مقدمه

سیستمی که قرار است در این پروژه مورد بررسی قرار بگیرد، سیستم گوی و میله است. این سیستم یکی از سیستم های کلاسیک در تئوری کنترل است. در این پروژه قصد داریم در ابتدا سیستم را به صورت ریاضی مدل سازی کرده و سپس با تحلیل صفر و قطب های آن رفتار سیستم را بررسی می کنیم. در مرحله بعد با استفاده از یک معماری مشخص، اقدام به کنترل سیستم می کنیم.

خواسته دوم :

$$\left(\frac{J_b}{r^2}+m\right)\ddot{\rho}+mg\sin\theta-m\rho\dot{\theta}^2=0$$

$$(m\rho^2+J)\ddot{\theta}+2m\rho\dot{\rho}\dot{\theta}+mg\rho\cos\theta=\tau$$

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho\\\dot{\rho}\\\theta\\\dot{\theta}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{\rho}\\[4pt]\dot{x}_2=\ddot{\rho}=-\dfrac{mg\sin(x_3)}{\frac{J_b}{r^2}+m}+\dfrac{mx_1x_4^2}{\frac{J_b}{r^2}+m}\\[4pt]\dot{x}_3=\dot{\theta}=x_4\\[4pt]\dot{x}_4=\ddot{\theta}=-\dfrac{2mx_1x_2x_4}{mx_1^2+J}-\dfrac{mgx_1\cos(x_3)}{mx_1^2+J}+\dfrac{u}{mx_1^2+J}\end{cases}$$

$$u=\tau$$

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho\\\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix}$$

محاسبه نقطه تعادل:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}_1=\dot{\rho}=x_2=0\\\dot{x}_3=\dot{\theta}=x_4=0\end{array}\right\}\longrightarrow\begin{cases}\dot{x}_2=0=-\dfrac{mg\sin(x_3)}{\frac{J_b}{r^2}+m}=0\rightarrow x_3=0\\[4pt]\dot{x}_4=0=\dfrac{u-mgx_1\cos(x_3)}{mx_1^2+J}\longrightarrow u=mgx_1\cos(x_3)=mgx_1\end{cases}$$

شکل بالا معادلات فضای حالت بر حسب معادلات حرکت سیستم ساده هستند و نقطه کار سیستم نیز محاسبه شده است که بیشمار نقطه کار دارد (به ازای هر x_1).

خواسته سوم :

:3.1

محاسبات دستی معادلات حالت سیستم به صورت زیر می باشد:

$$\left(\frac{J_b}{r^2}+m\right)\ddot{\rho}+(mr^2+J_b)\frac{1}{r}\ddot{\theta}-m\rho\dot{\theta}^2=mg\sin(\theta)\longrightarrow$$

$$\underbrace{\left(\frac{J_b}{r^2}+m\right)}_{a}\dot{x}_2+\underbrace{(mr^2+J_b)\frac{1}{r}}_{b}\dot{x}_4\underbrace{-m x_1 x_4^2}_{c}=\underbrace{mg\sin(x_3)}_{d} \quad (1)$$

$$(m\rho^2+J_b+J_w)\ddot{\theta}+(2m\dot{\rho}\rho+bL^2)\dot{\theta}+kL^2\theta+(mr^2+J_b)\frac{1}{r}\ddot{\rho}-mg\rho\cos(\theta)=u(t)L\cos(\theta) \quad (2)$$

$$\rightarrow\underbrace{(m x_1^2+J_b+J_w)}_{e}\dot{x}_4+\underbrace{(2m x_1 x_2+bL^2)x_4}_{f}+\underbrace{kL^2x_3}_{g}+\underbrace{(mr^2+J_b)\frac{1}{r}}_{h}\dot{x}_2\underbrace{-mg x_1\cos(x_3)}_{i}=\underbrace{uL\cos(x_3)}_{j}$$

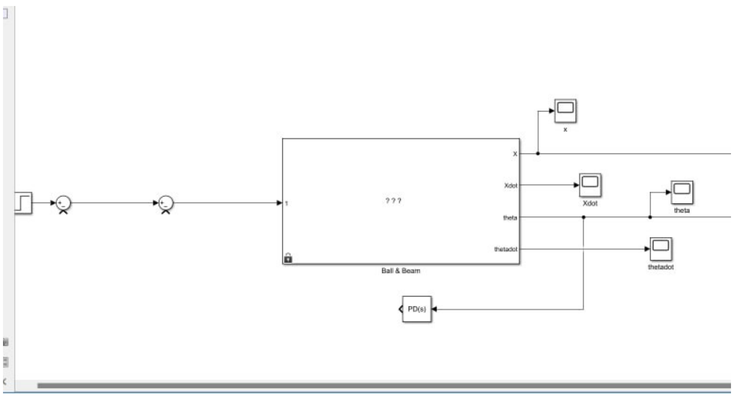
دو عبارت بالا را با فرض $\dot{x}_1=x_2$ و $\dot{x}_3=x_4$ نوشته ایم

پس : (1),(2) :

$$\begin{cases}\dot{x}_2=\dfrac{b(f+g-i-j)+e(c+d)}{ae-bh}\\[2ex]\dot{x}_4=\dfrac{a(f+g-i-j)+e(c+d)}{bh-ae}\end{cases}$$

