Лекція ___

РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ
Факторизація матриць

LH - метод факторизації

Факторизація - перетворення матриць в добуток матриць простішого вигляду.

На основі факторизації розроблено ряд ефективних алгоритмів.

A=LH - добуток двох трикутних матриць

L – нижня трикутна матриця

H – верхня трикутна матриця з «1» на головній діагоналі. Визначимо L и H за допомогою методу Гауса.

Схема єдиного ділення.

Елементи 1-го стовпця, розташовані під головною діагоналлю, виключаються при використанні діагонального елемента цього стовпця в якості головного елемента. Для цього всі елементи 1-го рядка діляться на a_{11} . Далі по черзі помножуючи рядки на a_{21} і a_{31} , його віднімають від другого й третього рядків відповідно.

Той же самий результат можна отримати шляхом множення матриці A зліва на матрицю перетворень L_1 , де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \; a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матриця лівих перетворень:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \;\ldots\; 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \;\ldots\; 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 \;\ldots\; 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = L_1 * A$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1\, a^{(1)}{}_{12}\;\; a^{(1)}{}_{13}\; \ldots\; a^{(1)}_{1n} \\ 0\, a^{(1)}{}_{22}\;\; a^{(1)}{}_{23}\; \ldots\; a^{(1)}_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\, a^{(1)}{}_{n2}\;\; a^{(1)}{}_{n3}\; \ldots\; a^{(1)}_{nn} \end{pmatrix}$$

Елементи $a^{(1)}{}_{ij}$ матриці $A^{(1)}$ обчислюються так само, як і в методі Гауса .

$$L^{-1}{}_1 * A^{(1)} = A$$

$$L^{-1}{}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}\;\; 0\; 0\; \ldots\; 0 \\ a_{21}\;\; 1\; 0\; \ldots\; 0 \\ a_{31}\;\; 0\; 1\; \ldots\; 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\;\; 0\; 0\; \ldots\; 1 \end{pmatrix}$$

Цей процес продовжується при використанні в якості головного елемента другого діагонального елементу матриці $A^{(1)}$:

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\; \ldots.\; 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a^{(1)}{}_{22}} & 0\; \ldots.\; 0 \\ 0 & -\dfrac{a^{(1)}{}_{32}}{a^{(1)}{}_{22}} & 1\; \ldots.\; 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & -\dfrac{a^{(1)}{}_{n2}}{a^{(1)}{}_{22}} & 0\; \ldots.\; 1 \end{pmatrix}$$

Ця операція призводить до матриці:

$$A^{(2)} = L_2 * A^{(1)}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & a^{(1)}{}_{12} & a^{(1)}{}_{13}\; \ldots\; a^{(1)}_{11} \\ 0 & 1 & a^{(2)}{}_{23}\; \ldots\; a^{(2)}_{21} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & a^{(2)}{}_{n3}\; \ldots\; a^{(2)}{}_{n3} \end{pmatrix}$$

$$L_2^{-1} * A^{(2)} = A^{(1)};$$

$$L_1^{-1} * L_2^{-1} * A^{(2)} = A$$

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & a^{(1)}{}_{22} & 0 \dots\ 0 \\ 0 & a^{(1)}{}_{32} & 1 \dots\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ 0 & a^{(1)}{}_{n2} & 0 \dots\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1^{-1} * L_2^{-1} * \dots * L_n^{-1} * A^{(n)} = A$$

$A^{(n)} = H$ (H-розкладення).

$$A^{(n)} = H = \begin{pmatrix} 1 & a^{(1)}{}_{12} & a^{(1)}{}_{13} & \dots a^{(1)}{}_{1n} \\ 0 & 1 & a^{(2)}{}_{23} & \dots a^{(2)}{}_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & 1 & \dots 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки $L_1^{-1} \dots L_n^{-1}$ є нижніми трикутними матрицями, то їх множення також буде нижньою трикутною матрицею:

$L = L_1^{-1} * \dots * L_n^{-1}$

Зауваження:

1. Матриці перетворення $L_1 \dots L_n$ відрізняються від одиничної матриці тільки одним стовпцем, тому їх можна не зберігати в пам'яті ЕОМ (зберігати тільки цей один стовпець).

