# Kapitel 3

# Homologie von Garben

$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ kurze exakte Sequenz von Garben auf $X$, $U \subseteq X$ offen
$\Rightarrow 0 \to \mathcal{F}'(U) \to \underset{\Gamma(U,\mathcal{F})}{\underset{||}{\mathcal{F}(U)}} \to \mathcal{F}''(U) \to \ldots ?$ exakt

## § 12 abgeleitete Funktoren

**Definition + Bemerkung 12.1**
a) Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ***abelsch***, wenn gilt:
   (i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist abelsche Gruppe für alle $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
   (ii) Für Morphismen gelten die Distributivgesetze (bezüglich + und $\cdot$)
   (iii) Direkte Summen, Kerne, Kokerne existieren
   (iv) Der Homomorphiesatz gilt
b) $\underline{\mathrm{Ab}}$, $\underline{k-\mathrm{VR}}$, $\underline{R-\mathrm{Mod}}$, $\underline{\mathrm{Ab}(X)}$, $\underline{\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}}$ sind abelsche Kategoriem
c) $\underline{\mathrm{Grp}}$, $\underline{\mathrm{Set}}$ sind nicht abelsch

**Definition 12.2**
Sei $\mathcal{C}$ abelsche Kategorie

a) Ein ***Komplex*** in $\mathcal{C}$ ist eine Sequenz $C^0 := \ldots \to C^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+i} \to \ldots$ mit Objekten $C^i$ in $\mathcal{C}$, Morphismen $d^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C^i, C^{i+1})$ sodass für jedes $i \in \mathbb{Z}$ gilt: $\mathrm{Bild}(d^{i-1}) \subseteq \mathrm{Kern}(d^i)$
b) Für einen Komplex $C^0$ heißt $H^i(C^0) := {}^{\mathrm{Kern}(d^i)}\big/_{\mathrm{Bild}(d^{i-1})}$ ***$i$-tes Kohomologieobjekt***.
c) $d^i \circ d^{i-1} = 0 \ \forall\ i$

**Proposition 12.3**
Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie
a) Die Komplexe in $\mathcal{C}$ bilden eine Kategorie $\mathcal{C}^0$ mit Morphismen...
b) $H^i$ ist Funktor $\mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}$✓
c) Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \to C'^0 \to C^0 \to C''^0 \to 0$ in $\mathcal{C}^0$ gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \to H^0(C'^0) \to H^0(C^0) \to H^0(C''^0) \xrightarrow{d} H^1(C'^0) \to H^1(C^0) \to \ldots$$

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& C'^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C'^{i} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{C'^{i+1}} \arrow[r] \arrow[d, shift left] & C'^{i+2} \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & C^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C^{i} \arrow[r] \arrow[r, shift left=2] \arrow[d, shift left] & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[u, shift left, "\text{Urbild}"] & C^{i+2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& C''^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{C''^{i}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[u, shift left, "\text{Urbild}"] \arrow[uur, dashed, bend right] & C''^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & C''^{i+2} \arrow[d] & \\
& 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

**Ziel:** Sei $X$ ein Schema, $\mathcal{F}$ Garbe auf $X$. Suche Gruppen (beziehungsweise $\mathcal{O}_X$-Moduln) $H^i(X, \mathcal{F})$, $i \geq 0$, sodass für jede kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ in $\underline{\mathrm{Ab}(X)}$ (beziehungsweise $\underline{\mathcal{O}_X - \mathrm{Mod}}$) gilt:

$0 \to H^0(X, \mathcal{F}') \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}'') \to H^1(X, \mathcal{F}') \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \ldots$ ist exakt und $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

**Bemerkung 12.4**
Sei $H^i(X, \cdot)$ so ein Funktor, (*) $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}^0 \to \mathcal{G}^1 \to$ exakte Sequenz in $\underline{\mathrm{Ab}(X)}$ („Auflösung von $\mathcal{F}$“).

Ist $H^i(X, \mathcal{G}^j) = 0$ für alle $j \geq 0$ und alle $i \geq 1$ ($\mathcal{G}^j$ ist ***azyklisch***), so gilt $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(X, \mathcal{G}^0))$

**Beweis**
Induktion über $i$:

$i = 0$: $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G}^0) \to \Gamma(X, \mathcal{G}^1)$ ist exakt.
$H^0(\Gamma(X, \mathcal{G}^0)) = \mathrm{Kern}(\Gamma(X, \mathcal{G}^0) \to \Gamma(X, \mathcal{G}^1)) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$

Aus (*) folgt
$$\begin{array}{ccccccccccl} 0 & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{G}^0 & \to & \mathcal{G}^0/\mathcal{F} & \to & 0 & & \text{ist exakt und} \\ 0 & \to & \mathcal{G}^0/\mathcal{F} & \to & \mathcal{G}^1 & \to & \mathcal{G}^2 & \to & \ldots & & \text{ist exakt} \end{array}$$

