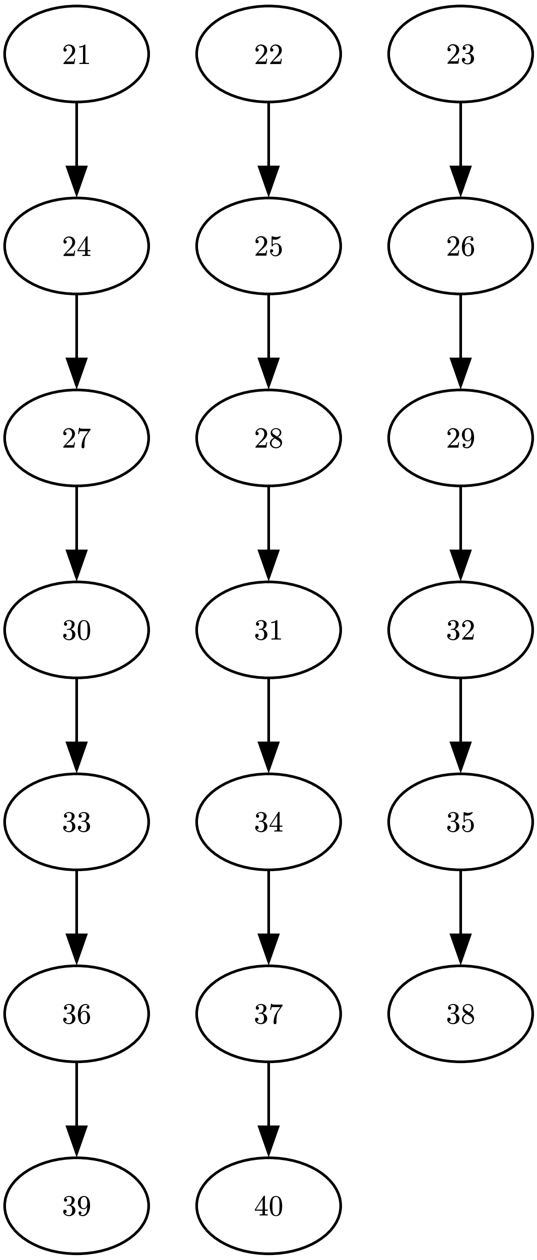
Låt R vara en relation på $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ som definieras genom att sätta $(u, v)R(x, z)$ om $u + x$ är ett jämnt heltal. Visa att R är en ekvivalensrelation samt bestäm alla skilda ekvivalensklasser.

Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation. Partitionen som R ger upphov till är $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{Z} \cup \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{Z}$.

Låt $E = \{21, 22, ..., 40\}$ och definiera relationen R på E genom att för $x, y \in E$ sätta xRy om $x - y$ är ett icke-negativt heltal som är delbart med 3. Visa att R är en partialordning och rita dess Hassediagram.

Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och därmed en partialordning.
Hassediagrammet ser ut på följande sätt (Hassediagrammet är tre dijunkta linjer, stora tal neråt)



Låt B vara mängden av alla olika följder av längd 10 som beståravettoro chnolloro chdärettuddaantalsiffroriföljdenärettor.DefinieraenrelationR1påBgenomattsättaxR1yomsummanavdeingåendesiffrorn
estäm|B|.Motiveranoggrant.

Relationenärinteantisymmetrisko challtsåinteenpartialordning.EnföljdsomtillhörBhar1,3,5,7,eller9ettor.Alltsågälleratt|B|= 2·10!1!9!+ 2·10!3!7!+·10!5!5!

Låt A vara mängden av alla olika booleska funktioner f(x, y)med2variablerx, y.LåtRvaraenrelationpåAsomde⊠nierasavattfRgomf(x,1) =g(x,1),d.v.s.f(x, y) =g(x, y)omy= 1.ÄrRenekvivalensrelation?BestämisåfalldenpartitionavAsomRgerupphovtill.

