Lektion 22

In dieser Lektion betrachten wir nun prädikatenlogische Formeln, insbesondere wie sie syntaktisch gebildet werden können, und an verschiedenen Beispielen wird geübt, wie Aussagen in der Prädikatenlogik formuliert werden können.

12.3 Syntax prädikatenlogischer Formeln

Folgendes Beispiel zeigt einige typische Aussagen, die in der Prädikatenlogik beschrieben werden können.

Beispiel 12.23 - prädikatenlogische Aussagen

(1) Aus der Mathematik:

> "Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $|f(n) - a| < \varepsilon$."

(2) Aus der Informatik**:** Semantische Eigenschaften als Wissensrepräsentation spezifizieren:

> "Für jede Person p_1 gibt es eine Person p_2, so dass p_2 die Mutter von p_1 ist.
>
> "Für alle Personen p_1, p_2, p_3 gilt: Ist p_2 Mutter von p_1 und p_3 Mutter von p_2, dann ist p_3 Großmutter von p_1."

Grundkonzepte der Prädikatenlogik

Welche grundsätzlichen Unterschiede sind bei dieser Art von Aussagen im Vergleich zur Aussagenlogik zu erkennen?

- Bei der Aussagenlogik basieren die Aussagen auf einzelnen Aussagen-variablen, die jeweils wahr oder falsch sein können.
- Bei der Prädikatenlogik beziehen sich die Aussagen dagegen immer auf Eigenschaften oder Beziehungen von Elementen einer Grundmenge.

Die Prädikatenlogik basiert auf folgenden Grundbestandteilen. Die genaue Syntax und Semantik wird später Schritt für Schritt vorgestellt.

- **Grundmenge**: Menge von Werten/Individuen (sog. "Universum", "domain of discourse"), z.B.
  - Menge $\mathbb{N}$ der Natürlichen Zahlen
  - Menge Σ^* aller Zeichenketten über einem Alphabet Σ.
  - Menge aller Personen auf der Welt

- **Prädikate**: Elementare Aussagen der Prädikatenlogik basieren auf Prädikaten (= Relationen) über "Individuen", d.h. Elemente der Grundmenge. Ein Prädikat beschreibt eine Eigenschaft, die zutreffen kann oder nicht, d.h. einen Wahrheitswert als Ergebnis liefert, z.B.:
  - einstelliges Prädikat *Prim*(*n*) bei Grundmenge $\mathbb{N}$: "*n* ist eine Primzahl"
  - zweistelliges Prädikat $n_1 \leq n_2$ auf Grundmenge $\mathbb{N}$: "n_1 ist kleiner oder gleich n_2"
  - zweistelliges Prädikat *Mutter*(x, y) für eine Menge von Personen: "*x* ist die Mutter von *y*"
- **Variablen**: Eine Variable steht für ein Element der Grundmenge. Es hängt vom Kontext innerhalb der Formel ab, welcher Wert damit bezeichnet wird.
- **Konstanten**: Konstanten bezeichnen jeweils ein festgelegtes Element der Grundmenge, z.B.

42	Element aus der Grundmenge $\mathbb{N}$
harry	Eine spezifische Person aus einer Grundmenge von Personen

- **Funktionen**: Funktionen berechnen aus einem oder mehreren Werten der Grundmenge einen Wert der Grundmenge, z.B.

succ	Nachfolgerfunktion ("successor") auf der Menge $\mathbb{N}$ (einstellige Funktion)
+	Addition von natürlichen Zahlen (zweistellige Funktion).

- **Logische Operatoren**: analog wie in der Aussagenlogik

$\neg$ F	Negation, "nicht"
F $\wedge$ G	Konjunktion, "und"
F $\vee$ G	Disjunktion, "oder"
F $\rightarrow$ G	Implikation, "wenn … dann …"

- **Quantoren**: Die Quantoren sind eine Art von logischen Operatoren, die Aussagen über die Werte der Grundmenge als Ganzes liefern:

$\forall x\ F$	**Allquantor:** "Für alle x gilt *F*", d.h. die Aussage *F* muss für jedes Element der Grundmenge zutreffen. Dabei ist *x* eine Variable. Im Normalfall kommt *x* in der Teilformel *F* vor und steht dort für das gerade betrachtete Element.
$\exists x\ F$	**Existenzquantor:** "Es existiert ein x, für das *F* gilt", d.h. es gibt mindestens ein Element der Grundmenge für das die Aussage *F* zutrifft.

