APPUNTI MATEMATICA (PIETRO VACCARI)

FUNZIONI REALI A 2 VARIABILI

Le funzioni reali a 2 variabili sono funzioni che dipendono da due variabili indipendenti, di solito rappresentate come x e y. Matematicamente, una funzione f(x,y) può essere definita come una regola che associa ad ogni coppia di numeri reali (x,y) un unico numero reale z:

$$f : RxR- > Rf(x, y)- > z$$

Dove R indica l'insieme dei numeri reali.

Un esempio di funzione reale a 2 variabili potrebbe essere:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Questa funzione restituisce la somma dei quadrati di x e y per ogni coppia di valori (x,y). Ad esempio, se scegliamo x=2 e y=3, la funzione restituirà:

$$f(2, 3) = 2^2 + 3^2 = 13$$

In generale, le funzioni reali a 2 variabili possono essere visualizzate come superfici tridimensionali nello spazio, dove l'altezza della superficie rappresenta il valore della funzione per ogni coppia di valori (x,y).

Le funzioni reali a due variabili sono funzioni matematiche che associano a ogni coppia di numeri reali (x,y) un numero reale f(x,y). Queste funzioni possono essere rappresentate graficamente come superfici in uno spazio tridimensionale.

Matematicamente, una funzione reale a due variabili f(x,y) può essere definita come:

$f: R^2 \to R$

dove R^2 è l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (x,y) e R è l'insieme dei numeri reali.

La funzione può essere definita in diversi modi, ad esempio attraverso una formula esplicita, come:

$f(x,y) = x^2 + y^2$

Questa funzione assegna ad ogni coppia di numeri reali (x,y) il valore della loro somma dei quadrati.

Le funzioni reali a due variabili possono essere analizzate come quelle a una sola variabile, con l'aggiunta di alcune proprietà e strumenti matematici specifici. Ad esempio, si può studiare la continuità, la differenziabilità, l'integrazione, le curve di livello e la derivata parziale.

Le curve di livello sono insiemi di punti (x,y) tali che $f(x,y)$ assume un dato valore costante k. Queste curve sono utili per visualizzare le caratteristiche della superficie della funzione.

La derivata parziale di f rispetto a x è definita come:

$\partial f/\partial x = \lim_{h \to 0} [f(x+h, y) - f(x,y)]/h$

Questo rappresenta la variazione di f quando la variabile x viene variata, a parità di y. In modo analogo, si può definire la derivata parziale rispetto a y.

Le funzioni reali a due variabili sono molto utili in diversi campi della matematica, delle scienze e dell'ingegneria, ad esempio nella modellizzazione di fenomeni fisici e biologici, nella statistica multivariata e nella crittografia.

INTEGRALI

In matematica, l'integrale è una generalizzazione della somma, che permette di calcolare l'area sotto una curva (o il volume di uno spazio tra una superficie e un piano). L'integrale di una funzione è un concetto fondamentale dell'analisi matematica, e viene utilizzato in molti campi della scienza e dell'ingegneria.

Ecco un elenco delle formule di integrazione più comuni:

1. Integrazione per parti: $\int udv = uv - \int vdu$
2. Sostituzione: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$, dove $u = g(x)$
3. Integrazione di funzioni razionali: $\int(P(x)/Q(x))dx$, dove P(x) e Q(x) sono polinomi
4. Integrazione di funzioni trigonometriche:
   $\int sin(ax)dx = -(1/a)cos(ax) + C$
   $\int cos(ax)dx = (1/a)sin(ax) + C$
   $\int tan(x)dx = -ln|cos(x)| + C$
   $\int cot(x)dx = ln|sin(x)| + C$
5. Integrazione di funzioni esponenziali e logaritmiche:
   $\int e^x dx = e^x + C$
   $\int a^x dx = (1/lna)a^x + C$
   $\int 1/xdx = ln|x| + C$

L'integrale di una funzione f(x) tra due punti a e b è denotato con il simbolo ∫ e si scrive come:

$$\int a^b f(x)dx$$

dove dx rappresenta l'incremento infinitesimale della variabile x. In parole povere, l'integrale di una funzione f(x) tra a e b è la somma infinitesima di tutti i valori assunti dalla funzione tra a e b, moltiplicati per l'incremento infinitesimo dx.

Esistono diversi metodi per calcolare gli integrali, come l'integrazione per parti, la sostituzione trigonometrica, la decomposizione in fratti semplici, l'integrazione per serie di potenze, e molti altri. In generale, il calcolo degli integrali può essere molto complesso e richiedere un'ampia conoscenza di tecniche matematiche avanzate.

