

DEVOIR 1

ROMAN NAKHUDA 20207082

LUCKY KHOUNVONGSA 20172476

ANGE LILIAN TCHOMTCHOUA TOKAM 20210129

OPTIMISATION LINEAIRE - IFT2505

PROFESSEUR FABIEN BASTIN

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

À remettre le 2 Octobre 2023 à 10:00



Question 1

En prenant x_1 comme le nombre d'acres de tomates et x_2 comme le nombre d'acres de maïs,

On obtient le problème mathématique suivant;

$$\begin{aligned} \max \quad & 30x_1 + 15x_2 \\ \text{sujet à} \quad & x_1 + x_2 \leq 350 && \text{:pour les acres} \\ & 3x_1 + x_2 \leq 480 && \text{:pour les heures} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Que l'on peut convertir en un problème de minimisation

à l'introduction des variables d'écart u et v , on a;

$$\begin{aligned} - \min \quad & -30x_1 - 15x_2 \\ \text{sujet à} \quad & x_1 + x_2 + u = 350 \\ & 3x_1 + x_2 + v = 480 \\ & x_1, x_2, u, v \geq 0 \end{aligned}$$

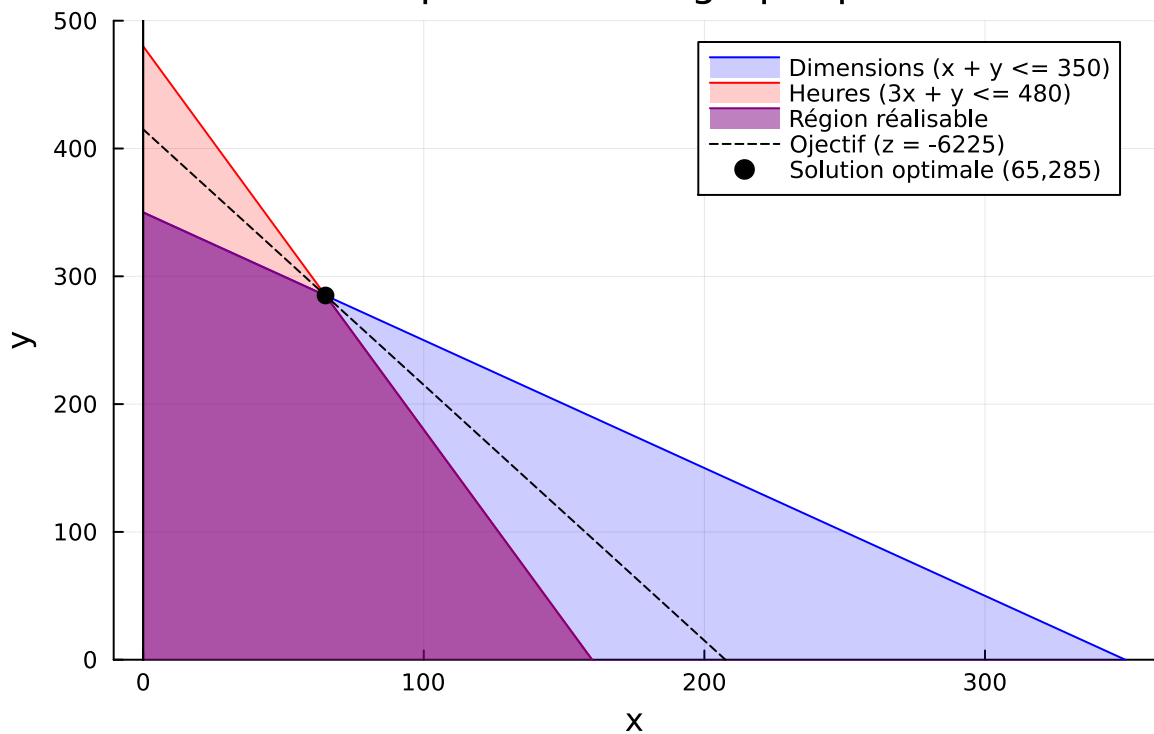
- Resolution sous forme Graphique

```
In [1]: using JuMP, HiGHS, Plots
```

```
In [2]: #Premiere contrainte
plot(x-> 350-x, 0, 350, fill = (0, 0.2, :blue), color = :blue, label = "Dimensions")
#Deuxieme contrainte
plot!(x-> 480-3x, 0, 480/3, fill = (0, 0.2, :red), color = :red, label = "Heures (3
plot!(x-> min(350-x, 480-3x), 0, 350,
    fill = (0, 0.5, :purple), color = :purple, label = "Région réalisable")
vline!([0,0], color = :black, label = "")
plot!(ylims = (0, 500))
plot!(x -> (6225 - 30*x)/15, color = :black, label = "Ojectif (z = -6225)", linestyle
scatter!([65], [285], label = "Solution optimale (65,285)", color = :black, markers

plot!(xlabel = "x", ylabel = "y")
plot!(title = "Représentation graphique")
```