Anmerkung

Mit "Stelligkeit" bei Funktionen und Prädikaten ist gemeint, wie viele Argumente die Funktion bzw. das Prädikat hat. Bei prädikatenlogischen Formeln wird immer davon ausgegangen, dass es ein vorgegebenes "Vokabular" gibt, welche festlegt, welche Symbole für Konstanten, Variablen, Funktionen und Prädikate prinzipiell zur Verfügung stehen und welche Stelligkeit die Funktionen und Prädikate haben.

Beispiel 12.24 - Prädikatenlogische Formel

Folgendes ist ein Beispiel für eine prädikatenlogische Formel:

$$\forall x\ (\ \mathit{Prim}(x) \rightarrow \neg \mathit{Prim}(\mathit{add}(\mathit{mult}(2, x), 1))\ )$$

bzw. entsprechend mit mathematisch üblicher Infix-Notation für die Funktionen:

$$\forall x\ (\ \mathit{Prim}(x) \rightarrow \neg \mathit{Prim}(2 \cdot x + 1)\ )$$

In dieser Formel werden folgende Grundbestandteile verwendet:

- *Prim* ist ein einstelliges Prädikat (ist Primzahl)
- x ist eine Variable
- 1 und 2 sind Konstanten
- *add* und *mult* (bzw. in Infixnotation + und ·) sind zweistellige Funktionssymbole für Addition und Multiplikation

Mit den natürlichen Zahlen als Grundmenge ist die Formel so zu verstehen:

"Für jede natürliche Zahl *x* gilt: Ist *x* eine Primzahl, dann ist 2*x*+1 keine Primzahl".

Bei prädikatenlogischen Formeln wird in nachfolgenden Beispielen meist folgende Konvention für die Benennung von Prädikaten, Funktionen, Konstanten und Variablen verwendet.

Namenskonvention 12.25 - Benennung

	übliche Notation	typische Beispiele
Prädikate	groß geschrieben, zweite Hälfte des Alphabets	P, Q, R
Funktionen	klein geschrieben, erste Hälfte des Alphabets	f, g, h
Konstanten	klein geschrieben, Anfang des Alphabets	a, b, c
Variablen	klein geschrieben, Ende des Alphabets	x, y, z

Der syntaktische Aufbau von prädikatenlogischen Formeln wird nun in zwei Teilschritten definiert.

(1) Zuerst werden sog. *Terme* eingeführt. Terme sind aus Variablen, Konstanten und Funktionen aufgebaut und beschreiben semantisch einen Berechnungsvorgang, der ein Element der Grundmenge als Ergebnis liefert.

(2) Dann wird der Aufbau von prädikatenlogischen Formeln definiert. Formeln werden aus Prädikaten, logischen Operatoren und Quantoren aufgebaut. Terme kommen dabei als Argumente der Prädikate vor. Das Ergebnis einer Formel bei einer gegebenen Interpretation ist ein Wahrheitswert *true* oder *false*.

Definition 12.26: Syntax von Termen

(1) Jede Variable ***x*** ist ein Term.

(2) Jede Konstante ***a*** ist ein Term.

(3) Ist f ein k-stelliges Funktionssymbol und sind t_1 bis t_k Terme, dann ist auch $\boldsymbol{f(t_1,\ldots,t_k)}$ ein Term.

