Facit pass 3, kombinatorik

1. a) Lösning: Antalet sätt är $\binom{22}{3} + \binom{22}{5} + \binom{22}{7} + \binom{22}{11} + \binom{22}{13} + \binom{22}{17} + \binom{22}{19}$.

   b) Lösning: Noel har 5^{12} möjligheter.

   c) Lösning: Eftersom två glasspinnar inte får placeras bredvid varandra måste de fem skålarna finnas i mellanrummen mellan alla sex glassar. Således finns 6! möjligheter.

2. Lösning: Ordet BARRSKOGSBÄR innehåller totalt 8 olika bokstäver, 3st R, 2st B och 2st S. Antalet olika "ord" med 5st bokstäver är alltså $\binom{8}{5}5! + \binom{3}{1}\binom{7}{3}\frac{5!}{2!} + \binom{3}{2}\binom{6}{1}\frac{5!}{2!2!} + \binom{7}{2}\frac{5!}{3!} + \binom{2}{1}\frac{5!}{3!2!}$, där första termen räknar antalet ord med 5 olika bokstäver, andra termen räknar antalet ord där precis en bokstav förekommer 2 gånger, tredje termen räknar antalet ord där två bokstäver förekommer två gånger, fjärde termen räknar antalet ord med 3st R och 2 andra olika bokstäver, och sista termen räknar antalet ord med 3st R och en bokstav som förekommer två gånger.

3. Lösning: Antalet delmängder som innehåller $\{1, 2\}$ men inte $\{1, 10\}$ är 27, antalet som innehåller $\{3, 4\}$ men inte $\{1, 10\}$ är $3 \cdot 26$, och antalet som innehåller både $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, men inte $\{1, 10\}$ är 25. Sökt antal är alltså $5 \cdot 26 - 25 = 288$

4. Lösning: Om alla deckare ska stå bredvid varandra så finns det totalt $12! \cdot 12$ möjligheter, efter som alla diktsamlingar är identiska medan deckarna kan permuteras på 12! sätt. Om inte någon diktsamling får stå bredvid en annan diktsamling, så finns det $12! \cdot \binom{13}{11}$, ty det finns 12! permutationer av deckarna och sedan 13 platser att välja på för 11 diktsamlingar.

5. Lösning a): Ekvationen och villkoren $1 \leq x_1 \leq 10, x_2 \geq 21, x_3 \geq -12, x_4 \geq 0$, är ekvivalent med ekvationen $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 36, 0 \leq y_1 \leq 9$ och $y_i \geq 0, i = 2, 3, 4$. Antalet lösningar är alltså $\binom{39}{36} - \binom{29}{26}$.

   Lösning b): Ekvationen kan skrivas $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 30$ där $0 \leq y_i \leq 10$. Inklusion-exklusion kombinerat med formeln för antalet lösningar hos staketproblem ger sedan att antalet lösningar är $\binom{33}{30} - 4\binom{22}{19} + 6\binom{11}{8}$.

6. Lösning: Binomialsatsen ger: $\binom{12}{3} \cdot 2^9 - \binom{12}{9} \cdot 2^9 \cdot (-3)^3 = \binom{12}{3} \cdot 2^9 \cdot 28$

7. a) Lösning: Det kan stå $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ eller 7 böcker på översta hyllan. Låt b_i vara antalet sätt att placera böckerna så att i st står på översta hyllan. Då gäller att $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, men tolkningarna att $i \geq 1, i \geq 2$ eller $i \geq 3$ är också alla acceptabla om de motiveras. Vi får att

   $b_0 = 18!$

   $b_1 = 18 \cdot 17!$

   $b_2 = (15 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 16!$

   $b_3 = \left(\binom{15}{2} \cdot 3 \cdot 2! + \binom{3}{2} \cdot 15 \cdot 2!\right) \cdot 15!$

   $b_4 = \left(\binom{15}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot 2^3\right) \cdot 14!$

$b_5 = \left(\binom{15}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 3! \cdot 2! + \binom{15}{2} \cdot 3! \cdot 2!\right) \cdot 13!$

$b_6 = \left(\binom{15}{3} \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2\right) \cdot 12!$

$b_7 = \left(\binom{15}{4} \cdot 3! \cdot 4!\right) \cdot 11!$

Totala antalet sätt att placera böckerna är alltså $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7$

b) Lösning: Det finns $\binom{5}{2} \cdot 4 \cdot \binom{9}{5}$ olika sorter.