

MODÉLISATION ET SIMULATION EQUATIONS AUX DIFFÉRENCES (I/II)

1. RAPPELS THÉORIQUES : RÉOLUTION D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

1.1. Équations aux différences.

Définition. Soit $x_k = x(k) \in X$ l'état scalaire d'un système dynamique à l'instant $k \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \times X^n \rightarrow X$ une fonction connue. L'équation récursive

$$x(k+n) = f(k, x(k+n-1), \dots, x(k))$$

est appelé équation aux différences d'ordre n en forme normale.

Théorème. L'équation admet une et une solution une fois fixées n valeurs initiales. Notons qu'aucune autre restriction sur la forme de f est posée.

1.2. Equation aux différences linéaire.

Définition. Une équation aux différences est dite *linéaire* d'ordre n , avec $n > 0$, si elle a la forme

(1.1)

$$a_n(k)x(k+n) + a_{n-1}(k)x(k+n-1) + \cdots + a_0(k)x(k) = g(k)$$

où les fonctions $a_i(k), i = 0, \dots, n$ et $g(k)$ sont données.

- Si les coefficients ne dépendent pas de k l'équation est dite invariante (ou stationnaire). Si $g(k) = 0$ pour tout k alors l'équation

(1.2)

$$a_n(k)x(k+n) + a_{n-1}(k)x(k+n-1) + \cdots + a_0(k)x(k) = 0$$

est dite *homogène*.

- La condition initiale d'une équation aux différences linéaire d'ordre n est le vecteur de taille $[n, 1]$

$$x^0 = [x(0), \dots, x(n-1)]$$

1.3. Solutions.

Théorème. Considérons l'équation linéaire non homogène (1.1) et sa solution particulière $x^{(p)}(k)$. Soit $x^{(h)}(k)$ une solution de l'équation homogène associée (1.2). Toutes les solutions $x(k)$ de l'équation linéaire non homogène peuvent être exprimées sous la forme

$$x(k) = x^{(p)}(k) + x^{(h)}(k)$$

Le principe de superposition suivant est valable

Théorème. Si $x^{(1)}(k), x^{(2)}(k), \dots, x^{(m)}(k)$ sont solutions de l'équation (1.2), alors chaque combinaison linéaire

$$c_1 x^{(1)}(k) + c_2 x^{(2)}(k) + \dots + c_m x^{(m)}(k)$$

où c_1, \dots, c_m sont des constantes arbitraires, est aussi une solution de (1.2).

1.4. **Exemple.** Considérons l'équation

$$(k+1)x(k+1) - kx(k) = 1, \quad k \geq 1$$

dont l'équation homogène correspondante est

$$(k+1)x(k+1) - kx(k) = 0.$$

La solution de l'équation homogène est

$$x^{(h)}(k) = A/k$$

.

Une solution particulière est

$$x^{(p)}(k) = 1$$

La solution a donc la forme

$$x(k) = 1 + A/k$$

1.5. Solutions fondamentales. Construisons un ensemble de n solutions $x^{(i)}(k)$, $i = 1, \dots, n$ telles que

$$x^{(i)}(0) = 0, \dots, x^{(i)}(i-1) = 1, x^{(i)}(i) = 0, \dots, x^{(i)}(n-1) = 0$$

Cet ensemble est appelé ensemble fondamental.

Théorème. Chaque solution de l'équation homogène (1.2) peut être exprimée comme combinaison linéaire

$$c_1 x^{(1)}(k) + c_2 x^{(2)}(k) + \dots + c_n x^{(n)}(k)$$

des n solutions fondamentales $x^{(i)}$ où c_1, \dots, c_n sont des constantes.

Le théorème suivant énonce que le rôle des n solutions fondamentales peut être joué par un quelconque ensemble de n solutions linéairement indépendantes :

Théorème. Chaque solution de l'équation homogène (1.2) peut être exprimée comme combinaison linéaire

$$c_1 x^{(1)}(k) + c_2 x^{(2)}(k) + \dots + c_n x^{(n)}(k)$$

des n solutions linéairement indépendantes $x^{(i)}$ où c_1, \dots, c_n sont des constantes.

