Math 311
PROBABILITE-STATISTIQUE

1.4 Indépendance et conditionnement

Exemple 4 *Quelle est la probabilité d'avoir un cancer du poumon ?*

1.4 Indépendance et conditionnement

Exemple 4 *Quelle est la probabilité d'avoir un cancer du poumon ?*
Information supplémentaire : vous fumez une vingtaine de cigarettes par jour. Cette information va changer la probabilité.

L'outil qui permet cette mise à jour est la probabilité conditionnelle.

Définition 5 *Étant donnés deux événements A et B, avec $P(A) > 0$, on appelle probabilité de B conditionnellement à A, ou sachant A, la probabilité notée $P(B|A)$ définie par*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Définition 5 *Étant donnés deux événements A et B, avec $P(A) > 0$, on appelle probabilité de B conditionnellement à A, ou sachant A, la probabilité notée $P(B|A)$ définie par*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On peut écrire aussi $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$.

Définition 5 *Étant donnés deux événements A et B, avec $P(A) > 0$, on appelle probabilité de B conditionnellement à A, ou sachant A, la probabilité notée $P(B|A)$ définie par*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On peut écrire aussi $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$.

Utilisation 1 : quand $P(A)$ et $P(A \cap B)$ sont faciles à calculer, on peut en déduire $P(B|A)$.

Définition 5 *Étant donnés deux événements A et B, avec $P(A) > 0$, on appelle probabilité de B conditionnellement à A, ou sachant A, la probabilité notée $P(B|A)$ définie par*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On peut écrire aussi $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$.

Utilisation 1 : quand $P(A)$ et $P(A \cap B)$ sont faciles à calculer, on peut en déduire $P(B|A)$.

Utilisation 2 : Quand $P(B|A)$ et $P(A)$ sont faciles à trouver, on peut obtenir $P(A \cap B)$.

Définition 5 *Étant donnés deux événements* A *et* B*, avec* $P(A) > 0$*, on appelle probabilité de* B *conditionnellement à* A*, ou sachant* A*, la probabilité notée* $P(B|A)$ *définie par*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On peut écrire aussi $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$.

Utilisation 1 : quand $P(A)$ et $P(A \cap B)$ sont faciles à calculer, on peut en déduire $P(B|A)$.

Utilisation 2 : Quand $P(B|A)$ et $P(A)$ sont faciles à trouver, on peut obtenir $P(A \cap B)$.

De plus, la probabilité conditionnelle sachant A, $P(.|A)$, est une nouvelle probabilité et possède donc toutes les propriétés d'une probabilité.

Exemple 6 *Une urne contient r boules rouges et v boules vertes. On en tire deux, l'une après l'autre (sans remise). Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ?*

Exemple 6 *Une urne contient r boules rouges et v boules vertes. On en tire deux, l'une après l'autre (sans remise). Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ?*

REPONSE

Choisissons Ω *qui décrit les résultats de l'expérience précisément.*

$$\Omega = \{rouge, verte\} \times \{rouge, verte\}$$

Exemple 6 *Une urne contient r boules rouges et v boules vertes. On en tire deux, l'une après l'autre (sans remise). Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ?*

REPONSE

Choisissons Ω qui décrit les résultats de l'expérience précisément.

$$\Omega = \{rouge, verte\} \times \{rouge, verte\}$$

Un événement élémentaire est un couple (x, y) où x est la couleur de la première boule tirée et y la couleur de la seconde.
Soit A l'événement "la première boule est rouge" et B l'événement "la seconde boule est rouge".

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{r-1}{r+v-1} \cdot \frac{r}{r+v}$$

Proposition 7 (Formule des probabilités totales) *Soit A un événement tel que $0 < P(A) < 1$. Pour tout événement B, on a*

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

Définition 8 *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. On l'appelle partition de Ω si elle vérifie les deux conditions :*
(i) $\cup_{i \in I} A_i = \Omega$
(ii) les A_i sont deux à deux incompatibles : pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Proposition 9 (Formule des probabilités totales généralisée) *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de Ω, telle que $P(A_i) > 0$, pour tout $i \in I$. Alors, pour tout événement B,*

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

La formule des probabilités totales permet de suivre les étapes de l'expérience aléatoire dans l'ordre chronologique. Nous allons maintenant voir une formule à remonter le temps...

Proposition 10 (Formule de Bayes) *Soit A et B deux événements tels que* $0 < P(A) < 1$ *et* $P(B) > 0$. *Alors,*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

Proposition 11 (Formule de Bayes généralisée) *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de Ω, telle que $P(A_i) > 0$, pour tout $i \in I$. Soit un événement B, tel que $P(B) > 0$. Alors, pour tout $i \in I$,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j\in I} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Exemple 12 *Deux opérateurs de saisie, A et B, entrent respectivement 100 et 200 tableaux sur informatique. Les tableaux de A comportent des fautes dans 5,2% des cas et ceux de B dans 6,7% des cas. On prend un tableau au hasard. Il comporte des fautes. Quelle est la probabilité pour que A se soit occupé de ce tableau ?*

Soient les événements :
$T_A =$ *" le tableau est entré par A",*
$T_B = (T_A)^c$ *" le tableau est entré par B",*
$F =$ *" le tableau comporte des fautes".*
D'après le théorème de Bayes,

$$\begin{aligned} P(T_A|F) &= \frac{P(F|T_A)P(T_A)}{P(F|T_A)P(T_A) + P(F|T_B)P(T_B)} \\ &= \frac{0.052 * 1/3}{0.052 * 1/3 + 0.067 * 2/3} = 0.279 \end{aligned}$$

EVENEMENT INDEPENDANTS

Définition 13 *Deux événements A et B sont dits* **indépendants** *si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

S'il sont de probabilité non nulle, alors

$$P(B|A) = P(B) \iff P(A|B) = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

1.5 Répétitions indépendantes

Quand on étudie une expérience aléatoire qui peut se décomposer en plusieurs petites expériences aléatoires indépendantes, les calculs sont aisés. Et quand on a la probabilité uniforme pour chacune de ces petites expériences aléatoires, on a encore la probabilité uniforme sur l'expérience aléatoire totale.

Proposition 14 *Soit $\Omega = E \times F$ où E est de cardinal n et F de cardinal p. Supposons que l'on choisisse avec la probabilité uniforme un élément de E, et, de manière indépendante, un élément de F toujours avec la probabilité uniforme. Alors chaque élément $\omega = (x, y)$ de Ω a la même probabilité, qui vaut*

$$P(\omega) = P((x, y)) = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{1}{np} = P_E(\{x\})P_F(\{y\})$$