Projekt na zaliczenie pakietu MAXIMA

Patryk Tokarski

18 czerwca 2022

Nasza funkcja ma postać:

$$f(x) = \sqrt[5]{x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 26}$$

(% i1) f(x):=(x^ 5+3*x^ 4-11*x^ 3-27*x^ 2+10*x+26)^ (1/5);

1 Analiza funkcji

1.1 Dziedzina funkcji

Dziedziną funkcji jest cały zbiór $\mathbb{R}$

1.2 Granice funkcji na krańcach dziedziny

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 26}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt[5]{\lim_{x\to+\infty} (x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 26)} = +\infty$$

Postępując analogicznie otrzymujemy $-\infty$ dla $x \to -\infty$.

1.3 Asymptoty wykresu funkcji

- Asymptota pionowa Z racji tego, że nasza funkcja jest ciągła to nie ma ona asymptot pionowych.
- Asymptoty ukośne Przypomnijmy, że funkcja $f(x)$ ma asymptotę ukośną $y = Ax + B$ gdy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - Ax = B$$

(% i2) limit(f(x)/x,x,inf);

$$1 \tag{\% o2}$$

(% i3) limit(f(x)-1*x,x,inf);

$$\frac{3}{5} \tag{\% o3}$$

Jak widzimy nasze $A = 1$ i $B = \frac{3}{5}$
Czyli funkcja posiada asymptotę ukośną, która ma wzór $y = x + \frac{3}{5}$.

2 Analiza pierwszej pochodnej

Liczymy pochodną przy pomocy funkcji diff:

(% i4) f_1(x):="(diff(f(x),x,1));

$$\mathrm{f\_1}(x) := \frac{5x^4 + 12x^3 - 33x^2 - 54x + 10}{5(x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 26)^{\frac{4}{5}}} \qquad (\%\ o4)$$

2.1 Dziedzina pierwszej pochodnej

Liczymy kiedy zeruje się mianownik pierwszej pochodnej:

(% i5) realroots(x^ 5+3*x^ 4-11*x^ 3-27*x^ 2+10*x+26=0);

$$[x = -\frac{134533779}{33554432}, x = -\frac{64689803}{33554432}, x = -\frac{36515359}{33554432}, x = \frac{34653921}{33554432}, x = \frac{100421725}{33554432}] \qquad (\%\ o5)$$

Aby ułatwić dalsze operacje tworze zmienne t którymi oznaczę punkty wyłączone z dziedziny.

(% i7) t1:-134533779/33554432$
float(t1);

$$-4.009419053792953 \qquad (\%\ o7)$$

(% i9) t2:-64689803/33554432$
float(t2);

$$-1.927906364202499 \qquad (\%\ o9)$$

(% i11) t3:-36515359/33554432$
float(t3);

$$-1.088242501020432 \qquad (\%\ o11)$$

(% i13) t4:34653921/33554432$
float(t4);

$$1.032767325639725 \qquad (\%\ o13)$$

(% i15) t5:100421725/33554432$
float(t5);

$$2.992800623178482 \qquad (\%\ o15)$$

Zatem dziedzina pochodnej to $\mathbb{R}/\{t1, t2, t3, t4, t5\}$

2.2 Miejsca zerowe pierwszej pochodnej

Obliczamy je przy pomocy odpowiedniej funkcji i zapisujemy jako kolejne zmienne x:

(% i16) realroots(f_1(x));

$$[x = -\frac{112567015}{33554432}, x = -\frac{51220217}{33554432}, x = \frac{5667285}{33554432}, x = \frac{77589309}{33554432}] \quad (\% \text{ o16})$$

(% i20) x1:-112567015/33554432$
x2:-51220217/33554432$
x3:5667285/33554432$
x4:77589309/33554432$

2.3 Przedziały monotoniczności funkcji

(% i21) limit(f_1(x), x, minf);

$$1 \quad (\% \text{ o21})$$

Wartość pochodnej w minus nieskończoności to 1 więc:

$$f'(x) > 0 \text{ wtt gdy } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3) \cup (x_4, +\infty)$$
$$f'(x) < 0 \text{ wtt gdy } x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4)$$

2.4 Ekstrema funkcji

Ekstrema minima lokalne są w punktach: x_2, x_4.
Ekstrema maksima lokalne są w punktach: x_1, x_3.
By określić ekstrema globalne liczymy wartosci funkcji w wyżej wymienionych punktach:

(% i22) float(f(x1));

$$2.260039727389741 \quad (\% \text{ o22})$$

(% i23) float(f(x2));

$$-1.382587454924842 \quad (\% \text{ o23})$$

(% i24) float(f(x3));

$$1.931293053098893 \quad (\% \text{ o24})$$

(% i25) float(f(x4));

$$-2.398446670693105 \quad (\% \text{ o25})$$

Jak widać ekstremum maksimum globalne jest w punkcie x_1, a ekstremum minimum globalne w punkcie x_4.

