1. Bestäm hur många stigar av längd 3 som den kompletta bipartita grafen $K_{7,8}$ innehåller

2. Bestäm för vilka värden på a och b som den kompletta bipartita grafen $K_{a,b}$ innehåller en Hamiltoncykel.

3. Hur många icke-isomorfa träd med 5 hörn finns det?

4. Tilldela varje kant i den kompletta grafen K_7 med 7 hörnen vikt från mängden $\{1, 2, ..., 50\}$. Låt A vara mängden av alla viktade grafer som kan bildas på detta sätt. Som bekant har varje viktad graf i A ett billigaste uppspännande träd. Låt B vara mängden av alla olika billigaste uppspännande träd som kan bildas från en viktad graf i mängden A. Vi definierar en relation R på mängden B genom att sätta T_1RT_2 om T_1 och T_2 har samma kostnad, där T_1 och T_2 är två viktade uppspännande träd. Visa att R är en ekvivalensrelation och bestäm antalet olika ekvivalensklasser. Motivera noggrant!

5. Finns det någon graf (utan multipla kanter och loopar) med gradtalen $7, 7, 5, 5, 3, 3, 2, 2$? Varför/varför inte?

6. Betrakta en cykel C_6 med hörnmängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Låt G vara komplementet till C_6. Från G bildar vi en viktad graf genom att tilldela varje kant ij vikten $2(i + j)$. Bestäm ett minimalt uppspännande träd i denna viktade graf. Avgör även om G innehåller en Hamiltoncykel.

7. Låt K_7 vara en komplett graf med hörnmängd $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

   a) Avgör hur många olika stigar av längd 3 som K_7 innehåller.

   b) Från K_7 bildar vi en viktad graf genom att för varje kant ij, där $i < j$, tilldela kanten vikten $\frac{i+j}{\mathrm{sgd}(i,j)}$. Bestäm ett minimalt uppspännande träd i den viktade grafen.

8. Hur många delgrafer som är slutna Eulervägar har den kompletta bipartita grafen $K_{2,4}$,

9. Låt K_5 vara den kompletta grafen med 5 hörn. Hur många olika icke-isomorfa uppspännande träd innehåller K_5?

10. Låt $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och låt β vara mängden av alla delmängder till B med kardinalitet 2. Definiera en graf G med hörnmängd β där två hörn $B_1, B_2 \in \beta$ är grannar om och endast om $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Avgör hur lång den kortaste cykeln i G är

11. Är alla grafer med hörnmängd $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, som innehåller precis två cykler av längd 3, isomorfa?

12. Låt $A = \{1, 2\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ och definiera en graf G med hörnmängd A genom att låta hörnen (x, y) och (w, z) vara grannar om $x \neq w$, eller om $x = w$ och $y + z \leq 5$. Avgör hur lång den längsta cykeln i G är och bestäm även kromatiska polynomet för G

13. Är det sant att varje graf som har en Hamiltoncykel är planär?

14. a) Hur många olika cykler av längd 4 innehåller den kompletta grafen K_n $(n \in \mathbb{N})$?

    b) Bestäm det kromatiska talet $\chi(K_n)$.

    c) Visa att det kromatiska polynomet för en komplett graf K_n är $P(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)...(\lambda - n + 1)$.

15. Är varje graf med högst 4 hörn planär? Motivera ditt svar!

16. Låt G vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ där två hörn i och j, där $i > j$, är grannar om $\left\lfloor \frac{i}{j} \right\rfloor$ är ett udda tal. Tilldela kanten ij i G vikten $i + j$.

    a) Bestäm ett billigaste uppspännande träd i grafen G.

    b) Låt C vara mängden av alla olika viktade uppspännande träd som den viktade grafen G innehåller. Vi definierar en relation R på mängden C genom att sätta $T_1 \ R \ T_2$ om T_1 inte har högre kostnad än T_2, där T_1 och T_2 är två viktade uppspännande träd. Är R_3 en partialordning? Motivera noggrant!

17. Låt G vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$ och låt hörnen i och j vara förbundna med en kant om $i - j$ eller $j - i$ är ett udda tal, för alla $i, j \in V$ sådana att $i \neq j$.

    a) Avgör om G har en hamiltoncykel och/eller eulerväg.

    b) Bestäm kromatiska talet för G