Grafer

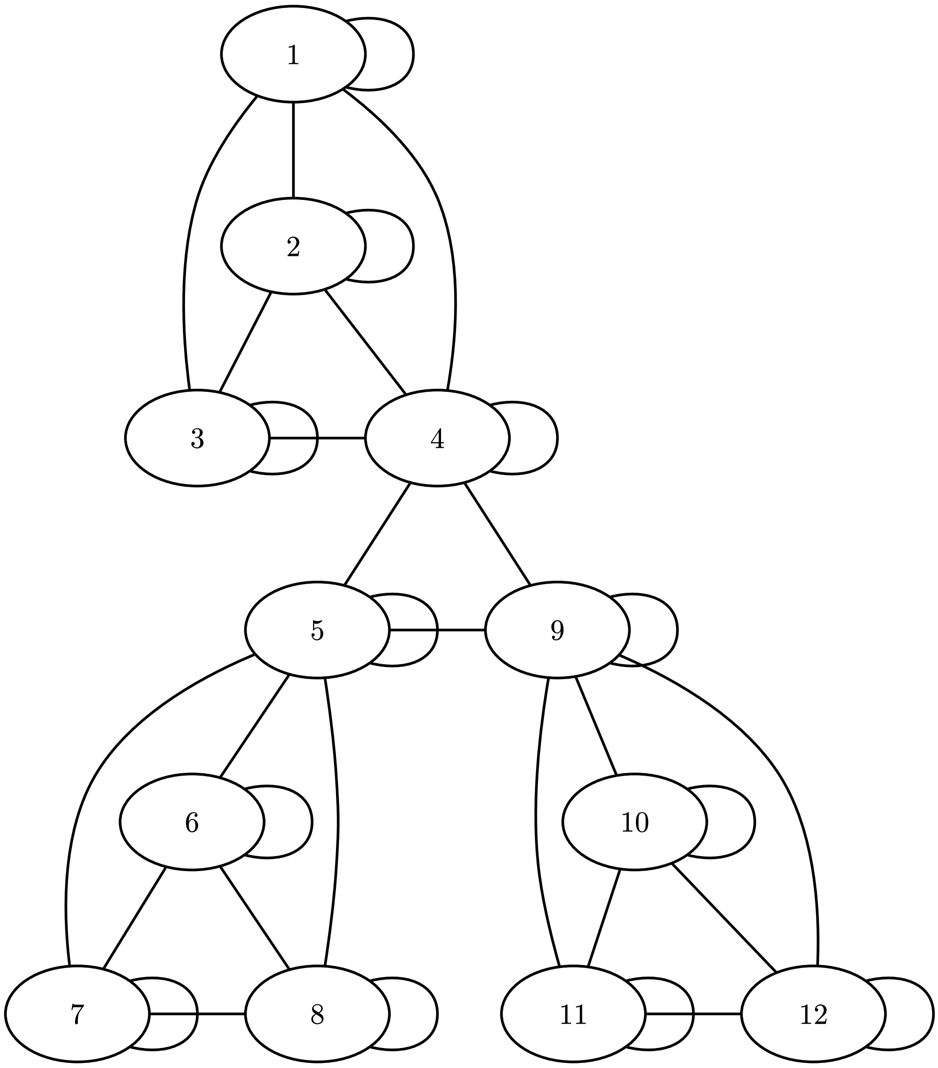
1. Påståendet är falskt. Ett enkelt motexempel är K_5

2. Lösning: Den kompletta grafen K_4 är planär. Eftersom varje graf med högst 4 hörn är en delgraf till K_4, så är påståendet sant

3. Lösning: Det kromatiska polynomet för grafen som fås från K_5 genom att underdela precis en kant kan bestämma genom att använda den vanliga rekursionsformeln. Låt K_5^+ vara grafen som fås från K_5 genom att underdela precis en kant. Kromatiska polynomet för $K_5^+ - e$ (K_5^+ minus en kant som slutar vid hörnet av valens 2) är $\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)^2$. Vidare genom att kontrahera en kant som slutar vid hörnet av valens 2 fås K_5 som har kromatiskt polynom $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$. Alltså är det sökta kromatiska polynomet $\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)^2 - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-5\lambda+7)$

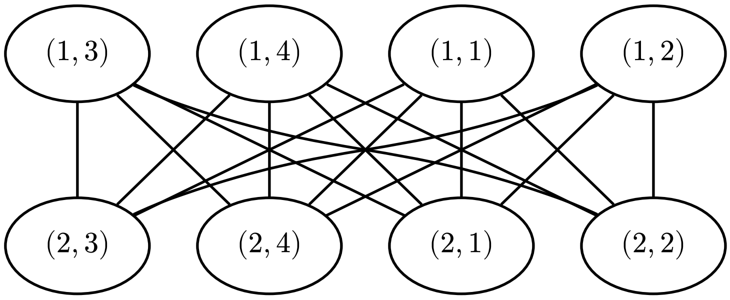
4. Lösning: Använd t.ex. induktion över n.

