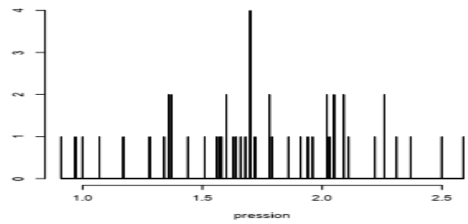
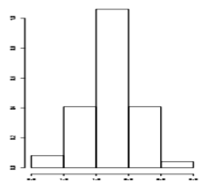
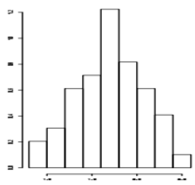
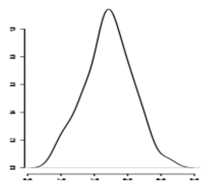
Variables aléatoires continues

On utilise des v.a. discrètes pour compter des événements qui se produisent de manière aléatoire, et des v.a. continues quand on veut mesurer des grandeurs “continues” (distance, masse, pression...).

Un industriel fait relever régulièrement la pression dans une cuve de réaction chimique. Voici les mesures obtenues en bar :

2.50	1.37	1.57	1.28	1.64	1.37	2.05	2.11	1.00	1.72
1.96	1.70	2.03	2.26	1.60	1.70	2.09	1.79	1.66	2.09
1.58	1.78	2.02	2.22	1.51	2.59	1.94	1.36	2.31	1.36
0.97	1.07	0.91	2.05	1.70	1.70	1.17	2.02	2.26	1.78
1.60	1.63	1.68	1.34	1.56	1.91	1.86	1.44	2.37	



1. PROBABILITES

Cette courbe est la courbe d’une fonction appelée **densité de probabilité** ou simplement **densité**. Une densité f décrit la loi d’une v.a. X en ce sens :

$$\text{pour tous } a, b \in \mathbb{R}, \qquad P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

et

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = P[X \leq x] = P[X < x] = \int_{-\infty}^x f(u)\mathrm{d}u$$

On en déduit qu’une densité doit vérifier

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \ \text{ et } \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

Définition 34 *On appelle densité de probabilité toute fonction réelle positive, d’intégrale 1.*

Attention ! Pour une v.a. continue X, la densité f ne représente pas la probabilité de l’événement $\{X = x\}$, car $P[X = x] = 0$. Il faut plutôt garder à l’esprit que

$$P[x \leq X \leq x + \Delta x] = f(x).\Delta x$$

Important : La loi d’une v.a. X est donnée par

- sa densité

ou

- les probabilités $P[a \leq X \leq b]$ pour tous a, b

ou

- les probabilités $F(x) = P[X \leq x]$ pour tout x (F est la fonction de répartition).

Remarque : $P[X = x] = 0$ pour tout x.

Proposition 35 *La fonction de répartition F d’une v.a. X de densité f est continue, croissante. Elle est dérivable en tout point x où f est continue et $F'(x) = f(x)$. On a la relation*

$$P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

dès que $b \geq a$.

2. CALCUL DE L'ESPERANCE

Définition 36 *L'espérance de la v.a. X est définie par*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

quand cette intégrale a un sens. De plus, la variance de X est $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$.

Proposition 37 *(i) L'espérance d'une fonction* $Y = \varphi(X)$ *est donnée par*

$$E[Y] = E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x$$

(ii) Pour tous réels a et b,

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

(iii) Si X et Y sont deux v.a. continues,

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Si, de plus, elles sont **indépendantes**, $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

3. LES LOIS DES VARIABLES CONTINUES

❒ Loi uniforme

Définition 38 *Une v.a. X suit une loi uniforme sur* $[a, b]$, *si elle admet pour densité*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : on vérifie facilement que f est une densité.

La fonction de répartition F de X est donnée par :

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

L'espérance de X est $E[X] = (b - a)/2$ et la variance de X est $\mathrm{Var}(X) = (b - a)^2/12$.

Exercice : soit X de loi uniforme sur $[0, 10]$. Calculer $P[X < 3]$, $P[X > 6]$, $P[3 < X < 8]$.

❒ La loi normale

Loi normale centrée réduite

C'est la loi la plus importante. Son rôle est central dans de nombreux modèles probabilistes et dans toute la statistique. Elle possède des propriétés intéressantes qui la rendent agréable à utiliser.