Ci sono diverse tecniche che possono essere utilizzate per risolvere un integrale, tra cui:

1. Sostituzione: Questa tecnica consiste nel sostituire una parte dell'integrale con una nuova variabile, in modo da semplificare l'integrale e renderlo più facile da risolvere.
2. Per parti: Questa tecnica si basa sulla formula di integrazione per parti e viene utilizzata per integrare il prodotto di due funzioni.
3. Espansione in serie di potenze: Questa tecnica consiste nell'espandere la funzione da integrare in una serie di potenze e integrare ogni termine della serie separatamente.
4. Metodo di sostituzione trigonometrica: Questo metodo si basa sulla sostituzione di funzioni trigonometriche complesse con funzioni trigonometriche più semplici.
5. Metodo di frazioni parziali: Questo metodo viene utilizzato per integrare una funzione razionale, ossia un rapporto di due polinomi.
6. Metodo di integrazione numerica: Questo metodo consiste nell'approximare l'integrale con una somma di valori numerici discreti, ad esempio utilizzando il metodo dei trapezi o il metodo di Simpson.

Queste sono solo alcune delle tecniche che possono essere utilizzate per risolvere un integrale, e la scelta della tecnica dipende dalla complessità della funzione da integrare e dal livello di precisione richiesto nella soluzione dell'integrale.

1. Sostituzione:

   La tecnica di sostituzione è una delle tecniche più comuni per risolvere gli integrali. Questa tecnica richiede di scegliere una funzione da sostituire all'interno dell'integrando. Successivamente, si calcola la sua derivata e si effettua la sostituzione nell'integrando, in modo che l'integrando sia espresso interamente in funzione della funzione sostituita. A questo punto, si risolve l'integrale in termini di questa nuova funzione.

   Esempio 1:

$$\int xcos(x2)dx$$

In questo caso, scegliamo di sostituire $T = x^2$, in modo che $dT/dx = 2x$ e quindi $dx = du/2x.$

Eseguendo la sostituzione nell'integrando, abbiamo:

$$\int xcos(x^2)dx = 1/2 \int cos(u)du$$

A questo punto, possiamo risolvere facilmente l'integrale:

$$1/2 \int cos(u)du = 1/2sin(u) + C = 1/2sin(x^2) + C$$

Dove C è la costante di integrazione. Quindi, la soluzione finale per l'integrale originale è:

$$\int xcos(x^2)dx = 1/2sin(x^2) + C$$

Questa è solo un'esempio di come la tecnica di sostituzione può essere utilizzata per risolvere un integrale. Ci sono molte altre tecniche che possono essere utilizzate a seconda del tipo di integrale che si sta affrontando.

Esempio 2:

$\int (2x + 1)^4 dx$

1. Identificare la parte dell'integranda da sostituire: ($2x + 1$)
2. Sostituire la parte dell'integranda identificata con una nuova variabile t: $t = 2x + 1$
3. Calcolare la derivata della nuova variabile rispetto a x: $dt/dx = 2$
4. Riscrivere l'integranda in termini di t e x:

   $(2x + 1)^4 dx = (t)^4 (dt/2)$
5. Risolvere l'integrale:

$$\int (2x + 1)^4 dx = \int t^4 (dt/2) = (1/10)t^5 + C$$

6. Sostituire t con 2x + 1:

   $(1/10)(2x+1)^5 + C$

7. Semplificare l'espressione, se possibile.

2. Per parti:

   La tecnica di integrazione per parti viene utilizzata quando l'integranda è un prodotto di due funzioni, ciascuna delle quali non è facilmente integrabile. Si basa sulla formula di integrazione per parti:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

   dove u(x) e v(x) sono funzioni derivabili.

   Ecco un esempio di come risolvere un integrale per parti:

$$\int x \cdot sin(x) dx$$

   In questo caso, la funzione $u(x)$ sarà $u(x) = x$ e la funzione $v'(x)$ sarà $v'(x) = sin(x)$. Quindi, derivando la funzione $u(x)$, otteniamo $u'(x) = 1$ e integrando la funzione $v'(x)$, otteniamo $v(x) = -cos(x)$.

   Applicando la formula di integrazione per parti, abbiamo:

$$\int x \cdot sin(x) dx = -x \cdot cos(x) + \int cos(x) dx$$

   Integrando l'ultimo termine, otteniamo:

$$\int x \cdot sin(x) dx = -x \cdot cos(x) + sin(x) + C$$

   dove C rappresenta la costante di integrazione.