Relationenärreflexiv,symmetrisko chtransitivo challtsåenekvivalensrelation.Detfinnstotalt24= 16olikab o oleskafunktionermed2variabler.PartitionenavmängdenAärA={0, xy,xy,y} ∪ {xy, x, xy+xy, x+y} ∪ {xy, xy+xy,x,x+y} ∪ {y, x+y,x+y,1},vilketkanvisasgenomattt.ex.tabuleraalla16funktionero chundersökavilkasomharsammafunktionsvärdendåy= 1

LåtB={6,7,8,9} × {10,11}o chde⊠nieraenrelationR1påmängdenBgenomattsätta(x1, x2)R1(y1, y2)omx1+x2≤y1+y2.(a)UndersökomrelationenR1ärenpartialordning.(2p) (b)OmR1ärenpartialordning,b estämomp o-mängden(B,R1)isåfallharnågrastörstao ch/ ellerminstaelement.OmR1inteärenpartialordning,de⊠nieraenrelationpåBsomärenpartialordning.

Relationenärinteantisymmetrisk,o challtsåinteenpartialordning.Enpartialordning⊠påR1gesavordnaelementenenligtföljande:(6,10)⊠ (6,11)⊠(7,10)⊠(7,11)⊠(8,10)⊠(8,11)⊠(9,10)⊠(9,11).(Detfinnsmångaolikalösningar.

LåtB={6,7,8,9} × {10,11}o chde⊠nieraenrelationR2påmängdenBgenomattsätta(x1,x2)R2(y1,y2)omantingenx1> y1ellerx1=y1o chx2≥y2.(a)VisaattR2ärenpartialordning.(1p)(b)RitaHassediagrammetförp o-mängden(B,R2)(1p) (c)Bestämpåhurmångasättp o-mängdenkansorterastop ologiskt.Motivera!

Relationenärreflexiv,antisymmetrisko chtransitivo challtsåenpartialordning. (b)Hassediagrammetserutsomföljer:(9,11)(9,10)(8,11)(8,10)(7,11)(7,10)(6,11)(6,10) (c)Po-mängdenkanbarasorterastop ologisktpåettsätt,eftersomdetärentotalordning

Låt R vara en relation på $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ som ges av $R = \{(1, 2), (3, 4), (2, 3)\}$. Vad är det minsta antalet ordnade par som måste läggas till R för att få en

a) reflexiv relation?

b) symmetrisk relation?

c) antisymmetrisk relation?

d) transitiv relation?

e) ekvivalensrelation?

f) Vilken partion skapas av relation i uppgift e)?

a) Lösning: $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$ så 5

b) Lösning: $(2, 1), (4, 3), (3, 2)$ så 3

c) Lösning: 0 ty den är antisymmetrisk

d) Lösning: Vi måste lägga till $(1,3), (2,4), (1,4)$, så det minsta antalet är 3.

e) Lösning: 14 (rita ett diagram)

f) Lösning: $\{1,2,3,4,5\} = [1] \cup [5] = \{1,2,3,4\} \cup \{5\}$

LåtX={7,8,9, . . . ,19}.(a)VisaattdelbarhetsrelationenpåXärenpartialordningo chritahassediagrammetförp o-mängden(X,|).(2p)(b)Vilkamaximalao chminimalaelementharp o-mängden(X,|)?

Relationenärreflexiv,antisymmetrisko chtransitivo challtsåenpartialordning.Hassediagrammetserutpåföljandesätt:78910111213151719141618(b)Allaelementutom14,16,18 challaelementutom7,8,9ärmaximala

LåtJvaramängdenavallaheltalsomärdelbaramed5.DefinieraenrelationR1påJgenomattsättaxR1yom10|(x+y).VisaattR1ärenekvivalensrelationpåJo chb estämallaekvivalensklassersomJgerupphovtill

Relationenärreflexiv,symmetrisko chtransitivo challtsåenekvivalensrelation.Omxärdelbartmed5sågällerantingenx≡0mod10ellerx≡5mod10.Alltsåblirmotsvarandepart ={x∈J:x≡0mod10}och[5] ={x∈J:x≡0mod10}.

