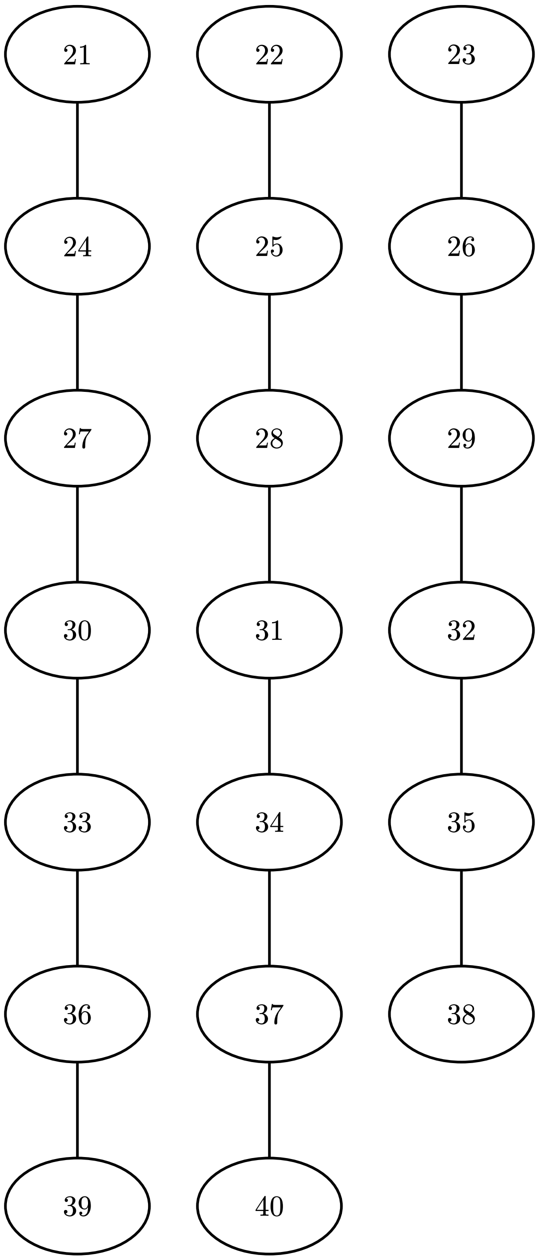
1. Låt $E = \{21, 22, ..., 40\}$ och definiera relationen R på E genom att för $x, y \in E$ sätta xRy om $x - y$ är ett icke-negativt heltal som är delbart med 3. Visa att R är en partialordning och rita dess Hassediagram.

   Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och därmed en partialordning. Hassediagrammet ser ut på följande sätt



2. Låt $B = \{6, 7, 8, 9\} \times \{10, 11\}$ och definiera en relation R på mängden B genom att sätta $(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ om $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

   a) Undersök om relationen R är en partialordning.

   b) Om R är en partialordning, bestäm om po-mängden (B, R) i så fall har några största och/eller minsta element. Om R inte är en partialordning, definiera en relation på B som är en partialordning.

a) Lösning: Relationen är inte antisymmetrisk, och alltså inte en partialordning.

b) Lösning: En partialordning $\preccurlyeq$ på R ges av ordna elementen enligt följande: $(6,10) \preccurlyeq (6,11) \preccurlyeq (7,10) \preccurlyeq (7,11) \preccurlyeq (8,10) \preccurlyeq (8,11) \preccurlyeq (9,10) \preccurlyeq (9,11)$. (Det finns många olika lösningar.)

3. Låt $B = \{6,7,8,9\} \times \{10,11\}$ och definiera en relation R på mängden B genom att sätta $(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ om antingen $x_1 > y_1$ eller $x_1 = y_1$ och $x_2 \geq y_2$.

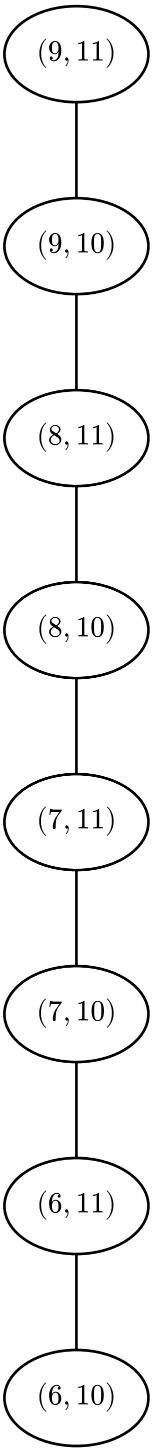
   a) Visa att R är en partialordning.

   b) Rita Hassediagrammet för po-mängden (B, R)

   c) Bestäm på hur många sätt po-mängden kan sorteras topologiskt. Motivera!

   a) Lösning: Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv och alltså en partialordning.

   b) Lösning: Hassediagrammet ser ut som följer:



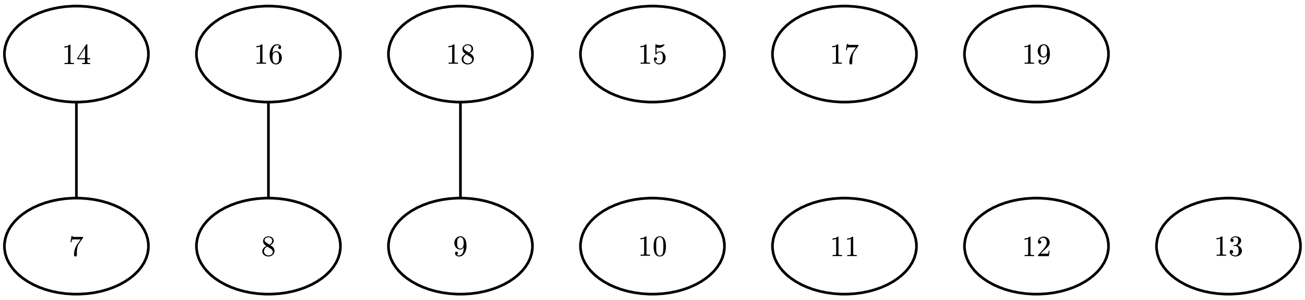
c) Lösning: Po-mängden kan bara sorteras topologiskt på ett sätt, eftersom det är en totalordning.

4. Låt $X = \{7, 8, 9, ..., 19\}$.

   a) Visa att delbarhetsrelationen på X är en partialordning och rita hassediagrammet för po-mängden $(X, |)$.

   b) Vilka maximala och minimala element har po-mängden $(X, |)$?

a) Svar: Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv och alltså en partialordning. Hassediagrammet ser ut på följande sätt:



b) Lösning: Alla element utom $14, 16, 18$ är minimala, och alla element utom $7, 8, 9$ är maximala

5. Låt B vara mängden av alla olika följder av längd högst 8 som består av fyror och nior, och där alla fyror kommer före alla nior. (Till exempel gäller att $44999 \in B, 44 \in B$ och $9999 \in B$, medan $44994 \notin B$.) En relation R på B definieras genom att sätta xRy om antingen
   - följden y innehåller fler fyror än x, eller
   - x och y innehåller lika många fyror och y innehåller minst lika många element som x.

   Avgör om R är en partialordning. Är R en totalordning?

   Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv och alltså en partialordning. Eftersom det för varje par av element gäller att de står i relation till varandra, så är relationen även en totalordning.