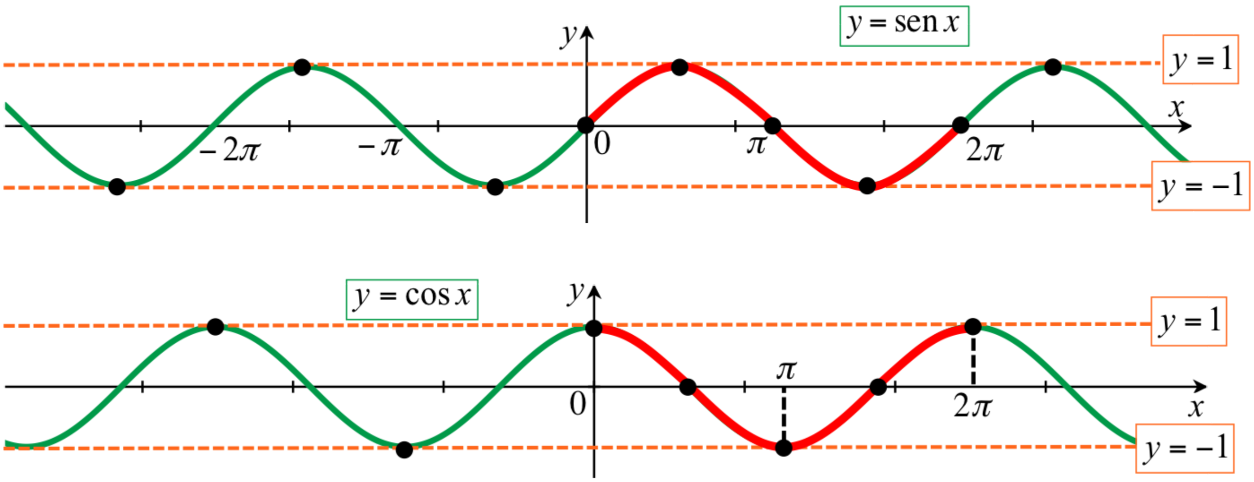
   Quindi, l'integrale di $x \cdot sin(x)$ è dato da $-x \cdot cos(x) + sin(x) + C$.

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\sec(x)$	$\tan(x)\sec(x)$
$\csc(x)$	$-\cot(x)\csc(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$-\cot(x)\csc(x)$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\tan(x)\sec(x)$
$\frac{1}{\tan(x)}$	$-\csc^2(x)$
$\frac{1}{\sec(x)}$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{\csc(x)}$	$\cos(x)$
$\frac{1}{\cot(x)}$	$\sec^2(x)$
$\sin^n(x)$	$n\cos(x)\sin^{n-1}(x)$
$\cos^n(x)$	$-n\sin(x)\cos^{n-1}(x)$
$\tan^n(x)$	$n\sec^2(x)\tan^{n-1}(x)$
$e^{\sin(x)}$	$e^{\sin(x)}\cos(x)$
$e^{\cos(x)}$	$\sin(x)\,(-e^{\cos(x)})$
$e^{\tan(x)}$	$e^{\tan(x)}\sec^2(x)$
$\log(\sin(x))$	$\cot(x)$
$\log(\cos(x))$	$-\tan(x)$
$\log(\tan(x))$	$\csc(x)\sec(x)$
$\sin^x(x)$	$\sin^x(x)\,(x\cot(x)+\log(\sin(x)))$
$\cos^x(x)$	$\cos^x(x)\,(\log(\cos(x))-x\tan(x))$
$\cos^{\tan(x)}(x)$	$\cos^{\tan(x)}(x)\,(\sec^2(x)\log(\cos(x))-\tan^2(x))$

Tabella degli integrali

$\int f(x)$ ***integrale***	$F(x)$ ***primitiva***	$\int f(x)$ ***integrale***	$F(x)$ ***primitiva***
$\int x\,dx$	$\frac{x^2}{2} + c$	$\int \frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\begin{cases} \pm\arcsin x + c \\ \mp\arccos x + c \end{cases}$
$\int a\,dx$	$ax + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$	$\log\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert + c$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\log a} + c$	$\int \frac{1}{a^x}dx$	$-\frac{a^{-x}}{\log a} + c$
$\int \frac{x}{x^2+1}dx$	$\frac{1}{2}\log\left\lvert x^2+1\right\rvert + c$	$\int \frac{1}{x^n}dx$	$-\frac{n-1}{x^{n-1}} + c$
$\int a\cdot x^n\,dx$	$\frac{a\cdot x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{1}{a+x^2}dx \quad a>0$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} + c$
$\int \frac{1}{x}dx$	$\log\lvert x\rvert+c$	$\int \frac{1}{1-x^2}dx$	$\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	$2\sqrt{x} + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$	$\begin{cases} arcSh\,x + c \\ \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c \end{cases}$
$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + c$	$\int \sin^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x) + c$
$\int \cos x\,dx$	$\sin x + c$	$\int \cos^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x) + c$
$\int \tan x\,dx$	$-\log(\cos x) + c$	$\int \frac{1}{\tan x}dx$	$\log(\sin x) + c$
$\int \arcsin x\,dx$	$\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx$	$\log\left\lvert x+\sqrt{x\pm a^2}\right\rvert + c$
$\int \arccos x\,dx$	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2} + c$	$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) + c$
$\int e^{\pm kx}dx$	$\pm\frac{e^{\pm kx}}{k} + c$	$\int \frac{1}{e^{kx}}dx$	$-\frac{e^{-kx}}{k} + c$
$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	$\tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\log\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + c$
$\int (1+ctg^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	$-ctgx + c$	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\log\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + c$
$\int Sh\,x\,dx$	$Ch\,x + c$	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right) + c$
$\int Ch\,x\,dx$	$Sh\,x+c$	$\int \frac{1}{Ch^2 x}dx = \int (1-Th^2 x)\,dx + c$	$Th\,x + c$
$\int \frac{2x}{x^2+1}dx$	$\log(x^2+1) + c$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