   Обернені матриці володіють тією ж властивістю.
2. Матриця L може бути отримана дописуванням на кожному кроці перетворень тільки одного стовпця.
3. Матриця H перетвориться таким чином, що на кожному i+1 кроці (наступному) не перетворяться рядки з першої по i-ю.
4. Можна зберігати результат обчислення H i L на місці матриці A. Процес перетворення має таку властивість, що ми можемо на кожному кроці змінювати i-ю рядок.

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = L_1 * A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = L_2 * A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Лекція ___

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ У ВИГЛЯДІ ДОБУТКІВ

Розглянемо рівняння: $A\vec{x} = \vec{b}$

Для перетворення будемо застосовувати формули методу Гауса схеми повного виключення.

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \; .... \; 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \; .... \; 0 \\ \multicolumn{2}{c}{.....................} \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 \; .... \; 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = T_1 * A$$

$$A^{(1)} * \vec{x} = T_1 * A * \vec{x} = T_1 * \vec{b}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}^{(1)}} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = T_2 * A^{(1)}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} * \vec{x} = T_2 * A^{(1)} * \vec{x} = T_2 * T_1 * A * \vec{x} = T_2 * T_1 * \vec{b}$$

Після n кроків:

$$A^{(n)} * \vec{x} = T_n * \ldots . * T_1 * A * \vec{x} = T_n * \ldots * T_1 * \vec{b}$$

<u>Приклад:</u>

Візьмемо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = T_2 * A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.33 \\ 0 & 1 & -0.66 \\ 0 & 0 & 0.33 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = T_3 * A^{(2)} = I$$

$$A^{-1} = T_3 * T_2 * T_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1.33 & 0.33 \\ -0.5 & 1.16 & -0.66 \\ 0 & -0.33 & 0.33 \end{pmatrix}$$

АЛГОРИТМ У ФОРМІ СКАЛЯРНИХ ДОБУТКІВ

Найбільш ефективні методи й алгоритми розроблені для системи лінійних рівнянь із симетричними додатно визначеними матрицями. Це пов'язано з тим, що в цьому випадку не потрібен вибір головного елемента для підтримки чисельної стійкості.

$A\vec{x} = \vec{b}$.

Найчастіше застосовується метод квадратних коренів.

$A = L * L^T$, де L- нижня трикутна матриця, її елементи обчислюються в такий спосіб:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}^{\ 2}}$$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} * l_{kj})$$

Практичне правило для реалізації цього алгоритму. Діагональні елементи матриці L^T обчислюються як корінь квадратний з різниці між відповідними елементами a_{ii} -ми вихідної матриці й сумою квадратів всіх обчислених елементів l, що знаходяться у тому ж стовпці.

Недіагональні елементи матриці L отримують вирахуванням з елементів l суми добутків елементів L, взятих зі стовпців з номерами «і» і «j». Отримана різниця ділиться на діагональний елемент цього рядка.

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0.5 & 2 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.625 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 1 & 0,25 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2$$

$$l_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{1}{2}$$

$$l_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = 1$$

$$l_{14} = \frac{0,5}{l_{11}} = 0,25$$

$$l_{15} = \frac{2}{l_{11}} = 1$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 1 & 0,25 & 1 \\ 0 & 0,5 & -1 & -0,25 & -1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$l_{22} = \sqrt{0,5 - 0,5^2} = 0,5$$

$l_{23} = \frac{a_{23} - l_{12} \cdot l_{13}}{l_{22}}$ = 0 - $\frac{0{,}5 \cdot 1{,}0}{0{,}5}$ = -1