3 Analiza drugiej pochodnej

Najpierw obliczymy z pomocą Maximy drugą pochodną

(% i26) f_2(x):=''(diff(f(x),x,2));

$$\mathrm{f\_2}(x) := \frac{20x^3+36x^2-66x-54}{5(x^5+3x^4-11x^3-27x^2+10x+26)^{\frac{4}{5}}} - \frac{4(5x^4+12x^3-33x^2-54x+10)^2}{25(x^5+3x^4-11x^3-27x^2+10x+26)^{\frac{9}{5}}}$$
(% o26)

Po uproszczeniu dostajemy, że nasza druga pochodna jest równa:

(% i27) f_2_simple(x):=''(ratsimp(f_2(x)));

$$\mathrm{f\_2\_simple}(x) := -\left(\left(x^5+3x^4-11x^3-27x^2+10x+26\right)^{\frac{1}{5}}\right.$$

$$\left.\left(146x^6+612x^5+612x^4-1064x^3+354x^2+6960x+7420\right)\right)$$

$$/\left(25x^{10}+150x^9-325x^8-3000x^7-525x^6+17650x^5+16625x^4-27800x^3-32600x^2+13000x+16900\right)$$

3.1 Dziedzina drugiej pochodnej

Liczymy kiedy mianownik się zeruje:

(% i28) realroots(25*x^ 10+150*x^ 9-325*x^ 8-3000*x^ 7-525*x^ 6+17650*x^ 5+16625*x^ 4-27800*x^ 3-32600*x^ 2+13000*x+16900);

$$[x=-\frac{134533779}{33554432}, x=-\frac{64689803}{33554432}, x=-\frac{36515359}{33554432}, x=\frac{34653921}{33554432}, x=\frac{100421725}{33554432}]$$
(% o28)

Do dziedziny nie należą właśnie te punkty. Są to punkty wcześniej oznaczone przez t1,t2,... . Oznacza to, że dziedzina drugiej pochodnej jest taka sama jak pierwszej.

3.2 Miejsca zerowe drugiej pochodnej

(% i29) allroots(f_2(x));

allroots: expected a polynomial; found errexp1− an error. To debug this try: debugmode(true);

Otrzymaliśmy błąd, więc druga pochodna nie ma miejsc zerowych.

3.3 Przedziały stałego znaku drugiej pochodnej

Skoro druga pochodna nie ma miejsc zerowych, to w każdym przedziale dziedziny sprawdzimy wartość funkcji w dowolnym punkcie, dzięki czemu będziemy wiedzieć jaki jest znak wartości drugiej pochodnej w tym przedziale.

- 1 przedział (-oo,t1):

  (% i30) float(f_2(-5));

$$0.374451897594516 \tag{\% o30}$$

- 2 przedział (t1,t2):

  (% i31) float(f_2(-2.5));

$$-1.163066666628178 \tag{\% o31}$$

- 3 przedział (t2,t3):

  (% i32) float(f_2(-1.5));

$$3.233832698501276 \tag{\% o32}$$

- 4 przedział (t3,t4):

  (% i33) float(f_2(0));

$$-0.842387415494661 \tag{\% o33}$$

- 5 przedział (t4,t5):

  (% i34) float(f_2(2));

$$1.011263415849287 \tag{\% o34}$$

- 6 przedział (t5,+oo):

  (% i35) float(f_2(4));

$$-0.3875940735998362 \tag{\% o35}$$

$$f''(x) > 0 \text{ gdy } x \in (-\infty, t_1) \cup (t_2, t_3) \cup (t_4, t_5)$$
$$f''(x) < 0 \text{ gdy } x \in (t_1, t_2) \cup (t_3, t_4) \cup (t_5, +\infty)$$

Uzyskaliśmy dzięki temu informację, że nasza krzywa jest wypukła, gdy x należy do przedziałów, które dla drugiej pochodnej są większe od zera, a wklęsła gdy x należy do tych przedziałów, które dla drugiej pochodnej są mniejsze od zera.

3.4 Punkty przegięcia wykresu

Punktami przegięcia w naszym przypadku będą punkty wyłączone z dziedziny pochodnych. Przypomnijmy, że są to punkty t1, t2, t3, t4, t5.

4 Tabela zmienności funkcji

Tabelę podzieliłem na dwie części, ponieważ w przeciwnym przypadku nie zmieściłaby się.

	+∞		t1		x1		t2		x2		t3
f'(x)		+	*	+	0	-	*	-	0	+	*
f"(x)		+	*	-	-	-	*	+	+	+	*
f(x)	+∞		pp (t1,0)		MAX (x1,2.26)		pp (t2,0)		min (x2,-1.38)		pp (t3,0)

		x3		t4		x4		t5		+∞
f'(x)	+	0	-	*	-	0	+	*	+	
f"(x)	-	-	-	*	+	+	+	*	-	
f(x)		max (x3,1.93)		pp (t4,0)		MIN (x4,-2.4)		pp (t5,0)		+∞

Tabela 1: Tabela zmienności funkcji

* - punkt wyłączony z dziedziny;
+/- - znak wartości funkcji w przedziale

5 Wykres funkcji

Wykres stworzono przy pomocy programu Maxima.

(% i36) wxplot2d(f(x), [x,-10,10],[y,-10,10],[axes, solid],
[grid2d, true],[xtics, 1],[ytics, 1],
[title, "Wykres funkcji f(x)"], [xlabel, "x"],
[ylabel, "f(x)"])$