Seno e coseno:



EQ. DIFFERENZIALE

Le equazioni differenziali sono equazioni che contengono funzioni incognite e loro derivate, dove la soluzione cercata è una funzione che soddisfa l'equazione e le sue condizioni iniziali o di frontiera.

In generale, le equazioni differenziali sono classificate in base all'ordine, ovvero al grado della derivata più alta presente nell'equazione. Ad esempio, un'equazione differenziale del primo ordine ha la forma:

$$f(x, y, y') = 0$$

dove y è la funzione incognita, y' è la sua derivata rispetto a x, e f è una funzione che dipende da x, y e y'. La soluzione di questa equazione è una funzione y(x) che soddisfa l'equazione.

Un'equazione differenziale del secondo ordine ha la forma:

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

dove y'' è la seconda derivata di y rispetto a x. La soluzione di questa equazione è una funzione y(x) che soddisfa l'equazione.

Esistono diverse tecniche per risolvere le equazioni differenziali, tra cui le soluzioni esatte, le soluzioni approssimate e i metodi numerici. Alcune tecniche comuni per le equazioni differenziali del primo ordine includono la separazione delle variabili, la sostituzione, l'integrazione per parti e i fattori integranti. Per le equazioni differenziali del secondo ordine, le tecniche comuni includono la sostituzione, il metodo dei coefficienti indeterminati, il metodo delle variazioni delle costanti e il metodo di eliminazione di Gauss.

Esempio di equazione differenziale del primo ordine:

$$dy/dx + 2y = 3x$$

Soluzione utilizzando la sostituzione:

1. Si sceglie una funzione ausiliaria u(x) che semplifichi l'equazione, ad esempio $u(x) = e^(2x)$.
2. Si calcola la derivata di u(x), ovvero u'(x) = 2e^(2x).
3. Si sostituisce y = uv, dove v(x) è una funzione incognita.
4. Si calcolano le derivate di y(x), ovvero $y' = u'v + uv'$ e $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$.
5. Si sostituiscono y, y' e y'' nell'equazione originale e si semplifica.
6. Si risolve l'equazione semplificata per v(x).
7. Si moltiplica v(x) per u(x) per trovare la soluzione y(x).

PROBLEMA DI CHUCHY

Il problema di Cauchy è un tipo di problema di valore iniziale per un'equazione differenziale ordinaria, dove è necessario trovare una soluzione che soddisfi una condizione iniziale specificata.

La procedura generale per risolvere il problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria consiste nei seguenti passaggi:

1. Scrivere l'equazione differenziale nella forma standard, che può essere una delle seguenti:
   - Forma standard del primo ordine: $y'(x) = f(x, y(x))$
   - Forma standard del secondo ordine: $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$
2. Verificare che l'equazione differenziale soddisfi le condizioni di esistenza e unicità della soluzione.
3. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale.
4. Applicare la condizione iniziale specificata per trovare la soluzione particolare del problema di Cauchy.

Prendiamo come esempio l'equazione differenziale $y'(x) = x^2 + y(x)$, con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

1. L'equazione differenziale è già nella forma standard del primo ordine.
2. L'equazione differenziale soddisfa le condizioni di esistenza e unicità della soluzione.
3. Troviamo la soluzione generale dell'equazione differenziale. Per farlo, separiamo le variabili:

   $dy/dx = x^2 + y(x)$

   $dy - y(x)dx = x^2dx$

   Integrando entrambi i membri, otteniamo:

   $y(x) - (1/3) * y(x)^3 = (1/3) * x^3 + C$

   dove C è una costante di integrazione.
4. Applichiamo la condizione iniziale per trovare la soluzione particolare del problema di Cauchy. Sostituendo x = 0 e y = 1, abbiamo:

   $1 - (1/3) * 1^3 = (1/3) * 0^3 + C$

   $C = 2/3$

   Quindi la soluzione del problema di Cauchy è data da:

   $y(x) - (1/3) * y(x)^3 = (1/3) * x^3 + 2/3$, con $y(0) = 1$.