1.6. **Exemple.** Considérons l'équation homogène linéaire d'ordre $n = 2$

$$x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) = 0$$

La solution $x^{(1)}$ qui satisfait la condition initiale $x^{(1)}(0) = 1, x^{(1)}(1) = 0$ est

$$x^{(1)}(k) = 1 - k$$

La solution $x^{(2)}$ qui satisfait la condition initiale $x^{(2)}(0) = 0, x^{(2)}(1) = 1$ est

$$x^{(2)}(k) = k$$

La solution de l'équation homogène peut être écrite de la manière

$$x(k) = c_1(1 - k) + c_2k$$

1.7. Polynôme caractéristique.

Définition. Soit

$$x(k+n) + a_{n-1}x(k+n-1) + \cdots + a_0x(k) = 0$$

une équation linéaire homogène à coefficients constants. Le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

est appelé le polynôme caractéristique associé à l'équation homogène.

Définition. L'équation

$$P(\lambda) = 0$$

est appelé l'équation caractéristique associé à l'équation homogène (1.2).

Cette équation a n solutions complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1.8. Équation caractéristique et solutions. Il est possible montrer que pour chaque équation homogène à coefficients constants il existe une solution de la forme $x(k) = \lambda^k$ qui se comporte comme une séquence géométrique.

Théorème. Si λ est une solution de multiplicité 1 de l'équation caractéristique, alors

$$x(k) = \lambda^k$$

est une solution de (1.2). Si λ est une solution de multiplicité m de l'équation caractéristique, alors

$$x^{(0)}(k) = \lambda^k, \quad x^{(1)}(k) = k\lambda^k, \quad x^{(2)}(k) = k^2\lambda^k, \dots, x^{(m-1)}(k) = k^{m-1}\lambda^k$$

sont m solutions linéairement indépendantes de (1.2).

Toutes les solutions de (1.2) peuvent être exprimées comme des combinaisons linéaires des solutions mentionnées ci-dessus.

1.9. **Exemple.** Considérons de nouveau l'équation aux différences :

$$x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) = 0$$

qui a deux racines caractéristiques $\lambda_{1,2} = 1$ de multiplicité $m = 2$.

Selon le théorème précédent, il s'ensuit que

$$x^{(0)}(k) = 1, \quad x^{(1)}(k) = k$$

sont 2 solutions linéairement indépendantes, en accord avec les solutions fondamentales trouvées auparavant.

1.10. Équation caractéristique et solutions (II). Si les coefficients $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont réels et $\lambda = a \pm ib$ sont deux solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique alors

$$w(k) = \rho^k \cos(\theta k), \quad z(k) = \rho^k \sin(\theta k)$$

sont deux solutions linéairement indépendants de (1.2) où

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Si $\lambda = a \pm ib$ est une solution complexe de multiplicité m alors

$$w^{(0)}(k) = \rho^k \cos(\theta k), \dots \quad w^{(m-1)}(k) = k^{m-1} \rho^k \cos(\theta k)$$

$$z^{(0)}(k) = \rho^k \sin(\theta k), \dots \quad z^{(m-1)}(k) = k^{m-1} \rho^k \sin(\theta k)$$

sont m solutions linéairement indépendantes.

2. EXERCICES

Résoudre les équations aux différences suivantes

2.1. **Exercice 1.**

$$x(k+3) - 4x(k+2) + 5x(k+1) - 2x(k) = 0$$

où $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ et $x(2) = 0$.

2.2. **Exercice 2.**

$$x(k+1) = x(k) + x(k-1)$$

où $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$.

2.3. **Exercice 3.**

$$x(k+2) + x(k) = 0$$

où $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$.

2.4. **Exercice 1.** Considérons l'équation aux différences d'ordre $n = 3$

$$x(k+3) - 4x(k+2) + 5x(k+1) - 2x(k) = 0$$

où $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ et $x(2) = 0$.

Solution :

(1) Résoudre l'équation caractéristique :

L'équation caractéristique associée est $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$ qui a comme solutions $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_{2,3} = 1$.

(2) La solution générale est donc

$$x(k) = c_1 2^k + c_2 + c_3 k$$

(3) Fixer les valeurs des constantes c_1, c_2, c_3 à partir des valeurs initiales $x(0)$, $x(1)$ et $x(2)$:

où le système d'équations suivantes doit être satisfait

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 4c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

La solution est $c_1 = -2$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$

(4) La solution qui satisfait les conditions initiales est donc

$$x(k) = -2^{k+1} + 3k + 2$$

2.5. Exercice 2 : Les nombres de Fibonacci. Résoudre

l'équation qui représente les nombres de Fibonacci

$$x(k+1) = x(k) + x(k-1)$$

où $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$.

