Pass 5

Diofantiska ekvationer

1. Lösning: Euklides algoritm ger att $\mathrm{sgd}(87, 105) = 3$, så ekvationen kan skrivas $29x + 35y = 2000$ och Euklides algoritm "baklänges" ger $5 \cdot 35 - 6 \cdot 29 = 1$. En lösning är således $x = -12000$ och $y = 10000$, och alla lösningar ges av $x = -12000 + 35n$ och $y = 10000 - 29n$, där n är ett heltal.

2. Lösning: Vi söker positiva heltalslösningar till ekvationen $50x + 65y = 13000$. Euklides algoritm ger att $\mathrm{sgd}(50, 65) = 5$ och alltså kan ekvationen skrivas $10x + 13y = 2600$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 4 \cdot 10 - 3 \cdot 13$ och en lösning är således $x = 10400, y = -7800$. Den allmänna lösningen är $x = 10400 + 13n$ och $y = -7800 - 10n$, där n är ett heltal. Kravet att lösningarna skall vara icke-negativa ger nu att $-800 \leq n \leq -780$

Diofantiska ekvationer (öva mer)

3. Lösning: Euklides algoritm ger $1 = 27 \cdot 18 - 5 \cdot 97$ och en lösning är således $x = -85, y = 306$. Alla lösningar är $x = -85 + 27n, y = 306 - 97n$, där n är ett godtyckligt heltal.

4. Lösning: Euklides algoritm ger att $\mathrm{sgd}(60, 92) = 4$, så ekvationen kan skrivas $15x + 23y = 1000$ och Euklides algoritm "baklänges" ger $2 \cdot 23 - 3 \cdot 15 = 1$. En lösning är således $x = -3000$ och $y = 2000$, och alla lösningar ges av $x = -3000 + 23n$ och $y = 2000 - 15n$, där n är ett heltal. De positiva lösningarna är: $x = 13, y = 35$. $x = 36, y = 20$. $x = 59, y = 5$

Relationer

5. a) Lösning: $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$ så 5

   b) Lösning: $(2, 1), (4, 3), (3, 2)$ så 3

   c) Lösning: 0 ty den är antisymmetrisk

   d) Lösning: Vi måste lägga till $(1, 3), (2, 4), (1, 4)$, så det minsta antalet är 3.

   e) Lösning: 14 (rita ett diagram)

   f) Lösning: $\{1, 2, 3, 4, 5\} = [1] \cup [5] = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5\}$

6. Svar: R är transitiv

7. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation. Partitionen som R ger upphov till är $\mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$.

8. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation. Antalet ekvivalensklasser är 12, och $\left|[\text{BRÖD}]\right| = \binom{8}{4}4! + \binom{7}{2}\binom{3}{1}\frac{4!}{2!} + \binom{3}{2}\frac{4!}{2!2!} + \binom{7}{1}\frac{4!}{3!}$, ty ett

ord med 4 bokstäver kan bestå av 4 olika bokstäver, precis en dublett, exakt två dubletter, eller 3st R och en ytterligare bokstav.

9. Relationen är uppenbar treflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation. Primtalsfaktoriseringen av 4500 är $4500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Ekvivalensklasserna är alltså $[1], [2], [4], [12], [36], [180], [900], [4500]$, och $|[1]| = 1, |[2]| = 3, |[4]| = 6, |[12]| = 8, |[36]| = 8, |[180]| = 6, |[900]| = 3, |[4500]| = 1$.

Överkurs:

10. Lösning?: den enda relationen jag kan komma på som uppfyller kraven är $f(x) = x$ altså xRy om $x = y$.

11. Dictionary och funktion kan beskrivas som relationer.

    Vi kan likna python-koden

    my_dict = {};

    my_dict[x] = y

    med xRy, altså att alla keys i dictionaryn står i relation till deras value.

    En funktion kan beskrivas på liknande sätt fast något mer abstrakt. Om vi tar följande exempel:

    def foo(a): return a + 1

    Så kan det liknas vid relationen $aR(a + 1)$, altså står alla möjliga input-värden till funktionen i relation till respektive output-värde.