$i = 1$: Nach Voraussetzung gibt es lange exakte Sequenz

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}^0) \to H^0(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to 0 \to H^1(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) \to \ldots$$

$$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) \big/ \mathrm{Bild}(H^0(X, \mathcal{G}^0))$$

$$(H^0(X, \mathcal{G}^0/\mathcal{F}) \cong \mathrm{Kern}(H^0(X, \mathcal{G}^1) \to H^0(X, \mathcal{G}^2)))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) &\cong \mathrm{Kern}(H^0(X, \mathcal{G}^1) \to H^0(X, \mathcal{G}^2)) \big/ \mathrm{Bild}(H^0(X, \mathcal{G}^0) \to H^0(X, \mathcal{G}^1)) \\ &= H^1(\Gamma(X, \mathcal{G}^0)) \end{aligned}$$
□

**Definition + Bemerkung 12.5**

a) Ein Objekt $I$ in einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ***injektiv***, wenn $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, I)$ exakt ist.
b) $I$ ist genau dann injektiv, wenn für jedes solches Diagramm ein $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, I)$ existiert mit $\tilde{\varphi} \circ \alpha = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[dl, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} C \to C'' \to 0$

$0 \to \mathrm{Hom}(C'', I) \to \mathrm{Hom}(C, I) \to \mathrm{Hom}(C', I)$

**Beispiel**
$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist injektiv in $\underline{\mathrm{Ab}}$, *denn*:

Seien $G' \subseteq G$ abelsche Gruppe, $\varphi : G' \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ Homomorphismus. Für $a \in G$ sei

$$\tilde{\varphi}(a) := \begin{cases} \frac{1}{n}\varphi(n \cdot a) & \text{, falls } n \text{ minimal mit } n \cdot a \in G' \\ 0 & , n \cdot a \notin G' \text{ für alle } n > 0 \end{cases}$$

**Bemerkung 12.6**
Sei $I$ injektives Objekt in $\underline{\mathrm{Ab}(X)}$ und $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[l, dashed, bend left, "p"] \arrow[r] & \mathcal{F}'' \arrow[r] & \mathcal{F}'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$ exakt.

a) Dann gibt es $p : \mathcal{F} \to I$ mit $p \circ \alpha = \mathrm{id}_I$.

b) $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'' \oplus I$, *denn:*
$I \cap \mathrm{Kern}(p) = 0$, $\beta|_{\mathrm{Kern}(p)} : \mathrm{Kern}(p) \to \mathcal{F}''$ ist Isomorphismus, $I + \mathrm{Kern}(p) = \mathcal{F}$

c) $0 \to H^0(X, I) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}'') \to 0 = H^1(X, I)$ ist exakt.

**Proposition 12.7**
In den Kategorien $\underline{\mathrm{Ab}}$, $\underline{R\text{-Mod}}$, $\underline{\mathrm{Ab}(X)}$, $\underline{\mathcal{O}_X\text{-Modul}}$ gibt es genügend viele injektive Objekte, das heißt jedes Objekt ist isomorph zu einem Unterobjekt eines injektiven Objekts.

**Beweis**
Aufwändige Konstruktion aus $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (aber naheliegend) □

**Definition + Bemerkung 12.8**
Sei $X$ Schema, $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}(X)$

a) $\mathcal{F}$ besitzt injektive Auflösung, das heißt eine exakte Sequenz $0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow I^0 \to I^1 \to I^2 \to \ldots$ mit $\forall\ \nu : I_\nu$ injektiv $(\ldots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n,\ \tilde{d}^n : I^n/\mathrm{Bild}(d^{n-1}) \hookrightarrow I^{n+1},\ d^n = \tilde{d}^n \circ \mathrm{pr})$

b) $H^i(X, \mathcal{F}) := H^i(\Gamma(X, I^0))$ heißt $i$-te Kohomologiegruppe von $\mathcal{F}$, das heißt $H^0$ ist die Kohomologie des Komplexes $0 \to \Gamma(X, I^0) \to \Gamma(X, I^1) \to \Gamma(X, I^2) \to \ldots$

c) Insbesondere: $H^0(X, \Gamma) = \mathrm{Kern}(\Gamma(X, I^0) \to \Gamma(X, I^1)) \underset{\text{linksexakt}}{\overset{\Gamma\text{ ist}}{=}} \Gamma(X, \mathcal{F})$

**Proposition 12.9**
Sei $X$ Schema, $\mathcal{F} \in \mathrm{Abb}(X)$

a) $H^i(X, \mathcal{F})$ hängen nicht von der gewählten injektiven Auflösung ab.

b) $H^i(X, \cdot)$ ist ein Funktor $\underline{\mathrm{Ab}(X)} \to \underline{\mathrm{Ab}}$

c) Jede kurze Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ von Garben induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz $0 \to H^0(X, A) \to H^0(X, B) \to H^0(X, C) \to H^1(X, A) \to H^1(X, B) \to \ldots$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \arrow[r] & I^n \arrow[rr, "d"] \arrow[dr] & & I^{n+1} \arrow[dd] \\
& & & I^n/\mathrm{Kern}(d^n) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, dashed] & \\
\mathcal{G} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & J^n \arrow[rr] & & J^{n+1}
\end{tikzcd}$$

d) Injektive Garben $I$ sind azyklisch, das heißt für alle $i \geq 1$ ist $H^i(X, I) = 0$. $0 \to I \to I \to 0 \to 0 \ldots$ ist injektive Auflösung.