Solution :

(1) Résoudre l'équation caractéristique :

L'équation caractéristique $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ a les solutions

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

(2) La solution générale est donc

$$x(k) = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

(3) Fixer les valeurs des constantes c_1 et c_2 à partir des valeurs initiales $x(0)$ et $x(1)$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

(4) La solution qui satisfait les deux conditions initiales

est donc

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

2.6. **Exercice 3.** Résoudre l'équation aux différences

$$x(k+2) + x(k) = 0$$

où $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$.

Solution :

(1) Résoudre l'équation caractéristique :

L'équation caractéristique $\lambda^2 + 1 = 0$ a deux solutions complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \pm i$.

(2) Trouver la valeur θ telle que $\cos \theta = \frac{a}{\rho}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\rho}$ (avec $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$):

Nous avons ici $a = 0$ et $b = 1$. Il s'ensuit que $\rho = \sqrt{0+1} = 1$ et donc $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$ et donc $\theta = \pi/2$.

(3) La solution générale est donc

$$x(k) = c_1 \sin(k \frac{\pi}{2}) + c_2 \cos(k \frac{\pi}{2})$$

- (4) Fixer les valeurs des constantes c_1 et c_2 à partir des valeurs initiales $x(0)$ et $x(1)$:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = 0 \\ c_1 \sin(\frac{\pi}{2}) + c_2 \cos(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

- (5) La solution qui satisfait les deux conditions initiales est donc

$$x(k) = \sin(k \frac{\pi}{2})$$

3. RAPPELS THÉORIQUES : POINTS D'ÉQUILIBRE ET STABILITÉ

3.1. États d'équilibre. Considérons une équation aux différences à n pas et à coefficients constants

$$a_n x(k+n) + a_{n-1} x(k+n-1) + a_{n-2} x(k+n-2) + \cdots + a_0 x(k) = b$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, b$ sont n coefficients connus.

Définition. Un équilibre est un nombre \bar{x} auquel il correspond une solution constante $x(k) = \bar{x}$.

Il est facile de montrer que :

- si $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0 \neq 0$, alors il existe un seul équilibre

$$\bar{x} = \frac{b}{a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0}$$

- autrement, si $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0 = 0$

(1) si $b = 0$ chaque \bar{x} est un point d'équilibre

(2) si $b \neq 0$ il n'y a aucun point d'équilibre

3.2. Stabilité de l'équilibre.

Définition. Un équilibre \bar{x} est un équilibre *stable* si $\forall \epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ telle que

$$\sum_{j=0}^{n-1} |x(j) - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |x(k) - \bar{x}| < \epsilon \quad \forall k > k_0$$

c.-à-d. des états initiaux proches de l'équilibre donnent lieu à des trajectoires proches de l'équilibre.

Définition. Un équilibre \bar{x} est un équilibre *asymptotiquement stable* si pour chaque n-tuple $\{x(0), x(1), \dots, x(n-1)\}$ la solution correspondante vérifie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \bar{x}$$

3.3. États d'équilibre.

Théorème. Un équilibre de l'équation linéaire 1.1

- (1) est stable ssi chaque solution $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ de l'équation caractéristique satisfait $|\lambda_i| \leq 1$ et les solutions pour lesquelles $|\lambda| = 1$ ont une multiplicité égale à 1.
- (2) est asymptotiquement stable ssi chaque solution $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ de l'équation caractéristique satisfait $|\lambda_i| < 1$. Chaque équilibre asymptotiquement stable est aussi stable.

3.4. **Exercice.** Calculer l'équilibre et analyser la stabilité pour les systèmes suivants :

$$(1) \quad 6x(k+2) - 5x(k+1) + x(k) = 2$$

$$(2) \quad x(k+2) - 2x(k+1) + 2x(k) = 0$$

$$(3) \quad x(k+3) + x(k) = 0$$

Calculer les solutions des équations suivantes

$$x(k+2) - 4x(k+1) + 3x(k) = 2^k$$

et de l'équation

$$x(k+2) - 4x(k+1) + 3x(k) = b^k, \quad b \neq 1, \quad b \neq 3$$

3.5. **Exercice.** Calculer l'équilibre et analyser la stabilité pour les systèmes suivants :

$$(1) \quad 6x(k+2) - 5x(k+1) + x(k) = 2$$

Solution :

$$(a) \quad \sum a_i = 2 \neq 0, \text{ on a donc un seul équilibre } \bar{x} = \frac{b}{\sum a_i} = 2/2 = 1.$$

(b) L'équation caractéristique est

$$6\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0.$$

Le discriminant Δ vaut 1 et les racines sont donc

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$$

L'équilibre est asymptotiquement stable car $|\lambda_{1,2}| < 1$.

