Punto 4

Muestre con detalle que la sustitución hacia adelante se expresa como:

$$x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j$$

Se plantea el sistema de ecuaciones de la forma: Ax = B.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \cdots & + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

La idea es dejar expresado el SEL de la siguiente forma en una triangular superior:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{13} \\ \vdots & a'_{22} & \vdots \\ 0 & \cdots & a''_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix}$$

Para esto: Se elimina x_i (i a partir de 1) de la siguiente manera:

Se multiplica la ecuación anterior por a_{ji}/a_{ii} (j a partir de i+1):

$$a_{ji}x_i + \left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right) a_{ij}x_j + \left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right) a_{ij+1}x_{j+1} \ldots = \left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right) b_i$$

Y así sucesivamente para cada ecuación hasta n.

$$x_i = \frac{\left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right) b_i - \left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right) a_{ij}x_j - \left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right) a_{ij+1}x_{j+1} \ldots}{a_{ji}}$$

$$x_i = \frac{\left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right)\left[b_i - (a_{ij}x_j + a_{ij+1}x_{j+1} \ldots)\right]}{a_{ji}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

Finalmente:

$$x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij}x_j$$