**Verallgemeinerung 12.10**
Seien $A, B$ abelsche Kategorien, $\mathcal{A}$ habe genügend injektive Objekte und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter linksexakter Funktor. $\rightsquigarrow$ Definiere analog zu 12.8 ***abgeleitete Funktoren*** $R^iF$ von $F$ $(i \geq 0)$ $\rightsquigarrow$ diese haben die Eigenschaften aus 12.9.

# § 13 Čech-Kohomologie

Sei $X$ topologischer Raum, $\mathcal{U} = \{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von $X$, $\mathcal{F} \in \underline{\mathrm{Abb}(X)}$

**Definition + Bemerkung 13.1**

a) Für $k \geq 0$ sei $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod\limits_{i_0 < \ldots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k})$

$$d^k : \begin{cases} C(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \to & C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (S_{i_0, \ldots, i_k})_{i_0 < \ldots < i_k} & \mapsto & \left( \sum\limits_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu S_{i_0, \ldots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, \ldots, i_{k+1}} |_{U_{i_0} \cap \ldots U_{i_{k+1}}} \right)_{i_0 < \ldots i_{k+1}} \end{cases}$$

b) Für alle $k \geq 0$ gilt $d^{k+1} \circ d^k = 0$, das heißt $0 \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} \ldots$ ist Kettenkomplex. [Nachrechnen!]

c) $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := H^k(C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = {}^{\mathrm{Kern}(d^k)}\!/_{\mathrm{Bild}(d^{k-1})}$ heißt $k$-te ***Čech-Kohomologie*** von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{U}$.

d) $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \overset{12.8}{=} H^0(X, \mathcal{F})$

**Beweis**

d) $\Phi : \begin{cases} \mathcal{F}(X) & \to & \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Kern}(d^0) \\ S & \mapsto & (S|_{U_i})_{i \in \mathbb{N}} \end{cases}$ ist wohldefiniert

Garbeneigenschaft: $\Phi$ bijektiv □

**Beispiel 13.2**

$X = S^1$, $\mathcal{F} = \mathbb{Z}$ konstante Garbe

a) $\mathcal{U} = \{X, \emptyset, \emptyset, \ldots\} \Rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \cong \mathbb{Z}$

$\forall k \geq 1 : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$

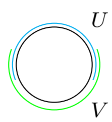
$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{d^0} 0 \xrightarrow{d^1} 0 \to \ldots$$

$\Rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \cong \mathbb{Z}$, $\forall\ k \geq 1 : \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$

b) $\mathcal{U} = \{U, V\}$

$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V) \cong \mathbb{Z}^2$

$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U \cap V) = \mathbb{Z}^2$, $\forall\ k \geq 2 : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$




$$0 \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d^0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d^1} 0 \to 0 \to \ldots$$

mit $\left.\begin{array}{rccl} d^0 : & (s,t) & \mapsto & t - s|_{U \cap V} \\ \mathbb{Z}^2 : & (s,t) & \mapsto & (t-s, t-s) \in \mathbb{Z}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Bild}\, d^0 = \{(s,s)\} \in \mathbb{Z}^2\} \cong \mathbb{Z}^2$

$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Kern}(d^0) = \{(s,s) \in \mathbb{Z}^2\} \cong \mathbb{Z}$

$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = {}^{\mathbb{Z}^2}\!/_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$, $\forall\ k \geq 2 : \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$

**Definition 13.3**

a) Definiere für $k \geq 0$ die Garbe

$$\mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \ldots < i_k} (i_{i_0 < \ldots < i_k})_* \mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}}$$

$$i_{i_0<\ldots<i_k} : U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k} \hookrightarrow X$$

Das heißt: $\mathcal{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F})(U) = \prod\limits_{i_0<\ldots<i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k} \cap U)$

$$\mathcal{C}^k = (U,\mathcal{F})(X) = \mathcal{C}^k(U,\mathcal{F})$$

b) Definiere $d^k_U : \mathcal{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F})(U) \to \mathcal{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})(U)$ wie in 13.1 $\Rightarrow$ $d^k$ ist Garbenmorphismus und $\forall\ k \geq 0 : d^{k+1} \circ d^k = 0$

c) $\varepsilon_U : \begin{cases} \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})(U) \\ s & \mapsto & (s|_{U\cap U_i})_{i\in\mathbb{N}} \end{cases}$ definiert einen injektiven Garbenmorphismus.

d) $0 \to \mathcal{F} \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} \mathcal{C}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{C}^2 \to \ldots$ ist eine Auflösung von $\mathcal{F}$ (das heißt exakt). *Achtung:* im Allgemeinen weder injektiv noch azyklisch!