Représentation graphique



D'où la solution optimale en $x = 65$ et $y = 285$, avec $z = 6225$

- Résolution avec les bibliothèques JuMP et HiGHS

```
In [3]: using HiGHS, JuMP
```

```
In [4]: m = Model(HiGHS.Optimizer)

@variable(m, x >= 0)
@variable(m, y >= 0)

@constraint(m, x + y <= 350)
@constraint(m, 3x + y <= 480)

@objective(m, Max, 30x+15y);

print(m)
```

```
Max 30 x + 15 y
Subject to
 x + y <= 350
 3 x + y <= 480
 x >= 0
 y >= 0
```

```
In [5]: status = optimize!(m)
```

```

Running HiGHS 1.5.3 [date: 1970-01-01, git hash: 45a127b78]
Copyright (c) 2023 HiGHS under MIT licence terms
Presolving model
2 rows, 2 cols, 4 nonzeros
2 rows, 2 cols, 4 nonzeros
Presolve : Reductions: rows 2(-0); columns 2(-0); elements 4(-0) - Not reduced
Problem not reduced by presolve: solving the LP
Using EKK dual simplex solver - serial
  Iteration      Objective      Infeasibilities num(sum)
        0      -4.4999962776e+01 Ph1: 2(6); Du: 2(45) 0s
        2       6.2250000000e+03 Pr: 0(0) 0s
Model   status      : Optimal
Simplex iterations: 2
Objective value      : 6.2250000000e+03
HiGHS run time       : 0.00

```

In [6]: `[value(x), value(y)]`

```

2-element Vector{Float64}:
 65.0
285.0

```

- **Resolution avec Julia grace à la fonction du simplexe**

```

In [7]: function pivot!(M::Matrix, i::Int, j::Int)
    m, n = size(M)
    @assert M[i, j] != 0
    M[i, :] = M[i, :]/M[i, j]
    for k in setdiff(1:m, i)
        M[k, :] -= M[k, j] * M[i, :]
    end
    return M
end

function getReducedCosts(M::Matrix)
    m, n = size(M)
    return M[end, 1:n-1]
end

function getxB(M::Matrix)
    m, n = size(M)
    return M[1:m-1, end]
end

function enteringVar(M::Matrix)
    rc = getReducedCosts(M)
    index = argmin(rc)
    return rc[index] >= 0 ? -1 : index
end

function exitingVarIndex(M::Matrix{T}, enteringVar::Int) where T
    col = M[1:end-1, enteringVar]
    xB = getxB(M)
    m, n = size(M)
    index = -1
    val = T(Inf)
    for i in 1:m-1
        if (col[i] > 0) && (xB[i]/col[i] < val)

```

```

        val = xB[i]/col[i]
        index = i
    end
end
return index
end
function isOneHot(v::Vector)
    n = length(v)
    return (sum(iszero, v) == n-1) && (sum(isone, v) == 1)
end
function isoptimal(M)
    return enteringVar(M) == -1
end
function findInitialBasis!(M::Matrix)
    m, n = size(M)
    m-=1
    n-=1
    basis = [-1 for _ in 1:m]
    for i in 1:n
        if isOneHot(M[1:end-1, i])
            index = findfirst(isone, M[:, i])
            basis[index] = i
        end
    end
    @assert !any(t-> t == -1, basis) "problem not caconical"
    for i in 1:m
        j = basis[i]
        pivot!(M, i, j)
    end
    return basis
end
function simplexSolver(A::Matrix{T}, b::Vector, c::Vector; verbose::Bool = false) w
    M = [A b; c' 0]
    basis = findInitialBasis!(M)
    k = 1
    nmax = 1000
    while !isoptimal(M) && k < nmax
        k+=1
        verbose && display(M)
        entering = enteringVar(M)
        entering == -1 && (println("-----"); return T[-1, -1])
        leaving = exitingVarIndex(M, entering)
        leaving == -1 && (println("-----"); return T[-1, -1])
        verbose && @show (entering, leaving)
        basis[leaving] = entering
        pivot!(M, leaving, entering)
    end
    verbose && display(M)
    m, n = size(M)
    xstar = zeros(T, n - 1)
    xstar[basis] = getxB(M)
    return xstar
end

```

simplexSolver (generic function with 1 method)

```
In [8]: A=[1//1 1 1 0 ;  
          3 1 0 1;  
          ]  
b=[350, 480]  
c = [-30, -15,0,0]
```

4-element Vector{Int64}:

```
-30  
-15  
 0  
 0
```

```
In [9]: simplexSolver(A, b, c, verbose=true)
```

3×5 Matrix{Rational{Int64}}:

```
1//1  1//1  1//1  0//1  350//1  
3//1  1//1  0//1  1//1  480//1  
-30//1 -15//1 0//1  0//1  0//1
```

3×5 Matrix{Rational{Int64}}:

```
0//1  2//3  1//1  -1//3  190//1  
1//1  1//3  0//1  1//3  160//1  
0//1  -5//1 0//1  10//1  4800//1
```

3×5 Matrix{Rational{Int64}}:

```
0//1  1//1  3//2  -1//2  285//1  
1//1  0//1  -1//2  1//2  65//1  
0//1  0//1  15//2  15//2  6225//1
```

(entering, leaving) = (1, 2)

(entering, leaving) = (2, 1)

4-element Vector{Rational{Int64}}:

```
65//1  
285//1  
 0//1  
 0//1
```

Question 2

Soit le problème écrit au long :

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ \text{tel que} \quad & a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

On considère x_k comme la variable de base du problème avec $A = (a_1 \dots a_k \dots a_n)$.

