Lektion 21

Der große Teil zu den formalen Sprachen ist nun abgeschlossen und in Kapitel 12 wenden wird und der Prädikatenlogik zu. Dies ist eine Erweiterung der Aussagenlogik, die eine große Rolle in der Mathematik und Informatik spielt. In dieser Lektion werden zunächst die Grundlagen der Aussagenlogik aufgefrischt.

Kap. 12 Einführung in die Prädikatenlogik

Inhalt

- Auffrischung: Aussagenlogik
- Syntax prädikatenlogischer Formeln
- Semantik prädikatenlogischer Formeln
- Äquivalente Umformungen prädikatenlogischer Formeln

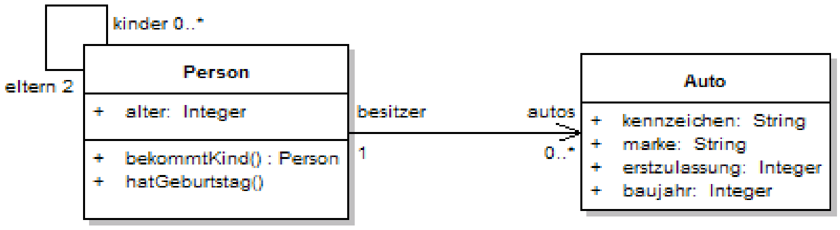
12.1 Motivation

Im ersten Semester haben Sie bereits die Aussagenlogik als eine formale Logik kennengelernt und in bei der Programmierung haben Sie die entsprechenden logischen Operatoren (Und, Oder, Nicht) auch praktisch angewendet. Die Aussagenlogik ist allerdings sehr eingeschränkt, was die Ausdrucksfähigkeit betrifft.

In einem Software-Projekt könnte es beispielsweise nötig sein, bestimmte Eigenschaften formal zu spezifizieren. Sie haben schon UML-Klassendiagramme kennengelernt, die den Aufbau von Klassen und die Beziehungen (Assoziationen) zwischen Objekten verschiedener Klassen darstellen können.

Beispiel 12.1 - Entwurf mit UML-Klassendiagrammen

Folgendes Klassendiagramm beschreibt zwei Klassen *Person* und *Auto* sowie Assoziationen dazwischen.



Manche Eigenschaften lassen sich durch das Klassendiagramm ausdrücken, z.B. dass jedes Auto genau einen Besitzer hat oder dass jede Person zwei Personen als Eltern hat. Andere semantische Eigenschaften, die wichtig sein können, lassen sich aber nicht im Klassendiagramm ausdrücken und auch nicht mittels Aussagenlogik formulieren, z.B.

"Für jede Person gilt: Alle Kinder der Person sind jünger als die Person selbst."

"Es gibt mindestens eine Person, die ein Auto besitzt"

Die sog. *Prädikatenlogik* (engl. *first-order logic*, *predicate logic*) ist eine Erweiterung der Aussagenlogik, die es erlaubt solche Eigenschaften zu formalisieren.

12.2 Aussagenlogik

Da die Prädikatenlogik auf der Aussagenlogik aufbaut, werden hier zunächst die Grundlagen der Aussagenlogik wiederholt. Aussagenlogische Formeln bauen darauf auf, dass eine Menge von aussagenlogischen Variablen gegeben ist. Diese Variablen stehen für eine logischen Wert "wahr" oder "falsch".

Definition 12.2 - Syntax aussagenlogischer Formeln

Aussagenlogische Formeln können folgendermaßen aufgebaut werden:

- *true* und *false* sind elementare aussagenlogische Formeln.
- Jede Aussagenvariable (z.B. *p*, *q*, *istGrün)* ist eine elementare aussagenlogische Formel.
- Sind F und G aussagenlogische Formeln, dann können auch folgende zusammengesetzte Formeln gebildet werden:

$\neg F$	(Negation, "nicht F")
$F \wedge G$	(Konjunktion, "F und G")
$F \vee G$	(Disjunktion, "F oder G")
$F \rightarrow G$	(Implikation, "wenn F, dann G", "aus F folgt G")

- Um jede (Teil-)Formel F können Klammern (F) gesetzt werden.

Beispiel 12.3 - Aussagenlogische Formeln

Folgendes sind Beispiele für aussagenlogische Formel (mit p, q und r als Variablen).

true
p
$(p \lor q) \land \neg r$
$\neg p \lor q \land r \rightarrow \neg r \lor p$

Um solche Formeln richtig "lesen" zu können, ist es wichtig, die Vorrangregeln zu beachten, die bei aussagenlogischen Formel gelten.

Notationskonvention 12.4 - Präzedenz der Operatoren

Die Operatoren haben eine Bindungspriorität entsprechend der hier angegebenen Reihenfolge:

$\neg$	(bindet am stärksten)
$\land$	
$\lor$	
$\rightarrow$	(bindet am schwächsten)

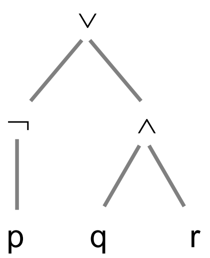
Werden diese Präzedenzregeln berücksichtigt, ergibt sich für aussagenlogische Formeln ein struktureller Aufbau, der als abstrakter Syntaxbaum dargestellt werden kann.

Beispiel 12.5 - Struktureller Aufbau von Formeln

Der abstrakte Syntaxbaum für die Formel

$\neg p \lor q \land r$

sieht so aus:



Aufgabe 12.6 - Struktureller Aufbau aussagenlogischer Formeln

Stellen Sie den strukturellen Aufbau der Formel

$\neg p \lor q \land r \rightarrow \neg r \lor p$

unter Berücksichtigung der oben angegebenen Präzedenzregeln als abstrakten Syntaxbaum dar.

12.2.1 Semantik der Aussagenlogik

Ist eine aussagenlogische Formel, wie z.B. $(p \vee q) \wedge \neg r$, wahr oder falsch? Das kann so nicht gesagt werden. Es hängt davon ab, ob die darin vorkommenden aussagenlogischen Variablen wahr oder falsch sind, d.h. wie sie "interpretiert" werden. Dafür ist auch wichtig, wie sich die aussagenlogischen Operatoren verhalten.

Definition 12.7 - Semantik der aussagenlogischen Operatoren

Die Semantik der aussagenlogischen Operatoren ist durch folgende Wahrheitswertetafel definiert:

p	**q**	$\neg$ **p**	**p** $\wedge$ **q**	**p** $\vee$ **q**	**p** $\rightarrow$ **q**
true	true	false	true	true	true
true	false	false	false	true	false
false	true	true	false	true	true
false	false	true	false	false	true

Definition 12.8 - Semantik aussagenlogischer Formeln

- Eine ***Interpretation*** *A* ordnet jeder Aussagenvariable einer Formel jeweils einen Wahrheitswert *true* oder *false* zu.
- Für die gesamte Formel F ergibt sich dann für eine Interpretation *A* ein Wahrheitswert *A*(*F*), der sich gemäß der Wahrheitswertetafeln der Operatoren s.o. aus den Wahrheitswerten der Teilausdrücke berechnet.

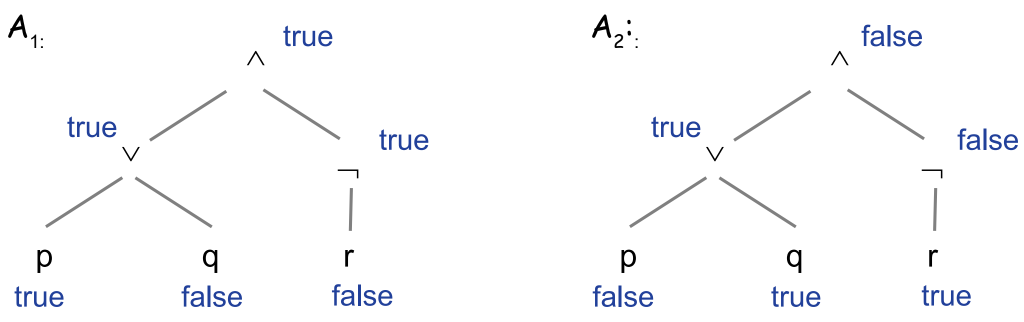
Betrachtet man die syntaktische Struktur einer aussagenlogischen Formel anhand des abstrakten Syntaxbaums, lässt sich der Wahrheitswert einer Formel für eine Interpretation "bottom-up", ausgehend von den Blättern, berechnen:

- Ein Blatt ist entweder eine Konstante true oder false oder eine Aussagenvariable. Bei Konstanten "true" bzw. "false" hat das Blatt den entsprechenden Wahrheitswert. Bei einer Aussagenvariable hat das Blatt den Wahrheitswert, der durch die Interpretation festgelegt ist.
- Für einen inneren Knoten des Baums berechnet sich der Wahrheitswert, indem die Wahrheitswerte der Teilbäume für die Operanden entsprechend der oben angegebenen Semantik der Operatoren (s.o.) verknüpft werden.

Beispiel 12.9 - Interpretation aussagenlogischer Formeln

Wir betrachten die Formel $(p \vee q) \wedge \neg r$ und folgende zwei Interpretationen:

Interpretation	**p**	**q**	**r**
A_1	true	false	false
A_2	false	true	true



Für Interpretation A_1 ergibt sich somit:

$A_1((p \vee q) \wedge \neg r) = \mathit{true}$

und für Interpretation A2:

$A_2((p \vee q) \wedge \neg r) = \mathit{false}$

Man sieht, dass die Formel, je nach Interpretation, mal wahr, mal falsch sein kann.

Aufgabe 12.10 - Interpretation aussagenlogischer Formeln

Welches Ergebnis liefern die Interpretation A_1 und A_2 s.o. für folgende Formel?

(1) $\neg r \vee p \rightarrow q$

(2) $\neg p \vee q \wedge r \rightarrow \neg r \vee p$

Inwieweit das Ergebnis einer Formel von den unterschiedlichen Interpretationen abhängt, wird durch die Begriffe *Erfüllbarkeit*, *Gültigkeit* und *Unerfüllbarkeit* beschrieben.

Definition 12.11 - Erfüllbarkeit, Gültigkeit und Unerfüllbarkeit

Für aussagenlogische Formeln *F* gilt:

- *F* ist ***erfüllbar*** genau dann, wenn es *mindestens eine* Interpretation *A* gibt, so dass die Semantik *A*(F) das Ergebnis *true* ergibt.
- *F* ist ***gültig*** (*F* ist eine ***Tautologie***) genau dann, wenn *F* für *jede* Interpretation *A* die Semantik *A*(*F)* als Ergebnis *true* liefert.

❐ F ist ***unerfüllbar*** genau dann, wenn es *keine* Interpretation A gibt, unter der A(F) das Ergebnis *true* ergibt.

Anmerkungen

- Ist eine Formel gültig, dann ist sie also immer auch erfüllbar.
- Stellt man für eine Formel eine Wahrheitswertetabelle auf, so dass jede Wertekombination der Variablen eine Zeile bildet, dann erkennt man in der Aussagenlogik diese Eigenschaften leicht in folgender Weise:
  - *Erfüllbarkeit*: es gibt mindestens eine Zeile mit Ergebnis *true*.
  - *Gültigkeit*: in jeder Zeile ist das Ergebnis *true*
  - *Unerfüllbarkeit*: in jeder Zeile ist das Ergebnis *false*.

