1. Hacer pasos intermedios para regla de trapecio simple.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_1(x)dx = \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

$$p_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

Entonces:

$$I = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}f(a)dx + \int_a^b \frac{x-a}{b-a}f(b)dx$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b x-bdx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b x-adx$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\left[\left(\frac{x^2}{2}-bx\right)\Big|_a^b\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)\Big|_a^b\right]$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\left[\left(\frac{b^2}{2}-b^2\right)-\left(\frac{a^2}{2}-ab\right)\right] + \frac{f(b)}{b-a}\left[\left(\frac{b^2}{2}-ab\right)-\left(\frac{a^2}{2}-b^2\right)\right]$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\left(-\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}+ab\right) + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}-ab\right)$$

$$= -\frac{f(a)}{a-b}\left(\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}-ab\right) + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}-ab\right)$$

$$= \left(\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}-ab\right)\left(\frac{f(b)}{b-a}-\frac{f(a)}{a-b}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(b^2-2ab+a^2)\left(\frac{f(b)(a-b)-f(a)(b-a)}{(b-a)(a-b)}\right)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{f(b)(a-b)-f(a)(b-a)}{(b-a)(a-b)}\right)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{f(b)(a-b)+f(a)(a-b)}{(b-a)(a-b)}\right)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{f(b)+f(a)}{(b-a)}\right)$$

$$= \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))$$