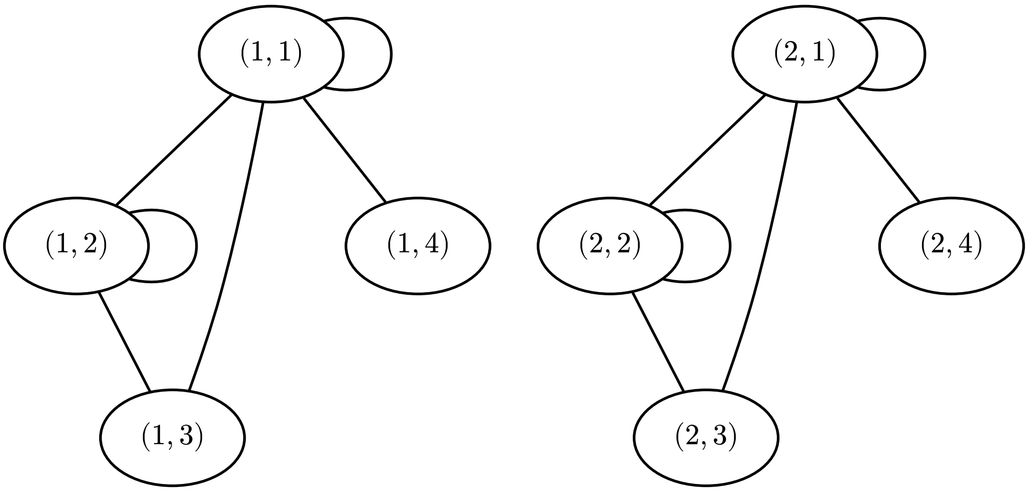
5. Lösning: Grafen ser ut som följer:



Som synes är grafen planär. Vidare är kromatiska polynomet lika med $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)((\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3))^3$, ty vi kan välja 3 olika färger till triangeln $4-5-9$ på $(\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ olika sätt, och sedan kan resterande färger till varje kopia av K_4 väljas på $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ olika sätt.

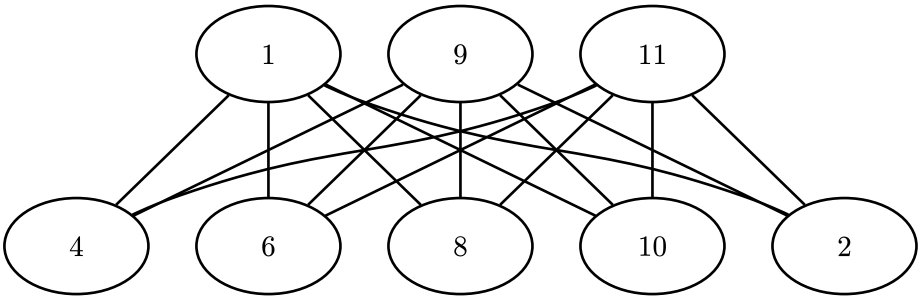
6. Lösning: Grafen G kan fås från följande graf genom att dessutom lägga till alla möjliga kanter mellan de två komponenterna. Därmed fås att den längsta cykeln innehåller alla hörn i G, och alltså har längd 8.





Det kromatiska polynomet för en triangel är $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ (via multiplikationsprincipen) och alltså får vi att det finns $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)$ sätt att färga delgrafen bestående av de två nedre trianglarna i figuren och kanterna mellan dem. Vi tillämpar rekursionsformeln $P(G,\lambda) = P(G-e,\lambda) - P(G\cdot e,\lambda)$ på grafen G och kanten e mellan hörnen $(2,4)$ och $(1,4)$. Då gäller att $P(G-e,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)(\lambda-4)^2$ och $P(G\cdot e,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)(\lambda-6)$. Alltså får vi att $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)(\lambda^2-9\lambda+22)$

