Booleska uppgifter

1. a) Lösning: Antalet sådana booleska funktioner är 2^6, ty om vi väljer funktionsvärdet $f(0,0,0)$, så har vi fixerat $f(1,1,1)$ och $f(0,1,0)$ också.

   b) Lösning: Antalet sådana booleska funktioner är 2^{15}, ty om vi väljer funktionsvärdena $f(0,0,0,1)$ och $f(0,0,1,0)$, så är även $f(0,0,1,1)$ entydigt bestämt.

2. Lösning: $\overline{\bar{x} + yz} + \overline{y + x\bar{z}} = \bar{y} + x\bar{z}$ ger tabellen

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

3. Lösning: $f(x,y,z) = \overline{x + \bar{y}z} + \overline{\bar{y} + xz} = \bar{x}yz + y\bar{x}\bar{z}$ ger tabellen

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

   och $f = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z}$ är disjunktiv normalform

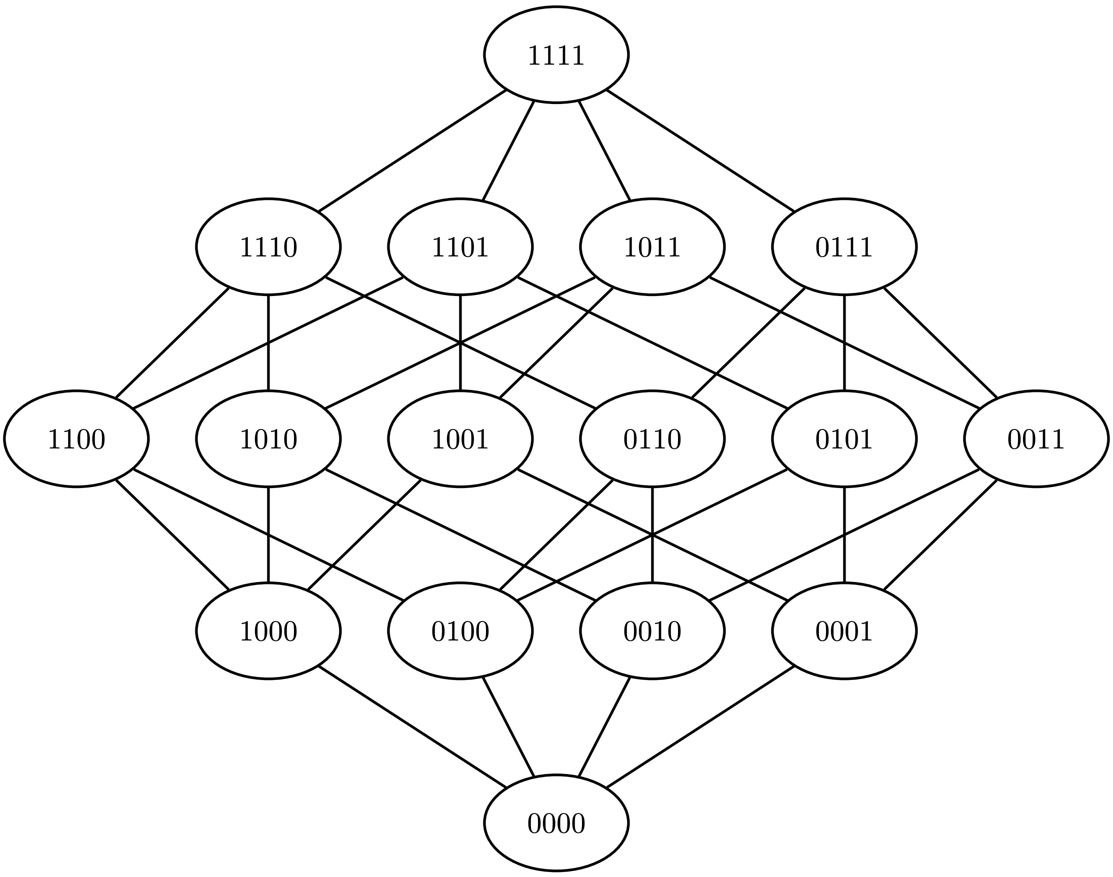
4. Lösning: skriv först upp tabellen för f.

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1

x	y	z	f(x, y, z)
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f = (x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + z)$$

5. Lösning: Att relationen R är reflexiv och transitiv är uppenbart. Antisymmetrin kan motiveras på följande sätt: om $f(x, y) \leq g(x, y)$ och $g(x, y) \leq f(x, y)$ för alla $x, y \in \{0, 1\}$, så måste $f(x, y) = g(x, y)$ för alla $x, y \in \{0, 1\}$. Hassediagrammet:



där t.ex. **1101** är funktionen f där $f(0, 0) = \mathbf{1},\ f(0, 1) = \mathbf{1},\ f(1, 0) = \mathbf{0},\ f(1, 1) = \mathbf{1}$ och **0100** är funktionen g där $g(0, 0) = \mathbf{0},\ g(0, 1) = \mathbf{1},\ g(1, 0) = \mathbf{0},\ g(1, 1) = \mathbf{0}$. Generellt representerar en nod “abcd” funktionen h där $h(0, 0) = a,\ h(0, 1) = b,\ h(1, 0) = c,\ h(1, 1) = d$.

Fler uppgifter

6. Lösning: Antalet sådana funktioner är 2^5

7. Svar: $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + x \cdot z + y \cdot z$ ger tabellen

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Detta ger att $f = (x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + z)$

8. Lösning: Vi delar upp i två fall. Antag först att $f(1, 0, 1) = 0$. Då är $f(0, 0, 1) = f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 0$, och det finns 2^4 sådana funktioner. Antag nu att f(1,0,1) = 1. Då är kravet i olikheten alltid uppfyllt, och det finns 2^7 sådana funktioner. Totalt finns alltså $2^4 + 2^7$ sådana funktioner

9. a) Lösning: Det finns 2 sätt att välja funktionsvärdet $f(0, 0, 0)$ (och därmed även $f(1, 1, 1)$). Där efter finns 2 sätt att välja funktionsvärdet $f(0, 0, 1)$ (och därmed även $f(1, 0, 0)$. Övriga funktions-värden kan sedan väljas på 2^4 sätt. Alltså finns 2^6 booleska funktioner som uppfyller villkoren.

   b) Lösning: Om $f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = 0$, så finns 2^6 sådana funktioner; om $f(0, 0, 0) \neq f(0, 0, 1) = 0$, så finns 2^5 sådana funktioner; $f(0, 0, 0) \neq f(0, 0, 1) = 1$ ger också 2^5 booleska funktioner; och $f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = 1$ ger 2^4 funktioner. Totalt finns alltså $2^6 + 2^5 + 2^5 + 2^4 = 144$ funktioner som uppfyller villkoren