Définition 39 *Une v.a. X suit une loi normale (ou loi gaussienne ou loi de Laplace-Gauss)* $\mathcal{N}(0, 1)$ *si sa densité f est donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Remarque : vérifions que f est d'intégrale 1. Notons $I = \int_{\mathbb{R}} f$.

$$\begin{aligned} I^2 &= \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{x^2 + y^2}{2}\Big) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

On fait un changement de variable polaire : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Alors $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ et on obtient :

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \exp(-r^2/2) r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 1$$

Rappel : si X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors pour tous $a < b$,

$$P[a \leq X \leq b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\mathrm{d}x = \varphi(b) - \varphi(a)$$

où φ est la fonction de répartition de X. Rappelons que φ est une primitive de la densité f. Mais il n'existe pas de forme analytique de la primitive de f. On doit donc lire les valeurs de φ dans une table disponible en annexe B, ou la faire calculer par un logiciel adapté (ex : excel, matlab, R).

La courbe de la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ porte le nom de "courbe en cloche".

Proposition 40 *La v.a. X est* **centrée**, *c'est-à-dire de moyenne nulle, et* **réduite**, *c'est-à-dire de variance 1. De plus, $-X$ suit encore une loi normale centrée réduite.*

preuve : le calcul de l'espérance est immédiat quand on a observé que $xf(x)$ est une fonction impaire. Le calcul de la variance se fait par une intégration par parties. Enfin, montrons que X et $-X$ ont même loi. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$P[a \leq -X \leq b] = P[-b \leq X \leq -a] = \int_{-b}^{-a} f(x)\mathrm{d}x$$

On effectue un le changement de variable : $y = -x$

$$P[a \leq -X \leq b] = \int_a^b f(-y)\mathrm{d}y = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

par symétrie de la fonction f. D'où

$$P[a \leq -X \leq b] = P[a \leq X \leq b]$$

Utilisation des tables

Pour calculer $P[a \leq X \leq b]$ ou $P[X \leq x]$, on a recours au calcul numérique sur ordinateur ou, plus simplement, à une table qui donne $P[X \leq x]$ pour tout décimal positif x à deux chiffres après la virgule. Puis il faut remarquer que

$$P[a \leq X \leq b] = P[X \leq b] - P[X \leq a]$$

puis on lit les probabilités dans la table si a et b sont positifs. Pour trouver $P[X \leq -x]$ quand $x > 0$, on utilise le fait que X et $-X$ ont même loi :

$$P[X \leq -x] = P[-X \geq x] = P[X \geq x] = 1 - P[X \leq x]$$

Exemple : on cherche à calculer $P[1 \leq X \leq -1]$.

$$\begin{aligned} P[-1 \leq X \leq 1] &= P[X \leq 1] - P[X \leq -1] = P[X \leq 1] - \Big(1 - P[X \leq 1]\Big) \\ &= 2P[X \leq 1] - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0,6826 \end{aligned}$$

Exemple : on cherche $u \in \mathbb{R}$ tel que $P[-u \leq X \leq u] = 0.90$.

$$P[-u \leq X \leq u] = 2P[X \leq u] - 1$$

D'où $P[X \leq u] = 0.95$ et $u = 1.6446$.

EXERCICES

Exercice 8 — Soit X une v.a. continue de loi uniforme sur $[a, b]$, où a et b sont deux réels positifs tels que $a < b$. Soient c et d positifs avec $a < \sqrt{c} < \sqrt{d} < b$. Écrire $P[c < X^2 < d]$ sous forme d'une intégrale entre c et d. En déduire la densité de la v.a. X^2.

Exercice 7 —Soit X une v.a. continue dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} a(9x - 3x^2) & \text{pour } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculer la constante a.
2) Déterminer $P[X > 1]$ et $P[1/2 < X < 3/2]$.
3) Quelle est la fonction de répartition de X ?
4) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 — Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
Calculer $P[X \leq 1.62]$, $P[X \geq -0.52]$, $P[-1 < X < 1]$. Trouver u tel que $P[X \leq u] = 0.334$.

Exercice 4 — Soit X une variable aléatoire gaussienne. On sait que :

$$P[X \leq 3] = 0,5517 \qquad \text{et} \qquad P[X \geq 7] = 0,0166$$

Déterminer la moyenne et l'écart-type de X.

Annexe B

Tables statistiques

B.1 Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$F(z) = P[Z \leq z] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\mathrm{d}x$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389