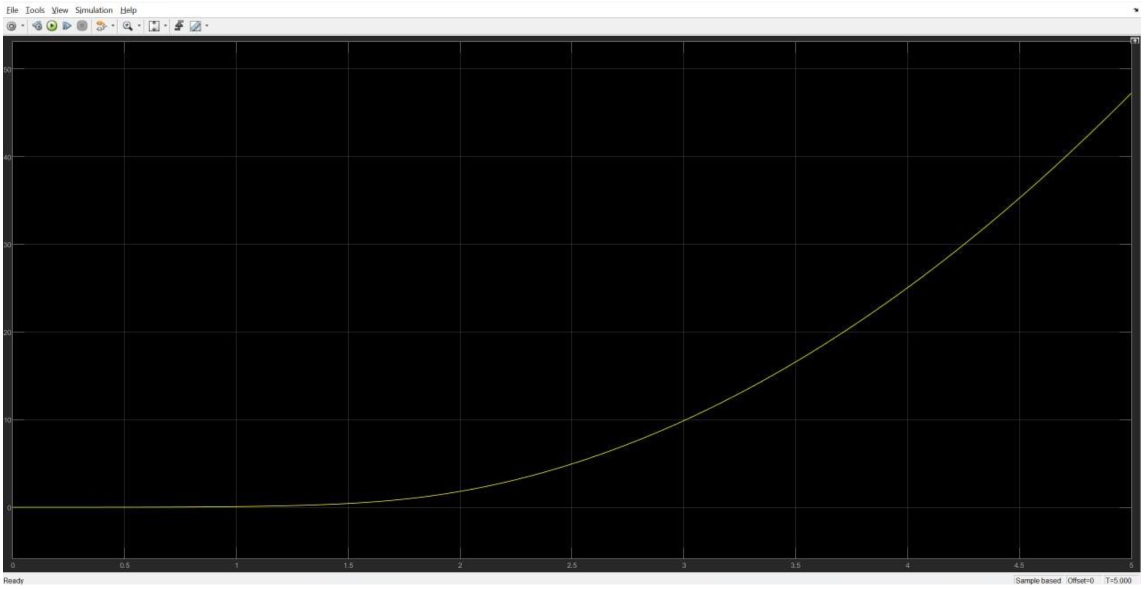
3:2

مدار بسته شده در سیمولینک به صورت زیر می باشد:



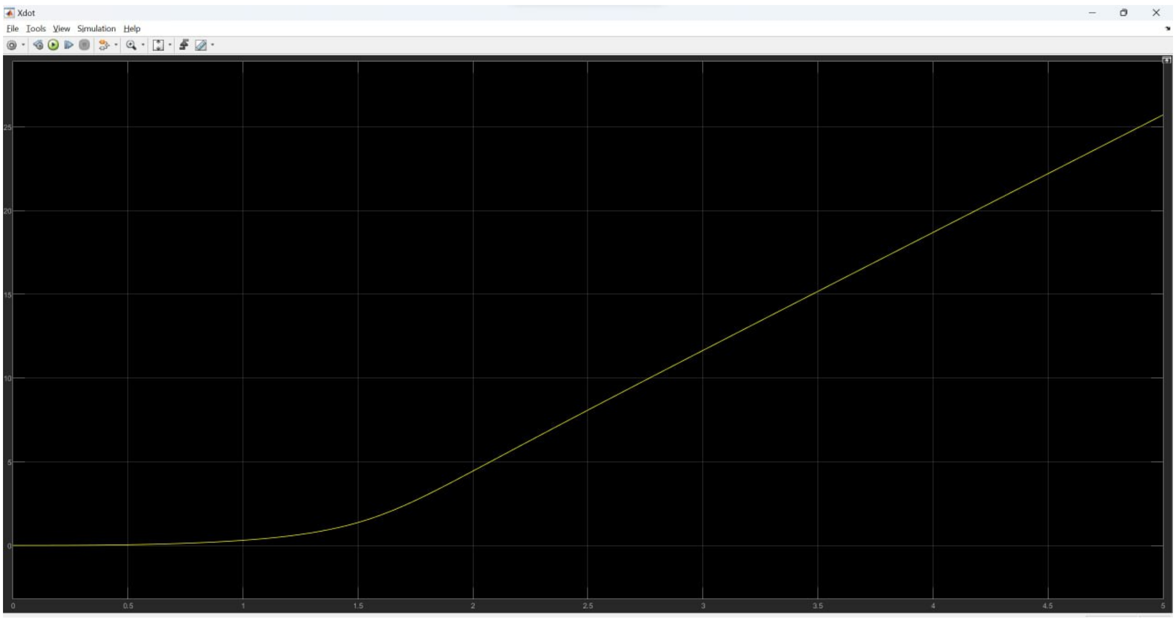
خروجی های متغیر های حالت در سیمولینک مطابق شکل های زیر می باشند:

X$_1$:



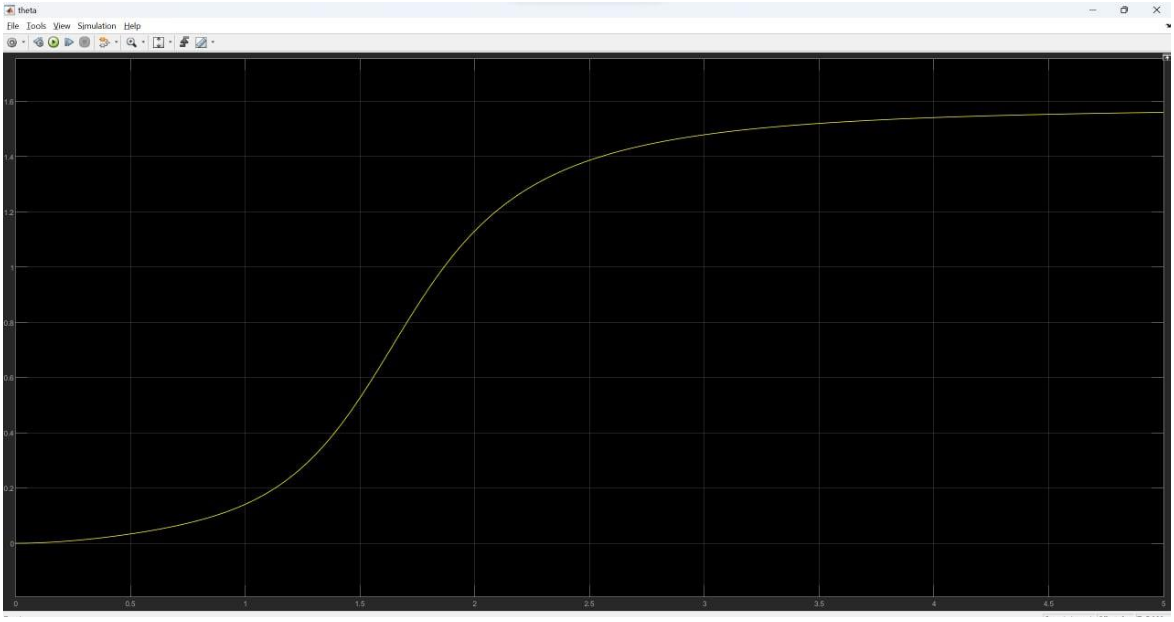
File Tools View Simulation Help
50
40
30
20
10
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Ready
Sample based Offset=0 T=5.000

X$_2$:

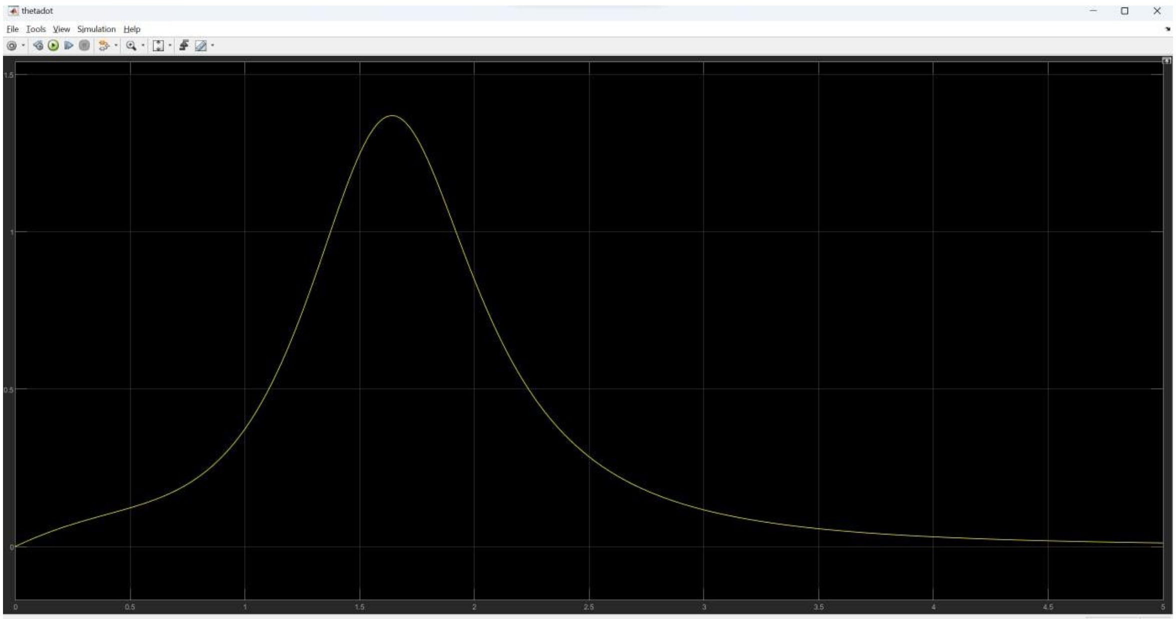


Xdot
File Tools View Simulation Help
25
20
15
10
5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

X$_3$:

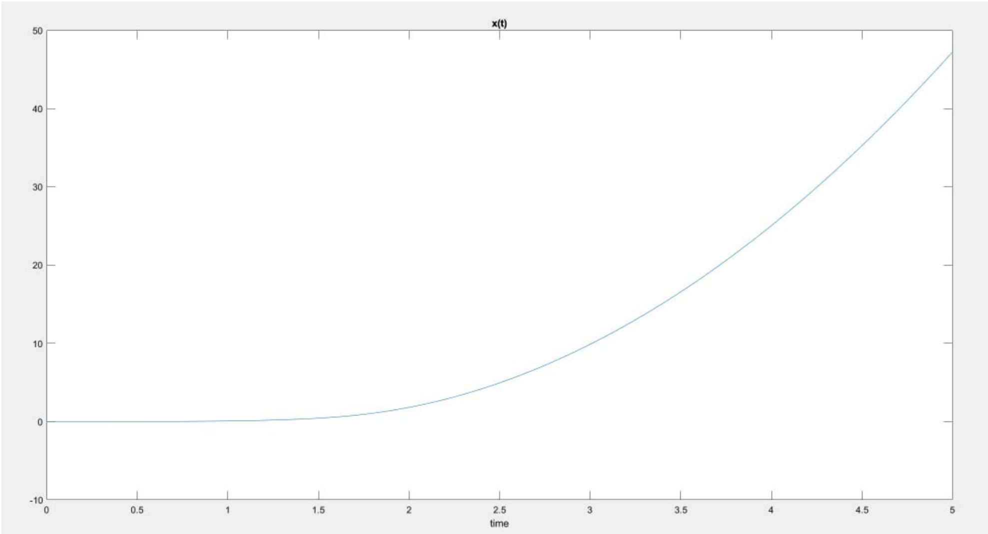


X_4:

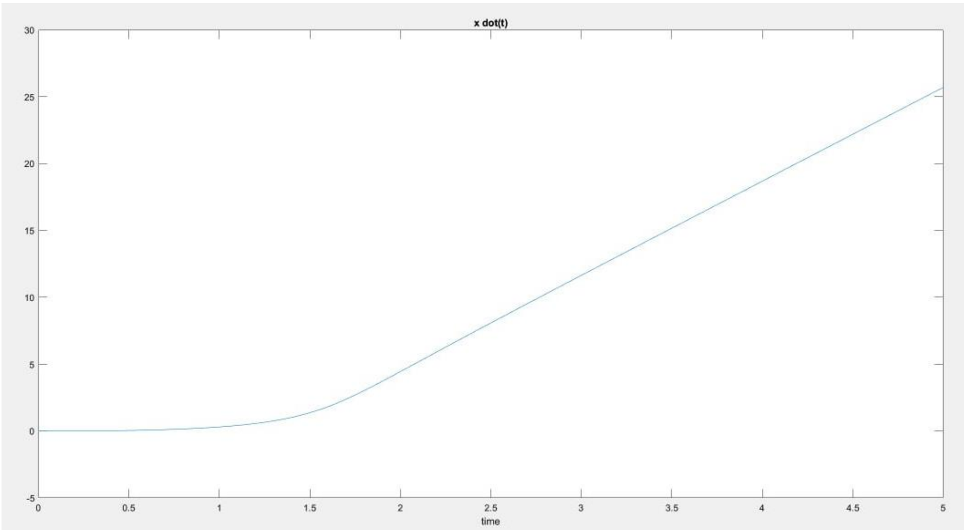


حال معادلات حالت که معادلات دیفرانسیل مرتبه اول هستند را در نرم افزار متلب با کمک دستور ode45 حل کرده و در بازه زمانی 0 تا 5 ثانیه پاسخ متغیر ها به ازای ورودی پله را رسم میکنیم:

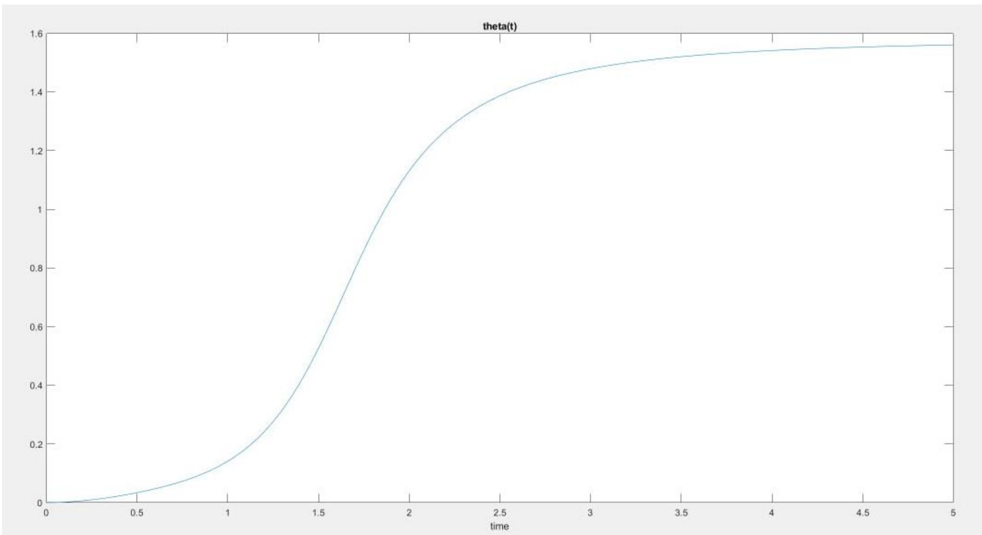
X_1:


x(t)
50
40
30
20
10
0
-10
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
time

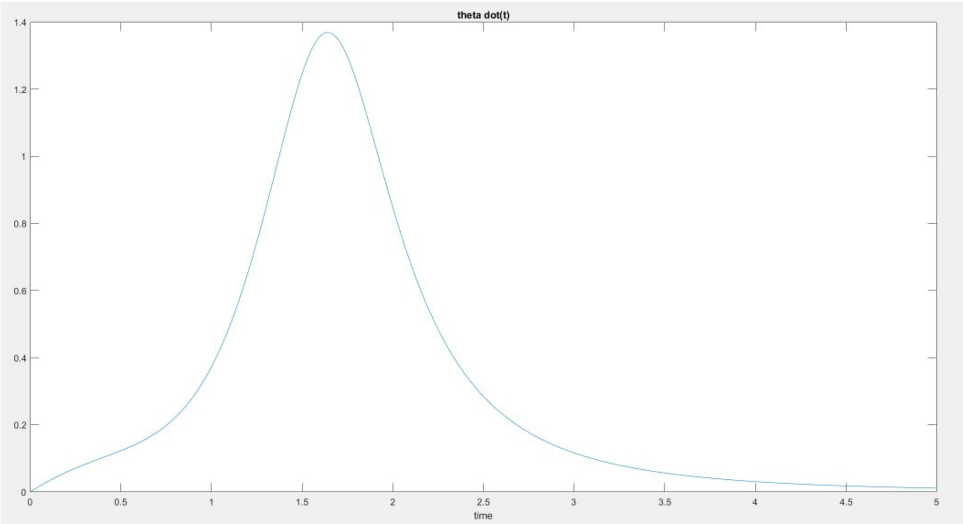
X_2:


x dot(t)
30
25
20
15
10
5
0
-5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
time

X_3:


theta(t)
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
time

X_4:



مشاهده میشود که خروجی های دستگاه معادلات دیفرانسیل کاملا مشابه خروجی های سیمولینک هستند.

