1. a) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z)$ med 3 variabler uppfyller att $f(0,0,0) = f(1,1,1) = f(0,1,0)$

   b) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z, w)$ med 4 variabler uppfyller att $f(0,0,0,1) + f(0,0,1,0) = f(0,0,1,1)$ (boolesk addition)?

   a) Lösning: Antalet sådana booleska funktioner är 2^6, ty om vi väljer funktionsvärdet $f(0,0,0)$, så har vi fixerat $f(1,1,1)$ och $f(0,1,0)$ också.

   b) Lösning: Antalet sådana booleska funktioner är 2^{15}, ty om vi väljer funktionsvärdena $f(0,0,0,1)$ och $f(0,0,1,0)$, så är även $f(0,0,1,1)$ entydigt bestämt.

2. Låt $f(x, y, z) = xy + xz + (x + y)\bar{x}\bar{y}$ vara en boolesk funktion med tre variabler. Skriv funktionen på fullständig konjunktiv normalform

   Lösning: skriv först upp tabellen för f.

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f = (x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + z)$$

3. Ange värdetabellen för den booleska funktionen $f(x, y, z) = \overline{\overline{x} + yz} + \overline{\overline{y + x\bar{z}}}$

   Lösning: $\overline{\overline{x} + yz} + \overline{\overline{y + x\bar{z}}} = \bar{y} + x\bar{z}$ ger tabellen

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

4. Hur många booleska funktioner f med tre variabler uppfyller villkoren att $f(0,0,1) = f(1,1,1) = f(1,0,0) = f(1,0,1)$

Lösning: Antalet sådana funktioner är 2^5

5. Låt $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z + x \cdot z + y \cdot z$ vara en boolesk funktion av tre variabler. Skriv f på fullständig konjunktiv normalform

   Svar: $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z + x \cdot z + y \cdot z$ ger tabellen

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

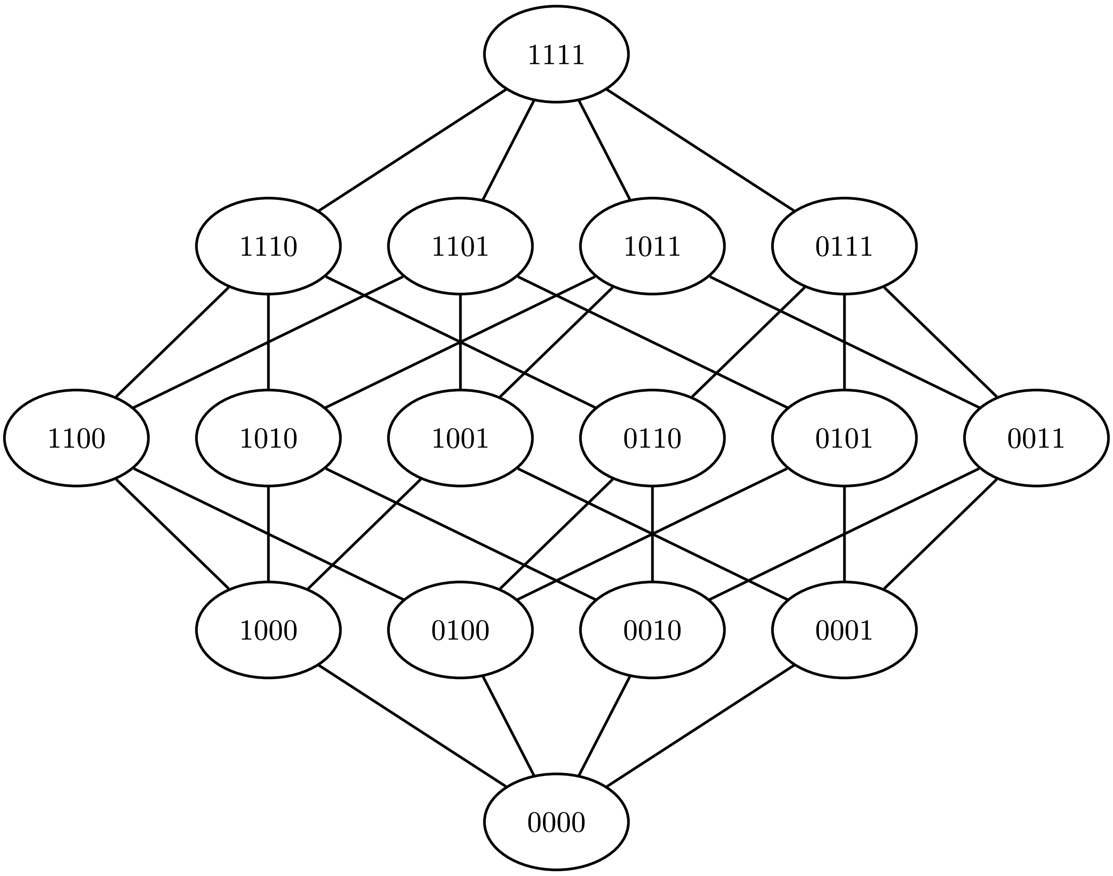
   Detta ger att $f = (x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+z)$

