Automne 2023

IFT–2505
Devoir 1

Date de remise : 2 octobre 2023 (au plus tard à 9h30).
Le devoir peut se faire en groupe de 1 à 3 étudiants. Le règlement sur le plagiat sera de stricte application. La partie théorique doit être remise en PDF ou en notebook Jupyter. La partie Julia doit être remise sous forme de notebook.

1. Un agriculteur veut allouer 350 acres de surface cultivable entre des tomates et du maïs. Il dispose de 480 heures de main d'oeuvre. Planter un acre de tomates coûte 10$ et 3 heures de travail, et à la récolte, il rapporte 40$. Un acre de maïs coûte 5$ à planter et nécessite 1 heure de main d'oeuvre, et rapporte 20$. Combien d'acres de tomates et maïs doit-il planter pour maximiser son profit ?
   Résolvez le problème
   — sous forme graphique ;
   — en Julia à l'aide des librairies JuMP et HiGHS.
2. Soit le problème de programmation avec une seule contrainte
$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{t.q.} \ & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$
   Supposons que $b > 0$ et $a_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Supposons également qu'il existe au moins un indice j tel que $c_j < 0$. Démontrer qu'une solution optimale de ce problème est de la forme
$$x_k = \frac{b}{a_k}$$
   et $x_j = 0$ pour tout $j \neq k$. où l'indice k satisfait la relation
$$\frac{c_k}{a_k} = \min_{j=1,\ldots,n} \left\{ \frac{c_j}{a_j} \right\}$$
   (Suggestion : considérer x_k comme variable de base du problème.)
3. Soit $K = \{x \mid \ Ax = b, \ x \geq 0\}$.
   Prouvez les deux corollaires

Corollaire 1 Si l'ensemble convexe K est non vide, il y a au moins un point extrême.

Corollaire 2 S'il existe une solution optimale finie à un problème de programmation linéaire, il existe une solution optimale finie qui est un point extrême de l'ensemble de contraintes.

4. Considérons le problème sous forme standard

$$\begin{aligned} &\min_x \; c^T x \\ &\text{t.q. } Ax = b, \;\; x \geq 0. \end{aligned}$$

d est une direction réalisable en x s'il existe un $\alpha > 0$ tel que $x + \alpha d$ est réalisable.

(a) Montrez que si d est une direction réalisable en x, alors $Ad = 0$.

(b) Soit x^* une solution optimale de ce problème. Montrez que pour toute direction réalisable d en x^*, $c^T d \geq 0$.