خواسته چهارم :

معادلات خطی سازی شده به صورت زیر میباشند:

$$\dot{X} = A(X - X_0) + B(u - u_0)$$

$$Y = C(X - X_0) + D(u - u_0)$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}, B = \frac{\partial f}{\partial u}, C = \frac{\partial g}{\partial x}, D = \frac{\partial g}{\partial u}$$

ماتریس های A و B را به کمک دستور jacobian محاسبه کرده و با دستور subs به ازای نقطه کار داده شده بدست می آوریم. ماتریس های C ,D را به صورت دستی محاسبه میکنیم. (معادلات f و g را در بخش دوم و سوم بدست آورده بودیم.)

ماتریس های محاسبه شده به صورت زیر می باشند:

```
A:
         0    1.0000         0         0
   -0.3780         0    7.0147    0.0343
         0         0         0    1.0000
   18.9001         0   -0.3797   -1.7133

B:
         0
   -0.0699
         0
    3.4965


C =

     1     0     0     0
     0     0     1     0


D =

     0
     0
```

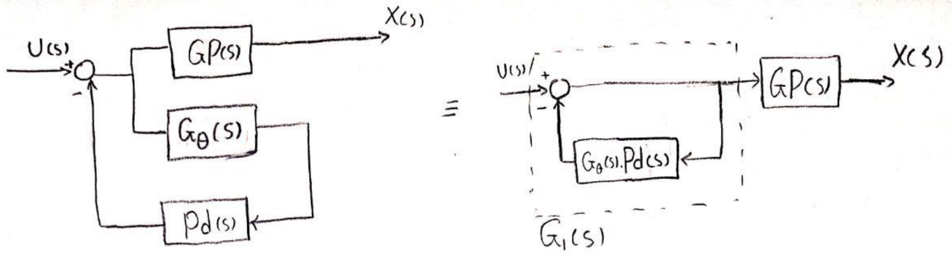
حال با کمک رابطه زیر توابع تبدیل را محاسبه میکنیم(با دستور ss2tf):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(SI - A)^{-1}B + D$$

```
x_s =

          -0.06993 s^2 + 24.5
  ------------------------------------
  s^4 + 1.713 s^3 + 0.7577 s^2 - 132.4

Continuous-time transfer function.


theta_s =

               3.496 s^2
  ------------------------------------
  s^4 + 1.713 s^3 + 0.7577 s^2 - 132.4
```

خواسته پنجم :

به کمک روابط جبر بلوکی و به صورت زیر تابع تبدیل خروجی X(s) به ورودی Y(s) را مینویسیم:



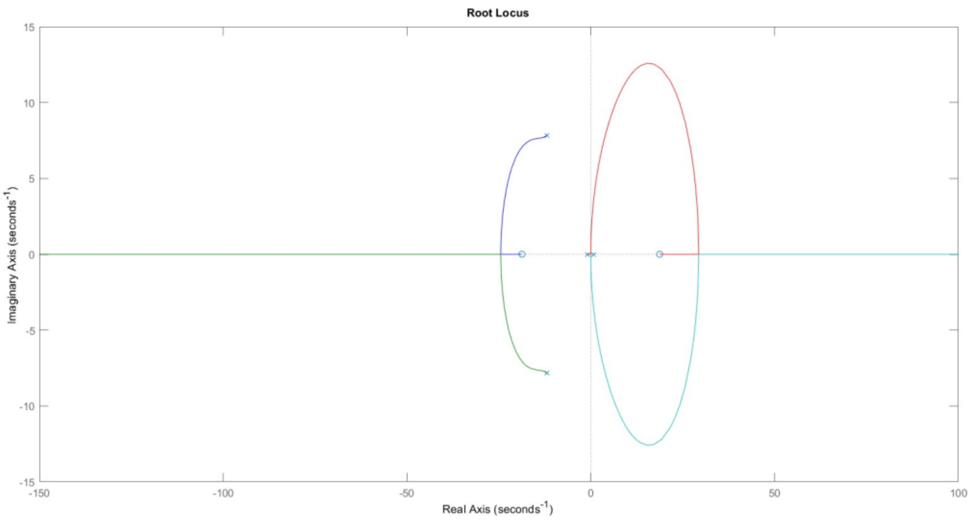
$$G_1(s)=\frac{1}{1+G_\theta(s).Pd(s)} \qquad \frac{X(s)}{U(s)}=G_1(s)\cdot G_p(s)=\frac{G_p(s)}{1+G_\theta(s)\,Pd(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{X(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{-0.06993s^2+24.5}{s^4+1.713s^3+0.75777s^2-132.4}}{1+\dfrac{3.496s^2}{s^4+1.713s^3+0.75777s^2-132.4}\times(58.78+6.39s)}$$

$$=\frac{-0.06993s^2+24.5}{s^4+(1.713+6.39\times3.496)s^3+(0.75777+58.78\times3.496)s^2-132.4}$$

خواسته ششم :