**Beweis**

d) $U \subseteq X$ offen: $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varepsilon_U} \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}(U\cap U_i) \xrightarrow{d^0} \prod\limits_{i\neq j} \mathcal{F}(U\cap U_i \cap U_j)$

$d^0_U(\varepsilon_U(s)) = d^0_U((s|_{U\cap U_i})_{i\in N}) = (s|_{U\cap U_i|_{U\cap U_i\cap U_j}} - s|_{U\cap U_j|_{U\cap U_i\cap U_j}}) = 0$

Seien $x \in X$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in U_j$. Zeige Exaktheit auf den Halmen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon_X"] & \mathcal{C}^0 \arrow[r, "d^0_X"] & \mathcal{C}^1 \arrow[r, "d^1_X"] \arrow[l, dashed, bend left, "h^1"] & \mathcal{C}^2 \arrow[r, "d^2_X"] \arrow[l, dashed, bend left, "h^2"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Definiere $h^k : \mathcal{C}^k_X \to \mathcal{C}^{k-1}_X$.

$s \in \mathcal{C}^k_X \Rightarrow \hat{s} = [(V,s)]$ Œ $V \subseteq U_j$, $\quad \underset{(s_{i_0,\ldots,i_k})_{i_0<\ldots<i_k}}{\underset{\|}{s}} \in \mathcal{C}^k(V)$

Sei $t_{j_0,\ldots,j_{k-1}} : \begin{cases} 0 & , j \in \{j_0,\ldots,j_{k-1}\} \\ (-1)^\nu s_{j_0,\ldots,j,j_{k-1}} & , j_{\nu-1} < j < j_\nu \end{cases}$

$h^k(\hat{s}) = [(V,(t_{j_0,\ldots,j_{k-1}})_{i_0<\ldots<i_{k-1}}]$

Nachrechnen: $\underbrace{d^{k-1}_X \circ h^k + h^{k+1} \circ d^k_X}_{f} = \mathrm{id}$

Sei $\hat{s} \in \mathrm{Kern}(d^k_X)$, $\hat{s} = f(\hat{s}) = d^{k-1}_X \circ h^k(\hat{s}) \Rightarrow \hat{s} \in \mathrm{Bild}(d^{k-1}_X)$ $\square$

**Proposition 13.4**

Sei $X$ Schema, $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}(X)$, $U = \{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ offene Überdeckung von $X$. Dann gibt es für jedes $k \geq 0$ einen natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\check{H}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^k(X,\mathcal{F})$$

**Beweis**

Sei $0 \to \mathcal{F} \to I^0$ injektive Auflösung von $\mathcal{F}$ und $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0 = \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ Auflösung aus 13.3. Dann gibt es einen Homomorphismus von Komplexen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \mathcal{C}^0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\alpha^0"] & & \mathcal{C}^1 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\alpha^1"] & & \mathcal{C}^2 \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha^2"] & \cdots \\ & & & \mathcal{C}^0/\mathcal{F} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, dashed] & & \mathcal{C}^1/\mathrm{Bild}(\mathcal{C}^0) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, dashed] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{I} \arrow[r] & \mathcal{I}^0 \arrow[rr] & & \mathcal{I}^1 \arrow[rr] & & \mathcal{I}^2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

# § 14 Kohomologie quasi kohärenter Garben

**Definition + Bemerkung 14.1**
Sei $X$ ein topologischr Raum, $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}(X)$

a) $\mathcal{F}$ heißt ***welk***, wenn $\rho^U_{U'} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ surjektiv ist für alle offenen $U' \subseteq U$.

b) Konstante Garben sind welk, wenn $X$ irreduzibel ist. Wolkenkratzergarben sind welk.

c) Ist $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \to 0$ exakt, $\mathcal{F}$ welk, so ist $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{F}''(U) \to 0$ exakt für jedes offene $U \subseteq X$).

d) Sei $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ exakt. Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ welk, so auch $\mathcal{F}''$.

**Beweis**

c) Sei $V \subseteq U$ offen in $X$. Nach c) sind

und
$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{s} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \tilde{s}'' \arrow[ddd, mapsto] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'(U) \arrow[rr] \arrow[d, "\text{Restriktions-}\\ \text{abbildungen}"'] & & \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}''(U) \arrow[rr] \arrow[d] & & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'(V) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathcal{F}(V) \arrow[r] \arrow[dd] & \mathcal{F}''(V) \arrow[rr] & & 0 \\
 & & s \arrow[rrr, mapsto] & & & s'' & \\
 & 0 & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$
exakt

Nach Voraussetzung sind die vertikalen Sequenzen exakt.

d) Sei $s \in \mathcal{F}''(U)$. Nach Voraussetzung ($\beta$ surjektiv) gibt es offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $U$ und $\hat{s} \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\beta_{U_i}(\hat{s}_i) = s_i|_{U_i}$. Sei $d_{ij} := \hat{s}_i|_{U_i\cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$.