(c) Note : on peut aisément vérifier ce résultat en résolvant explicitement le système. La solution de l'éq. homogène est

$$x^{(h)}(k) = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^k + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Une solution particulière de l'équation de départ est

$$x^{(p)}(k) = 1.$$

Nous avons donc la solution générale suivante pour notre système :

$$x(k) = 1 + c_1\left(\frac{1}{3}\right)^k + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

qui converge en effet vers 1, quels que soient les valeurs (constantes) de c_1 et de c_2 , donc quelles que soient les conditions initiales. L'équilibre est donc en effet asymptotiquement stable.

$$(2) \quad x(k+2) - 2x(k+1) + 2x(k) = 0$$

Solution :

$$(a) \quad \sum a_i = 1 \neq 0, \text{ on a donc un seul équilibre } \bar{x} = \frac{b}{\sum a_i} = 0/1 = 0.$$

(b) L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Le discriminant Δ vaut -4 et les racines sont donc

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

L'équilibre est instable car $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{2} > 1$.

$$(3) \quad x(k+3) + x(k) = 0$$

Solution :

$$(a) \quad \sum a_i = 2 \neq 0, \text{ on a donc un seul équilibre } \bar{x} = \frac{b}{\sum a_i} = 0/2 = 0.$$

(b) L'équation caractéristique est

$$\lambda^3 + 1 = 0.$$

Une première solution $\lambda_1 = -1$ vient à l'esprit.

Le polynôme est donc divisible par $\lambda + 1$. Nous obtenons

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

L'équation $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ a pour racines

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Nous avons donc 3 racines distinctes de multiplicité 1, et $|\lambda_{1,2,3}| = 1$. L'équilibre est donc stable, mais pas asymptotiquement stable.

3.6. **Exercice.** Calculer les solutions des équations suivantes

$$(1) \ x(k+2) - 4x(k+1) + 3x(k) = 2^k$$

Solution:

(a) Solution de l'équation homogène associée $x(k+2) - 4x(k+1) + 3x(k) = 0$:

L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Le discriminant Δ vaut 4 et les racines sont donc

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \{1, 3\}$$

La solution générale de l'éq. homogène est donc :

$$x^{(h)}(k) = c_1 + c_2 \cdot 3^k$$

(b) Solution particulière de l'équation de départ :

Comme nous avons 2^k à droite de l'égalité et que l'équation est linéaire, nous nous attendons à avoir une solution de la forme $c \cdot 2^k$, pour une valeur c à fixer. Une telle solution (si elle existe) doit

satisfaire :

$$c2^{k+2} - 4c2^{k+1} + 3c2^k = 2^k$$

$$\Longleftrightarrow (4c - 8c + 3c)2^k = 2^k$$

$$\Longleftrightarrow 4c - 8c + 3c = 1$$

$$\Longleftrightarrow c = -1$$

Nous avons donc $x^{(p)}(k) = -2^k$

(c) La solution générale du système est donc

$$x(k) = c_1 + c_2 \cdot 3^k - 2^k$$

$$(2) \quad x(k+2) - 4x(k+1) + 3x(k) = b^k, \quad b \neq 1, \quad b \neq 3$$

Solution:

- (a) Solution de l'équation homogène associée $x(k+2) - 4x(k+1) + 3x(k) = 0$:

La solution générale de l'éq. homogène est la même que ci-dessus :

$$x^{(h)}(k) = c_1 + c_2 \cdot 3^k$$

- (b) Solution particulière de l'équation de départ :

Comme nous avons b^k à droite de l'égalité et que l'équation est linéaire, nous nous attendons à avoir une solution de la forme $c \cdot b^k$, pour une valeur c à fixer. Une telle solution doit donc satisfaire :

$$cb^{k+2} - 4cb^{k+1} + 3cb^k = b^k$$

$$\Longleftrightarrow (cb^2 - 4cb + 3c)b^k = b^k$$

$$\Longleftrightarrow cb^2 - 4cb + 3c = 1$$

$$\Longleftrightarrow c = \frac{1}{b^2 - 4b + 3}$$

Nous avons donc $x^{(p)}(k) = \frac{b^k}{b^2 - 4b + 3}$

(c) La solution générale du système est donc

$$x(k) = c_1 + c_2 \cdot 3^k + \frac{b^k}{b^2 - 4b + 3}$$