Lektion 23

In dieser Lektion wird nun formal die Semantik prädikatenlogischer Formeln definiert. Dabei spielt wieder der Begriff der Interpretation eine zentrale Rolle, allerdings nun angepasst an die Gegebenheiten der Prädikatenlogik. Aus der Semantik ergibt sich dann, welche Formeln äquivalent, d.h. gleichbedeutend, sind und wie Formeln somit umgewandelt und vereinfacht werden können.

12.4 Semantik prädikatenlogischer Formeln

Was bedeutet eine prädikatenlogische Formel

$$\forall x\ (\ P(g(x,a)) \rightarrow\ Q(x,f(y))\ ),$$

wann ist sie wahr bzw. falsch?

Es hängt davon ab, was die einzelnen Bestandteile der Formel bedeuten sollten, d.h. welche Bedeutung die darin vorkommenden Prädikatensymbole, die Funktionssymbole, die Konstanten und ggf. auch die Variablen haben sollen und vor allem, über welche Menge von Werten überhaupt gesprochen werden soll.

Analog wie bei der Aussagenlogik wird der Begriff der *Interpretation* dafür verwendet, alle die Dinge anzugeben, die festgelegt werden müssen, um den Wahrheitswert einer Formel bestimmen zu können.

12.4.1 Interpretationen in der Prädikatenlogik

Definition 12.44: Interpretation in der Prädikatenlogik

Eine ***Interpretation*** A für eine **prädikatenlogische Formel** besteht aus einer nicht leeren **Menge** $\boldsymbol{U_A}$ als Wertebereich (Grundmenge, Diskursuniversum) und einer Zuordnung, die

- jeder Variablen x einen Wert $x_A \in U_A$ zuweist
- jedem Konstantensymbol c einen Wert $c_A \in U_A$ zuweist,
- jedem *n*-stelligen Funktionssymbol *f* eine *n*-stellige Funktion

  $$f_A : U_A{}^n \rightarrow U_A$$

  zuweist und
- jedem *n*-stelligen Prädikat *P* eine *n*-stellige Relation

$P_A \subseteq U_A^n$

zuweist.

Beispiel 12.45 - Interpretationen für prädikatenlogische Formeln

Betrachten wir die Formel

Q(f(a), g(b,x)),

dann wären folgendes zwei Beispiele für mögliche Interpretationen:

- **Interpretation *A*:**

Grundmenge:	$\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen)	
Funktionen:	f_A (einstellig)	$f_A(n) = 2n$, d.h. verdoppeln
	g_A (zweistellig):	$g_A(n, m) = n + m$, d.h. Addition
Konstanten:	a_A:	0
	b_A:	1
Variablen:	x_A:	3
Prädikate:	Q_A (2-stellig):	$\leq$-Relation

- **Interpretation B:**

Grundmenge:	Wörter Σ^* über Alphabet $\Sigma = \{a,b,c\}$	
Funktionen:	f_B (einstellig)	Zeichen a anhängen, d.h. $f_B(w) = wa$
	g_B (zweistellig)	Konkatenation, d.h. $g_B(u,v) = uv$
Konstanten:	a_B	c
	b_B	abc
Variablen:	x_B	bb
Prädikate:	Q_B (2-stellig)	Präfix-Relation (Q(u,v) ist wahr, falls u Anfangsstück von v ist)

Ist eine Interpretation gegeben, dann ergibt sich daraus eindeutig ein Wahrheitswert für eine Formel. Wie bei der Definition der Syntax von Formeln gehen wir in zwei Schritten vor:

- Zunächst definieren wir, welcher Wert durch einen Term beschrieben wird. Ein Term liefert also immer ein Element der Grundmenge als Ergebnis.
- Darauf aufbauend wird dann die Semantik von Formeln definieren. Eine Formel liefert immer einen Wahrheitswert *true* oder *false* als Ergebnis.

Die Vorgehensweise für die Semantikdefinition ist wieder kompositionell und syntaxorientiert, d.h. die Bedeutung syntaktisch zusammengesetzter Konstrukte ergibt sich aus der Bedeutung der Teilkonstrukte.