$\beta_{U_i\cap U_j}(d_{ij}) = 0 \Rightarrow d_{ij} \in \mathcal{F}'(U_i \cap U_j) \xRightarrow{\mathcal{F}' \text{ welk}}$ Œ $d_{ij} \in \mathcal{F}'(U_i)$
Setze $\hat{s}'_i := 2\hat{s}_i - d_{ij} \Rightarrow \hat{s}'_i|_{U_i\cap U_j} = 2\hat{s}_i - \hat{s}_i + \hat{s}_j = \hat{s}_i + \hat{s}_j = \hat{s}'_j|_{U_i\cap U_j} \Rightarrow$ die $\hat{s}'_i$ bilden konsistente Familie $\Rightarrow \exists\ \tilde{s} \in \mathcal{F}(U)$ mit $\tilde{s}|_{U_i} = \hat{s}'_i$ für alle $i \in I$ und $s_U(\tilde{s}) = s$. □

**Proposition 14.2**
Sei $X$ ein Schema, $\mathcal{I}$ injektive $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf $X$. Dann ist $\mathcal{I}$ welk.

**Beweis**
Sei $V \subseteq U$ offen. Es gilt
$$\begin{tikzcd}
j_!(\mathcal{O}_X|_V) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d] & j_!(\mathcal{O}_X|_U) \arrow[dl, dashed] \\
\mathcal{I} &
\end{tikzcd}$$
$(\mathcal{I}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}),\ \mathcal{I}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{I})))$

$\xRightarrow{\mathcal{I} \text{ inj.}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!(\mathcal{O}_X|_U), \mathcal{I}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!(\mathcal{O}_X|_V), \mathcal{I})$ ist surjektiv □

**Satz 4**
Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein noethersches affines Schema, $\mathcal{F}$ quasi-hohärente Garbe auf $X$. Dann ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i \geq 1$.

**Beweis**
Sei $M = \mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$, also $\mathcal{F} = \tilde{M}$. Sei $0 \to M \to I^\bullet$ eine injektive Auflösung des $R$-Moduls $M \xRightarrow{\text{Bem. 9.5}} 0 \to \tilde{M} \to \tilde{I}^\bullet$ ist exakt (also Ausflösung von $\mathcal{F}$). Der Satz folgt aus 14.4 und 14.3 □

**Proposition 14.3**
Welke Garben sind azyklisch.

**Proposition 14.4**
ist $I$ injektiver $R$-Modul, so ist $\tilde{I}$ welke $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe ($X = \operatorname{Spec} R$).

**Beweis (von Proposition 14.3)**
Sei $\mathcal{F}$ welke Garbe, $\mathcal{I}$ injektive Garbe mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow 0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G} \to 0$ exakt mit $\mathcal{G} = \mathcal{I}/\mathcal{F}$. Die lange exakte Kohomologiesequenz dazu ist:

$$0 \to \underset{=\mathcal{F}(X)}{H^0(X,\mathcal{F})} \to \underset{=\mathcal{I}(X)}{H^0(X,\mathcal{I})} \to \underset{=\mathcal{G}(X)}{H^0(X,\mathcal{G})} \xrightarrow[\text{14.1 c)}]{\text{Nullabb.}} \underset{=0}{H^1(X,\mathcal{F})} \to \underset{=0(\mathcal{I}\text{ inj.})}{H^1(X,\mathcal{I})} \to \underset{=0(\mathcal{G}\text{ welk})}{H^1(X,\mathcal{G})} \to H^2(X,\mathcal{F}) \to \underset{=0}{H^2(X,\mathcal{I})} \to$$

Nach 14.2 und 14.1 d) sind $\mathcal{I}$ und $\mathcal{G}$ welk. □

**Beweis (von Proposition 14.4)**
*Es genügt zu zeigen:* $\tilde{\mathcal{I}}(X) \to \tilde{\mathcal{I}}(U)$ surjektiv für jedes $U \subseteq X$ offen.

*1. Fall:* $U = D(f)$ für ein $f \in R$

$\Rightarrow \tilde{I}(U) = I_f$

Sei $\frac{b}{f^n} \in I_f$ (also $b \in I$, $n \geq 0$). *Gesucht:* $a \in I$ mit $\frac{a}{1} = \frac{b}{f^n}$ in $I_f$, also $(f^n a - b) \cdot f^m = 0$ für ein $m \geq 0$.

Für jedes $m \geq 0$ induziert $1 \mapsto f^{m+n}$ eine $R$-lineare Abbildung $R \to (f^{m+n})$. $\operatorname{Kern}(\varphi_m) = \operatorname{Ann}(f^{m+n})$ (Ideal) (Ann heißt Annulator)

Es ist $\operatorname{Ann}(f^m) \subseteq \operatorname{Ann}(f^{m+1}) \subseteq \ldots \xRightarrow{R\text{ noeth.}} \exists\, m$ mit $\operatorname{Ann}(f^{m+n}) = \operatorname{Ann}(f^m) \Rightarrow (f^{m+n}) \cong R/\operatorname{Ann}(f^n)$

Sei $\psi : R \to I$, $1 \mapsto f^m b$ $R$-linear $\Rightarrow \operatorname{Ann}(f^m) \subseteq \operatorname{Kern}(\psi) \Rightarrow \psi$ induziert $\overline{\psi} : (f^{m+n}) \to I \xRightarrow{I\text{ inj.}} \exists$ Fortsetzung $\tilde{\psi} : R \to I$ von $\overline{\psi}$.