7. Lösning: Grafen kan ritas på följande sätt:

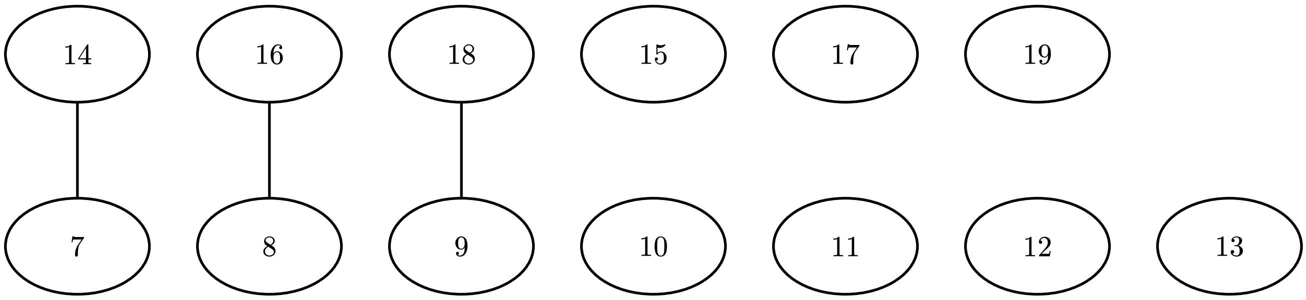


Lösning: Grafen G är bipartit, så den har kromatiskt tal 2

8. Lösning: Ett träd är en planär graf som ej innehåller någon hamiltoncykel

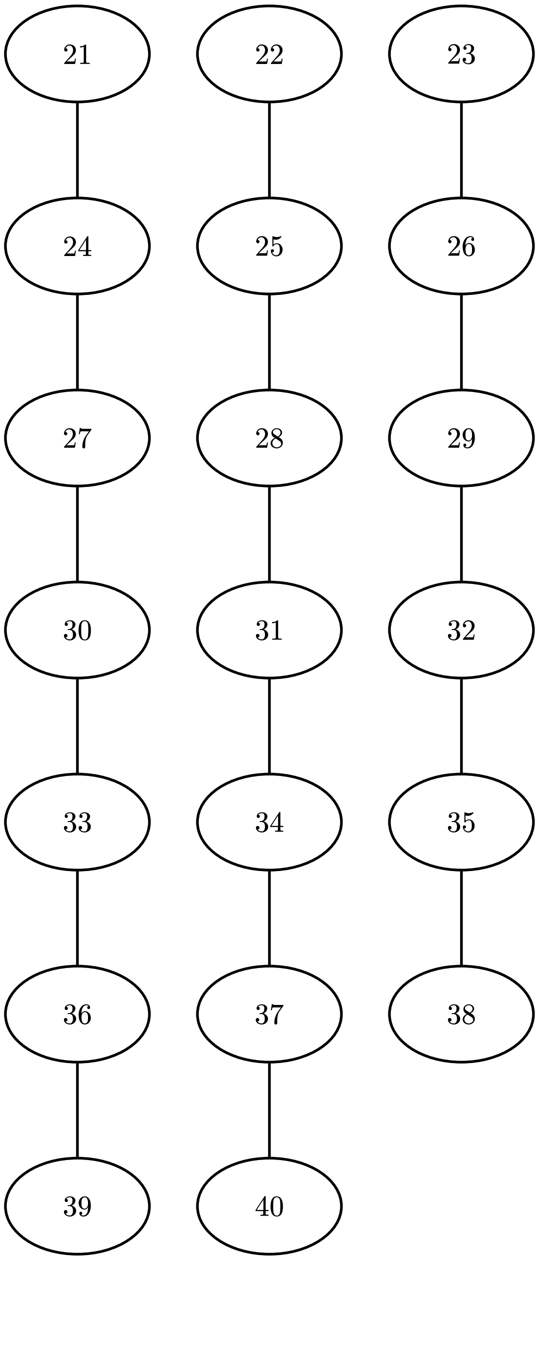
Po-mängder

1. a) Svar: Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv och alltså en partialordning. Hassediagrammet ser ut på följande sätt:



b) Lösning: Alla element utom 14, 16, 18 är minimala, och alla element utom 7, 8, 9 är maximala

2. Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och därmed en partialordning.
   Hassediagrammet ser ut på följande sätt

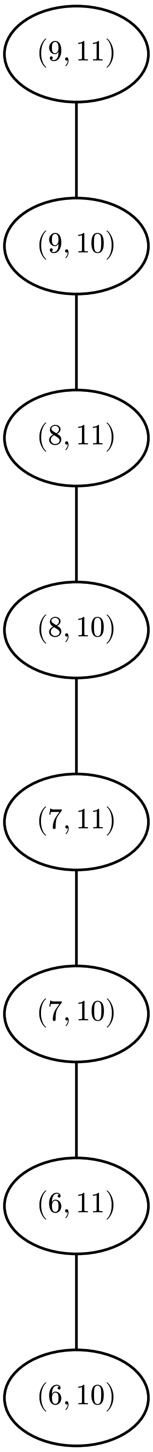


3. a) Lösning: Relationen är inte antisymmetrisk, och alltså inte en partialordning.

   b) Lösning: En partialordning $\preccurlyeq$ på R ges av ordna elementen enligt följande: $(6, 10) \preccurlyeq (6, 11) \preccurlyeq (7, 10) \preccurlyeq (7, 11) \preccurlyeq (8, 10) \preccurlyeq (8, 11) \preccurlyeq (9, 10) \preccurlyeq (9, 11)$. (Det finns många olika lösningar.)

4. a) Lösning: Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv och alltså en partialordning.

   b) Lösning: Hassediagrammet ser ut som följer:



   c) Lösning: Po-mängden kan bara sorteras topologiskt på ett sätt, eftersom det är en totalordning.