INTEGRALI

INTEGRALI

In matematica, l'integrale è una generalizzazione della somma, che permette di calcolare l'area sotto una curva (o il volume di uno spazio tra una superficie e un piano). L'integrale di una funzione è un concetto fondamentale dell'analisi matematica, e viene utilizzato in molti campi della scienza e dell'ingegneria.

Ecco un elenco delle formule di integrazione più comuni:

1. Integrazione per parti: $\int udv = uv - \int vdu$
2. Sostituzione: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$, dove $u = g(x)$
3. Integrazione di funzioni razionali: $\int (P(x)/Q(x))dx$, dove P(x) e Q(x) sono polinomi
4. Integrazione di funzioni trigonometriche:

   $\int sin(ax)dx = -(1/a)cos(ax) + C$

   $\int cos(ax)dx = (1/a)sin(ax) + C$

   $\int tan(x)dx = -ln|cos(x)| + C$

   $\int cot(x)dx = ln|sin(x)| + C$

5. Integrazione di funzioni esponenziali e logaritmiche:

   $\int e^x dx = e^x + C$

   $\int a^x dx = (1/lna)a^x + C$

   $\int 1/xdx = ln|x| + C$

L'integrale di una funzione f(x) tra due punti a e b è denotato con il simbolo ∫ e si scrive come:

$$\int a^b f(x)dx$$

dove dx rappresenta l'incremento infinitesimale della variabile x. In parole povere, l'integrale di una funzione f(x) tra a e b è la somma infinitesima di tutti i valori assunti dalla funzione tra a e b, moltiplicati per l'incremento infinitesimo dx.

Esistono diversi metodi per calcolare gli integrali, come l'integrazione per parti, la sostituzione trigonometrica, la decomposizione in fratti semplici, l'integrazione per serie di potenze, e molti altri. In generale, il calcolo degli integrali può essere molto complesso e richiedere un'ampia conoscenza di tecniche matematiche avanzate.

Ci sono diverse tecniche che possono essere utilizzate per risolvere un integrale, tra cui:

1. Sostituzione: Questa tecnica consiste nel sostituire una parte dell'integrale con una nuova variabile, in modo da semplificare l'integrale e renderlo più facile da risolvere.
2. Per parti: Questa tecnica si basa sulla formula di integrazione per parti e viene utilizzata per integrare il prodotto di due funzioni.
3. Espansione in serie di potenze: Questa tecnica consiste nell'espandere la funzione da integrare in una serie di potenze e integrare ogni termine della serie separatamente.
4. Metodo di sostituzione trigonometrica: Questo metodo si basa sulla sostituzione di funzioni trigonometriche complesse con funzioni trigonometriche più semplici.
5. Metodo di frazioni parziali: Questo metodo viene utilizzato per integrare una funzione razionale, ossia un rapporto di due polinomi.
6. Metodo di integrazione numerica: Questo metodo consiste nell'approximare l'integrale con una somma di valori numerici discreti, ad esempio utilizzando il metodo dei trapezi o il metodo di Simpson.

Queste sono solo alcune delle tecniche che possono essere utilizzate per risolvere un integrale, e la scelta della tecnica dipende dalla complessità della funzione da integrare e dal livello di precisione richiesto nella soluzione dell'integrale.

1. Sostituzione:

   La tecnica di sostituzione è una delle tecniche più comuni per risolvere gli integrali. Questa tecnica richiede di scegliere una funzione da sostituire all'interno dell'integrando. Successivamente, si calcola la sua derivata e si effettua la sostituzione nell'integrando, in modo che l'integrando sia espresso interamente in funzione della funzione sostituita. A questo punto, si risolve l'integrale in termini di questa nuova funzione.

   Esempio 1:

   $$\int xcos(x2)dx$$

   In questo caso, scegliamo di sostituire $T = x^2$, in modo che $dT/dx = 2x$ e quindi $dx = du/2x.$

   Eseguendo la sostituzione nell'integrando, abbiamo:

   $$\int xcos(x^2)dx = 1/2 \int cos(u)du$$

   A questo punto, possiamo risolvere facilmente l'integrale:

   $$1/2 \int cos(u)du = 1/2sin(u) + C = 1/2sin(x^2) + C$$

   Dove C è la costante di integrazione. Quindi, la soluzione finale per l'integrale originale è:

   $$\int xcos(x^2)dx = 1/2sin(x^2) + C$$

   Questa è solo un'esempio di come la tecnica di sostituzione può essere utilizzata per risolvere un integrale. Ci sono molte altre tecniche che possono essere utilizzate a seconda del tipo di integrale che si sta affrontando.

   Esempio 2:

   $\int (2x + 1)^4 dx$

1. Identificare la parte dell'integranda da sostituire: $(2x + 1)$
2. Sostituire la parte dell'integranda identificata con una nuova variabile t: $t = 2x + 1$
3. Calcolare la derivata della nuova variabile rispetto a x: $dt/dx = 2$
4. Riscrivere l'integranda in termini di t e x:

   $(2x + 1)^4 dx = (t)^4 (dt/2)$
5. Risolvere l'integrale:

$$\int (2x + 1)^4 dx = \int t^4 (dt/2) = (1/10)t^5 + C$$

6. Sostituire t con 2x + 1:

   $(1/10)(2x + 1)^5 + C$
7. Semplificare l'espressione, se possibile.

