b) $\min_{x} = -2x - y - 3z$

t.q.

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + 4z + x_1 &= 120 \\
x + 2y + x_2 &= 50 \\
x + 2z + x_3 &= 50 \\
x, y, z, x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Var				x_B
x_1	1	0	0	120
x_2	0	1	0	50
x_3	0	0	1	50

$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = (0\ 0\ 0)\, B^{-1} = (0\ 0\ 0)$

et

$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D = (-2\ -1\ -3)$

Dictionnaire :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 120 - 2x - 3y - 4z \\
x_2 &= 50 - x - 2y \\
x_3 &= 50 - x - 2z \\
\hline
z &= 0 - 2x - y - 3z
\end{aligned}
$$

En suivant la règle du coût réduit le plus négatif, nous sélectionnons z comme variable entrante.

Var				x_B	z
x_1	1	0	0	120	4
x_2	0	1	0	50	0
x_3	0	0	1	50	2

Par le ratio, la valeur de sortie est x_3

Var				x_B
x_1	1	0	-2	20
x_2	0	1	0	50
y	0	0	1/2	25

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$C_B^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & y \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\lambda^T = C_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Les coûts réduits sont :

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$r_1 = -1/2, \; r_2 = -1, \; r_6 = 3/2$

Le coût réduit le plus négatif est $r_2 = -1$ donc la variable entrante est y

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Var				x_B	y
x_1	1	0	-2	20	3
x_2	0	1	0	50	2
z	0	0	1/2	25	0

Par le ratio, la valeur de sortie est x_1

Var				x_B
y	1/3	0	-2/3	20/3
x_2	-2/3	1	4/3	110/3
z	0	0	1/2	25

$$\lambda^T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x_2 & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ -2/3 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -5/6 \end{pmatrix}$$

$$r_D^T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & x_1 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} - \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -5/6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & x_1 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3/2 & -1/3 & -5/6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & x_1 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1/2 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le coût réduit le plus négatif est $r_1 = -1/2$ donc la variable entrante est x

$$x = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ -2/3 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Var				X_B	x
y	1/3	0	-2/3	20/3	0
x_2	-2/3	1	4/3	110/3	1
z	0	0	1/2	25	1/2

Par le ratio, la valeur de sortie est x_2

Var				X_B
y	1/3	0	-2/3	20/3
x	-2/3	1	4/3	110/3
z	1/3	-1/2	-1/6	20/3

$$\lambda^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} y & x & z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ -2/3 & 1 & 4/3 \\ 1/3 & -1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$r_D^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} - \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$X = (110/3, 20/3, 20/3, 0, 0, 0)$ est une solution optimale.