2023

Séance 1 : CALCUL DE PROBABILITE ET THEORIE DES ENSEMBLES

Math 311 : PROBABILITE-STATISTIQUE

Dr Hasimbola Randriamisy

Mail : hasimbola.randriamisy@esti.mg

LECTURE : METTRE EN MODE PLEIN ECRAN POUR LA LECTURE (appuyer sur la touche f11)

Le modèle probabiliste

Le modèle probabiliste

1.1 Introduction

Les probabilités vont nous servir à modéliser une **expérience aléatoire**, c'est-à-dire un phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard.

Le modèle probabiliste

1.1 Introduction

Les probabilités vont nous servir à modéliser une **expérience aléatoire**, c'est-à-dire un phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard.

La première tâche qui vous attend est de décrire les différentes issues possibles de cette expérience aléatoire. Puis on cherche à associer à chacune de ces **éventualités** un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance qu'elles ont de se réaliser. Comment interpréter/fixer ce nombre, appelé probabilité ? Il existe plusieurs manières de voir.

NOTIONS IMPORTANTES

❖ ***PROPORTION***

On lance un dé. Quelle est la probabilité de A="obtenir un chiffre pair" ? Chaque face du dé a la même chance, et il y en a 6. Quant aux chiffres pairs, ils sont 3. D'où, intuitivement, $P(A) = \frac{3}{6} = 1/2$.

NOTIONS IMPORTANTES

❖ ***FREQUENCE***

Un enfant est attendu. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ? On a observé un grand nombre de naissances. Notons k_n le nombre de filles nées en observant n naissances. Alors

$$P(\text{fille}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{n}$$

mais cette limite a-t-elle un sens ?

Espace des possibles, événements

On étudie une expérience aléatoire. L'**espace des possibles** ou **univers** décrit tous les résultats possibles de l'expérience. Chacun de ces résultats est appelé **événement élémentaire**. On note souvent l'espace des possibles Ω et un résultat élémentaire ω. Un **événement** est un sous-ensemble de Ω, ou une réunion d'événements élémentaires. On dit qu'un événement est réalisé si un des événements élémentaires qui le constitue est réalisé. Les événements sont des ensembles, représentés souvent par des lettres capitales.

Espace des possibles, événements

On étudie une expérience aléatoire. L'**espace des possibles** ou **univers** décrit tous les résultats possibles de l'expérience. Chacun de ces résultats est appelé **événement élémentaire**. On note souvent l'espace des possibles Ω et un résultat élémentaire ω. Un **événement** est un sous-ensemble de Ω, ou une réunion d'événements élémentaires. On dit qu'un événement est réalisé si un des événements élémentaires qui le constitue est réalisé. Les événements sont des ensembles, représentés souvent par des lettres capitales.

Exemples :

- On lance un dé : $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$. On peut s'intéresser à l'événement A="on obtient un chiffre pair", ie $A = \{2, 4, 6\}$.

Espace des possibles, événements

Il existe un vocabulaire propre aux événements, différent du vocabulaire ensembliste.

notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou $\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

Probabilité

Probabilité

RAPPEL

On se limite dans ce cours à étudier les univers dénombrables. La **probabilité** d'un événement est une valeur numérique qui représente la proportion de fois où l'événement va se réaliser, quand on répète l'expérience dans des conditions identiques. On peut déduire de cette définition qu'une probabilité doit être entre 0 et 1 et que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités de chacun des événements élémentaires qui le constituent. Enfin, la somme des probabilités de tous les éléments de Ω est 1.

Probabilité

RAPPEL

On se limite dans ce cours à étudier les univers dénombrables. La **probabilité** d'un événement est une valeur numérique qui représente la proportion de fois où l'événement va se réaliser, quand on répète l'expérience dans des conditions identiques. On peut déduire de cette définition qu'une probabilité doit être entre 0 et 1 et que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités de chacun des événements élémentaires qui le constituent. Enfin, la somme des probabilités de tous les éléments de Ω est 1.

ENSEMBLE DE PARTIE DE A

Important : rappelons qu'un événement n'est rien d'autre qu'une partie de Ω. Une probabilité associe à chaque événement un nombre entre 0 et 1. Il s'agit donc d'une application de l'ensemble des parties de Ω, noté $\mathcal{P}(\Omega)$, dans $[0, 1]$.
Exemple : soit $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Construisons $\mathcal{P}(\Omega)$.

$$\mathcal{P}(\Omega) = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \Omega\Big\}$$

DEFINITION DE PROBABILITE

Définition 1 *Une probabilité est une application sur $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω, telle que :*

- $0 \leq P(A) \leq 1$, *pour tout événement* $A \subset \Omega$
- $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$, *pour tout événement* A
- $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

DEFINITION DE PROBABILITE

Définition 1 *Une probabilité est une application sur $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω, telle que :*

- $0 \leq P(A) \leq 1$, *pour tout événement* $A \subset \Omega$
- $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$, *pour tout événement* A
- $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

SIGNIFICATIONS ???

Que signifie "un événement A a pour probabilité..." ?

0.95 : A va très probablement se produire.

0.03 : A a très peu de chance d'être réalisé.

4.0 : incorrect.

-2 : incorrect.

0.4 : A va se produire dans un peu moins de la moitié des essais.

0.5 : une chance sur deux.

0 : aucune chance que A soit réalisé.

De la définition, on peut facilement déduire la proposition suivante, fort utile pour faire quelques calculs :

Proposition 2 *Soient A et B deux événements.*
1) Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
2) $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3) $P(\emptyset) = 0$.
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Définition 3 *Soit une expérience aléatoire et Ω l'espace des possibles associé. Une probabilité sur Ω est une application, définie sur l'ensemble des événements, qui vérifie :*
- axiome 1 : $0 \leq P(A) \leq 1$, pour tout événement A
- axiome 2 : pour toute suite d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, deux à deux incompatibles,

$$P\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$$

- axiome 3 : $P(\Omega) = 1$

NB : les événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, si pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

EXEMPLE

Exemple important : probabilité uniforme

Soit Ω un ensemble fini. Il arrive, comme quand on lance un dé équilibré, que les événements élémentaires ont tous la même probabilité. On parle alors d'événements élémentaires équiprobables. Notons p la probabilité de chaque événement élémentaire. Alors

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p = p \times \mathrm{card}(\Omega)$$

D'où $p = P(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}$, pour tout ω. La probabilité ainsi définie sur l'ensemble Ω s'appelle probabilité uniforme. La probabilité d'un événement A se calcule facilement :

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$$

EXERCICES A RENDRE SUR CLASSROOM

(05 Mai 2021)

Exercice 1 – Proposer un univers Ω pour les expériences aléatoires suivantes et dénombrer les résultats possibles :

1) On lance un dé.

2) On lance 2 dés.

3) On tire trois cartes dans un jeu .

4) On place les 5 lettres qui forment "proba" au hasard sur une réglette de Scrabble.

5) On place les 6 lettres qui forment "erreur" au hasard sur une réglette de Scrabble.

Exercice 2 – Soit P une probabilité sur un ensemble Ω et deux événements A et B. On suppose que

$$P(A \cup B) = 7/8, \qquad P(A \cap B) = 1/4, \qquad P(A) = 3/8.$$

Calculer $P(B)$, $P(A \cap B^c)$, $P(B \cap A^c)$.

Exercice 3 – Supposons que les faces d'un dé sont truquées de telle manière que les numéros impairs ont chacun la même chance d'apparaître, chance qui est deux fois plus grande que pour chacun des numéros pairs. On jette le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 ?

Exercice 4 – Un parking contient douze places alignées. Huit voitures s'y sont garées au hasard, et l'on observe que les quatre places libres se suivent. Est-ce surprenant ?