Beispiel 12.27 - Syntax von Termen

Gegeben seien folgende Vokabular für Funktionssymbole, Konstanten und Variablen:

Funktionssymbole	f (einstellig), g (zweistellig)
Konstanten:	a, b
Variablen:	x, y

Dann sind folgendes korrekt aufgebaute Terme:

(1)	x	Variable allein ist ein Term
(2)	a	Konstante allein ist ein Term
(3)	f(a)	mit einstelligem Funktionssymbol *f* zusammengesetzter Term mit Teilterm *a* als Operanden
(4)	g(x, f(b))	mit zweistelligem Funktionssymbol *g* gebildeter Term mit Termen *x* und *f*(*b*) als Operanden.
(5)	g(f(a), g(x,f(b)))	mit Funktionssymbol *g* zusammengesetzter Term mit f(x) und g(x, f(b)) als Operanden

Folgendes sind keine korrekt aufgebauten Terme:

(1)	f(x,a)	f ist einstellig, kann nicht zwei Teilterme haben
(2)	g(f(y))	g ist zweistellig, muss zwei Teilterme haben

Aufgabe 12.28 - Aufbau von Termen

Gegeben sei das gleiche Vokabular für Funktionssymbole, Konstanten und Variablen wie im vorangehenden Beispiel. Sind folgendes dann korrekt aufgebaute Terme?

(1) f(f(y))

(2) g(a)

(3) g(f(f(y)), b)

Der syntaktische Aufbau prädikatenlogischer Formeln kann nun, basierend auf dem Begriff der Terme, folgendermaßen induktiv definiert werden:

Definition 12.29 - Syntax prädikatenlogischer Formeln

(1) Ist P ein k-stelliges Prädikatensymbol und sind t_1 bis t_k Terme, dann ist

$$\boldsymbol{P(t_1,\dots,t_k)}$$

eine (elementare) prädikatenlogische Formel.

(2) Sind G und H prädikatenlogische Formeln, dann auch folgende zusammengesetzte Formeln:

$$\neg \boldsymbol{G}$$
$$\boldsymbol{G} \wedge \boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{G} \vee \boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{H}$$

(3) Ist F eine prädikatenlogische Formel und ist x eine Variable, dann sind auch

$$\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{F}$$
$$\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{F}$$

prädikatenlogische Formeln.

(4) Um jede (Teil-)Formel ***F*** können Klammern **(*F*)** gesetzt werden.

Beispiel 12.30 - Syntax prädikatenlogischer Formeln

Gegeben:

Funktionssymbole:	f (einstellig), g (zweistellig)
Konstantensymbole:	a, b
Variablensymbole:	x, y
Prädikatensymbole:	P (einstellig), Q (zweistellig)

Sind folgende Formeln syntaktisch korrekt aufgebaut?

(1) P(a)

syntaktisch korrekt. P ist einstelliges Prädikat, a ist ein Term

(2) Q(P(x), f(y))

nicht korrekt. Prädikat P kann nicht innerhalb eines anderen Prädikats vorkommen. In einem Prädikat können nur Terme enthalten sein.

(3) ∀x Q(f(x), g(b,y))

syntaktisch korrekt. f(x) ist ein Term, g(b,y) ist ein Term, Q ist ein zweistelliges Prädikat, somit ist Q(f(x), g(b,y)) eine korrekte Formel. Mit ∀x davor ergibt sich auch eine korrekt aufgebaute Formel.

(4) $\forall x \, (P(x) \to \exists y \, Q(x, f(y)))$

syntaktisch korrekt.

(5) $\forall x \, (P(x) \to \exists Q(x, f(y)))$

syntaktisch falsch, Variable für Existenzquantor bei $\exists Q(\ldots)$ fehlt.

(6) $\forall x \, (P(x) \to \exists x \, Q(x, f(y)))$

syntaktisch korrekt, gleiche Variable darf auch mehrfach für ineinander geschachtelte Quantoren verwendet werden

Aufgabe 12.31 - Syntax prädikatenlogischer Formeln

Es sei das gleiche Vokabular wie im vorigen Beispiel gegeben. Welche der folgenden Formeln sind dann syntaktisch korrekt aufgebaut, welche nicht?

(1) $Q(f(x), g(x,a))$

(2) $\exists y \, \neg(P(x, a) \wedge Q(f(y)))$

(3) $\forall x \, g(x, y)$

(4) $\forall x \, \exists y \, Q(x, f(y))$

(5) $\exists \neg y \, \forall x \, Q(x, y)$

(6) $\forall x \, (P(x) \to Q(\exists y \, f(y), g(x,a))$

Notationskonvention 12.32 - Präzedenz von Operatoren und Quantoren

Für die logischen Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ gelten die gleichen Präzedenzregeln wie in der Aussagenlogik. Zusätzlich gilt, dass die Quantoren stärker binden als die zweistelligen logischen Operatoren.

Operator	Präzedenz
$\forall x$, $\exists x$, $\neg$	höchste
$\wedge$	
$\vee$	
$\to$	niedrigste

Beispiel 12.33 - Präzedenz der Operatoren und Quantoren

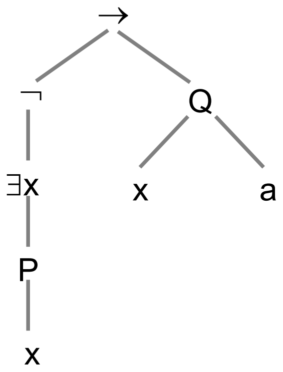
- **$\forall x$ A $\wedge$ B** entspricht **($\forall x$ A) $\wedge$ B .** Für die Semantik, die nachfolgend definiert wird, wird es wichtig sein, dass der Quantor $\forall \boldsymbol{x}$ sich hier nur auf die Teilformel A bezieht.
- Die Formel

  $\neg \exists x P(x) \to Q(x,a)$

ist so zu lesen

$$(\neg (\exists x\ P(x))) \rightarrow Q(x,a)$$

bzw. als abstrakter Syntaxbaum dargestellt:



Aufgabe 12.34 - Präzedenz von Operatoren und Quantoren

Zeichen Sie einen abstrakten Syntaxbaum für den Aufbau der Formal

$$\exists x\ (\neg Q(a,x) \rightarrow \forall y\ Q(x, f(y)) \vee P(x)).$$

12.3.1 Aussagen mit Prädikatenlogik formulieren

Nachdem nun bekannt ist, wie prädikatenlogische Formeln syntaktisch aufgebaut sein können und auch grob die Semantik vorgestellt wurde, wir nun an einigen Beispielen gezeigt, wie Aussagen in der Prädikatenlogik formuliert werden können.

Beispiel 12.35 - Aussagen formulieren

Folgende Aussagen über Personen sollen als prädikatenlogische Formeln beschrieben werden (mit geeigneter Wahl von Prädikaten.)

(1) "Für jede Person p_1 gibt es eine Person p_2, so dass p_2 die Mutter von p_1 ist."

$$\forall p_1\ \exists p_2\ \mathit{Mutter}(p_2, p_1)$$

Wir gehen hier davon aus, dass als Grundmenge eine Menge von Personen gegeben ist. *Mutter*(*x*,*y*) wird als zweistelliges Prädikat verwendet, das die Eigenschaft beschreibt, dass *x* Mutter von *y* ist.

(2) "Für beliebige Personen gilt: Ist p_2 Mutter von p_1 und p_3 Mutter von p_2, dann ist p_3 Großmutter von p_1."

$$\forall p_1 \forall p_2 \forall p_3\ (\mathit{Mutter}(p_2,p_1) \wedge \mathit{Mutter}(p_3,p_2) \rightarrow \mathit{Großmutter}(p_3,p_1))$$

Neben dem Mutter-Prädikat wird hier auch ein Großmutter-Prädikat verwendet.

(3) "Jeder Mitarbeiter hat jemanden als Vorgesetzten, außer wenn er Geschäftsführer ist."

$$\forall m\ (\mathit{Mitarbeiter}(m) \wedge \neg \mathit{Geschäftsführer}(m) \rightarrow \exists v\ \mathit{Vorgesetzter}(v,m))$$

Als Grundmenge ist hier die Menge der Personen in einer Firma angenommen. Prädikat *Mitarbeiter*(p) ist wahr, dass p ein Mitarbeiter der Firma ist, *Geschäftsführer*(p) ist wahr, falls p ein Geschäftsführer der Firma ist und *Vorgesetzter*(x, y) ist wahr, falls x ein Vorgesetzter von y ist.

Aufgabe 12.36 - Prädikatenlogische Aussagen formulieren

Formulieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln. Verwenden Sie dazu das Prädikat

`Liebt(x,y)` bedeutet "x liebt y"

Die Grundmenge soll hier sowohl Personen als auch Gegenstände (Pizza, Chips, etc.) umfassen.

(1) "Jeder liebt Pizza oder Chips"

(2) "Es gibt jemanden, der keine Pizza liebt"

(3) "Jeder, der Pizza liebt, liebt auch Chips."

(4) "Alle haben irgend etwas, was sie lieben."

(5) "Es gibt etwas, das von allen geliebt wird."

Tipp: Pizza und Chips sind hier als Konstanten zu betrachten.

Beispiel 12.37 - Prädikatenlogische Aussagen mit Termen

In den vorangehenden Beispielen wurden nur Variablen und Konstanten als elementare Terme verwendet. Die folgenden Beispiele zeigt auch die Verwendung von zusammengesetzten Termen zur Berechnung von Werten innerhalb von Formeln.

Folgendes Vokabular für prädikatenlogische Formeln sei gegeben:

Konstanten:	0, 1, 2, ...	
Variablen:	n, m	
Funktionen:	+	Addition zweistellig
	$\cdot$	Multiplikation, zweistellig
Prädikate:	=	Gleichheit, zweistellig
	<	kleiner-Relation, zweistellig
	Prim	Prim(n) bedeutet, dass n eine Primzahl ist
	Gerade	Gerade(n) bedeutet, dass n eine gerade Zahl ist.

Wie in der Mathematik üblich, wird bei den zweistelligen Funktionen + und $\cdot$ sowie bei den Prädikaten = und < die Infixnotation verwendet (d.h. Operator steht zwischen den Operanden). Als Grundmenge sei die Menge der natürlichen Zahlen angenommen.

(1) "Die Summe von zwei Zahlen ist immer kleiner als das Produkt der beiden Zahlen."

$$\forall n\ \forall m\ (n + m < n \cdot m)$$

(2) "Ist *n* eine Primzahl, die größer als 2 ist, dann ist *n*+1 keine Primzahl."

$$\forall n\ (\ \mathrm{Prim}(n) \wedge n > 2 \quad \rightarrow \quad \neg\, \mathrm{Prim}(n+1)\ )$$

Aufgabe 12.38 - Prädikatenlogische Aussagen mit Termen

Formulieren Sie folgende Aussagen über natürliche Zahlen als prädikatenlogische Formeln. Folgendes Vokabular sei dazu gegeben:

Konstanten:	0, 1, 2	
Variablen:	n, m	
Funktionen:	+	Addition zweistellig
	·	Multiplikation, zweistellig
Prädikate:	Gerade	Gerade(*n*) bedeutet, dass *n* eine gerade Zahl ist.
	<	kleiner-Relation, zweistellig

(1) "Für jede Zahl *n* ist 2*n* gerade."

(2) "2*n*+1 ist für keine Zahl *n* gerade."

(3) "Ist eine Zahl *n* gerade, dann ist *n*+1 nicht gerade"

(4) "Nicht für jede Zahl gibt eine kleinere Zahl"

12.3.2 Gebundene und freie Variablen

Zu jedem Existenz- und Allquantor gehört eine Variable. Die Zusammengehörigkeit von Variablen, die durch Quantoren eingeführt werden und deren Verwendung innerhalb der Teilformeln im Rumpf wird als *Bindung* bezeichnet. Es ist analog wie bei Programmiersprachen, wenn in der Parameterliste einer Methode formale Parameter eingeführt werden und diese Parameter dann im Methodenrumpf verwendet werden.

Definition 12.39 - Gebundene und freie Variablen

- Ein Vorkommen der *Variable x* in einem Term im Teil *G* einer Formel $\forall x\, G$ oder $\exists x\, G$ heißt ***gebunden.*** Ist ein Variablenvorkommen in einem Term einer Formel von mehreren Quantoren mit gleicher Variable umgeben, wird das Vorkommen durch den innersten Quantor davon gebunden.
- Ein Vorkommen einer *Variable x* in einer Formel F heißt ***frei***, falls das *x* in *F nicht gebunden* ist.
- Eine Formel heißt **geschlossen**, wenn sie keine freien Variablenvorkommen enthält.