12.4.2 Interpretation von Termen und Formeln

Definition 12.46 - Wert eines Terms

Für jeden Term t ergibt sich für eine Interpretation $\mathcal{A}$ ein Wert $\mathcal{A}(t) \in U_A$ in folgender Weise:

- Falls t ein Konstantensymbol c ist:

  $\mathcal{A}(c) = c_{\mathcal{A}}$. (d.h. durch Interpretation zugeordneter Wert)

- Falls t ein Variablensymbol x ist:

  $\mathcal{A}(x) = x_{\mathcal{A}}$. (d.h. durch Interpretation zugeordneter Wert)

- Falls t ein zusammengesetzten Term $f(t_1,...,t_n)$ gilt

  $\mathcal{A}(\ f(t_1,...,t_n)\ ) = f_{\mathcal{A}}(v_1,...,v_n)$

  wobei

  $v_1 = \mathcal{A}(t_1)$

  …

  $v_n = \mathcal{A}(t_n)$

  d.h. die Funktion $f_{\mathcal{A}}$, die die Interpretation dem Funktionssymbol f zugeordnet hat, wird auf die Resultate der Argumentterme angewendet.

Dabei sind c_A, x_A, f_A die in der Interpretation $\mathcal{A}$ zugeordneten Werte bzw. Funktionen.

Die Definition der Semantik erfolgt also auch hier wieder kompositionell, "bottom-up" anhand der syntaktischen Struktur der Formeln.

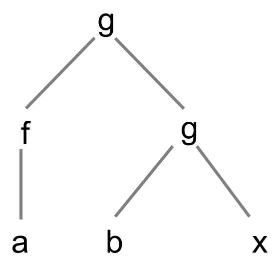
Beispiel 12.47 - Wert eines Terms

Wir betrachten den Term

g(f(a), g(b,x))

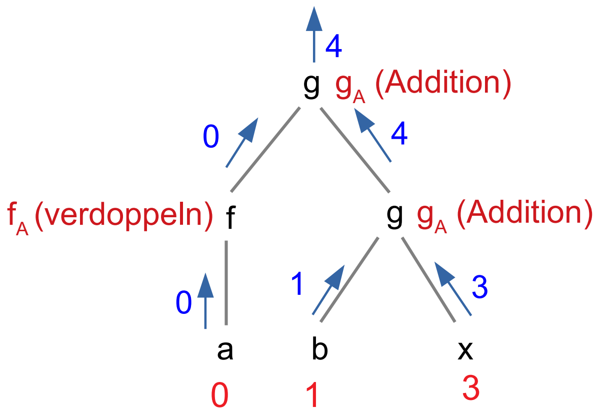
und die Interpretationen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ aus dem vorigen Beispiel 12.45.

Syntaktischer Aufbau des Terms als abstrakter Syntaxbaum:



Die oben angegebene Definition beschreibt, dass die Berechnung der Werte wieder "bottum-up", ausgehend von den Blättern, erfolgt.

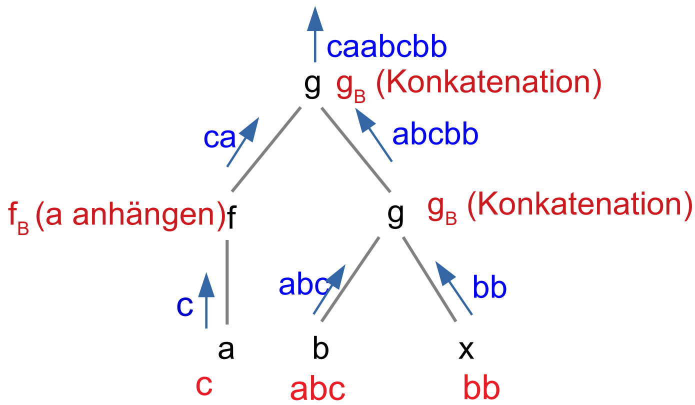
- Interpretation A: Grundmenge $\mathbb{N}$



Die Dinge, die durch die Interpretation festgelegt sind, sind hier rot angegeben, die Semantik der Teilterme sind die blau angegebenen Werte.

Ergebnis: A(**g(f(a),g(b,x))**) = 4

- Interpretation B: Grundmenge {a,b,c}*



Ergebnis: B(**g(f(a),g(b,x))**) = caabcbb

Um die Semantik von Formeln mit Quantoren definieren zu können, wird folgende "Update"-Operation für Interpretationen benötigt, die in einer gegebenen Interpretation einer Variablen einen neuen Wert zuweist.

Definition 12.48 - Update-Operation $A_{[x=v]}$ für Interpretationen

Ist A eine Interpretation über Grundmenge U_A, x eine Variable und v ein Wert $v \in U_A$ ein, dann bezeichnet $A_{[x=v]}$ die Interpretation, die allen Variablen den gleichen Wert wie A zuordnet,mit der einzigen Ausnahme, dass in $A_{[x=v]}$ Variable x der Wert v zugeordnet ist.