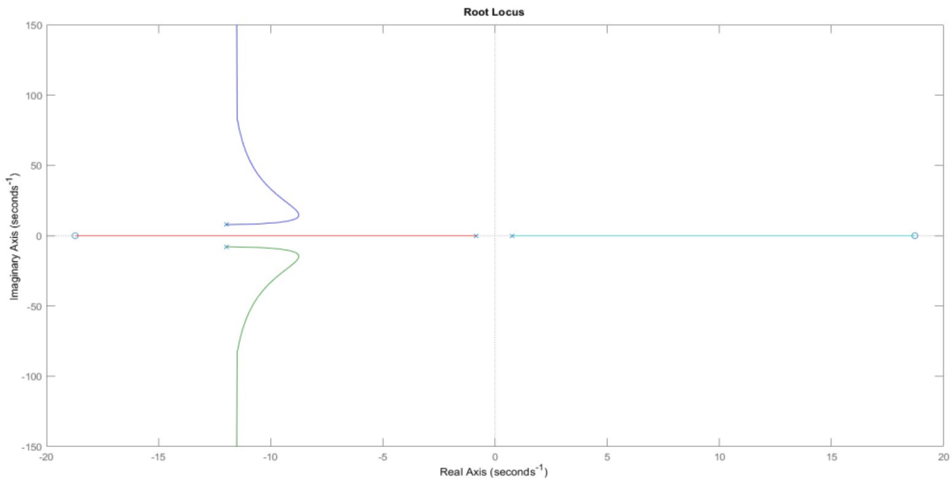
نمودار مکان ریشه سیستم به ازای k>0 به صورت زیر میباشد:



سیستم حلقه بسته دو قطب مزدوج مختلط سمت چپ محورjw دارد که یکی به منفی بینهایت و دیگری به صفر سیستم که سمت چپ محور است میرود پس این دو قطب به ازای همه k ها سمت چپ محور اند و سیستم را ناپایدار نمیکند. سیستم دو قطب حقیقی نیز حول صفر دارد (یکی در 0.76 ,دیگری در

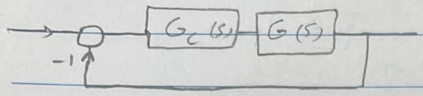
0.84-) که قطب 0.76 با افزایش k روی شاخه آبی حرکت کرده و به مثبت بی نهایت میرود و همواره در سمت راست محور موهومی حداقل یک قطب داریم پس سیستم به ازای هر k ئی ناپایدار است.

به ازای k<0 نیز مکان ریشه به شکل زیر در می آید:



همانطور که از شکل مشخص است یک قطب سیستم همواره سمت راست محور jw قرار میگیرد و سیستم را ناپایدار میکند.

خواسته هفتم :



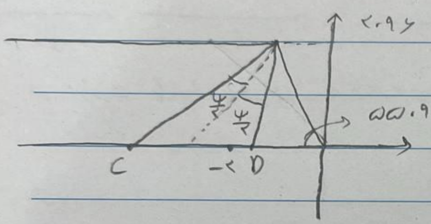
$$G_c(s) = k_c \frac{1+\frac{1}{T}}{1+\frac{1}{\alpha T}}$$

$$t_s^* = 2s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \rightarrow \omega_n = 3.5752$$

$$0.s^* = \frac{12}{100} = exp\left(-\frac{\zeta^* \pi}{\sqrt{1-\zeta^{*2}}}\right) = 0.09 \rightarrow \zeta^* = 0.5594$$

$$\rightarrow s_{1,2}^* = -\zeta \omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2 \pm j2.9634$$

$$\rightarrow \angle G(s_1^*) = -87.57^\circ \rightarrow \varphi = 92.43^\circ$$



با روش نیم ساز:

$$D = -1.0243 = \frac{1}{-T} \rightarrow T = 0.9763$$

$$C = -12.4786$$

$$\alpha = \frac{-1}{TC}$$

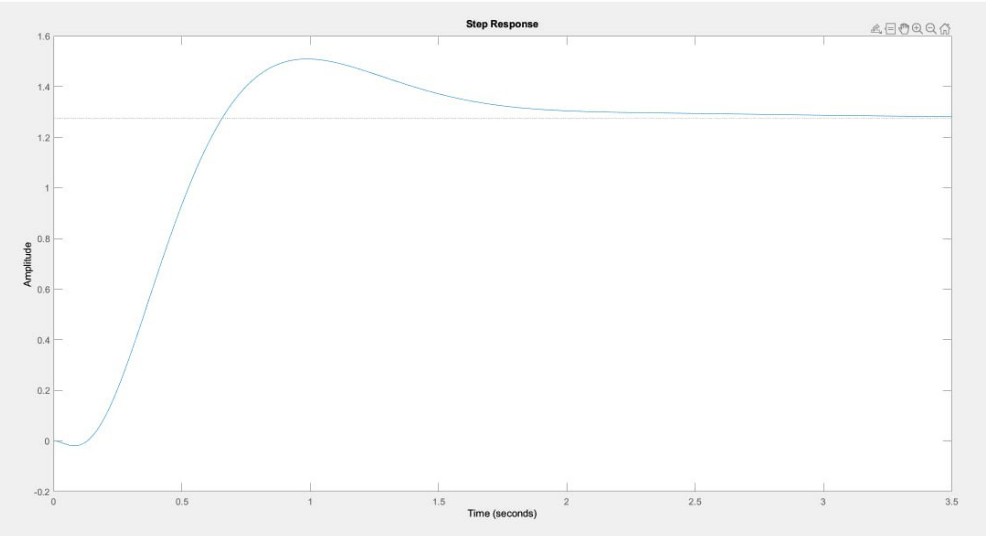
$$\rightarrow \alpha = 0.0821$$

شرط اندازه: $k_c = \frac{1}{|G_c(s_1^*)\ G(s_1^*)|} = 304.4181$

پس: $G_c(s) = k_c \frac{1+\frac{1}{T}}{1+\frac{1}{\alpha T}} = \frac{304.4s + 311.8}{s + 12.48}$

خواسته هشتم :

پاسخ پله سیستم به شکل زیر می باشد:



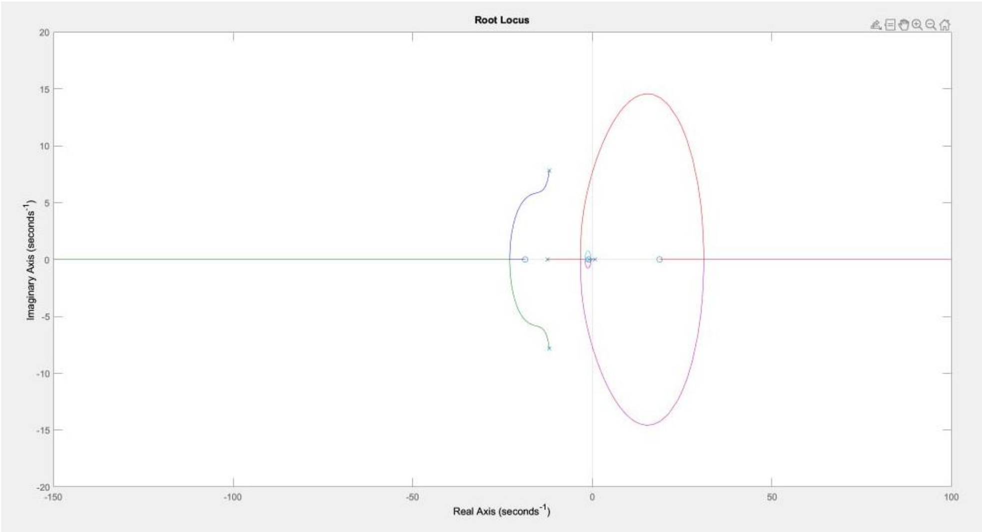
مشخصات حالت گذرا و ماندگار نیز به صورت زیر می باشد:

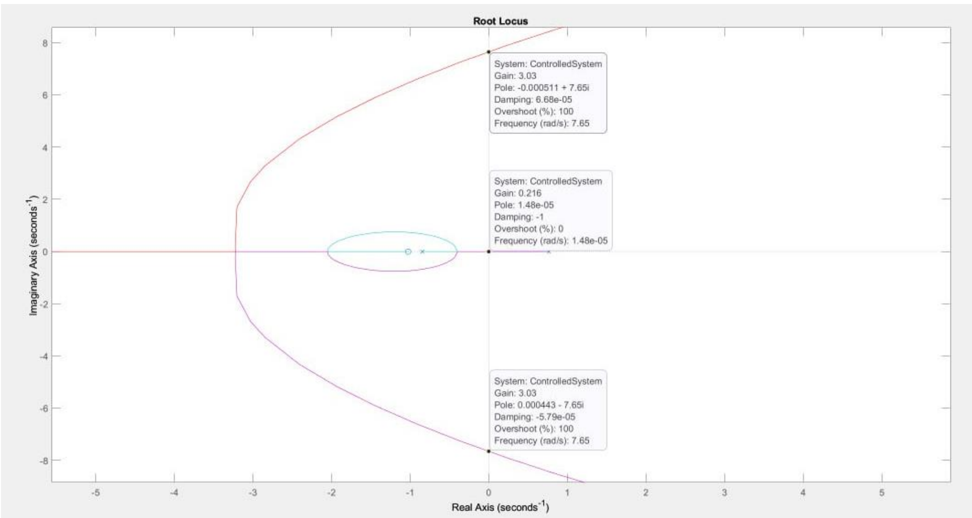
```
Gcontrol =

  304.4 s + 311.8
  ---------------
     s + 12.48

Continuous-time transfer function.


detail3 =

  struct with fields:

        RiseTime: 0.3735
    TransientTime: 2.0647
     SettlingTime: 2.0764
      SettlingMin: 1.1515
      SettlingMax: 1.5092
        Overshoot: 18.2749
       Undershoot: 1.4650
             Peak: 1.5092
         PeakTime: 0.9885
```

همانطور که مشاهده میشود فراجهش 18.27 درصد و زمان نشست 2.07 ثانیه است که خواسته های مورد نظر سوال را برآورده می سازد. خطای حالت ماندگار در این حالت 28 درصد است.

خواسته نهم :

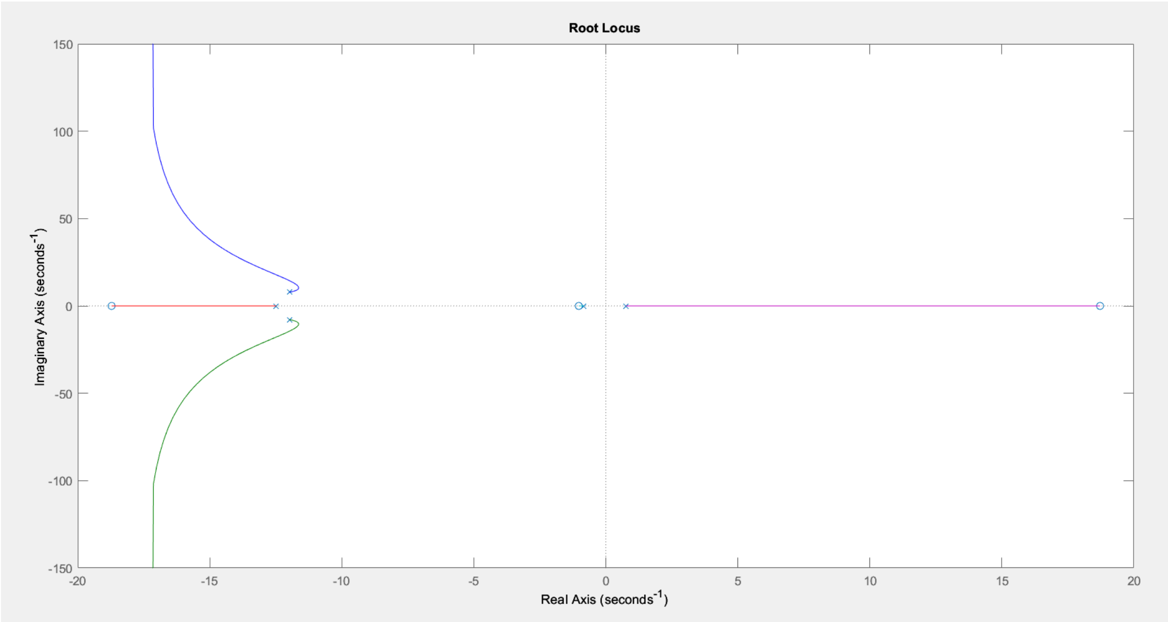
نمودار مکان ریشه به ازای k>0 به شکل زیر میشود:





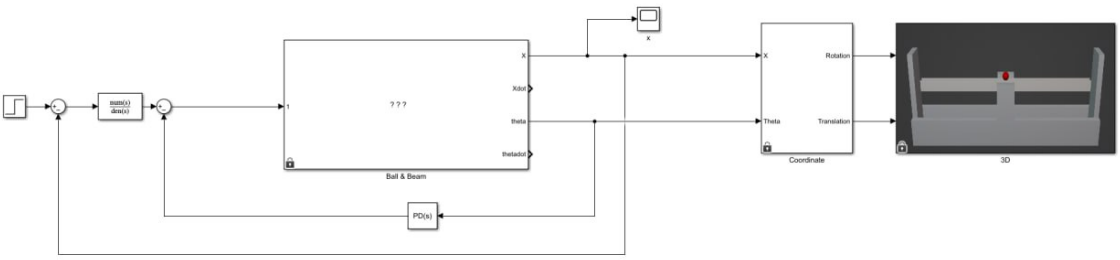
در شکل بالا مشخص است که به ازای 3.03>k>0.216 تمام قطب های سیستم حلقه بسته سمت چپ محور موهومی قرار میگیرند و سیستم پایدار میشود.

نمودار مکان ریشه به ازای k<0 :

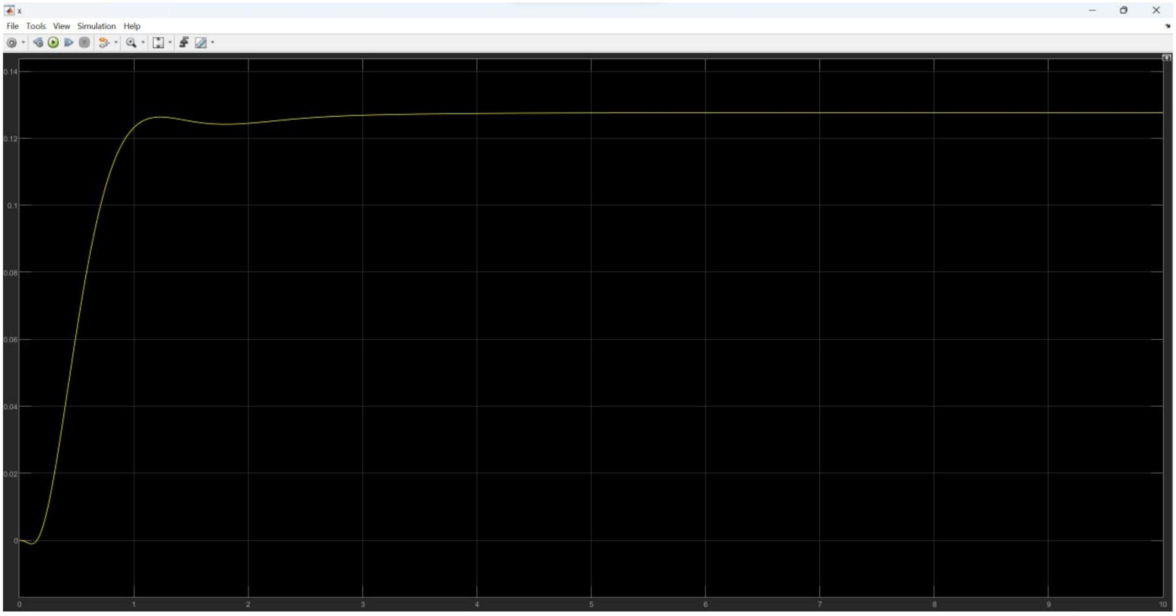


مشاهده میشود به ازای همه k های منفی سیستم قطب سمت راست محور موهومی دارد و ناپایدار است.

خواسته دهم :



مطابق شکل بالا در سیمولینک کنترل کننده را با سیستم غیر خطی مان سری کرده ایم. خروجی سیستم به صورت زیر میباشد:



خطای حالت ماندگار = 27.6 درصد

فراجهش = 0

زمان نشست = 2.178 ثانیه

زمان نشست و خطای حالت ماندگار سیستم غیر خطی تقریبا برابر با سیستم خطی شده است. میزان فراجهش سیستم غیر خطی صفر میباشد که اختلاف زیادی با سیستم غیرخطی دارد که با توجه به غیرخطی بودن سیستم و قطب ها و صفرهای دیگری که میتواند سیستم داشته باشد فراجهش آن متفاوت می باشد.

شکل نهایی سه بعدی سیستم کنترل شده به صورت زیر می باشد: