Grafer

1. Är det sant att varje graf som har en Hamiltoncykel är planär?

2. Är varje graf med högst 4 hörn planär? Motivera ditt svar!

3. Låt K_5 vara den kompletta grafen med 5 hörn. Bestäm även det kromatiska polynomet för grafen som erhålls från K_5 genom att underdela precis en kant i K_5

4. Visa att kromatiska polynomet för ett träd T med n hörn är $P(T, \delta) = \delta(\delta - 1)^{n-1}$

5. Låt G vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ och där två hörn i och j är grannar om
   - $1 \leq i \leq 4$ och $1 \leq j \leq 4$,
   - $5 \leq i \leq 8$ och $5 \leq j \leq 8$, eller
   - $9 \leq i \leq 12$ och $9 \leq j \leq 12$;

   G innehåller dessutom kanter mellan hörnen 4 och 5, 5 och 9, samt 4 och 9. Avgör om G är planär. Bestäm även kromatiska polynomet för G

6. Låt $A = \{1, 2\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ och definiera en graf G med hörnmängd A genom att låta hörnen (x, y) och (w, z) vara grannar om $x \neq w$, eller om $x = w$ och $y + z \leq 5$. Bestäm det kromatiska polynomet för G

7. Låt G vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$ och låt hörnen i och j vara förbundna med en kant om $i - j$ eller $j - i$ är ett udda tal, för alla $i, j \in V$ sådana att $i \neq j$. Bestäm kromatiska talet för G

8. Är det sant att varje sammanhängande planär graf innhåller en hamiltoncykel? Bevis eller motexempel

Po-mängder

1. Låt $X = \{7, 8, 9, ..., 19\}$.

   a) Visa att delbarhetsrelationen på X är en partialordning och rita hassediagrammet för po-mängden $(X, |)$.

   b) Vilka maximala och minimala element har po-mängden $(X, |)$?

2. Låt $E = \{21, 22, ..., 40\}$ och definiera relationen R på E genom att för $x, y \in E$ sätta xRy om $x - y$ är ett icke-negativt heltal som är delbart med 3. Visa att R är en partialordning och rita dess Hassediagram.

3. Låt $B = \{6, 7, 8, 9\} \times \{10, 11\}$ och definiera en relation R på mängden B genom att sätta $(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ om $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

   a) Undersök om relationen R är en partialordning.

   b) Om R är en partialordning, bestäm om po-mängden (B, R) i så fall har några största och/eller minsta element. Om R inte är en partialordning, definiera en relation på B som är en partialordning.

4. Låt $B = \{6, 7, 8, 9\} \times \{10, 11\}$ och definiera en relation R på mängden B genom att sätta $(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ om antingen $x_1 > y_1$ eller $x_1 = y_1$ och $x_2 \geq y_2$.

   a) Visa att R är en partialordning.

   b) Rita Hassediagrammet för po-mängden (B, R)

   c) Bestäm på hur många sätt po-mängden kan sorteras topologiskt. Motivera!