Es ist dabei egal, ob in Interpretation *A* zu Variable *x* ein anderer oder bisher gar kein Wert zugeordnet ist.

Damit kann nun wieder am syntaktischen Aufbau orientiert die Bedeutung prädikatenlogischer Formeln definiert werden.

Definition 12.49: Semantik prädikatenlogischer Formeln

Der Wahrheitswert *A*(*F*) einer prädikatenlogischen Formel *F* unter einer Interpretation *A* ist folgendermaßen definiert:

- Falls *F* von der Form $\boldsymbol{P(t_1,\ldots,t_n)}$:

$$A(P(t_1,\ldots,t_n))=\begin{cases} true & \text{falls}(v_1,\ldots,v_n)\in P_A \\ false & \text{sonst}\end{cases}$$

  wobei

  $v_1 = A(t_1)$ (Wert von Term t_1 unter Interpretation A)

  …

  $v_n = A(t_n)$ (Wert von Term t_n unter Interpretation A)

  d.h. die Formel liefert *true*, falls die Resultate der Argumentterme in der Relation P_A zueinander stehen.

- Falls *F* von der Form $\neg G$:

$$A(\neg G)=\begin{cases} true & \text{falls } A(G)=false \\ false & \text{falls } A(G)=true\end{cases}$$

- Falls *F* von der Form $\boldsymbol{G \wedge H}$:

$$A(G\wedge H)=\begin{cases} true & \text{falls } A(G)=true \text{ und } A(H)=true \\ false & \text{sonst}\end{cases}$$

- Falls *F von der Form* $\boldsymbol{G \vee H}$:

$$A(G\vee H)=\begin{cases} true & \text{falls } A(G)=true \text{ oder } A(H)=true \\ false & \text{sonst}\end{cases}$$

- Falls F von der Form **(***G***)** ist, d.h. ein geklammerter Ausdruck:

$$A((G))=A(G)$$

- Falls *F von der Form* $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{G}$:

$$A(\forall x\, G)=\begin{cases} true & \text{falls für alle } d\in U_A \text{gilt: } A_{[x=d]}(G)=true \\ false & \text{sonst}\end{cases}$$

  d.h. egal welcher Wert aus der Grundmenge für Variable *x* gewählt wird, muss die Teilformel G wahr sein.

- Falls *F von der Form* $\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{G}$:

$$A(\exists x\, G) = \begin{cases} true & \text{falls es ein } d \in U_A \text{ gibt mit } A_{[x=d]}(G) = true \\ false & \text{sonst} \end{cases}$$

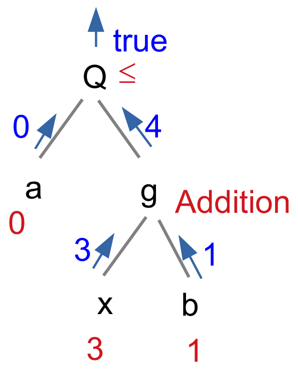
d.h. es muss mindestens ein Wert aus der Grundmenge für Variable *x* gefunden werden können, so dass die Teilformel G wahr wird.

Beispiel 12.50 - Semantik prädikatenlogischer Formeln

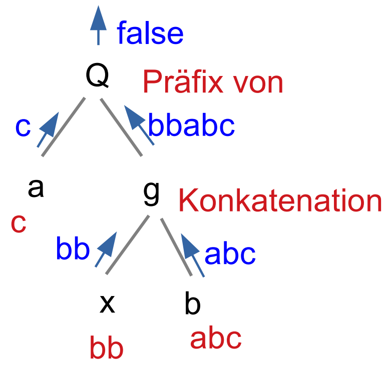
Wir bestimmen den Wahrheitswert folgender Formeln unter den Interpretationen *A* und B aus Beispiel 12.45 - Interpretationen für prädikatenlogische Formeln.

