1. Ange samtliga heltalslösningar till $87x + 105y = 6000$

   Lösning: Euklides algoritm ger att $\operatorname{sgd}(87, 105) = 3$, så ekvationen kan skrivas $29x + 35y = 2000$ och Euklides algoritm “baklänges” ger $5 \cdot 35 - 6 \cdot 29 = 1$. En lösning är således $x = -12000$ och $y = 10000$, och alla lösningar ges av $x = -12000 + 35n$ och $y = 10000 - 29n$, där n är ett heltal.

2. Ange alla positiva heltal (x, y) sådana att $60x + 92y = 4000$

   Lösning: Euklides algoritm ger att $\operatorname{sgd}(60, 92) = 4$, så ekvationen kan skrivas $15x + 23y = 1000$ och Euklides algoritm “baklänges” ger $2 \cdot 23 - 3 \cdot 15 = 1$. En lösning är således $x = -3000$ och $y = 2000$, och alla lösningar ges av $x = -3000 + 23n$ och $y = 2000 - 15n$, där n är ett heltal. De positiva lösningarna är: $x = 13, y = 35.$ $x = 36, y = 20.$ $x = 59, y = 5$

3. Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen $97x + 27y = 17$

   Lösning: Euklides algoritm ger $1 = 27 \cdot 18 - 5 \cdot 97$ och en lösning är således $x = -85, y = 306$. Alla lösningar är $x = -85 + 27n, y = 306 - 97n$, där n är ett godtyckligt heltal.

4. Ange samtliga positiva heltalslösningar till ekvationen $99x + 234y = 9000$

   Lösning: Euklides algoritm ger att $\operatorname{sgd}(99, 234) = 9$ och alltså kan ekvationen skrivas $11x + 26y = 1000$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 26 \cdot 3 - 7 \cdot 11$ och en lösning är således $x = -7000, y = 3000$. Den allmänna lösningen är $x = -7000 + 26n$ och $y = 3000 - 11n$, där n är ett heltal. De positiva lösningarna blir således $(x, y) \in \{(20, 30), (46, 19), (72, 8)\}$.

5. Hans och Greta plockar lingon och kantareller i skogen för att sälja i sin butik. De säljer lingon för 50kr/kg och kantareller för 65kr/kg. En dag har de sålt för 13000kr. Hur många kg lingon respektive kantareller kan de ha sålt under dagen?

   Lösning: Vi söker positiva heltalslösningar till ekvationen $50x + 65y = 13000$. Euklides algoritm ger att $\operatorname{sgd}(50, 65) = 5$ och alltså kan ekvationen skrivas $10x + 13y = 2600$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 4 \cdot 10 - 3 \cdot 13$ och en lösning är således $x = 10400, y = -7800$. Den allmänna lösningen är $x = 10400 + 13n$ och $y = -7800 - 10n$, där n är ett heltal. Kravet att lösningarna skall vara icke-negativa ger nu att $-800 \leq n \leq -780$

6. Ange samtliga positiva heltalslösningar (x, y) till ekvationen $377x + 416y = 3250$

   Lösning: Vi söker positiva heltalslösningar till ekvationen $377x + 416y = 3250$. Euklides algoritm ger att $\operatorname{sgd}(377, 416) = 13$ och alltså kan ekvationen skrivas $29x + 32y = 250$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 10 \cdot 32 - 11 \cdot 32$ och en lösning är således $x = -2750, y = 2500$. Den allmänna lösningen är $x = -2750 + 32n$ och $y = 2500 - 29n$, där n är ett heltal.

7. Ange samtliga heltalslösningar (x, y) till ekvationen $798x + 768y = 66$

   Lösning: Vi söker heltalslösningar till ekvationen $798x + 768y = 66$. Euklides algoritm ger att $\operatorname{sgd}(798, 768) = 6$ och alltså kan ekvationen skrivas $133x + 128y = 11$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 53 \cdot 128 - 51 \cdot 133$ och en lösning är således $x = -561, y = 583$. Den allmänna lösningen är $x = -561 + 128n$ och $y = 583 - 133n$, där n är ett heltal

8. Ange samtliga positiva heltalslösningar (x, y) till ekvationen $462x + 54y = 6000$.

   Lösning: Vi söker heltalslösningar till ekvationen $462x + 54y = 6000$. Euklides algoritm ger att $\text{sgd}(462, 54) = 6$ och alltså kan ekvationen skrivas $77x + 9y = 1000$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 2 \cdot 77 - 17 \cdot 9$ och en lösning är således $x = 2000, y = -17000$. Den allmänna lösningen är $x = 2000 + 9n$ och $y = -17000 - 77n$, där n är ett heltal. De positiva lösningarna är $(x, y) = (11, 17)$ och $(x, y) = (2, 94)$

9. Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen $388x + 108y = 68$

   Lösning: Vi söker heltalslösningar till ekvationen $388x + 108y = 68$. Euklides algoritm ger att $\text{sgd}(388, 108) = 4$ och alltså kan ekvationen skrivas $97x + 27y = 17$. Euklides algoritm ger $1 = 27 \cdot 18 - 5 \cdot 97$ och en lösning är således $x = -85, y = 306$. Alla lösningar är $x = -85 + 27n, y = 306 - 97n$, där n är ett godtyckligt heltal

10. Bestäm alla positiva heltalslösningar till ekvationen $39x + 91y = 1326$

    Lösning: Eftersom 39 och 91 har största gemensamma delaren 13 kan ekvationen skrivas $3x + 7y = 102$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 7 - 3 \cdot 2$, och alltså att $102 = 7 \cdot 102 - 3 \cdot 204$. Således är $x = -204$ och $y = 102$ en lösning, och samtliga lösningar ges av $x = -204 + 7n$ och $y = 102 - 3n$ där n är ett heltal. De positiva lösningarna ges av $(x, y) \in \{(6, 12), (13, 9), (20, 6), (27, 3)\}$

11. Majken har precis 1020kr i 50-kronorssedlar och 20-kronorssedlar. Om hon har fler 50-kronorssedlar än 20-kronorssedlar, hur många av varje sort kan hon då ha

    Lösning: Låt x = antalet 50-kronorssedlar, y = antalet 20-kronorssedlar, så kan problemet formuleras som den diofantiska ekvationen $50x + 20y = 1020, x, y \geq 0$, där vi söker lösningar sådana att $x > y$. Ekvationen kan skrivas $5x + 2y = 102$ och Euklides algoritm ger att $5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 1$. En lösning till den ursprungliga ekvationen är således $x = 102, y = -204$, och samtliga lösningar ges av $x = 102 + 2n, y = -204 - 5n$, där n är ett heltal. De lösningar som uppfyller $x > y \geq 0$ är $x = 20, y = 1, x = 18, y = 6, x = 16, y = 11$

12. a) Beräkna $\text{sgd}(1092, 975)$ (E)

    b) Hitta x och y om $\text{sgd}(1092, 975) = 1092x + 975y$ (E)

    a) Svar: 39

    b) Svar: $x = -8, y = 9$