2. Per parti:

   La tecnica di integrazione per parti viene utilizzata quando l'integranda è un prodotto di due funzioni, ciascuna delle quali non è facilmente integrabile. Si basa sulla formula di integrazione per parti:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

   dove u(x) e v(x) sono funzioni derivabili.

   Ecco un esempio di come risolvere un integrale per parti:

$$\int x \cdot sin(x) dx$$

   In questo caso, la funzione $u(x)$ sarà $u(x) = x$ e la funzione $v'(x)$ sarà $v'(x) = sin(x)$. Quindi, derivando la funzione $u(x)$, otteniamo $u'(x) = 1$ e integrando la funzione $v'(x)$, otteniamo $v(x) = -cos(x)$.

   Applicando la formula di integrazione per parti, abbiamo:

$$\int x \cdot sin(x)dx = -x \cdot cos(x) + \int cos(x)dx$$

Integrando l'ultimo termine, otteniamo:

$$\int x \cdot sin(x)dx = -x \cdot cos(x) + sin(x) + C$$

dove C rappresenta la costante di integrazione.

Quindi, l'integrale di $x \cdot sin(x)$ è dato da $-x \cdot cos(x) + sin(x) + C$.

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\sec(x)$	$\tan(x)\sec(x)$
$\csc(x)$	$-\cot(x)\csc(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$-\cot(x)\csc(x)$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\tan(x)\sec(x)$
$\frac{1}{\tan(x)}$	$-\csc^2(x)$
$\frac{1}{\sec(x)}$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{\csc(x)}$	$\cos(x)$
$\frac{1}{\cot(x)}$	$\sec^2(x)$
$\sin^n(x)$	$n\cos(x)\sin^{n-1}(x)$
$\cos^n(x)$	$-n\sin(x)\cos^{n-1}(x)$
$\tan^n(x)$	$n\sec^2(x)\tan^{n-1}(x)$
$e^{\sin(x)}$	$e^{\sin(x)}\cos(x)$
$e^{\cos(x)}$	$\sin(x)(-e^{\cos(x)})$
$e^{\tan(x)}$	$e^{\tan(x)}\sec^2(x)$
$\log(\sin(x))$	$\cot(x)$
$\log(\cos(x))$	$-\tan(x)$
$\log(\tan(x))$	$\csc(x)\sec(x)$
$\sin^x(x)$	$\sin^x(x)(x\cot(x)+\log(\sin(x)))$
$\cos^x(x)$	$\cos^x(x)(\log(\cos(x))-x\tan(x))$
$\cos^{\tan(x)}(x)$	$\cos^{\tan(x)}(x)(\sec^2(x)\log(\cos(x))-\tan^2(x))$

Tabella degli integrali

$\int f(x)$ **integrale**	$F(x)$ **primitiva**	$\int f(x)$ **integrale**	$F(x)$ **primitiva**
$\int x\,dx$	$\frac{x^2}{2} + c$	$\int \frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\begin{cases} \pm \arcsin x + c \\ \mp \arccos x + c \end{cases}$
$\int a\,dx$	$ax + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$	$\log\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert + c$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\log a} + c$	$\int \frac{1}{a^x}dx$	$-\frac{a^{-x}}{\log a} + c$
$\int \frac{x}{x^2+1}dx$	$\frac{1}{2}\log\left\lvert x^2+1\right\rvert + c$	$\int \frac{1}{x^n}dx$	$-\frac{n-1}{x^{n-1}} + c$
$\int a \cdot x^n\,dx$	$\frac{a \cdot x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{1}{a+x^2}dx \quad a>0$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} + c$
$\int \frac{1}{x}dx$	$\log\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{1}{1-x^2}dx$	$\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	$2\sqrt{x} + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$	$\begin{cases} arcSh\,x + c \\ \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c \end{cases}$
$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + c$	$\int \sin^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x) + c$
$\int \cos x\,dx$	$\sin x + c$	$\int \cos^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x) + c$
$\int \tan x\,dx$	$-\log(\cos x) + c$	$\int \frac{1}{\tan x}dx$	$\log(\sin x) + c$
$\int \arcsin x\,dx$	$\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx$	$\log\left\lvert x+\sqrt{x \pm a^2}\right\rvert + c$
$\int \arccos x\,dx$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log\left\lvert x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + c$
$\int e^{\pm kx}\,dx$	$\pm\frac{e^{\pm kx}}{k} + c$	$\int \frac{1}{e^{kx}}dx$	$-\frac{e^{-kx}}{k} + c$
$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	$\tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\log\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + c$
$\int (1+ctg^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	$-ctg\,x + c$	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\log\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + c$
$\int Sh\,x\,dx$	$Ch\,x + c$	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + c$
$\int Ch\,x\,dx$	$Sh\,x + c$	$\int \frac{1}{Ch^2 x}dx = \int (1-Th^2 x)\,dx + c$	$Th\,x + c$
$\int \frac{2x}{x^2+1}dx$	$\log(x^2+1) + c$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

Seno e coseno: