Séance 4 : LOI D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

Math 311 : PROBABILITE-STATISTIQUE

Dr Hasimbola Randriamisy

Mail : hasimbola.randriamisy@esti.mg

LECTURE : METTRE EN MODE PLEIN ECRAN POUR LA LECTURE (appuyer sur la touche f11)

Schéma de Bernoulli et loi binomiale

On s'intéresse ici à la réalisation ou non d'un événement. Autrement dit, on n'étudie que les expériences aléatoires qui n'ont que **deux issues possibles** (ex : un patient à l'hôpital survit ou non, un client signe le contrat ou non, un électeur vote démocrate ou républicain...). Considérons une expérience aléatoire de ce type. On l'appelle une **épreuve de Bernoulli**. Elle se conclut par un succès si l'événement auquel on s'intéresse est réalisé ou un échec sinon. On associe à cette épreuve une variable aléatoire Y qui prend la valeur 1 si l'événement est réalisé et la valeur 0 sinon. Cette v.a. ne prend donc que deux valeurs (0 et 1) et sa loi est donnée par :

$$P[Y = 1] = p, \qquad P[Y = 0] = q = 1 - p$$

On dit alors que Y suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p, notée $\mathcal{B}(p)$. La v.a. Y a pour espérance p et pour variance $p(1-p)$. En effet, $E[Y] = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$ et $\mathrm{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = E[Y] - E[Y]^2 = p(1-p)$.

Soit X la v.a. qui représente le nombre de succès obtenus lors des n épreuves d'un schéma de Bernoulli. Alors on dit que X suit une **loi binomiale de paramètres** (n, p), notée $\mathcal{B}(n, p)$. Cette loi est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{pour tout } 0 \leq k \leq n$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

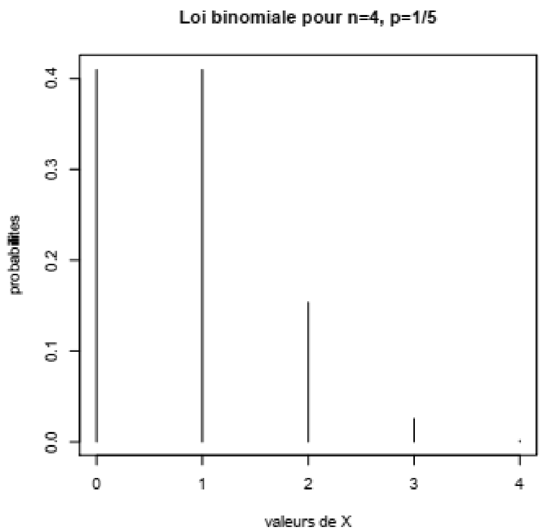
En effet, on peut tout d'abord observer que le nombre de succès est un entier nécessairement compris entre 0 et le nombre d'épreuves n. D'autre part, l'événement $\{X = k\}$ est une réunion d'événements élémentaires et chacun de ces événements élémentaires est une suite de longueur n de la forme $\omega =$[SSES...E] avec k S et $n-k$ E. Un tel événement élémentaire a la probabilité

$$P(\omega) = p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemple 31 *On s'intéresse à l'infection des arbres d'une forêt par un parasite. Soit p la proportion d'arbres infectés. On étudie 4 arbres. Si un arbre est infecté, on dit qu'on a un succès, sinon un échec. Soit X le nombre d'arbres infectés, parmi les 4. Alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4,p)$.*

$P(X=0)=\binom{4}{0}\ q^4=q^4,$
$P(X=1)=\binom{4}{1}\ p^1q^3=4pq^3,$
$P(X=2)=\binom{4}{2}\ p^2q^2=6p^2q^2,$
$P(X=3)=\binom{4}{3}\ p^3q^1=4p^3q,$
$P(X=4)=\binom{4}{4}\ p^4=p^4.$

Pour $p=1/5$, on obtient les valeurs :



Combien existe-t-il de suites à n éléments avec k S et $n-k$ E ?