Setze $a := \tilde{\psi}(1) \Rightarrow f^m b = \psi(1) = \overline{\psi}(f^{m+n}) = \tilde{\psi}(f^{m+n} \cdot 1_R) \underset{R\text{-lin.}}{\overset{\tilde{\psi}}{=}} f^{m+n} \cdot \tilde{\psi}(1) = f^{m+n} \cdot a$
□

# § 15 Kohomologie kohärenter Garben auf projektiven Schemata

**Definition + Bemerkung 15.1**
Sei $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ graduierter Ring und $X = \operatorname{Proj} S$. Sei weiter $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ ein graduierter $S$-Modul.

a) Sei $\tilde{M}$ die Garbe auf $X$ die durch $\tilde{M}(D^+(f)) = M_f^{\text{hom}}$ für jedes homogene $f \in S$ gegeben ist.

b) Für jedes $x \in X$, also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ (homogenes Primideal) ist $\tilde{M}_x = M_{\mathfrak{p}}^{\text{hom}}$.

c) Für jedes offene $U \subseteq X$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{M}(U) = \{s : U \to \dot{\bigcup_{x\in U}} \tilde{M}_x,\quad & s(x) \in \tilde{M}, \text{für jedes } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es Umgebung} \\ & U(\mathfrak{p}) \subseteq U \text{ mit } s(\mathfrak{q}) = \tfrac{m}{f} \text{ für jedes } \mathfrak{q} \in U(\mathfrak{p}), \\ & \text{dabei ist } m \in M, f \in S \setminus \mathfrak{q} \text{ homogen vom gleichen Grad}\}\end{aligned}$$

d) $\tilde{M}$ ist quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. $\tilde{M}$ ist kohärent, falls $S$ noethersch und $M$ endlich erzeugt.

($S_f^{\text{hom}} = \{\frac{a}{f^n} : a \in S_{n\cdot d}\}$, $D^+(f) \cong \operatorname{Spec} S_f^{\text{hom}}$, $f$ homogen vom Grad $d$, $M_f^{\text{hom}} = \{\frac{m}{f^n} : m \in M_{n\cdot d}\}$)

**Beispiele**
Sei $X = \operatorname{Proj} S$ wie in 15.1

a) $\tilde{S} = \mathcal{O}_X$

b) Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $S(n)$ der graduierte $S$-Modul mit $S(n)_d := S_{n+d}$.

$$\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{S(n)} \qquad \text{(Serre-Twist)}$$

c) $S = R[X_0, \dots, X_n]$, $X = \operatorname{Proj} S = \mathbb{P}_R^n$
Dann ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) = S(1)_0 = S_1$ der freie $R$-Modul mit Basis $X_0, \dots, X_n$.

d) Für $d < 0$ hat $\mathcal{O}_X(d)$ keine globalen Schnitte $\neq 0$. Für $\geq 0$ ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(d))$ der freie $R$-Modul, der von den homogenen Polynomen vom Grad $d$ in $R[X_0, \dots, X_n]$ erzeugt wird.

*Ziele:*

1) Bestimme $H^i(\mathbb{P}_R^n, \mathcal{O}(d))$ für alle $i \geq 0$ und alle $d$.

2) Jede hohärente Garbe auf $\mathbb{P}_R^n$ ist von der Form $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i) \big/ \mathcal{G}$

*Kulturbeitrag:* $H^i(\mathbb{P}_R^n, \mathcal{F}) = \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ für die Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_0, \dots, U_n\}$, $U_i = D(X_i)$ (affine Standardüberdeckung des $\mathbb{P}^n$)

$$\dots \to \bigoplus_{i=0}^{n} \underbrace{\mathcal{O}(d)(U_0 \cap \dots \cap U_{i-1} \cap U_{i+1} \cap \dots \cap U_n)}_{\text{freier } R\text{-Modul mit Basis } X_0^{d_0}\cdot\ldots\cdot X_n^{d_n} : \sum_{j=0}^{n} d_j = d, d_i \geq 0} \xrightarrow{d^{n-1}} \underbrace{\mathcal{O}(d)(U_0 \cap \dots \cap U_n)}_{\substack{= \left\{ \frac{g}{(X_0,\dots,X_n)^k} \right\}, g \text{ homogen vom Grad } d+k(n+1) \\ = \left\langle \frac{1}{X_0^{d_0}\cdot\ldots\cdot X_n^{d_n}} : \sum_{i=0}^{n} d_i = -d_R \right\rangle \\ = \text{freier } R\text{-Modul mit Basis} \\ X_0^{d_0}\ldots X_n^{d_n} : \sum_{i=0}^{n} d_i = d, d_i \in \mathbb{Z}}} \to 0$$

*Fazit:* $X_0^{d_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{d_n}$ (mit $\sum_{i=0}^{n} d_i = d$) liegt in Bild$(d^{n-1}) \Leftrightarrow \exists\ i$ mit $d_i \geq 0$