(1) Formel **Q(a, g(x,b))**

Interpretation ***A***:



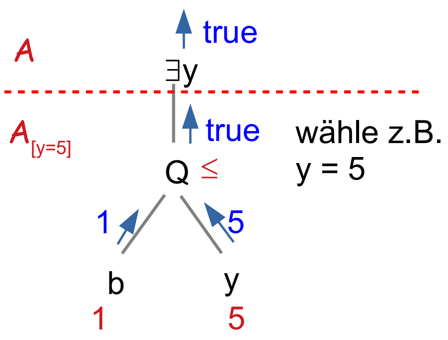
Interpretation **B**:



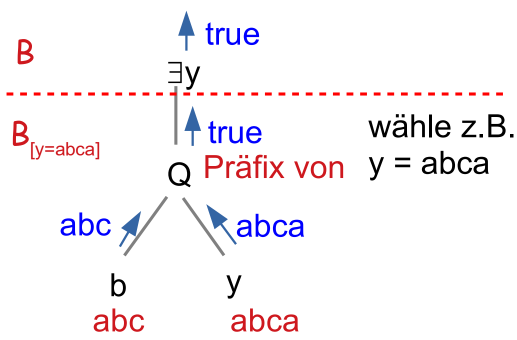
Ergebnis: ***A***(Q(a, g(x,b))) = true ***B***(Q(a, g(x,b))) = false

(2) Formel ∃***y*** **Q(b,*y*)**

Interpretation ***A***:



Interpretation **B**:



Ergebnis: ***A***(∃*y* Q(b,*y*)) = true **B**(∃*y* Q(b,*y*)) = true

Es wurde jeweils ein Wert für *y* gefunden, so dass Q(b,*y*) = true gilt.

(3) Formel ∀***x*** ***Q(x,*** **g(b,x))**

Interpretation ***A***:

Egal welchen Wert $n \in \mathbb{N}$ wir für *x* wählen, es muss

$\boldsymbol{A}_{[x=n]}(Q(x, g(b,x))) = true$

gelten, d.h. für jeden Wert n muss $n \leq 1+n$ gelten. Das ist zutreffend.
Also ergibt sich:

$$\boldsymbol{A}(\forall x\, Q(x,\, g(x,b))) = \text{true}$$

Interpretation $\boldsymbol{B}$:

Egal welches Wort $w \in \{a,b,c\}^*$ wir für x wählen, es müsste

$$\mathbf{B}_{[x=w]}(Q(x,\, g(b,x))) = \text{true}$$

gelten, d.h. für jedes Wort w müsste w ein Präfix von abc$\cdot w$ sein.
Das trifft aber nicht zu, z.B. für w = bb ist bb nicht Präfix von abcbb.
Somit ergibt sich:

$$\mathbf{B}(\forall x\, Q(x,\, g(x,b))) = \text{false}$$

(4) Formel $\forall \boldsymbol{x}\, \forall \boldsymbol{y}\; (\, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{Q}(\mathbf{f}(\boldsymbol{x}),\, \mathbf{f}(\mathbf{y}))\,)$

Interpretation $\boldsymbol{A}$:

Egal welchen Wert $n \in \mathbb{N}$ wir für x wählen und welchen Wert $m \in \mathbb{N}$ für y, es muss immer gelten:

$$\boldsymbol{A}_{[y=m][x=n]}(Q(x,y) \rightarrow Q(f(x),\, f(y))\,) = \text{true}$$

Da für beliebige Zahlen n und m aus $n \leq m$ auch $2n \leq 2m$ folgt, trifft dies zu.
Somit ergibt sich:

$$\boldsymbol{A}(\forall x\, \forall y\, (Q(x,y) \rightarrow Q(f(x),\, f(y)))) = \text{true}$$

Interpretation $\mathbf{B}$:

Egal welches Wort $u \in \{a,b,c\}^*$ wir für x wählen und welches Wort $v \in \{a,b,c\}^*$ für y, es müsste immer gelten:

$$\mathbf{B}_{[y=w][x=u]}(Q(x,y) \rightarrow Q(f(x),\, f(y))\,) = \text{true},$$

d.h. wenn u Präfix von w, dann muss auch ua Präfix von wa sein.
Dies trifft aber nicht immer zu, z.B. für u = ab, w = abb ist u Präfix von w, aber wa = aba ist nicht Präfix von ua = abba.
Somit folgt:

$$\mathbf{B}(\forall x\, \forall y\, (Q(x,y) \rightarrow Q(f(x),\, f(y)))\,) = \text{false},$$

Aufgabe 12.51 - Semantik prädikatenlogischer Formeln

Es sei Interpretation $\boldsymbol{A}$ wie im vorigen Beispiel gegeben, d.h. mit Grundmenge $\mathbb{N}$ und Prädikat Q wird als $\leq$-Relation interpretiert. Welcher Wahrheitswert ergibt sich dann für folgende Formeln?