$l_{24} = \frac{a_{24} - l_{12} \cdot l_{14}}{l_{22}}$ = 0 - $\frac{0{,}5 \cdot 0{,}25}{0{,}5}$ = -0,25

$l_{25} = \frac{a_{25} - l_{12} \cdot l_{15}}{l_{22}}$ = 0 - $\frac{0{,}5 \cdot 1}{0{,}5}$ = -1

$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{13}^2 - l_{23}^2} = \sqrt{3 - 1 - 1}$ = 1

$l_{34} = \frac{a_{34} - 1{,}0 * 0{,}25 - 1{,}0 * 0{,}25}{1}$ = 0 – 0,5 = -0,5

$l_{35} = a_{35}$ – 1 – 1 = -2

$l_{44} = \sqrt{a_{44} - 0{,}25^2 - 0{,}25^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{0{,}625 - 0{,}375} = \sqrt{0{,}25}$ = 0,5

$l_{45} = \frac{0 - 0{,}25 * 1 - 0{,}25 * 1 - 0{,}5 * 2}{0{,}5}$ = -3

$l_{55} = \sqrt{16 - 1^2 - 1^2 - 2^2 - 3^2} = \sqrt{1}$ = 1

$$L^T = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}25 & 1 \\ & 0{,}5 & -1 & -0{,}25 & -1 \\ & & 1 & -0{,}5 & -2 \\ & & & 0{,}5 & -3 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 1 & 0.25 & 1 \\ 0 & 0.5 & -1 & -0.25 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В процесі факторизації нульові елементи можуть обертатися в ненульові, що вимагає виділення додаткової пам'яті.

Лекція ___

Метод квадратних коренів у формі зовнішніх добутків.

$$A = A_0 = H_0 = \begin{pmatrix} d_1 & \mathrm{v}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{v}_1 & \overline{\mathrm{H}}_1 \end{pmatrix}$$

Крок 1

$$L_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 \\ \frac{V_1}{\sqrt{d_1}} & I_{N-1} \end{pmatrix},$$ L_1 - матриця перетворень.

Створюємо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{H_1} - \frac{V_1 V_1^T}{d_1} \end{pmatrix}$$

Можна перевірити безпосереднім перемноженням

$$A_0 = L_1 A_1 L_1^T = L_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix} L_1^T \qquad ,$$

де $H_1 = \overline{H_1} - \frac{V_1 V_1^T}{d_1}$ знаходимо з матриці A_1 .

Далі матрицю H_1 подаємо у вигляді:

$$H_1 = \begin{pmatrix} d_2 & V_2^T \\ V_2 & \overline{H_2} \end{pmatrix}$$

Крок 2

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2} & 0 \\ 0 & \frac{v_2}{\sqrt{d_2}} & I_{N-2} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{H}_2 - \frac{v_2 * v_2^T}{d_2} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix} = L_2 * A_2 * L^T{}_2$$

Продовжуючи обчислення, отримаємо:

$$A_{N-1} = L_N * I_N * L^T{}_N$$

На кожному і-ому кроці d_i додатній скаляр,
v_i - вектор довжини N-i
H_i - позитивно визначена матриця порядку N-i
$A = L_1 * L_2 * ... * L_N * L^T{}_N * ... * L^T{}_2 * L^T{}_1$

Приклад:

$$A = A_0 = H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Крок 1

$$d_1 = 1,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{H}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = L_1 A_1 L_1^T = L_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix} L_1^T$$

де $H_1 = \overline{H_1} - \frac{V_1 V_1^T}{d_1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$

