-L.52-

Optimierung für Studierende der Informatik

Thomas Andreae

Wintersemester 2014/15
Blatt 7

B: Hausaufgaben zum 1. Dezember 2014

1. a) Gegeben sei das folgende LP-Problem (P) zusammen mit einer vorgeschlagenen Lösung:

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } 12x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 5x_4 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &\leq \frac{22}{3} \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &\leq \frac{4}{3} \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 &\leq \frac{13}{3} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Vorgeschlagene Lösung:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{4}{3}, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = \frac{2}{3}.$$

Prüfen Sie mithilfe der komplementären Schlupfbedingung (vgl. Satz 3', Skript Seite 63), ob dies eine optimale Lösung von (P) ist.

b) Wie a) für das folgende LP-Problem mit vorgeschlagener Lösung:

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } x_1 + 6x_2 - 4x_3 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad + x_3 &\leq 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leq 2 \\ x_2 - x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Vorgeschlagene Lösung:

$$x_1^* = \frac{5}{2}, \quad x_2^* = \frac{3}{2}, \quad x_3^* = 0.$$

a) Das zu (P) duale Problem (D) lautet wie folgt:

minimiere $\frac{22}{3}y_1 + \frac{4}{3}y_2 + \frac{13}{3}y_3$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\geqslant 12 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\geqslant 11 \\ 2y_1 + y_2 + 5y_3 &\geqslant 7 \\ 5y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\geqslant 5 \\ y_1, y_2, y_3 &\geqslant 0 \end{aligned} \qquad (D)$$

Es ist zu entscheiden, ob es Zahlen y_1^*, y_2^*, y_3^* gibt, für die gilt:

(1) $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ und (y_1^*, y_2^*, y_3^*) erfüllen die komplementären Schlupfbedingungen;

(2) (y_1^*, y_2^*, y_3^*) ist eine zulässige Lösung von (D).

$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ erfüllt die 3. Ungleichung von (P) nicht mit Gleichheit. Soll (1) gelten, so muss also $y_3^* = 0$ sein.

Wegen $x_2^* > 0$ und $x_4^* > 0$ muss gelten:

$$\begin{aligned} 3y_1^* + 2y_2^* &= 11 \\ 5y_1^* - 2y_2^* &= 5 \end{aligned} \qquad (*)$$

Lösung von (*): $y_1^* = 2$, $y_2^* = \frac{5}{2}$.

Wir haben also herausgefunden, wie die Zahlen y_1^*, y_2^*, y_3^* beschaffen sein müssen, damit (1) gilt: Es muss $y_1^* = 2$, $y_2^* = \frac{5}{2}$ und $y_3^* = 0$ gelten.

Die Zahlen $y_1^* = 2$, $y_2^* = \frac{5}{2}$, $y_3^* = 0$ bilden aber keine zulässige Lösung von (D), da die 3. Ungleichung von (D) nicht erfüllt ist.

Also: Die vorgeschlagene Lösung $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ ist nicht optimal.

b) Das zu (P) duale Problem (D) lautet wie folgt:

minimiere $5y_1 + 2y_2 + 2y_3$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 \quad\quad & \geq 1 \\ 3y_2 + y_3 & \geq 6 \\ y_1 - 2y_2 - y_3 & \geq -4 \\ y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \end{aligned} \qquad (D)$$

Es ist zu entscheiden, ob es Zahlen y_1^*, y_2^*, y_3^* gibt, für die gilt:

(1) (x_1^*, x_2^*, x_3^*) und (y_1^*, y_2^*, y_3^*) erfüllen die komplementären Schlupfbedingungen;

(2) (y_1^*, y_2^*, y_3^*) ist eine zulässige Lösung von (D)

(x_1^*, x_2^*, x_3^*) erfüllt die 3. Ungleichung von (P) nicht mit Gleichheit. Soll (1) gelten, so muss demnach $y_3^* = 0$ gelten.

Wegen $x_1^* > 0$ und $x_2^* > 0$ muss gelten:

$$\begin{aligned} 2y_1^* - y_2^* &= 1 \\ 3y_2^* &= 6 \end{aligned} \qquad (*)$$

Lösung von $(*)$: $y_1^* = \frac{3}{2}$, $y_2^* = 2$.

Die Zahlen $y_1^* = \frac{3}{2}$, $y_2^* = 2$, $y_3^* = 0$ erfüllen (D) („zulässige Lösung von (D)“).

Also: Die vorgeschlagene Lösung ist optimal.