Beispiel 12.12 - Gültigkeit, Erfüllbarkeit und Unerfüllbarkeit

Wir betrachten die Formeln $\mathbf{p \vee \neg q}$, $\mathbf{p \rightarrow (q \vee p)}$ und $\mathbf{p \wedge \neg p}$. Da zwei Aussagenvariablen darin vorkommen, gibt es $2^2 = 4$ verschiedene Interpretationen.

p	q	$p \vee \neg q$	$p \rightarrow (q \vee p)$	$p \wedge \neg p$
true	true	true	true	false
true	false	true	true	false
false	true	false	true	false
false	false	true	true	false
		erfüllbar	gültig (und erfüllbar)	unerfüllbar

An der Wahrheitswertetabelle ist leicht zu erkennen:

(1) $\mathbf{p \vee \neg q}$ ist *erfüllbar*, aber nicht gültig (drei Einträge mit *true*, einer mit *false*)

(2) $\mathbf{p \rightarrow (q \vee p)}$ ist *gültig* und damit auch erfüllbar (alle Einträge *true*).

(3) $\mathbf{p \wedge \neg p}$ ist *unerfüllbar* (alle Einträge *false*).

Aufgabe 12.13 - Gültigkeit, Erfüllbarkeit und Unerfüllbarkeit

Sind folgende Formeln gültig (Tautologie), erfüllbar oder unerfüllbar?

(1) $\neg p \wedge q$

(2) $(p \wedge r) \rightarrow (r \wedge p)$

(3) $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

Betrachtet man Formeln F und deren Negation $\neg F$, ergeben sich folgende Zusammenhänge bezüglich Gültigkeit, Erfüllbarkeit und Unerfüllbarkeit.

Eigenschaft 12.14 - Gültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit bei F und ¬F

Es gibt folgende Zusammenhänge zwischen einer Formel *F* und deren Negation ¬*F*.

- Ist *F gültig*, dann ist ¬*F unerfüllbar*.
- Ist *F unerfüllbar*, dann ist ¬*F gültig*.
- Ist *F erfüllbar*, aber *nicht gültig*, dann ist ¬*F* auch *erfüllbar*, aber *nicht gültig*.

12.2.2 Äquivalenz aussagenlogischer Formeln

Semantisch gleichwertige Formeln werden als *äquivalent* bezeichnet. Äquivalente Formel könnten gegeneinander ausgetauscht werden, z.B. zur Vereinfachung von aussagenlogischen Ausdrücken.

Definition 12.15 - Äquivalenz von Formeln

Zwei aussagenlogische Formeln *F* und *G* sind äquivalent, notiert $F \equiv G$, wenn für jede Interpretation $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G),$$

d.h. beide Formel haben bei jeder Interpretation den gleichen Wahrheitswert.

Beispiel 12.16 - Äquivalenz von Formeln

Die Formeln $\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q}$ und $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$ sind äquivalent, wie an folgender Wahrheitswertetabelle zu sehen ist.

p	**q**	$\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q}$	$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$
true	true	true	true
true	false	true	true
false	true	false	false
false	false	true	true

Jede Zeile der Tabelle stelle eine Interpretation dar. Bei zwei Variablen gibt es vier mögliche Interpretationen. Bei jeder Interpretation liefern beide Formeln jeweils das gleiche Ergebnis.

Aufgabe 12.17 - Äquivalenz aussagenlogischer Formeln

Welche der Äquivalenzen gelten für beliebige aussagenlogische Formeln *F* ?

(1) $F \wedge \mathit{true} \equiv F$

(2) $F \wedge \textit{true} = \textit{true}$

(3) $F \wedge \textit{false} = F$

(4) $F \wedge \textit{false} = \textit{false}$

(5) $F \vee \textit{true} = F$

(6) $F \vee \textit{true} = \textit{true}$

(7) $F \vee \textit{false} = F$

(8) $F \vee \textit{false} = \textit{false}$

Folgende Äquivalenzeigenschaften können für die Umformung und Vereinfachung aussagenlogischer Formeln verwendet werden. Diese Eigenschaften gelten später auch für die Prädikatenlogik.