**Bemerkung 15.2**

a) Für $d \geq -n$ ist $d^{n-1}$ surjektiv, also $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = 0$

b) $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-n-1)) \cong R$, erzeugt von $\frac{1}{X_0 \cdot \ldots \cdot X_n}$

**Proposition 15.3**

Sei $R$ noetherscher Ring, $n \geq 1$, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj} R[X_0, \ldots, X_R]$, $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$

a) $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-n-1)) = R\frac{1}{X_0 \cdot \ldots \cdot X_n} \cong R$

b) Für jedes $d \in \mathbb{Z}$ gibt es natürliche bilineare Abbildung

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) \times H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-d-n-1)) \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-n-1)) \cong R$$

Diese ist nicht ausgeartete Paarung zwischen freien $R$-Moduln von endlichem Rang.

c) Für alle $i = 1, \ldots, n-1$ und alle $d \in \mathbb{Z}$ ist

$$H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = 0$$

**Beweis**

b) $\underline{d < 0}$: $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = S_d$
$= 0$ für $d < 0$

$H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-d-n-1)) = 0$ für $d < 0$ (15.2 a))

$\underline{d \geq 0}$: Für $d \geq 0$ ist die Paarung gegeben durch

$$\underbrace{(X_0^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n}}_{\substack{\sum \nu_i = d \\ \nu_i \geq 0}}, \underbrace{X_0^{\mu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\mu_n})}_{\substack{\sum \mu_i = -d-n-1 \\ \mu_i < 0}} \mapsto \underbrace{X_0^{\nu_0+\mu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n+\mu_0}}_{\sum(\nu_i+\mu_i) = -n-1}$$

nicht ausgeartet: $$\begin{array}{lcl} (X_0^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n}, X_0^{-\nu_0-1} \cdot \ldots \cdot X_n^{-\nu_n-1}) & \mapsto & X_0^{-1} \cdot \ldots \cdot X_n^{-1} \\ (X_0^{-\mu_0-1} \cdot \ldots \cdot X_n^{-\mu_n-1}, X_0^{\mu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\mu_n}) & \mapsto & X_0^{-1} \cdot \ldots \cdot X_n^{-1} \end{array}$$

c) Sei $1 \leq i \leq n-1$, $d \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$.

*Behauptung:* Dann ist die Multiplikation mit $X_k$ ein Isomorphismus $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$.

Jedes $\alpha \in H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ wird repräsentiert von einem Tupel von Linearkombinationen von Monomen $X_{j_0}^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_{j_i}^{\nu_i}$ mit $\sum \nu_k = d$, $\nu_k < 0$ für alle $k$. Multipliziere mit $X_{j_i}^{-\nu_i}$. Das Bild von $X_{j_0}^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_{j_n}^{\nu_n}$ in $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-\nu_i))$ ist 0. Nach der Behauptung ist damit auch $\alpha = 0$.

*Beweis der Behauptung:* Œ $k = n$

$\cdot X_n$ induziert exakte Sequenz von graduierten $S$-Moduln ($S = R[X_0, \ldots, X_n]$)

$$0 \to S(d-1) \xrightarrow{\cdot X_n} S(d) \to \underbrace{S(d) / X_n \cdot S(d-1)}_{\substack{\cong S/X_n S(d) \\ \cong R[X_0, \ldots, X_n](d)}} \to 0$$

Daraus ergibt sich exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-Modulgarben:

$$(*) \quad 0 \to \mathcal{O}(d-1) \xrightarrow{\cdot X_n} \mathcal{O}(d) \to j_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d) \to 0 \qquad (j : \mathbb{P}^{n-1} = V(X_n) \hookrightarrow \mathbb{P}^n)$$

Es gilt: $H^i(\mathbb{P}^n, j_* \overbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)}^{=:\mathcal{F}}) \cong H(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d))$, *denn:* Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}^\bullet$ welke Auflösung $\Rightarrow 0 \to j_*\mathcal{F} \to j_*\mathcal{G}^\bullet$ ist welke Auflösung.

*Induktion über n:* $n = 0\checkmark$, $n = 1\checkmark$

$n \geq 2$: Lange exakte Kohomologiesequenz zu (*):

$$\ldots \to H^{i-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)) \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{\cdot X_n} H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d)) \to \ldots$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)) = 0$ für $1 \leq i \leq n-2$. Nach der Behauptung folgt, dass $i = 2, \ldots, n-2$

$\underline{i=1}$: $0 \to \overset{=S_{d-1}}{H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1))} \to \overset{=S_d}{H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))} \to \overset{=S_d/X_n S_{d-1}}{H^0(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d))} \to 0$ ist exakt $\Rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{\cdot X_n} H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ ist injektiv, $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \xrightarrow{\cdot X_n} H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ ist surjektiv für $n \geq 3$ nach Induktionsvoraussetzung. Für $n = 2$ ist $1 = n-1$.

$\underline{i = n-1}$: Nach Induktionsvoraussetzung ist $H^{n-2}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d)) = 0$.