2. Wir greifen das Beispiel vom Eiscremehersteller (Blatt 5) auf. Eine mögliche Strategie ist die folgende:

- 10 Einheiten der Sorte B werden in regulärer Arbeitszeit veredelt und die restlichen 105 Einheiten im Rahmen von Überstunden;
- von Sorte C werden 20 Einheiten im Rahmen von Überstunden veredelt und die restlichen Einheiten werden als einfache Eiscreme verkauft;
- alle 200 Einheiten der Sorte A werden in regulärer Arbeitszeit veredelt.

a) Zu welchem Gewinn führt diese Strategie?

b) Prüfen Sie mithilfe der komplementären Schlupfbedingungen (Satz 3', Skript Seite 63), ob dies eine optimale Strategie ist.

a) $10 \cdot 15 + 105 \cdot 11 + 20 \cdot 13 + 220 \cdot 10 + 200 \cdot 14 = 6565$, d.h. für den gegebenen Produktionsplan beträgt der Gewinn $\underline{\underline{6565\,€}}$. Zum Vergleich: Auf Blatt 5 war ein anderer Produktionsplan vorgestellt worden, der zu einem Gewinn von 6120 € führte. Der neue Produktionsplan ist also besser. <u>Frage</u>: Geht es vielleicht noch besser? Oder ist der neue Plan bereits optimal?

b) Das Problem des Eiscremeherstellers sei (P) genannt; es lautete (vergl. Lösungen zu Blatt 5):

maximiere $8x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 3x_6$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rrrrrrl}
x_1 + & x_2 & & & & & \leq 200 \\
& & x_3 + & x_4 & & & \leq 115 \\
& & & & x_5 + & x_6 & \leq 240 \\
x_1 + & & x_3 + & & x_5 & & \leq 210 \\
& x_2 + & & x_4 + & & x_6 & \leq 125 \\
& & & & x_1, \ldots, & x_6 & \geq 0
\end{array}$$

Die vorgeschlagene Lösung, die zu einem Gewinn von 6565€ geführt hat, lautet:

$x_1^* = 200, x_2^* = 0, x_3^* = 10, x_4^* = 105, x_5^* = 0, x_6^* = 20.$

Das zu (P) duale Problem (D) lautet:

minimiere $200y_1 + 115y_2 + 240y_3 + 210y_4 + 125y_5$

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
y_1 + y_4 &\geq 8 \\
y_1 + y_5 &\geq 3 \\
y_2 + y_4 &\geq 9 \\
y_2 + y_5 &\geq 5 \\
y_3 + y_4 &\geq 6 \\
y_3 + y_5 &\geq 3 \\
y_i &\geq 0 \ (i = 1, ..., 5)
\end{aligned}
$$

Setzt man $x_1^*, ..., x_6^*$ in die ersten fünf Nebenbedingungen von (P) ein, so findet man, dass nur die dritte dieser Nebenbedingungen nicht mit Gleichheit erfüllt ist. Für Zahlen $y_1^*, ..., y_5^*$ wie in Satz 3' muss also gelten: $y_3^* = 0$.

Außerdem gilt $x_1^* > 0, x_3^* > 0, x_4^* > 0, x_6^* > 0$, d.h., die Zahlen $y_1^*, ..., y_5^*$ müssen das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$y_1^* + y_4^* = 8$$
$$y_2^* + y_4^* = 9$$
$$y_2^* + y_5^* = 5$$
$$y_3^* + y_5^* = 3.$$

Wegen $y_3^* = 0$ folgt der Reihe nach $y_5^* = 3$, $y_2^* = 2$, $y_4^* = 7$, $y_1^* = 1$.

Wir haben also erhalten

$$y_1^* = 1,\ y_2^* = 2,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 7,\ y_5^* = 3.$$

Durch Einsetzen in (D) findet man, dass dies eine zulässige Lösung von (D) ist. Also ist die vorgeschlagene Strategie optimal.

Abschließend machen wir noch eine Probe, indem wir $x_1^*, \ldots, x_6^*$ in die Zielfunktion von (P) und $y_1^*, \ldots, y_5^*$ in die Zielfunktion von (D) einsetzen:

$$8 \cdot 200 + 3 \cdot 0 + 9 \cdot 10 + 5 \cdot 105 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 20 = 2275$$

$$200 \cdot 1 + 115 \cdot 2 + 240 \cdot 0 + 210 \cdot 7 + 125 \cdot 3 = 2275.$$

Es ergibt sich derselbe Zielfunktionswert, wodurch die Optimalität der vorgeschlagenen Lösung bestätigt wird. (Wie Sie sicherlich erkannt haben, ist 2275€ der durch Veredelung zusätzlich erzielte Gewinn; 4290€ ist der Gewinn, den man erzielen würde, falls gar keine Veredelung stattfinden würde.)