(1) $\forall x\, \exists y\, Q(x,y)$

(2) $\exists y\, \forall x\, Q(x,y)$

12.4.3 Erfüllbarkeit, Gültigkeit und Unerfüllbarkeit

Die Begriffe Erfüllbarkeit, Gültigkeit und Unerfüllbarkeit sind bei prädikatenlogischen Formeln analog wie in der Aussagenlogik definiert, nur die Art der Interpretationen ist eine andere.

Definition 12.52: Erfüllbarkeit, Gültigkeit und Unerfüllbarkeit

- Eine prädikatenlogische Formel F heißt ***erfüllbar***, wenn es *mindestens eine Interpretation* A gibt, so dass F in A wahr ist.
- Eine Formel F heißt **(*allgemein-*)*gültig***, wenn für *jede Interpretation* A gilt, dass F in A wahr ist.
- Eine Formel F heißt ***unerfüllbar***, wenn es *keine Interpretation* A für F gibt, so dass F in A wahr ist.

Beispiel 12.53 - Gültige, erfüllbare und unerfüllbare Formeln

- Die Formel
  $$\forall x\ Q(x,\ g(b,x))$$
  ist *erfüllbar*, aber nicht gültig, denn in Beispiel 12.50 wurde gezeigt, dass Interpretation A das Ergebnis *true* liefert und Interpretation B das Ergebnis *false*.
- Die Formel
  $$\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ P(x)$$
  ist *gültig*, denn in jeder Interpretation ist $\exists x\ P(x)$ auch wahr, falls $\forall x\ P(x)$ ist. Somit liefert die Implikation immer das Resultat *true*.
- Die Formel
  $$\forall x\ P(x) \wedge \exists x\ \neg P(x)$$
  ist *unerfüllbar*. Wenn $\forall x\ P(x)$ wahr ist, dann kann $\exists x\ \neg P(x)$ nicht wahr sein, somit ist das Gesamtergebnis immer *false*.

Anmerkungen

- Der Begriff "Tautologie" wird bei prädikatenlogischen Formeln nicht verwendet.
- Für die Prädikatenlogik gelten, was Erfüllbarkeit, Gültigkeit und Unerfüllbarkeit betrifft, die gleichen Zusammenhänge zwischen einer Formeln F und deren Negation $\neg F$ wie in der Aussagenlogik, siehe Eigenschaft 12.14.

12.5 Äquivalenzeigenschaften der Prädikatenlogik

Analog wie schon in der Aussagenlogik sind zwei Formeln semantisch äquivalent, wenn unter jeder möglichen Interpretation beide Formeln jeweils den gleichen Wahrheitswert liefern. Äquivalente Formeln bedeuten also das gleiche und können somit gegeneinander ausgetauscht werden.

Definition 12.54: Äquivalenz von Formeln

Zwei prädikatenlogische Formeln *F* und *G* heißen ***äquivalent***, wenn für jede Interpretation *A* gilt:

$A(F) = A(G)$

Folgende wichtige Eigenschaften prädikatenlogischer Formeln sollten Sie sich einprägen, um sinnvoll mit Prädikatenlogik umgehen zu können.

Eigenschaft 12.55 - Äquivalenzen entsprechend Aussagenlogik

(1) Jede aussagenlogische Äquivalenz, siehe Eigenschaft 12.18, gilt auch in der Prädikatenlogik

Beispiel 12.56 - Äquivalenzen entsprechend Aussagenlogik

- In der Aussagenlogik sind die Operatoren und kommutativ, d.h. für beliebige aussagenlogische Formeln F und G gilt $F \wedge G = G \wedge F$ oder $F \vee G = G \vee F$. Entsprechendes gilt auch, wenn F und G prädikatenlogische Formeln sind.
- Entsprechendes gilt auch für die anderen Eigenschaften aus 12.18.

Eigenschaft 12.57 - Quantoren und Negation vertauschen

Für beliebige prädikatenlogische Formeln *F* gelten folgende Äquivalenzen:

(2) $\neg\forall x\, F \;=\; \exists x\, \neg F$

(3) $\neg\exists x\, F \;=\; \forall x\, \neg F$

- zu (2): Wenn eine Eigenschaft nicht für alle Werte der Grundmenge gilt, dann gibt es (mindestens) einen Wert, für den die Eigenschaft nicht gilt.
- zu (3): Wenn es keinen Wert gibt, für den die Eigenschaft *F* gilt, muss für alle Werte zutreffen, dass die Eigenschaft nicht gilt.
- Einen Allquantor kann man sich als ein ggf. unendliches *Und* vorstellen, d.h.

