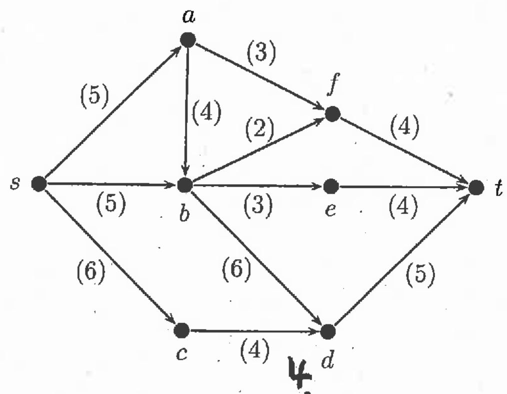
-L.82-

Optimierung für Studierende der Informatik
Thomas Andreae

Wintersemester 2014/15
Blatt 10

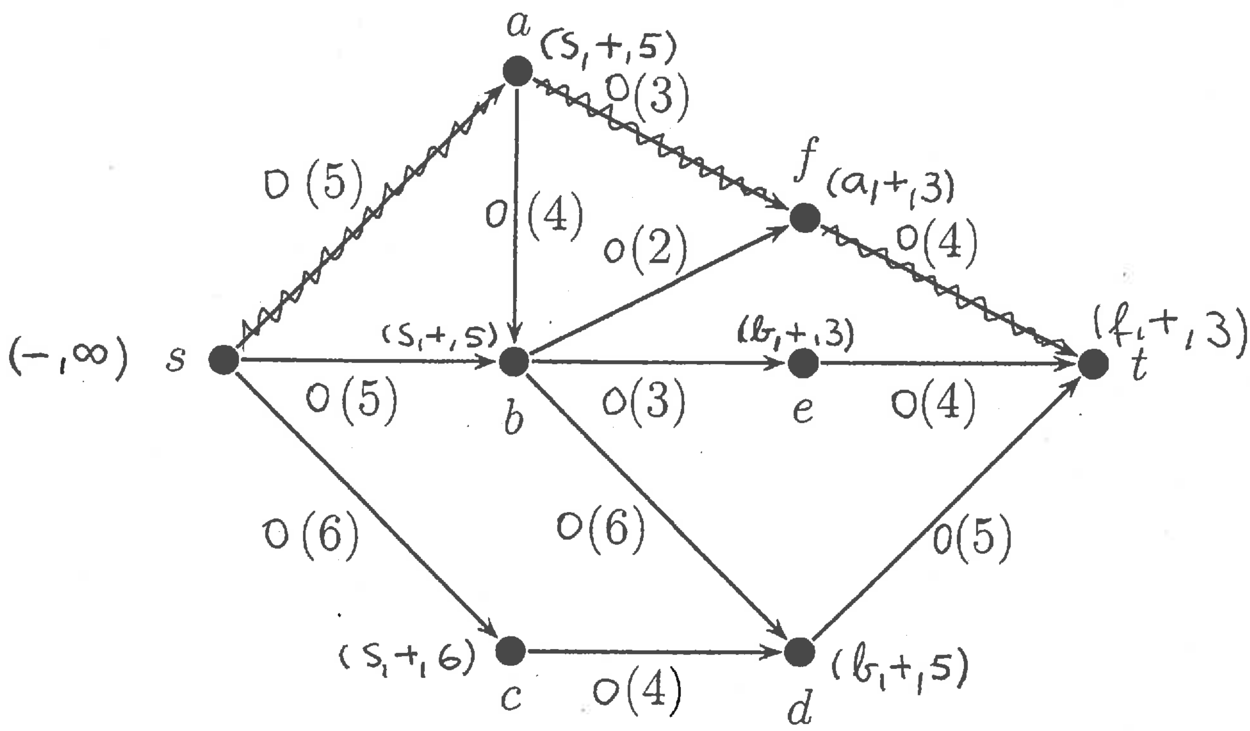
B: Hausaufgaben zum 5. Januar 2015

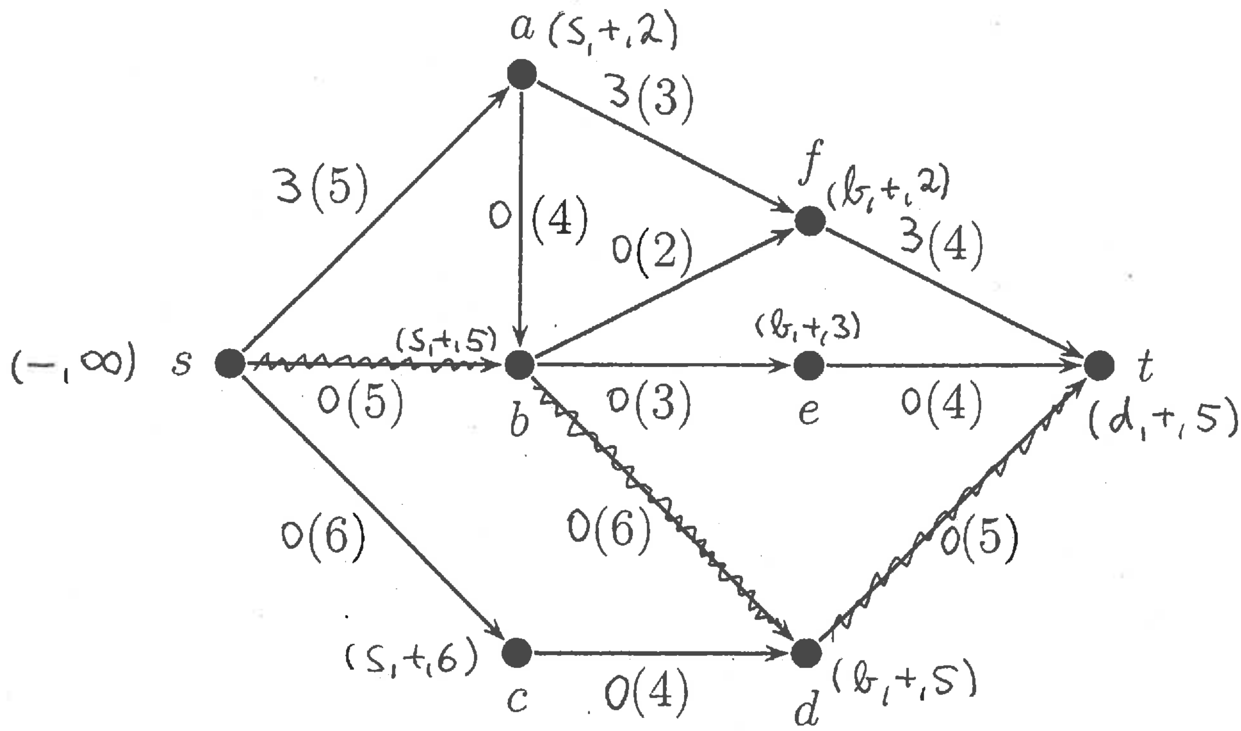
1. Wie Präsenzaufgabe 2 für das folgende Netzwerk:

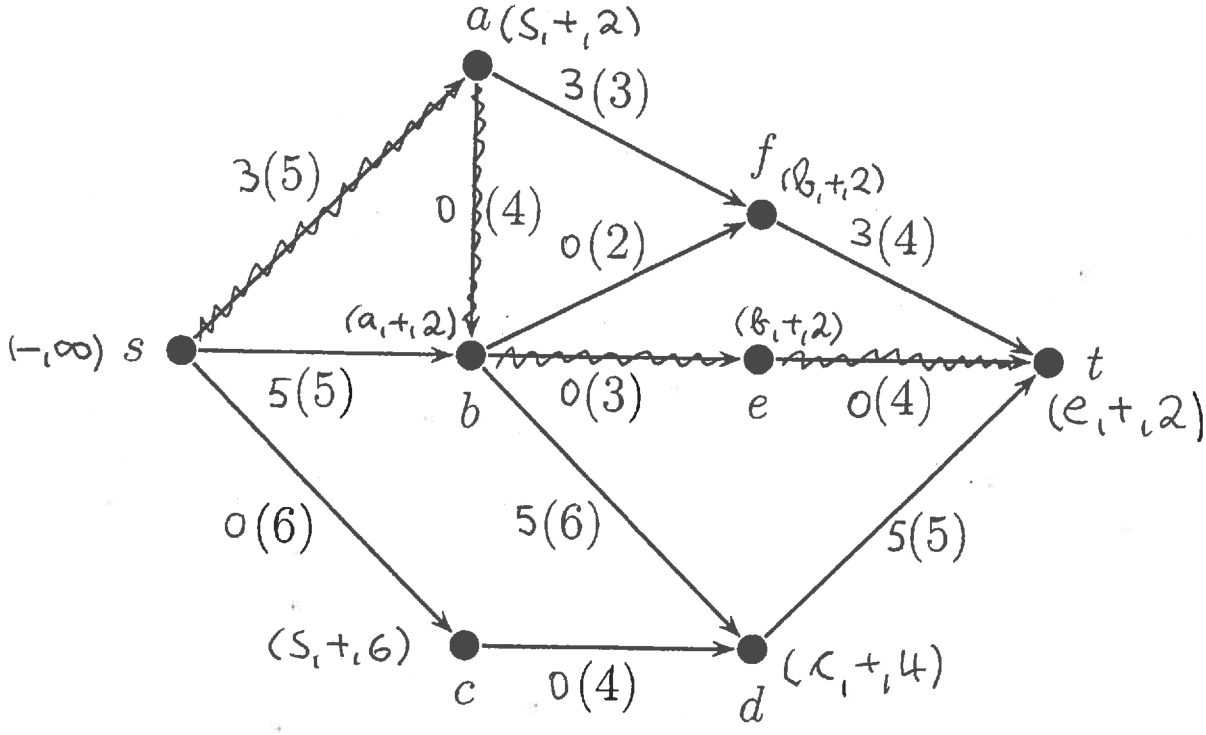


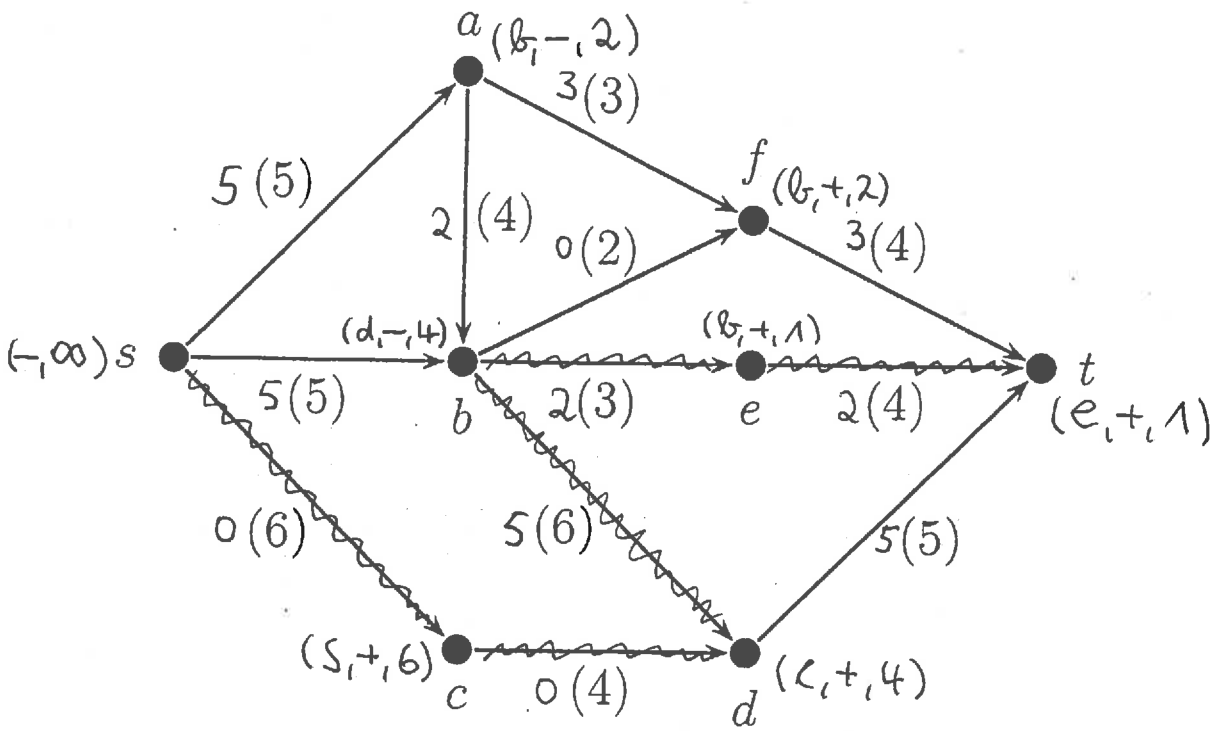
Hinweis: Beachten Sie immer (5′) (Skript, Seite 10~~3~~4)! Für die Zeilen (6)–(9) bzw. (10)–(13) gilt die übliche Regel: Gibt es mehrere Kandidaten für den nächsten zu markierenden Knoten, so ist die alphabetische Reihenfolge entscheidend.

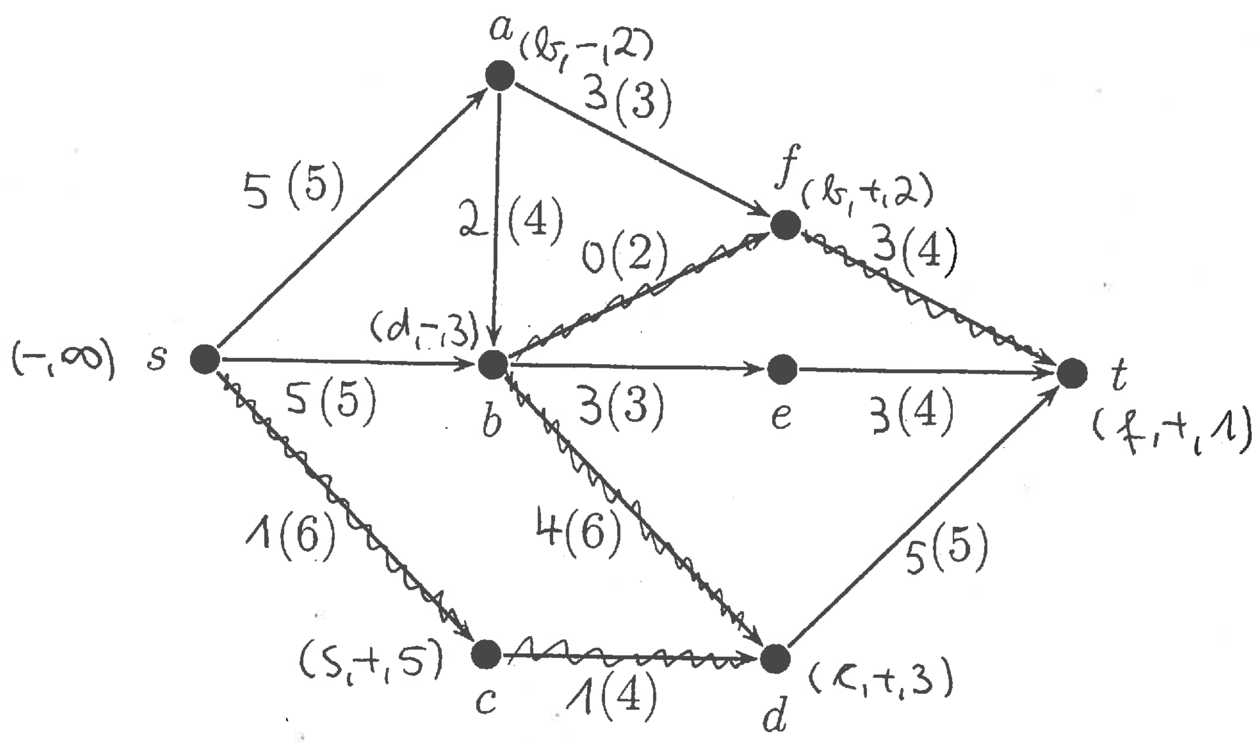
Ähnlich wie sich ausgehend von der Figur auf Skript Seite 104 die Zeichnungen auf den Seiten 105–108 ergeben, ergibt sich hier der folgende Verlauf:

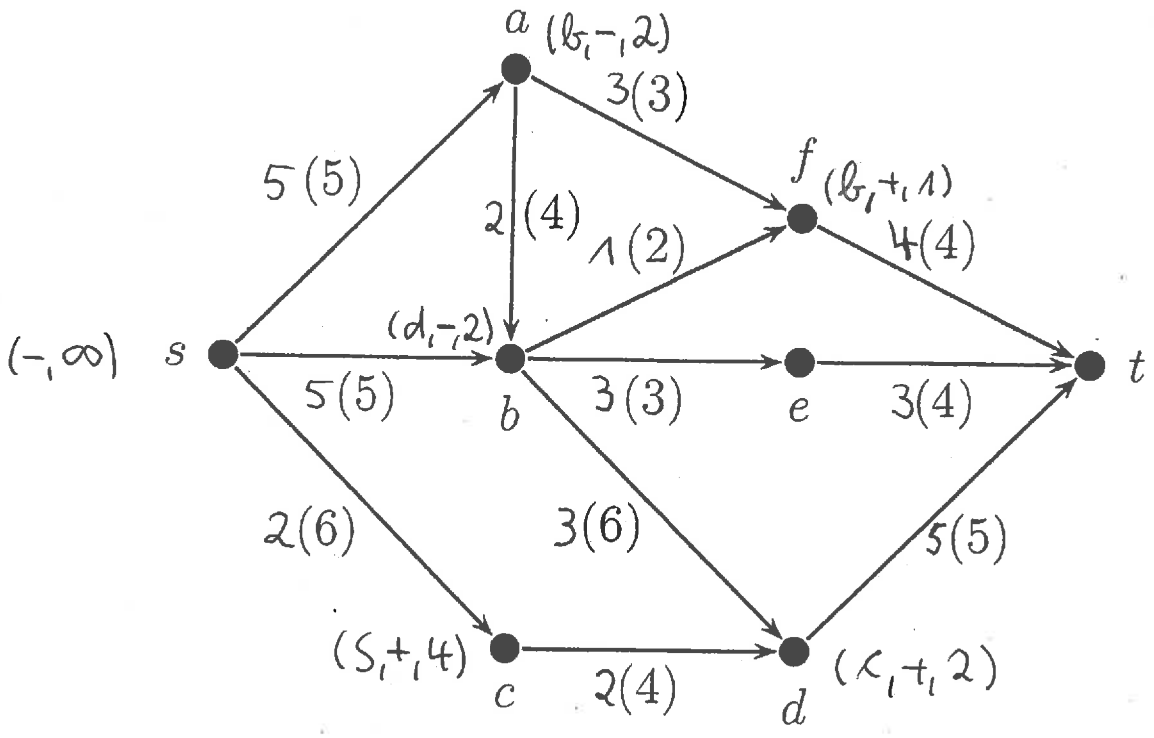

a (s,+,5)
0(3)
f (a,+,3)
0 (5)
0 (4)
0(2)
0(4)
(s,+,5)
(b,+,3)
(f,+,3)
(−,∞) s
0(5)
b
0(3)
e
0(4)
t
0(6)
0(6)
0(5)
(s,+,6)
c
0(4)
d
(b,+,5)


a (s,+,2)
3(3)
3(5)
f (b,+,2)
0 (4)
0(2)
3(4)
(s,+,5)
(b,+,3)
(−,∞) s
0(5)
b
0(3)
e
0(4)
t
(d,+,5)
0(6)
0(6)
0(5)
(s,+,6)
c
0(4)
d
(b,+,5)


a (s,+,2)
3(3)
3(5)
0 (4)
f (b,+,2)
0(2)
3(4)
(a,+,2)
(b,+,2)
(-,∞) s
5(5)
b
0(3)
e
0(4)
t
(e,+,2)
0(6)
5(6)
5(5)
(s,+,6)
c
0(4)
d
(c,+,4)


a (b,-,2)
3(3)
5 (5)
2 (4)
f (b,+,2)
0(2)
3(4)
(d,-,4)
(b,+,1)
(-,∞) s
5(5)
b
2(3)
e
2(4)
t
(e,+,1)
0 (6)
5(6)
5(5)
(s,+,6)
c
0 (4)
d
(c,+,4)





Es folgt $S = \{a, b, c, d, f\}$, $T = \{e, t\}$ mit

$w(f^*) = c(S,T) = 12.$

2. a) Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die den Einheitsvektor $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ und außerdem $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ abbildet? Falls ja, so gebe man die zu f gehörige Matrix A an; falls nein, so begründe man, weshalb es kein solches f geben kann.

b) Lösen Sie die Aufgabe, die in Bemerkung a) auf Seite 185 dargestellt wird, d.h., überlegen Sie sich, wie Q_0 zu wählen ist.

c) Gegeben sei eine Ellipse im $\mathbb{R}^2$ mit Brennpunkten auf der x_1-Achse und dem Ursprung als Mittelpunkt. Wie üblich sei mit a die Länge der langen und mit b die Länge der kurzen Halbachse bezeichnet; E sei das dazugehörige Ellipsoid. Wir wissen: Dann lässt sich E in der Form (14.20) darstellen. In dieser Darstellung ist s der Nullvektor, da der Mittelpunkt der gegebenen Ellipse gleich dem Ursprung ist.
Frage: Wie lautet die 2×2 - Matrix Q^{-1}, die ebenfalls in (14.20) auftritt und wie lautet Q?

