IFT 2505 - Optimisation Linéaire - Devoir 4

Question 1

$$\min \; 4x_1 + x_2 + x_3$$
$$\text{t.q} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Comme tous les coefficients dans l'objectife sont non-négatifs $\lambda = (0,0)$ est réalisable pour le dual.

Avec $\lambda = (0,0)$, aucune contrainte du dual n'est active, et donc $P = \emptyset$

Primal restreint :

$$\min \; y_1 + y_2$$
$$\text{t.q} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$
$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Tableau du simplexe :

	a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
y_1	2	1	2	1	0	4
y_2	3	3	1	0	1	3
$-u^T a_i$	-5	-4	-3	0	0	-7
$c_i - \lambda^T a_i$	4	1	1			

Dès lors x_1, x_2 et x_3 sont fixées à zéro.
Il n'y a pas de coût réduit négatif pour les variables restantes, y_1 et y_2.

La solution $(0, 0, 0, 4, 3)$ est donc optimale pour le primal restreint associé.

1) On veut trouver ϵ :

$$\epsilon = \min\left\{\frac{4}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{4}$$

x_2 entre dans la base

On obtient le tableau suivant :

Avec $P = \{2\}$

$L_{43}\left(\frac{1}{4}\right) \sim$

	a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
y_1	2	1	2	1	0	4
y_2	3	3	1	0	1	3
$-u^T a_i$	-5	-4	-3	0	0	-7
$c_i - \lambda^T a_i$	11/4	0	1/4			

On doit minimiser le nouveau primal restreint :

$$\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{3}{3}\right\} = \frac{3}{3} = 1$$

y_2 sort de la base suivante :

On obtient les tableaux suivants :

	a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
y_1	2	1	2	1	0	4
x_2	1	1	1/3	0	1/3	1
$-u^T a_i$	-5	-4	-3	0	0	-7
$c_i - \lambda^T a_i$	11/4	0	1/4			

$L_{12}(-1)$

$\sim$

$L_{32}(4)$

	a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
y_1	1	0	5/3	1	-1/3	3
x_2	1	1	1/3	0	1/3	1
$-u^T a_i$	-1	0	-5/3	0	4/3	-3
$c_i - \lambda^T a_i$	11/4	0	1/4			

2) On veut trouver un nouveau ϵ :

$$\epsilon = \min\left\{ \frac{11/4}{1}, \frac{1/4}{5/3} \right\} = \frac{1/4}{5/3}$$

x_3 entre dans la base

On obtient le tableau suivant :

Avec $P = \{2, 3\}$

$L_{43}\left(\frac{1/4}{5/3}\right) \sim$

	a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
y_1	1	0	5/3	1	-1/3	3
x_2	1	1	1/3	0	1/3	1
$-\mu^T a_i$	-1	0	-5/3	0	4/3	-3
$c_i - \lambda^T a_i$	13/5	0	0			

On doit minimiser le nouveau primal restreint :

$$\min\left\{\frac{3}{5/3}, \frac{1}{1/3}\right\} = \frac{3}{5/3}$$

y_1 sort de la base

On obtient les tableaux suivants :

	a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
x_3	3/5	0	1	3/5	-1/5	9/5
x_2	1	1	1/3	0	1/3	1
$-\mu^T a_i$	-1	0	-5/3	0	4/3	-3
$c_i - \lambda^T a_i$	13/5	0	0			

$L_{21}\left(-\frac{1}{3}\right)$
$\sim$
$L_{31}\left(\frac{5}{3}\right)$

	a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
x_3	3/5	0	1	3/5	-1/5	9/5
x_2	4/5	1	0	-1/5	2/5	2/5
$-\mu^T a_i$	0	0	0	1	1	0
$c_i - \lambda^T a_i$	13/5	0	0			

Le primal est réalisable : stop. La solution est :

$x_1 = 0$, $x_2 = 2/5$ et $x_3 = 9/5$