Pass 2, mängder av induktion

Mängdlära

1. Är det sant att $A \cup \left(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right) = A \cup B \cup \bar{C}$ för alla mängder A, B, C?

2. Givet $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ stämmer följande påståenden?

a) $\emptyset \in A$?

b) $\{\emptyset\} \in A$?

c) $\{\{\emptyset\}\} \in A$?

d) $\emptyset \subseteq A$?

e) $\{\emptyset\} \subseteq A$?

f) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$?

3. Låt A, B vara 2 mängder.

Vilka av följande påståenden stämmer? Om ett påstående stämmer, bevisa det. Om ett påstående inte stämmer, ge ett exempel på A, B som motbevisar påståendet.

a) Om $B \subseteq A$ så måste $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

b) Om $A \setminus B = \emptyset$ så måste $A = B$

c) $\overline{A \triangle B} = A \cap B$

d) $\overline{\left(\bar{A} \setminus B\right) \cup \overline{(A \cup B)}} \cap \bar{\emptyset} = A \cup B$

4. Låt $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$. Beräkna:

a) $A \times B$

b) $|A \times B|$

c) $|A| \cdot |B|$

d) $|(A \cup B) \times (A \cap B)|$

5. Är $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ för alla mängder A, B, C? Om sant, bevisa det och om inte ge exempel på A, B, C där likheten inte stämmer.

6. Givet $A = \left\{x^2 + 3x - 5 : x \text{ är ett udda positivt heltal och } x \leq 6\right\}$ och $B = \left\{\sqrt{-1}, \pi, e, \sqrt{5}, \pi\right\}$. Beräkna:

a) $|A| + |B|$

b) $|A \cup B|$

c) $|P(B)| - |P(A)|$

d) $|P(B) \setminus P(A)|$

e) $|P(P(A) \cup P(B))|$

f) $|P(P(P(A) \cap P(B)))|$

Induktion

7. Visa att $4 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + ... + (3n-2)(2n-2) = 2n^3 - 2n^2$ för alla heltal $n \geq 2$

8. Ge en generell formel för ett tal i följden som ges av: $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} & n \geq 2 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$

Bevisa sedan din formel.

9. Finns det något tal a så att likheten $\sum_{j=1}^{n} 4j^3 = n^4 + an^3 + n^2$ gäller för alla heltal $n \geq 1$? Bevisa i så fall ditt påstående.

10. Visa att $\sum_{k=0}^{n} 4 * 5^k = 5^{n+1} - 1$ för alla heltal $n \geq 0$

11. Visa att $7 + 11 + 15 + ... + (4n + 3) = 2n^2 + 5n$, för alla heltal $n \geq 1$