a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ bezeichne die $n \times n$-Einheitsmatrix. Es gilt $y^T y \leq R^2 \Leftrightarrow y^T I_n y \leq R^2 \Leftrightarrow y^T \left(\frac{1}{R^2} I_n\right) y \leq 1$.
Q_0 ist also so zu wählen, dass $Q_0^{-1} = \frac{1}{R^2} I_n$ gilt. Also: $Q_0 = R^2 I_n$, d.h.,

$$Q_0 = \begin{pmatrix} R^2 & & & 0 \\ & R^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R^2 \end{pmatrix}.$$

c) Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse, von der in c) die Rede ist, lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aufgrund der Feststellung im Kasten auf Seite 176 gilt

$$E = \{Mx : x \in B^2\},$$

wobei $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T x \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe ist und $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ gilt (vergl. auch (14.12) und (14.13)).

Es gilt (vergl. (14.15)) $Q = MM^T$. Also ergibt sich für $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$:

$$Q = MM^T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}.$$

3. a) Wir greifen das *Kantinenleiterproblem* aus Aufgabe 2a) von Blatt 1 auf. Lösen Sie dieses Problem mithilfe des folgenden Tools:

`http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html`.

b) Lösen Sie mit dem angegebenen Tool auch das *Salatproblem* aus Aufgabe 2b) von Blatt 1.

c) Lösen Sie mit dem angegebenen Tool auch Pauls Diätproblem (Skript Seite 4f).

Auf den Seiten L. 89 und L. 90 finden Sie die Lösungen.

<u>Fazit</u>: Paul kann ganz zufrieden sein: Seine Mahlzeit besteht aus Haferflocken, Milch und Kirschkuchen – durchaus schmackhaft!

Auch der Salat kann sich sehen lassen: Er besteht größtenteils aus Tomaten und Kopfsalat; etwas Spinat rundet die Sache ab.

Der Kantinenleiter serviert Weißbrot mit Margarine und Hähnchen – auch das klingt nicht schlecht. Allerdings könnte es etwas weniger Weißbrot und auch weniger Margarine sein – hier könnte die Hinzunahme von Höchstgrenzen (ähnlich wie beim Schwarzbrot) nicht schaden.

a) Kantinenleiter

Minimize p=67x1+120x2+100x3+90x4+97x5+124x6+98x7+62x8 subject to

8x1+25x2+30x3+22x4+3x5+8x6+6x7>=75

x1+35x2+8x3+x4+33x6+13x7+98x8>=90

54x1+42x5+4x6+63x7>=300

x7<=0.8

Optimal Solution:

p = 522.343; x1 = 5.55556, x2 = 0, x3 = 1.01852, x4 = 0, x5 = 0, x6 = 0, x7 = 0, x8 = 0.778534

b) Salatproblem

Minimize p = 21x1 + 16x2 + 371x3 + 346x4 + 884x5 subject to

0.85x1 + 1.62x2 + 12.78x3 + 8.39x4 >= 15

0.33x1 + 0.20x2 + 1.58x3 + 1.39x4 + 100x5 >= 2

0.33x1 + 0.20x2 + 1.58x3 + 1.39x4 + 100x5 <= 6

4.64x1 + 2.37x2 + 74.69x3 + 80.70x4 >= 4

9.00x1 + 8.00x2 + 7.00x3 + 508.20x4 <=100

-x1 + x2 + x3 - x4 - x5 <= 0

Optimal Solution: p = 232.515; x1 = 5.8848, x2 = 5.84318, x3 = 0.0416255, x4 = 0, x5 = 0

c) Pauls Diätproblem

Minimize p = 3a + 24b + 13c + 9d + 20e + 19f subject to

a <= 4

b <= 3

c <= 2

d <= 8

e <= 2

f <= 2

110a + 205b + 160c + 160d + 420e + 260f >= 2000

$4a + 32b + 13c + 8d + 4e + 14f >= 55$

$2a + 12b + 54c + 285d +22e + 80f >= 800$

Optimal Solution: p = 92.5; a = 4, b = 0, c = 0, d = 4.5, e = 2, f = 0

Lösungen ermittelt mit http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html