Eigenschaft 12.18: Aussagenlogische Äquivalenzen

Für beliebige aussagenlogischen Formeln F, G und H gilt:

(1)	$F \wedge G$	$= G \wedge F$	Kommutativität von $\wedge$
(2)	$F \vee G$	$= G \vee F$	Kommutativität von $\vee$
(3)	$(F \wedge G) \wedge H$	$= F \wedge (G \wedge H)$	Assoziativität von $\wedge$
(4)	$(F \vee G) \vee H$	$= F \vee (G \vee H)$	Assoziativität von $\vee$
(5)	$F \wedge F$	$= F$	Idempotenz von $\wedge$
(6)	$F \vee F$	$= F$	Idempotenz von $\vee$
(7)	$F \wedge \neg F$	$= \textit{false}$	
(8)	$F \vee \neg F$	$= \textit{true}$	
(9)	$\neg\neg F$	$= F$	Doppelte Negation
(10)	$\neg (F \wedge G)$	$= \neg F \vee \neg G$	De Morgansche Gesetze
(11)	$\neg (F \vee G)$	$= \neg F \wedge \neg G$	De Morgansche Gesetze
(12)	$F \wedge (G \vee H)$	$= (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$	Distributivität von $\wedge$ über $\vee$
(13)	$F \vee (G \wedge H)$	$= (F \vee G) \wedge (F \vee H)$	Distributivität von $\vee$ über $\wedge$
(14)	$F \rightarrow G$	$= \neg F \vee G$	Umwandlung von $\rightarrow$

Äquivalenz (14) zeigt, dass Implikation immer auf Negation und Disjunktion zurückgeführt werden kann.

Beispiel 12.19 - Umformung aussagenlogischer Formeln

Mit Hilfe der oben angegebenen Äquivalenzen lässt sich z.B. die Formel

$\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$

vereinfachen:

	$\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$	
=	$\neg\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$	(10) De Morgansche Gesetze
=	$(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$	(9) Doppelte Negation
=	$(p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee r)$	(14) Umwandlung von $\rightarrow$
=	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(9) Doppelte Negation
=	$p \vee (q \wedge r)$	(17) Distributivität

Aufgabe 12.20 - Aussagenlogische Formel vereinfachen

Vereinfachen Sie die Formel

$p \rightarrow \neg(q \wedge \neg p)$

mit Hilfe der oben angegebenen Äquivalenzen.

12.2.3 Ausblick: Schlussregeln der Aussagenlogik

Um Beweise auf Ebene der Aussagenlogik führen zu können, können folgende logische Schlussregeln verwendet werden:

Definition 12.21 - Schlussregeln der Aussagenlogik

Modus ponens:

Aus
(1) $A \rightarrow B$ ist wahr
und
(2) A ist wahr
folgt
B ist wahr

Modus tollens:

Aus
(1) $A \rightarrow B$ ist wahr
und
(2) $\neg B$ ist wahr
folgt
$\neg A$ ist wahr

Beispiel 12.22 - Schlussregeln

- Modus ponens:

  gegeben: (1) Die Aussgabe *esRegnet* → *werdeNass* ist wahr
  (2) Die Aussage *esRegnet* ist wahr
  Folgerung: Die Aussage *werdeNass* ist wahr.

- Modus tollens:

  gegeben: (1) Die Aussage *esRegnet* → *werdeNass* ist wahr
  (2) Die Aussage ¬ *werdeNass* ist wahr
  Folgerung: Die Aussage ¬ *esRegnet* ist wahr

Zusammenfassung zu Lektion 21

Diese Fragen sollten Sie nun beantworten können

- Wie sind aussagenlogische Formeln syntaktisch aufgebaut?
- Was bedeutet der Begriff Interpretation bei aussagenlogischen Formeln?
- Wie ist die Semantik aussagenlogischer Formeln definiert?
- Was bedeutet Erfüllbarkeit, Gültigkeit und Unerfüllbarkeit in der Aussagenlogik?
- Welche Äquivalenzeigenschaften gelten für Formeln der Aussagenlogik?
- Was ist *modus ponens* und *modus tollens*?