  $\forall x\, P(x)$

  verhält sich wie

  $P(v_1) \wedge P(v_2) \wedge P(v_3) \wedge ...$

über alle Werte v_i der Grundmenge. Entsprechend kann man sich einen Existenzquantor

$\exists x\ P(x)$

wie ein ggf. unendliches *Oder* über alle Elemente der Grundmenge vorstellen:

$P(v_1) \vee P(v_2) \vee P(v_3) \vee \ldots$

Die Äquivalenzen bei (2) und (3) sind dann analog zu den De-Morgan'schen Gesetzen in der Aussagenlogik.

Eigenschaft 12.58 - Quantoren zusammenziehen

Für beliebige prädikatenlogische Teilformeln F und G gelten folgende Äquivalenzen:

(4) $\forall x\ F \wedge \forall x\ G \quad = \quad \forall x\ (F \wedge G)$

(5) $\exists x\ F \vee \exists x\ G \quad = \quad \exists x\ (F \vee G)$

- zu (4): wenn für jeden Wert der Grundmenge die Eigenschaft F gilt und für jeden Wert auch die Eigenschaft G, dann gilt offensichtlich für jeden Wert auch die Eigenschaft $F \wedge G$.
- zu (5): Gibt es einen Wert der Grundmenge, der die Eigenschaft *F* erfüllt oder gibt es einen Wert, der *G* erfüllt, dann gibt es auch mindestens einen Wert, der die Eigenschaft $F \vee G$ erfüllt.

Eigenschaft 12.59 - Vertauschung von Quantoren

Für beliebige prädikatenlogische Formeln F gelten folgende Äquivalenzen:

(6) $\forall x\ \forall y\ F \quad = \quad \forall y\ \forall x\ F$

(7) $\exists x\ \exists y\ F \quad = \quad \exists y\ \exists x\ F$

- Gleichartige Quantoren dürfen in der Reihenfolge vertauscht werden. Für Quantoren unterschiedlicher Art gilt das nicht (siehe Aufgabe 12.51)

Eigenschaft 12.60 - Erweiterung des Bindungsbereichs

Falls *x* in *F* nicht frei vorkommt, gilt für Formeln F und G:

(8) $F \wedge \forall x\ G \quad = \quad \forall x\ (F \wedge G)$

(9) $F \vee \forall x\ G \quad = \quad \forall x\ (F \vee G)$

(10) $F \wedge \exists x\ G \quad = \quad \exists x\ (F \wedge G)$

(11) $F \vee \exists x\ G \quad = \quad \exists x\ (F \vee G)$

- Kommt eine Variable *x* nicht frei in einer Teilformel *F* vor, dann ist der

Wahrheitswert der Formel unabhängig davon, welcher Wert x in einer Interpretation zugeordnet wird. Deshalb kann der Bindungsbereich der Quantoren wie angegeben erweitert werden.

- Da $\wedge$ und $\vee$ kommutativ sind, gilt entsprechendes auch, wenn der Quantor auf der linken Seite steht, z.B.

  $\forall x\, G \wedge F \;=\; \forall x\,(G \wedge F)$

  …

Eigenschaft 12.61 - Äquivalenz bei konsistenter Umbenennung

Für beliebige prädikatenlogische Formeln F und G gilt:

(12) Entsteht G aus F durch konsistente Umbenennung gebundener Variablen (d.h. wenn keine neuen Bindungen entstehen), dann sind F und G äquivalent.

Aufgabe 12.62 - Äquivalenz von Formeln

Gelten auch folgende Äquivalenzen?

(1) $\forall x\, F \vee \forall x\, G \;=\; \forall x\,(F \vee G)$

(2) $\exists x\, F \wedge \exists x\, G \;=\; \exists x\,(F \wedge G)$

Aufgabe 12.63 - Äquivalente Umformungen

Zeigen Sie durch *Umformungen*, dass die Formeln zueinander äquivalent sind.