6. Hur många booleska funktioner $f(x,y,z)$ med 3 variabler x, y, z finns det som uppfyller villkoret att $f(0,0,1) + f(0,0,0) + f(1,1,1) \leq f(1,0,1)$? (Vi adderar förstås booleskt.)

   Lösning: Vi delar upp i två fall. Antag först att $f(1,0,1) = 0$. Då är $f(0,0,1) = f(0,0,0) = f(1,1,1) = 0$, och det finns 2^4 sådana funktioner. Antag nu att f(1,0,1) = 1. Då är kravet i olikheten alltid uppfyllt, och det finns 2^7 sådana funktioner. Totalt finns alltså $2^4 + 2^7$ sådana funktioner

7. Låt F_2 vara mängden av alla booleska funktioner med 2 variabler. Definiera en relation R på F_2 genom att sätta $f(x,y)Rg(x,y)$ om $f(x,y) \leq g(x,y)$ gäller för alla olika värden på x och y. Visa att R är en partialordning och rita Hassediagrammet för (F_2, R).

   Lösning: Att relationen R är reflexiv och transitiv är uppenbart. Antisymmetrin kan motiveras på följande sätt: om $f(x,y) \leq g(x,y)$ och $g(x,y) \leq f(x,y)$ för alla $x, y \in \{0,1\}$, så måste $f(x,y) = g(x,y)$ för alla $x, y \in \{0,1\}$. Hassediagrammet:



där t.ex. **1101** är funktionen f där $f(0,0) = \mathbf{1},\ f(0,1) = \mathbf{1},\ f(1,0) = \mathbf{0},\ f(1,1) = \mathbf{1}$ och **0100** är funktionen g där $g(0,0) = \mathbf{0},\ g(0,1) = \mathbf{1},\ g(1,0) = \mathbf{0},\ g(1,1) = \mathbf{0}$. Generellt representerar en nod "abcd" funktionen h där $h(0,0) = a,\ h(0,1) = b,\ h(1,0) = c,\ h(1,1) = d$.

8. Skriv den booleska funktionen $f(x,y,z) = f(x,y,z) = \overline{x + \bar{y}z} + \overline{\bar{y} + xz}$ på fullständig disjunktiv normalform.

   Lösning: $f(x,y,z) = \overline{x + \bar{y}z} + \overline{\bar{y} + xz} = \bar{x}yz + y\overline{xz}$ ger tabellen

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

och $f = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z}$ är disjunktiv normalform

9. a) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z)$ med 3 variabler som uppfyller villkoren $f(0,0,0) = f(1,1,1)$ och $f(0,0,1) \neq f(1,0,0)$ finns det?

   b) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z)$ med 3 variabler uppfyller att $f(0,0,0) \leq f(1,1,1)$ och $f(0,0,1) \leq f(1,0,0)$?

   a) Lösning: Det finns 2 sätt att välja funktionsvärdet $f(0,0,0)$ (och därmed även $f(1,1,1)$). Där efter finns 2 sätt att välja funktionsvärdet $f(0,0,1)$ (och därmed även $f(1,0,0)$. Övriga funktions-värden kan sedan väljas på 2^4 sätt. Alltså finns 2^6 booleska funktioner som uppfyller villkoren.

   b) Lösning: Om $f(0,0,0) = f(0,0,1) = 0$, så finns 2^6 sådana funktioner; om $f(0,0,0) \neq f(0,0,1) = 0$, så finns 2^5 sådana funktioner; $f(0,0,0) \neq f(0,0,1) = 1$ ger också 2^5 booleska funktioner; och $f(0,0,0) = f(0,0,1) = 1$ ger 2^4 funktioner. Totalt finns alltså $2^6 + 2^5 + 2^5 + 2^4 = 144$ funktioner som uppfyller villkoren