Beispiel 12.40 - Gebundene und freie Variablen

- $\forall x\, Q(f(x), y) \to P(x)$
  Achtung: Präzedenz beachten, ist zu lesen als $(\forall x\, Q(x,y)) \to P(x)$

  frei frei

  $$\forall x\, Q(\, f(\boxed{x}), \boxed{y}) \to P(\boxed{x})$$

  gebunden

  Die Formel enthält freie Variablen, ist somit nicht geschlossen.

- $\forall x\, (\, \exists y\, Q(x,y) \to P(x)\,)$

  $$\forall x\, (\, \exists y\, Q(\boxed{x}, \boxed{y}) \to P(\boxed{x})\,)$$

  gebunden

  Die Formel enthält keine freien Variablen, ist somit eine geschlossene Formel

Aufgabe 12.41 - Gebundene und freie Variablen

- Welche Variablenvorkommen sind frei, welche sind gebunden?
  (1) $\forall x\, Q(x,y)$
  (2) $\forall x\, (\, \forall y\, R(x,y,z) \wedge \forall x\, P(x)\,) \to \exists z\, Q(z,z)$
  (3) $\exists x\, (\forall x\, P(x) \wedge \forall y\, Q(x,y) \to \exists z\, Q(z, x)\,)$
- Sind die Formeln geschlossen?

Eigenschaft 12.42 - Umbenennung gebundener Variablen

Gebundene Variablen können umbenannt werden, ohne dass sich die Bedeutung der Formel ändert, unter der Voraussetzung, dass die Umbenennung zu keinen neuen Bindungen führt.

Beispiel 12.43 - Umbenennung gebundener Variablen

Folgende Formel sei gegeben:

$$\forall x\, (\, P(x) \to Q(x,y)\,)$$

- Eine Umbenennung von *x* in *z* ist erlaubt. Die Bindungsstruktur bleibt erhalten. Das Ergebnis ist
  $$\forall z\, (\, P(z) \to Q(\mathbf{z},y)\,)$$
- Eine Umbenennung von *x* in *y* ist dagegen *nicht* erlaubt. Der zweite Parameter *y* von Q war vorher frei und würde nach einer Umbenennung durch den

Allquantor gebunden werden.

$$\forall \mathbf{y}\ (\ P(\mathbf{y}) \rightarrow\ Q(\mathbf{y}, \boxed{\mathbf{y}}\ )\ )$$

neue entstandene Bindung

12.3.3 Ausblick: Höherwertige Logiken

Die hier vorgestellte Logik wird als Prädikatenlogik erste Stufe (engl. *first-order logic*) bezeichnet. Die Quantoren beziehen sich dabei immer nur auf Elemente der gegebenen Grundmenge.

Prädikatenlogiken höherer Ordnung

Es gibt auch Prädikatenlogiken höherer Stufe (engl. *higher order logic*, HOL), bei welchen All- und Existenzquantoren auch für Prädikate und Funktionen möglich sind, z.B.

$$\exists f\ \forall x\ \mathbf{P}(f(x))$$

$$\forall \mathbf{f}\ \exists \mathbf{g}\ \forall x\ \mathbf{g}(\mathbf{f}(x)) = x$$

HOL bietet somit eine größere Ausdrucksstärke als Logik erster Stufe.

Zusammenfassung zu Lektion 22

Diese Fragen sollten Sie nun beantworten können

- Welche grundlegenden Unterschiede gibt es zwischen der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik?
- Wie sind Formeln in der Prädikatenlogik syntaktisch aufgebaut? Welche Rolle spielen dabei Terme?
- Wie können Aussagen über eine Grundmenge mittels Prädikatenlogik formuliert werden?
- Welche Präzedenzregeln für Operatoren und Quantoren muss man in prädikatenlogische Formeln beachten?
- Was sind gebundene und freie Variablen in einer prädikatenlogischen Formel?
- Was ist eine geschlossene Formel?
- Was ist zu beachten, wenn gebundene Variablen umbenannt werden?