Il en existe $\binom{n}{k}$, le nombre de combinaisons de k S parmi n éléments. Finalement,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{\omega : X(\omega)=k} P(\omega) \\ &= \mathrm{card}(\{\omega : X(\omega)=k\})\ p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Proposition 29 *Si X est une v.a. de loi $\mathcal{B}(n,p)$, l'espérance de X vaut np et sa variance $np(1-p)$.*

Exemple 32 *Un nouveau traitement résout le problème de fragilité d'un matériel dans 50% des cas. Si on essaye sur 15 objets, quelle est la probabilité pour qu'au plus 6 de ces objets soient résistants, pour que le nombre d'objets résistants soit compris entre 6 et 10, pour que deux au plus restent fragiles. Quel est le nombre moyen d'objets rendus résistants par le traitement ?*

On suppose que les résultats concernant les 15 objets sont indépendants. Soit X le nombre d'objets résistants à la suite du nouveau traitement. Alors X suit une loi $\mathcal{B}(15, 0.5)$ et

$$\begin{aligned}
P[X \leq 6] &= P[X=0] + P[X=1] + \cdots + P[X=6] \\
&= \frac{1}{2^{15}}\left(\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3} + \binom{15}{4} + \binom{15}{5} + \binom{15}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2^{15}}(1 + 15 + 105 + 455 + 1365 + 3003 + 5005) \\
&= 0.304
\end{aligned}$$

$$P[6 \leq X \leq 10] = P[X=6] + P[X=7] + P[X=8] + P[X=9] + P[X=10] = 0.790$$

$$\begin{aligned} P[X \geq 12] &= P[X=12] + P[X=13] + P[X=14] + P[X=15] \\ &= (455 + 105 + 15 + 1)/2^{15} \\ &= 0.018 \end{aligned}$$

Enfin, $E[X] = 15/2 = 7,5.$

LES AUTRES LOIS DISCRETES

Loi géométrique

Au lieu de réaliser un nombre fixé d'essais lors d'un schéma de Bernoulli, l'expérimentateur s'arrête au premier succès. La valeur qui nous intéresse est le nombre d'essais effectués jusqu'au premier succès inclus. Le nombre de succès est donc fixé à 1, mais le nombre d'essais total Y est aléatoire et peut prendre n'importe quelle valeur entière supérieure ou égale à 1. De plus,

$$\forall k = 1, 2, \ldots \qquad P[Y = k] = p(1-p)^{k-1}$$

où p est toujours la probabilité de succès des épreuves de Bernoulli. On dit alors que Y suit la **loi géométrique de paramètre** p, notée $\mathcal{G}(p)$.

Proposition 33 *L'espérance de Y vaut $1/p$ et sa variance $(1-p)/p^2$.*

preuve : admettons tout d'abord que, sur $[0, 1[$,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$$

et

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

D'où, pour $x = 1-p$,

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{\infty} k P[X=k] = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p/p^2 = 1/p$$

Un calcul analogue permet de calculer la variance (exercice).

Loi de Poisson

Cette loi est une approximation de la loi binomiale quand np est petit et n grand (en pratique, $n \geq 50$ et $np \leq 10$). Une v.a. X de loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P[X = k] = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$$

L'espérance et la variance de X sont égales à λ.

On utilise la loi de Poisson pour modéliser le nombre de tâches qui arrivent à un serveur informatique pendant une minute, le nombre de globules rouges dans un ml de sang, le nombre d'accidents du travail dans une entreprise pendant un an...
Dans le cas de l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson, le paramètre de la loi de Poisson est $\lambda = np$.

Loi uniforme

Mis à part le prestige dû à son nom, la loi uniforme est la loi de l'absence d'information. Supposons qu'une v.a. X prenne les valeurs 1,2,...,n, mais que nous n'ayons aucune idée de la loi de probabilité de X ; dans ce cas, après justification, on peut affecter à chaque valeur le même poids : $1/n$. Et

$$\forall k = 1, ..., n, \quad P[X = k] = \frac{1}{n}$$

On montre facilement que

$$E[X] = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

EXERCICES

Exercice 1 — Soit X une v.a. dont la loi est donnée par

$$P[X=-1]=0.2, \qquad P[X=0]=0.1, \qquad P[X=4]=0.3, \qquad P[X=5]=0.4$$

Calculer $P[X \leq 3]$, $P[X>2]$, l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 — On lance deux dés. Modéliser l'expérience. Quelle est la probabilité pour obtenir au moins un 4 ? Quelle est la probabilité pour que le plus petit donne un nombre inférieur ou égal à 4 ? Quelle est l'espérance de la somme des deux dés ?

Exercice 6 — Un ingénieur d'une entreprise de télécommunication recherche en milieu rural des sites pour implanter des relais pour téléphones portables. Ces sites sont des clochers d'église, châteaux d'eau... Sur une carte IGN, l'ingénieur relève 250 sites potentiels dans sa région. De plus, il utilise le quadrillage de sa carte : sa région est divisée en 100 carreaux. On suppose que les sites potentiels sont répartis uniformément et indépendamment sur le territoire. Étant donné un carreau, quelle est la loi du nombre de sites situés

dans ce carreau ? Quelle est la probabilité pour qu'on trouve 5 sites dans ce carreau ? Plus de 5 sites ?