Från bokstäverna i ordet KÖRSBÄRSTRÄD kan olika ”ord” (d.v.s. följder av bokstäver) bildas genom att välja ut ett godtyckligt antal av dessa bokstäver och sätta samman dem till en följd. Låt A vara mängden av alla ord som kan bildas på detta sätt. Definiera en relation R på A genom att låta xRy om x och y innehåller lika många bokstäver. (Således gäller t.ex. att RÖD och BÄR står i relation till varandra under R, medan RÖD och RÖ inte gör det.) Visa att R är en ekvivalensrelation, bestäm antalet ekvivalensklasser samt antalet element i ekvivalensklassen [BRÖD].

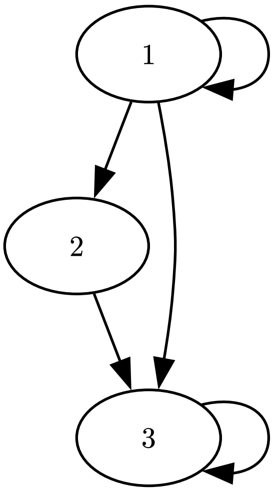
Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation. Antalet ekvivalensklasser är 12, och $\left|[\text{BRÖD}]\right| = \binom{8}{4}4! + \binom{7}{2}\binom{3}{1}\frac{4!}{2!} + \binom{3}{2}\frac{4!}{2!2!} + \binom{7}{1}\frac{4!}{3!}$, ty ett ord med 4 bokstäver kan bestå av 4 olika bokstäver, precis en dublett, exakt två dubletter, eller 3st R och en ytterligare bokstav.

LåtBvara mängden av alla olika följder av längd högst8som består av fyror och nior, ochdär alla fyror kommer före alla nior. (Till exempel gäller att44999∈B,44∈Boch9999∈B,medan44994/∈B.) En relationR2påBdefinieras genom att sättaxR2yom antingen•följdenyinnehåller fler fyror änx, eller•xochyinnehåller lika många fyror ochyinnehåller minst lika många element somx.Avgör omR2en partialordning. ÄrR2en totalordning?

Relationenärreexiv,antisymmetrisko chtransitivo challtsåenpartialordning.Eftersomdetförvarjeparavelementgällerattdestårirelationtillvarandra,såärrelationenävenento

Låt $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,3)\}$ vara en relation på $\{1,2,3\}$. Rita relationsgrafen för R och avgör om R är transitiv

Grafen har hörnmängden $\{1,2,3\}$ och elementen i R som riktade kanter. R är transitiv



Definiera en relation R på de naturliga talen $\mathbb{N}$ genom att sätta xRy om $x^2 - y^2 \equiv 0 \bmod 5$. Visa att R är en ekvivalensrelation och bestäm den partition av $\mathbb{N}$ som R ger upphov till.

Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation. Ekvivalensklasserna är $[0] = \{0, 5, 10, ...\}, [1] = [4] = \{1, 6, 11, ...\} \cup \{4, 9, 14, ...\}$, och $[2] = [3] = \{2, 7, 12, ...\} \cup \{3, 8, 13, ...\}$, som alltså utgör en partition av $\mathbb{N}$

LåtA={x∈N:x= 10k,k∈N}o chB={x∈N: 0≤x≤9}.BetraktamängdenA×B,o chde⊠nieraenrelationR3påA×Bgenomattsätta(a,b)R3(c,d)oma+b≤c+d.VisaattR3ärenpartialordningo chavgöromp o-mängden(A×B,R3)harnågot/någrastörstaellerminstaelement

Relationenärreexiv,antisymmetrisko chtransitivo challtsåenpartialordning. (Detärävenentotalordning,eftersomdeordnadeparenkan⊠identi⊠eras⊠somicke-negativaheltalsomordnasenligtrelationen≤.)Största(o chmaximala)elementsaknas.Minstaelementär(0,0)

Låt X vara mängden av alla positiva delare till 4500. Definiera en relation R på X genom att sätta xRy om x och y har lika många primtalsfaktorer. (T.ex. gäller att $4R6$ och $2R3$, men $2\not R4$.) Visa att R är en ekvivalensrelation och ange alla skilda ekvivalensklasser och antalet element i varje sådan klass.