Крок 2

$$H_1 = \overline{\mathrm{H}}_1 - \frac{v_1 * v_1^T}{d_1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$d_2 = 4,\ v_2 = 4,\ \overline{\mathrm{H}}_2 = 13$

$$H_1 = \begin{pmatrix} d_2 & V_2^T \\ V_2 & \overline{H_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix} = L_2 A_2 L_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \overline{\mathrm{H}}_2 - \frac{v_2 * v_2^T}{d_2} = 13 - \frac{4*4}{9} = 9$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Крок 3

$$A_2 = L_3 \mathrm{I}\, L_3^T \quad ; \quad d_3 = 9$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L = L_1 * L_2 * L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Подвійна факторизація

Метод заснований на обчисленні 2n матриць співмножників для системи рівнянь порядку n, таких, що добуток цих матриць задовольняє співвідношенню:

$$L^{(n)} * L^{(n-1)} * \ldots * L^{(2)} * L^{(1)} * A * R^{(1)} * R^{(2)} * \ldots * R^{(n-1)} * R^{(n)} = I$$

Де:

A - вихідна матриця;

L - ліві матриці - співмножники;

R - праві матриці - співмножники;

I - одинична матриця порядку n.

Множимо по черзі ліворуч на обернені матриці для матриць $L^{(n)}$, $L^{(n-1)}$, … , $L^{(2)}$, $L^{(1)}$, і одержимо:

$$A * R^{(1)} * R^{(2)} * \ldots * R^{(n-1)} = (L^{(1)})^{-1} * (L^{(2)})^{-1} * \ldots * (L^{(n-1)})^{-1} * (L^{(n)})^{-1}$$

Множимо справа по черзі на матриці $L^{(n)}$, $L^{(n-1)}$, … , $L^{(2)}$, $L^{(1)}$, і одержимо:

$$A*R^{(1)}*R^{(2)}*...*R^{(n-1)}*L^{(n)}*L^{(n-1)}*...*L^{(2)}*L^{(1)}=I$$

Множимо ліворуч на обернену матрицю до A

$$R^{(1)}*R^{(2)}*...*R^{(n-1)}*L^{(n)}*L^{(n-1)}*...*L^{(2)}*L^{(1)}=A^{-1}$$

Процес розкладення можна описати так:

$$A=A^{(0)}$$

$$A^{(1)}=L^{(1)}*A^{(0)}*R^{(1)}$$

$$A^{(2)}=L^{(2)}*A^{(1)}*R^{(2)}$$

……………………

$$A^{(n)}=L^{(n)}*A^{(n-1)}*R^{(n)}.$$

$$\begin{pmatrix} L_{11}^{(1)} & 0 & 0 \dots & 0 \\ L_{21}^{(1)} & 1 & 0 \dots & 0 \\ L_{31}^{(1)} & 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1}^{(1)} & 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} * A * \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{R}_{12}^{(1)} & \mathrm{R}_{13}^{(1)} \dots & \mathrm{R}_{n2}^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^{(k)}=\begin{pmatrix} & & (k) & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mathrm{L}_{kk}^{(k)} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mathrm{L}_{ik}^{(k)} & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mathrm{L}_{nk}^{(k)} & 0 \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_{kk}^{(k)}=\frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$$\mathrm{L}_{ik}^{(k)}=\frac{-a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$$R^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\;\; 0..... \; 0 & \\ 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\;\; 0..... \; 0 & \\ .... & \\ 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; R^{(k)}_{kj} ... R^{(k)}_{kn} & (k) \\ 0 \;\;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; ... \; 1 & \end{pmatrix}$$

$$R^{(k)}_{kj} = \frac{-a^{(k-1)}_{kj}}{a^{(k-1)}_{kk}}$$

<u>**Приклад:**</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Крок 1

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Крок 2

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}^{(1)}} & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = L^{(2)} * A^{(1)} * R^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Крок 3

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.33 \end{pmatrix} \qquad R^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = R^{(1)} * R^{(2)} * R^{(3)} * L^{(3)} * L^{(2)} * L^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1.33 & 0.33 \\ -0.5 & 1.16 & -0.66 \\ 0 & -0.33 & 0.33 \end{pmatrix}$$