Zu zeigen also: $H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) \to H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d))$ ist die Nullabbildung.
Äquivalent: $\delta : \underbrace{H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d))}_{\substack{\text{erz. v. den Monomen} \\ X_0^{\nu_0} \cdots X_{n-1}^{\nu_{n-1}} \\ \text{mit } \sum \nu_i = d, \text{ alle } \nu_i < 0}} \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1))$ ist injektiv.

Das Bild von $\delta$ ist der Kern von $\cdot X_n$, also der freie $R$-Modul mit Basis $X_0^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_{n-1}^{\nu_{n-1}} \cdot X_n^{-1}$ mit $\sum_{i=0}^{n-1} \nu_i = d$, alle $\nu_i < 0 \Rightarrow \mathrm{Rang}(\mathrm{Bild}\,\delta) = \mathrm{Rang}(H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(d))) \Rightarrow \delta$ injektiv. Übung: $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) = 0$ für alle $d \in \mathbb{Z}$ □

**Satz 5**
Sei $X$ projektives $R$-Schema über einem noetherschen Ring $R$. Dann ist $H^i(X, \mathcal{F})$ endlich erzeugter $R$-Modul für jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $X$.

**Beweis**
$\tilde{U} \subseteq \mathbb{P}^n_R$ offen, $U = \tilde{U} \cap X \Rightarrow j_*\mathcal{F}(\tilde{U}) = \mathcal{F}(U)$, $\mathcal{F}|_U = \tilde{M} \Rightarrow j_*\mathcal{F}|_{\tilde{U}} = \tilde{M}_U$)

Sei $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_R$ abgeschlossene Einbettung, $X = \mathrm{Proj}(R[X_0, \ldots, X_n]/I)$. Dann ist $j_*\mathcal{F}$ kohärent und $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\mathbb{P}^n_R, j_*\mathcal{F})$. Also ohne Einschränkung $X = \mathbb{P}^n_R$.

*Behauptung:* Jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{P}^n_R$ ist isomorph zu $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(d_i)/\mathcal{G}$ für geeignete $r \geq 1$, $d_i \in \mathbb{Z}, \mathcal{G}$

Dann sei $0 \to \mathcal{G} \to \bigoplus_j \mathcal{O}(d_j) \to \mathcal{F} \to 0$ exakt $\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \bigoplus \mathcal{O}(d_j)) \cong \bigoplus_j H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d_j))$ (!)

$\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \bigoplus \mathcal{O}(d_j))$ endlich erzeugte $R$-Moduln

$\xRightarrow{\text{lange ex. Sequenz}} \ldots \to \underbrace{\bigoplus_j H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d_j))}_{\text{endlich erzeugt}} \xrightarrow{d^i} H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}) \to \ldots$

Absteigende Induktion über $i$:

$$H^{n+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}) = 0 \text{ weil } n+1 > m$$

$\Rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ endlich erzeugt, weil $d^n$ surjektiv

$\Rightarrow H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{G})$ endlich erzeugt, weil $\mathcal{G}$ auch kohärent

$\Rightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ endlich erzeugt, weil $\mathrm{Kern}(\delta^{n-1}) = \mathrm{Bild}(d^{n-1})$ endlich erzeugt und $\mathrm{Bild}(\delta^{n-1})$ als Untermodul von $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{G})$ endlich erzeugt

Die Behauptung folgt aus: □

**Proposition 15.4**
Sei $\mathcal{F}$ kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^n_R$. Dann gibt es ein $d_0 \in \mathbb{Z}$, sodass für $d \geq d_0$ $\mathcal{F}(d) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(d)$ von globalen Schnitten erzeugt wird, das heißt es gibt $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(d))$, sodass für jedes offene $U \subseteq \mathbb{P}^n_R$ gilt: $\mathcal{F}(d)(U)$ wird erzeugt von $s_1|_U, \dots, s_r|_U$ (als $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$-Modul!)

Definiere Garbenmorphisus $\epsilon : \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \to & \mathcal{F}(d) \\ e_i & \mapsto & s_i \end{cases}$

$\epsilon$ ist surjektiv $\Rightarrow e_{-d} : \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(-d) \to \mathcal{F}$ surjektiv

**Beweis**
Sei $U_i = D(X_i)$, $M_i := \mathcal{F}(U_i)$. $M_i$ ist endlich erzeugter $R[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]$-Modul. $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$. Seien $s_{i_1}, \dots, s_{i_r}$ Erzeuger von $M_i$ als $R[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]$-Modul.

Auf $U_i \cap U_j$ ist $s_{i_\nu}|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) = (M_j)_{\frac{X_i}{X_j}} \Rightarrow$ Es gibt $d_{i_\nu}$ mit $s_{i_\nu} \cdot X_i^{d_{i_\nu}} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \tilde{M}_j \otimes \mathcal{O}(d_{i_\nu}))$ für alle $j$. Sei $d := \max\{d_{i_\nu} : i, \nu\} \Rightarrow s_{i_\nu} \cdot X_i^d \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(d))$ für alle $i, \nu \Rightarrow$ die $t_{i_\nu}$ erzeugen $\mathcal{F}(d)$. $\square$

**Satz (Grothendieck)**
Sei $X$ ein $n$-dimensionales noethersches Schema, $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen. Dann ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i > n$.