(1) $\neg\forall x\,(\text{Reich}(x) \rightarrow \text{Glücklich}(x))$

und

$\exists x\,(\text{Reich}(x) \wedge \neg\text{Glücklich}(x))$

(2) $\neg\exists x\,\neg\text{Glücklich}(x)$

und

$\forall x\,\text{Glücklich}(x)$

(3) $\exists x\,(\neg G(x) \wedge \neg R(x))$

und

$\neg\forall x\,(G(x) \vee R(x))$

12.5.1 Pränexnormalform

Aus der Aussagenlogik kennen Sie vermutlich schon den Begriff der *Normalformen,* z.B. konjunktive Normalform KNF oder disjunktive Normalform DNF, die eine standardisierte Darstellung von Formeln angeben. Auch in der Prädikatenlogik gibt es bestimmte Normalformen. Wir betrachten hier eine Ausprägung, die sog. *Pränexnormalform.*

Definition 12.64 - Pränexnormalform

Eine prädikatenlogische Formel F ist in **Pränexnormalform**, wenn F von der Form

$$Q_1 x_1\ Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\ G$$

ist, wobei

Q_i	ein Quantor ($\forall$ oder $\exists$) ist,
x_i	eine Variable ist und
G	eine Formel ist, die keine Quantoren mehr enthält

Pränexnormalform heißt also, dass alle Quantoren "ganz vorne"/"ganz außen" stehen (von "prä" = davor).

Beispiel 12.65 - Pränexnormalform

Folgende Formeln haben Pränexnormalform:

(1) $\forall \boldsymbol{x}\ R(x,y)$

(2) $\forall \mathbf{y}\ \exists \boldsymbol{x}\ (\neg R(x,a) \rightarrow \mathrm{P(y)})$

(3) $R(\ \mathrm{f}(x), \mathrm{g}(\mathrm{a},y)\ )$ — kein Quantor ist auch erlaubt

Folgende Formel sind *nicht* in Pränexnormalform:

(4) $\exists x\ R(x,a) \rightarrow \forall y\ P(y)$ — $\exists x$ und $\forall y$ innerhalb von $\rightarrow$

(5) $\forall x \neg \forall y\ (\ P(x) \wedge R(x, y)\ )$ — Negation vor $\forall$y

Aufgabe 12.66 - Pränexnormalform

Welche der folgenden Formeln sind in Pränexnormalform?

(1) $\forall \mathrm{y}\ \exists x\ (\ P(y) \rightarrow R(x,a)\ )$

(2) $\exists x\ R(x,a) \wedge P(x)$

(3) $\exists x\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ \neg(\ P(x) \wedge R(x,y)\ \rightarrow R(z, x)\ )$

Eigenschaft 12.67 - Umwandlung in Pränexnormalform

Jede prädikatenlogische Formel F kann durch äquivalente Umformungen in Pränexnormalform umgewandelt werden.

Beispiel 12.68 - Umformung in Pränexnormalform

Umformung von $\forall x\ A(x) \rightarrow \neg\exists x\ B(x)$ in Pränexnormalform:

$\forall x\ A(x)\ \rightarrow\ \boldsymbol{\neg\exists x}\ B(x)$	Negation und Existenzquantor vertauschen
$= \forall x\ A(x)\ \boldsymbol{\rightarrow}\ \forall x\ \neg B(x)$	Implikation auflösen
$= \boldsymbol{\neg\forall x}\ A(x)\ \vee\ \forall x\ \neg B(x)$	Negation und Allquantor vertauschen

$= \exists x\, \neg A(x) \;\vee\; \forall x\, \neg B(x)$	Bindungsbereich $\exists$x erweitern, x ist nicht frei in $\forall x\, \neg B(x)$
$= \exists x\, (\neg A(x) \;\vee\; \forall x\, \neg B(x)\,)$	Umbenennung von $\forall$x in $\forall$y
$= \exists x\, (\neg A(x) \;\vee\; \forall y\, \neg B(y)\,)$	Bindungsbereich von $\forall y$ erweitern, y ist nicht frei in $\neg A(x)$
$= \boldsymbol{\exists x\, \forall y}\, (\neg A(x) \;\vee\; \neg B(y)\,)$	Pränexnomalform

Anmerkung

Die Pränexnormalform ist nicht eindeutig, es kann zu einer Formel mehrere syntaktisch unterschiedliche Darstellungen in Pränexnormalform geben. Beispielsweise kann die Formel

$$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$$

auf unterschiedliche Weise in Pränexnormalform umgeformt werden:

$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$	Quantoren zusammenziehen
$= \;\boldsymbol{\forall x}\, (A(x) \wedge B(x))$	Pränexnormalform

oder auch:

$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$	Bindungsbereich erweitern
$= \;\forall x\, (\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)\,)$	Umbenennung
$= \;\forall x\, (A(x) \wedge \forall y\, B(y))$	Bindungsbereich erweitern
$= \;\boldsymbol{\forall x\, \forall y}\, (A(x) \wedge B(y))$	Pränexnormalform, Vertauschen der Allquantoren
$= \;\boldsymbol{\forall y\, \forall x}\, (A(x) \wedge B(y))$	auch Pränexnormalform