Relationen är uppenbar treflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation. Primtalsfaktoriseringen av 4500 är $4500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Ekvivalensklasserna är alltså $[1], [2], [4], [12], [36], [180], [900], [4500]$, och $|[1]| = 1, |[2]| = 3, |[4]| = 6, |[12]| = 8, |[36]| = 8, |[180]| = 6, |[900]| = 3, |[4500]| = 1$.

Låt A vara mängden av "ord" (d.v.s följder av bokstäver) med minst sex (ej nödvändigtvis olika) bokstäver som kan bildas av bokstäverna i ordet BADSTRAND. Definiera en relation R på A genom xRy om orden x och y antingen båda innehåller följden SANDAT, eller varken x eller y innehåller följden SANDAT. Är R en ekvivalensrelation? Bestäm även kardinaliteten hos mängden $\{x \in A : xR \text{ DANSAR}\}$

Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, och alltså en ekvivalensrelation. Notera att ekvivalensrelationen ger upphov till endast två ekvivalensklasser: de element som innehåller följden

SANDAT, och de som inte innehåller denna följd. Vi ska bestämma antalet element i den senare ekvivalensklassen. Antalet element som innehåller följden SANDAT är $1 + \binom{3}{1} \cdot 2 + \binom{3}{2} \cdot 3! + 4!$, eftersom en sådan följd innehåller 6, 7, 8 eller 9 bokstäver och i denna skall "ordet" SANDAT ingå (och denna följd kan därmed betraktas som en bokstav). Låt oss nu bestämma $|A|$. Antalet "ord" med sex bokstäver är $\binom{7}{6}6! + 2\binom{6}{4}6!2! + \binom{5}{2}6!2!2!$, eftersom en sådan följd kan innehålla sex olika bokstäver, 2 A eller D och 4 andra olika bokstäver, eller precis 2 A, 2 D och två andra bokstäver. På samma sätt fås att antalet följder med 7 bokstäver är $7! + 2\binom{6}{5}7!2! + \binom{5}{3}7!2!2!$, antalet följder med 8 bokstäver är $28!2! + \binom{5}{4}8!2!2!$, och antalet med nio bokstäver är precis $9!2!2!$. Kardinaliteten hos mängden $\{x \in A : xR\ \mathrm{DANSAR}\}$ är alltså $9!2!2! + 28!2! + \binom{5}{4}8!2!2! + 7! + 2\binom{6}{5}7!2! + \binom{5}{3}7!2!2! + \binom{7}{6}6! + 2\binom{6}{4}6!2! + \binom{5}{2}6!2!2! - \left(1 + \binom{3}{1} \cdot 2 + \binom{3}{2} \cdot 3! + 4!\right)$

LåtXvara mängden av alla positiva delare till talet70. En partialordning≤påXges av attdefinierax≤yomx|y.(a) Rita hassediagrammet för po-mängden(X,≤).(1p)(b) Sortera po-mängden(X,≤)topologiskt.(1p)(c) Är(X,≤)ett lattice?

(a)125710143570(b) Ett sätt att topologiskt sortera elementen är1,2,5,7,10,14,35,70och definiera totalord-ningenRgenom att sättaxRyomxkommer föreyi denna lista.(c) Ja!

Låta= 23·33·72och låtBvara mängden av alla positiva delare tilla. Definiera en relationR1påBgenom att sättaxR1yom taletxhar samma antal primtalsfaktorer i sin primtals-faktorisering somy. (Till exempel gäller alltså att2R13och6R19, eftersom6 = 2·3och9 = 3·3.) Visa attR1är en ekvivalensrelation, samt ange alla skilda ekvivalensklasser ochantalet element i varje ekvivalensklass.(3p)VAR GOD VÄND!

Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, och alltså en ekvivalensrelation.De skilda ekvivalensklasserna är[1],[2],[2·3],[23],[23·3],[23·32],[23·33],[23·33·7]och[23·33·72].Vidare gäller att|[1]|= 1,|[2]|= 3,|[22]|= 6och|[23]|= 2 + 3·2 + 1 = 9, eftersom omexponenterna ska summera till 3, så finns3möjligheter:x3, x2y1ochxyz.På samma sätt fås att|[23·3]|= 2·2 + 3 + 3 = 10,|[23·32]|= 2·2 + 2 + 3 = 9,|[23·33]|=1 + 4 + 1 = 6,|[23·33·7]|= 1 + 2 = 3och|[23·33·72]|= 1

LåtA={4,5,6} × {7,8,9}och definiera en partialordningR2påAgenom att sätta(x1, x2)R2(y1, y2)omx1≤y1ochx2≤y2. Rita hassediagrammet för po-mängden(A,R2).(2p)(b) Ge ett exempel på en partialordning≤på en oändlig mängd som inte är en totalordning.(1p

elationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och alltså en partialordning.Hassediagrammet ser ut på följande sätt: (4.7)(4.8)(5.7)(6.7)(4.9)(5.8)(5.9)(6.8)(6.9)(b) Till exempel(Z+,|).

Från bokstäverna i ordet VINTERVILARNA kan olika ord (d.v.s. följder av bokstäver) bildasgenom att välja ut ett godtyckligt antal av dessa bokstäver och sätta samman dem till en följd.LåtQvara mängden av alla ord med exakt6bokstäver som kan bildas på detta sätt. Definieraen relationRpåQgenom att sättaxRyomxinnehåller lika många A och lika mångaI somy. (Således gäller t.ex. att TRAVAR och VARNAR står i relation till varandra underR, medan VINTER och RITARE inte gör det.) Visa attRär en ekvivalensrelation, bestämantalet ekvivalensklasser samt bestäm antalet element i ekvivalensklassen [TRANAN

Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, och alltså en ekvivalensrelation.Ett ord iQkan innehålla högst 2 stA, och högst 2 stI, så vi får totalt3·3 = 9ekvivalensklasser.Ordet TRANAN innehåller 2 st A och inga I. De bokstäver som vi kan använda för attkonstruera ord som tillhör ekvivalensklassen [TRANAN] är 2 st V, 2 st N, 1 st T, 1 st E, 2 stR, och 1 st L, förutom de 2 st A som ska ingå.Antalet ord i [TRANAN] som innehåller exakt 3 olika bokstäver är32⊠6!2!2!2!, antalet ord medexakt 4 olika bokstäver är31⊠52⊠6!2!2!, och antalet med5olika bokstäver är64⊠6!2!. Antaletelement i ekvivalensklassen [TRANAN] är alltså⊠32⊠6!2!2!2!+⊠31⊠⊠52⊠6!2!2!+⊠64⊠6!2!

Låt $E = \{1, 2, ..., 20\}$ och definiera relationen $R2$ på E genom att för $x, y \in E$ sätta $xR2y$ om $x - y$ är ett icke-negativt heltal som är delbart med 3. Visa att $R2$ är en partialordning och rita dess Hassediagram

Relationen $R2$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och därmed en partialordning. $R2$ är reflexiv eftersom $x - x = 0$ för alla $x \in E$. $R2$ är antisymmetrisk, ty om $xR2y$ och $yR2x$ så gäller att $x - y = 3k1$ och $y - x = 3k2$ där $k1, k2 \in N$. Alltså gäller att $k1 = k2 = 0$ och $x = y$. Vi visar nu att $R2$ är transitiv. Antag att $xR2y$ och $yR2z$. Då gäller att $x - y = 3k1$ och $y - z = 3k2$, där $k1, k2 \in N$. Genom att addera dessa ekvationer fås att $x - z = 3(k1 + k2)$, och således $xR2z$. Hassedigrammet ser ut som följer:2017141118521916131074118151 2963