Comme x_k est l'unique variable de base du problème nous avons :

$$B = (a_k) \implies B^{-1} = \frac{1}{a_k}$$

$$\text{On a donc : } Ax = b \implies Bx_b = b \implies x_b = bB^{-1} \implies x_k = \frac{b}{a_k}$$

$$\text{Où } X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{b}{a_k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est une solution de base non dégénérée puisque $b > 0$ et $a_k > 0$ (1)

On a que l'indice k satisfait la relation $\frac{c_k}{a_k} = \min_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{c_j}{a_j} \right\}$

par le fait que $\frac{c_k}{a_k}$ est le $\min_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{c_j}{a_j} \right\}$ et par (1) on a ainsi :

$$z = c_k \frac{b}{a_k} = \frac{c_k}{a_k} * b \text{ alors}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{b}{a_k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque b

est constant et qu'il apparaît pour toute solutions de base non dégénérée,

on peut se concentrer uniquement sur la valeur de $\frac{c_j}{a_j}$.
afin d'évaluer la fonction objective.

Donc comme $\frac{c_k}{a_k}$ est le $\min_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{c_j}{a_j} \right\}$ Alors la solution est optimale pour $\frac{c_k}{a_k}$.

X est bien une solution de base optimale non dégénérée puisque z est minimisé lorsqu'on choisi x_k comme variable de base.

Par le théorème fondamentale de la programmation linéaire,

c'est aussi une solution optimale du problème.

Question 3

Soit $K = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ K est non vide

Corollaire 1:

Montrons que si l'ensemble convexe K est non vide, alors il existe au moins un

Par définition d'un ensemble convexe non vide, chaque $x \in k$ peut s'écrire comme combinaison convexe de deux points $x_1, x_2 \in k$ tels que $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha \in [0, 1]$

Par définition d'un point extrême, chaque x est un point extrême de k s'il n'existe pas de deux points $x_1, x_2 \in k$ tels que $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha \in]0, 1[$

Notons S l'ensemble des points qui respectent;

$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, avec $x_1, x_2 \in k$ et $\alpha \in]0, 1[$

Ainsi, $S \subseteq k$, or $k \setminus S \neq \emptyset$, car $\exists x \in k$ tel que $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, pour $x_1, x_2 \in k$ et $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$

Ainsi lorsqu'on prend l'ensemble K privé de tous les points qui ne sont pas des points extrêmes, on aura un ensemble résultant qui est non-vide.

Par conséquent, si l'ensemble convexe K est non-vide, alors il y a au moins un point extrême.

Corollaire 2:

Par le théorème de fondamentale de la programmation linéaire, nous savons que s'il y a une solution réalisable optimale, alors il y a une solution de base réalisable optimale.

Ainsi, s'il existe une solution optimale finie à un problème,

alors il existe une solution optimale finie de base à ce problème.

On pose ainsi le vecteur x^* dans $Ax^* = b$ et $x^* \geq 0$, une solution de base optimale de ce problème.

Or x^* est une solution de base réalisable si et seulement si x^* est un point extrême.

Ainsi il existe bien une solution optimale finie qui est un point extrême.

Question 4

Soit

$$\begin{array}{l} \min c^T x \\ \text{tel que } Ax = b, x \geq 0 \end{array}$$

a) Montrons que d direction réalisable $\implies Ad = 0$

$$\begin{array}{ll} A(x + \alpha d) = b & \\ Ax + A(\alpha d) = b & (\text{développement}) \\ b + A(\alpha d) = b & (Ax = b) \\ A(\alpha d) = 0 & (-b) \\ Ad = 0 & (\div \alpha) \end{array}$$

QED

b) Nous pouvons écrire l'inégalité pour les points réalisables

$$C^T x^* \leq C^T x$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que $x = x^* + \alpha d$ On sait que

$$\begin{array}{l} Ax^* = b \implies A(x - \alpha d) = b \\ Ax - A\alpha d = b \\ Ax = b \end{array}$$

On a x donc réalisable, qui nous donne;

$$\begin{array}{ll} \implies C^T x^* \leq C^T x & \\ C^T x^* \leq C^T (x^* + \alpha d) & (\text{ici, } x' = x^* + \alpha d) \\ C^T x^* \leq C^T x^* + C^T \alpha d & (\text{Développement}) \\ 0 \leq C^T \alpha d & (-C^T x^*) \\ 0 \leq C^T d & (\div \alpha) \end{array}$$

QED