Aufgabe 12.69 - Umformung in Pränexnormalform

Wandeln Sie die Formel

$$\neg(\, \exists x A(x) \;\vee \neg \forall x\, B(x)\,)$$

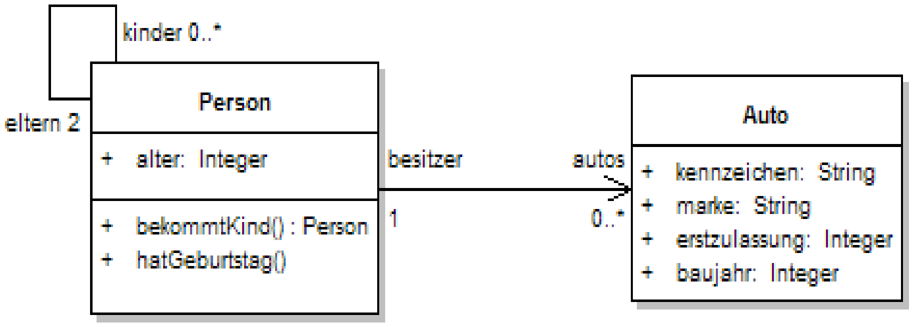
in Pränexnormalform um.

12.6 Ausblick: Object Constraint Language (OCL)

Object Contstraint Language (OCL) ist eine Sprache, die zum UML-Standard (Unified Modeling Language) gehört. OCL dient dazu, Aussagen über oder Abfragen zu Eigenschaften von UML-Modellen formulieren zu können. Es werden dazu Konzepte der Objektorientierung, der Mengenlehre und der Prädikatenlogik kombiniert.

Beispiel 12.70 - OCL-Spezifikation

Folgendes UML-Klassendiagramm mit den Klassen **Person** und **Auto** sei gegeben:



(1) Die Eigenschaft "*Alle Kinder einer Person sind jünger als die Person selbst.*" kann in OCL folgendermaßen angegeben werden:

```
context Person
inv: self.kinder->forAll(k|k.alter < self.alter)
```

- Durch **`context`** `Person` wird angegeben, dass beliebige Objekte der Klasse `Person` betrachtet werden.
- Mit **`inv:`** wird gekennzeichnet, dass die folgende Eigenschaft eine Invariante ist, d.h. eine Eigenschaft, die immer gelten muss.
- Mit **`self`**`.kinder` wird die Menge aller Objekt bezeichnet, die über die `kinder`-Assoziation mit dem jeweiligen Personenobjekt verbunden sind.
- **`forAll`** entspricht dem Allquantor, bezogen auf die gegebene Menge von Objekten.

(2) Die Eigenschaft "*Es gibt mindestens eine Person, die ein Auto besitzt.*" kann so formuliert werden:

```
context Person
inv: Person.allInstances->exists(p|p.autos->size()>0)
```

- `Person.allInstance` ist die Menge aller Objekte der Klasse `Person`, die im Moment existieren.
- **`exists`** entspricht dem Allquantor, bezogen auf die gegebene Menge.

OCL wird beispielsweise in Werkzeugen für die *modellgesteuerte Software-Entwicklung* (model-driven software development, MDSD) verwendet. Bei der modellgesteuerten Softwareentwicklung werden Teile von Softwaresystemen automatisch aus abstrakten Modellen, wie z.B. UML-Klassendiagrammen, generiert. OCL-Formeln dienen dabei dazu, weitergehende semantische Eigenschaften in den Modellen zu spezifizieren oder Modellabfragen in Transformationsregeln für die Code-Erzeugung zu formulieren.

Zusammenfassung zu Lektion 23

Diese Fragen sollten Sie nun beantworten können

- Was gehört zu einer Interpretation in der Prädikatenlogik?
- Wie ist die Semantik von Termen und von prädikatenlogischen Formeln definiert?
- Wann sind prädikatenlogische Formeln erfüllbar, allgemeingültig oder unerfüllbar?
- Wann sind zwei prädikatenlogische Formeln semantisch äquivalent?
- Welche Äquivalenzeigenschaften gelten für prädikatenlogische Formeln? Wie können prädikentlogische Formeln damit äquivalent umgewandelt werden?
- Was ist die Pränexnormalform für prädikatenlogische Formeln?
- Was ist OCL und welcher Zusammenhang besteht zur Prädikatenlogik?