Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Demuestre las siguientes propiedades básicas de esta medida usando los axiomas de Kolmogorov y diagramas de Venn:

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(b) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(f) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Axiomas de Kolmogorov:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A \in \mathfrak{F}, \mathbb{P}(A) \geq 0$
- $\mathbb{P}(\cup_i^\infty A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i), si\ A_i \cap\ A_j = \emptyset\ \forall i \neq j$

(a)

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\Omega^c)$$

Teniendo en cuenta la propiedad b basada en el primer axioma, se llega a lo siguiente:

$$\mathbb{P}(\Omega^c) = 1 - \mathbb{P}(\Omega)$$

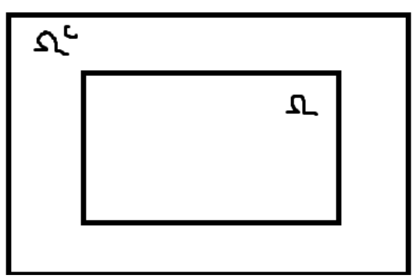
Asimismo, teniendo en cuenta el mismo axioma:

$$\mathbb{P}(\Omega^c) = 1 - 1 = 0$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\Omega^c) = 0$$

Diagrama de Venn, como se puede observar, Ω^c contiene 0 elementos y es incompatible con Ω, por lo que se puede deducir que $\mathbb{P}(\Omega^c) = 0$.



(b)

$$\Omega = \mathrm{A} \cup A^c = 1$$

Como A y A^c son incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$, entonces:

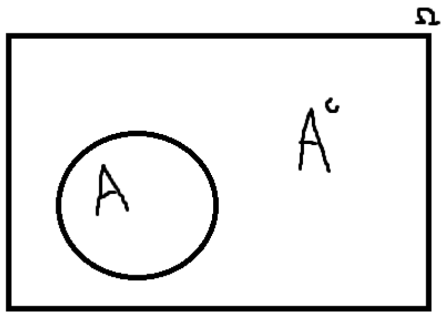
$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$$

Entonces:

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$$

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Diagrama de Venn, en el cual se puede observar que básicamente, la suma de A y A^c es igual a Ω, lo mismo que decir que es igual a 1.



(f)

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(B - A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \cancel{\mathbb{P}(A \cap B)} + \cancel{\mathbb{P}(A \cap B)}$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Diagrama de Venn, como podemos ver, A y B en este caso son compatibles, por lo que como se puede observar, es necesario restar la intersección del evento de probabilidad, puesto que sería casos repetidos que no deben ser tomados en cuenta.