  $K = \mathbb{Q}$ .  
Für eine Abbildung  $\varphi : A \rightarrow A$  gilt:

$$\varphi \text{ Affinität} \iff \varphi \text{ bijektiv und geradentreu}$$

- (2) Sei  $K$  ein Körper mit Teilkörper  $\mathbb{Q}$ ,  $n > 1$ . Ist  $\varphi : K^n \rightarrow K^n$  bijektiv und geradentreu mit  $\varphi(0) = 0$ , so folgt:  $\varphi$  ist  $\mathbb{Q}$ -linear.

**Beweis:** (1) “ $\implies$ ”: bekannt ✓

“ $\impliedby$ ”: Wähle Koordinatensystem  $\mathcal{K} = (0, B)$  und  $\mathcal{L} = (\varphi(0), B)$ .

Schachtele mit den affinen Bijektionen  $D_{\mathcal{K}}^{-1}$  und  $D_{\mathcal{L}}$  zu

$$\tilde{\varphi} := D_{\mathcal{L}} \circ \varphi \circ D_{\mathcal{K}}^{-1} : K^n \rightarrow K^n \quad (\text{mit } \tilde{\varphi}(0) = 0)$$

Es gilt:  $\varphi$  ist geradentreu, bijektiv (bzw. Affinität) genau dann, wenn  $\tilde{\varphi}$  die entsprechende Eigenschaft hat.

Daher gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit:  $\varphi : K^n \rightarrow K^n$  und  $\varphi(0) = 0$ .

(1)^(2) Restbehauptung: Für  $K_0 := \mathbb{F}_p$  oder  $\mathbb{Q}$  gilt:  $\varphi$  ist  $K_0$ -linear.

Zu zeigen: Für  $P, Q \in K^n$ ,  $\lambda \in K_0$  gilt:  $\varphi(\lambda P) = \lambda \varphi(P)$ ,  $\varphi(P + Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$

Oder: Auf  $U_0 := K_0 P + K_0 Q$  ist  $\varphi|_{U_0}$   $K_0$ -linear.

Dies ist leicht zu reduzieren auf den Fall:  $P, Q$  sind linear unabhängig:  
 $O := 0, P, Q$  in allgemeiner Lage,  $E := [O, P, Q]$  ist Ebene mit zwei verschiedenen Geraden  $[O, P], [O, Q] \subseteq E$ .

Mit  $\varphi$  geradentreu und bijektiv folgt:  $[\varphi(O), \varphi(P), \varphi(Q)] = \varphi(E) \supseteq 2$  verschiedene Geraden; daraus folgt  $\varphi(E)$  ist Ebene, also  $\underbrace{\{\varphi(0), \varphi(P), \varphi(Q)\}}_{=0}$  in allgemeiner Lage,

d.h.  $\varphi(P), \varphi(Q)$  sind linear unabhängig.

Daraus folgt: es existiert  $\rho \in \text{Aut}(K^n)$  mit  $\rho(P)\varphi(P), \rho(Q) = \varphi(Q)$

**Beachte:**  $\Psi|_{U_0} := \rho^{-1} \circ \varphi|_E : E \rightarrow E$  ist bijektiv, geradentreu und hat mindestens die Fixpunkte  $O, P, Q$ .

**Zeige:**  $\Psi|_{U_0} = \text{id}$  ( $\rightsquigarrow \varphi|_{U_0}$  ist  $K_0$ -linear; mit anderen Worten:  $U_0$  besteht aus Fixpunkten von  $\Psi$ ) **1. Schritt:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $nP$  Fixpunkte von  $\Psi$  (mit vollständiger Induktion)

$n = 0, 1$ : ✓

$n - 1 \rightarrow n$ : Falls  $(n - 1)P = 0$ , so ist  $nP = P$  Fixpunkt. Fertig.

Falls  $R := (n - 1)P \neq 0$  Fixpunkt ist, dann folgt nach Lemma: die parallelen

Geraden  $G_1 \parallel [O, Q]$  mit  $R \in G_1$  und  $G_2 \parallel [O, P]$  mit  $Q \in G_2$  sind Fixgeraden  $G_i$  und  $G_1 \cap G_2 = \{R + Q\}$  ist Fixpunkt. Damit und mit  $[Q, P]$  Fixgerade folgt, dass eine parallele Gerade  $G_3$  durch  $R + Q$  Fixgerade ist.

Also ist

$$(R + Q + K(P - Q)) \cap K \cdot P = G_3 \cap [O, P] = \{nP\}$$

ein Fixpunkt.

Analog: für alle  $m \in \mathbb{N}$ :  $mQ$  ist Fixpunkt.

**2. Schritt:**  $K_0 \cdot P$  (und analog  $K_0 \cdot Q$ ) besteht aus Fixpunkten.

Fall  $K_0 = \mathbb{F}_p$ : Fertig nach dem ersten Schritt, da  $\mathbb{F}_p = \{n - 1_{\mathbb{F}_p} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Fall  $K_0 = \mathbb{Q}$ : Seien  $m, n > 0$  in  $\mathbb{N}$ .  $[mQ, nP]$  ist Fixgerade.

Die Parallele  $G_4$  durch  $Q$  ist Fixgerade

$$G_4 = K \cdot (mQ - nP) + Q$$

Daraus folgt:  $G_4 \cap [O, P] =: \{S\}$  ist Fixpunkt mit  $S = \frac{n}{m}P$ . Ferner ist  $-S$  Fixpunkt, denn:

$$\{S + Q\} = \underbrace{(K \cdot Q + S)}_{\parallel [O, Q]} \cap \underbrace{(K \cdot S + Q)}_{\parallel [O, S]}$$

Beides sind Fixgeraden, also ist  $\{S + Q\}$  Fixpunkt

$$\{-S\} = [O, S] \cap (K \cdot (S + Q) + Q)$$

**3. Schritt:** Zu zeigen: für alle  $T \in U_0$ :  $T$  ist Fixpunkt

$$\exists \alpha, \beta \in K_0 : T = \alpha P \beta Q$$

$$\{T\} = \underbrace{(KP + \underbrace{\beta Q}_{\text{Fixpunkt}})}_{\parallel [O, P]} \cap \underbrace{(KQ + \underbrace{\alpha P}_{\text{Fixpunkt}})}_{\parallel [O, Q]}$$

■