НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Факультет прикладної математики
Кафедра прикладної математики

Звіт
із лабораторної роботи
з дисципліни «АЛГОРИТМИ І СИСТЕМИ КОМП’ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ 1.МАТЕМАТИЧНІ АЛГОРИТМИ»
на тему
“Розв’язання звичайних диференціальних рівнянь”

Виконала:
студентка групи КМ-01
Резниченко Є. С.

Перевірила:
Асистент кафедри ПМА
Ковальчук-Химюк Л. О.

Київ — 2023

Зміст

Вступ

Метою даної роботи є вивчення правил використання програмних засобів чисельного розв’язання звичайних диференціальних рівнянь, практичне розв’язання рівнянь на ЕОМ з використанням СКМ та порівняльний аналіз методів інтегрування ОДУ.

Основна частина

Варіант 15

Диференційне рівняння	Початкова умова	Проміжок інтегрування	Крок h
$y'' + y = x^2 - x + 2$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$	[0; 1]	0.1

Метод розв'язання – метод Рунге-Кутта 4-го порядку [3]

Теоретичні відомості

Метод Рунге-Кутта [3] використовується для ітеративного обчислення значень рішення диференціального рівняння у вигляді y=f(x, y), використовуючи початкові умови (x0, y0). Метод Рунге-Кутта 4-го порядку забезпечує точність 4-го порядку. При його застосуванні виникає питання вибору конкретних формул і кроку мережі.

Якщо права частина диференціального рівняння - це функція, яка є неперервною і обмеженою разом із своїми четвертими похідними, то метод Рунге-Кутта 4-го порядку дає добрі результати. Тут важливо вибрати відповідні формули для кожного конкретного випадку і визначити оптимальний крок мережі. Зменшення кроку призводить до швидшого зростання точності.

У випадку, коли права частина не має обмежених четвертих похідних, максимальний порядок точності методу Рунге-Кутта не досягається. Тут рекомендовано використовувати обчислювальні схеми меншого порядку точності, який відповідає порядку похідних. Крок мережі обирається настільки малим, щоб забезпечити необхідну точність розрахунків. Для визначення точності часто використовується апостеріорна оцінка похибки, яка базується на використанні двох мереж і правила Рунге. Формула методу Рунге-Кутта 4-го порядку:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\ k_1 = hf(x_k, y_k) \\ k_2 = hf\left(x_k + \dfrac{h}{2}, y_k + k_1/2\right) \\ k_3 = hf\left(x_k + \dfrac{h}{2}, y_k + \dfrac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x_k + h, y_k + k_3) \end{cases}$$

Алгоритми розв’язання

Python:

Імпортуємо бібліотеки pandas [1], matplotlib [2]

Створюємо власну функцію, яка приймає дані і рахує за формулою Рунге-Кутта 4-го порядку. У цю функцію передаємо дані індивідуального варіанту, а саме, початкові умови, проміжок інтегрування та крок. Оскільки задане диференційне рівняння є рівнянням другого порядку, то треба ввести заміну

$$\begin{cases} w = y' \\ w' = y'' \end{cases}$$

Отже рівняння з заміною виглядає наступним чином:

$$w' + w = x^2 - x + 2$$

У кінці виводимо графік створений бібліотекою matplotlib:

Octave:

Створюємо власну функцію розрахунку методом Рунге-Кутта 4-го порядку.

Передаємо туди рівняння з заміною та початкові умови. Результат виводимо у форматі таблички, та будуємо графіки y(x), y`(x), при x від 0 до 1 із кроком 0.1

Висновки

Рівняння $y'' + y = x^2 - x + 2$ після введення заміни

$$\begin{cases} w = y' \\ w' = y'' \end{cases}$$

Виглядає наступним чином $w' + w = x^2 - x + 2$

Заміна треба для можливості застосування методу Рунге-Кутта [3]

Початкові умови: $y(0) = 1 \;\; y'(0) = 0$

У результаті розв'язання рівняння було знайдено такі результати:

Розв'язок Python:

	x	y'(x)	y(x)
0	0.0	0.000000	1.000000
1	0.1	0.095171	1.004838
2	0.2	0.181397	1.018736
3	0.3	0.259816	1.040856
4	0.4	0.331642	1.070479
5	0.5	0.398157	1.107008
6	0.6	0.460693	1.149978
7	0.7	0.520624	1.199059
8	0.8	0.579350	1.254062
9	0.9	0.638282	1.314936
10	1.0	0.698831	1.381773

Розв'язок Octave:

x	y'(x)	y(x)
0.0000	0.000000	1.000000
0.1000	0.095171	1.004838
0.2000	0.181397	1.018736
0.3000	0.259816	1.040856
0.4000	0.331642	1.070479
0.5000	0.398157	1.107008
0.6000	0.460693	1.149978
0.7000	0.520624	1.199059
0.8000	0.579350	1.254062
0.9000	0.638282	1.314936
1.0000	0.698831	1.381773

В результаті отримали схожі значення для y(x) та y`(x). Графіки наведені в Додатку А.

Відповіді на контрольні питання

1. **Що значить вирішити диференціальні рівняння чисельним методом?** Вирішення диференціальних рівнянь чисельним методом означає знаходження наближеного чисельного розв'язку диференціального рівняння за допомогою обчислювальних методів. Це необхідно, коли аналітичне розв'язання диференціального рівняння неможливе або складне, і ми використовуємо чисельні методи для наближеного знаходження функції, яка задовольняє рівняння.
2. **Охарактеризуйте метод Рунге-Кутта четвертого порядку –** Метод Рунге-Кутта четвертого порядку - це чисельний метод для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь. Він є одним з найпоширеніших методів і має четвертий порядок точності. Метод використовує ітерації для оновлення значень функції на кожному кроці, використовуючи середні значення на кількох під кроках для покращення точності результатів.
3. **Дайте порівняльну характеристику методів Рунге-Кутта і методів прогнозу-корекції –** Методи Рунге-Кутта та методи прогнозу-корекції - це дві різні класи чисельних методів для розв'язання диференціальних рівнянь. Методи Рунге-Кутта використовують ітерації та середні значення для оновлення функцій на кожному кроці, тоді як методи прогнозу-корекції використовують два окремі кроки: прогноз та корекцію. Обидва підходи мають свої переваги та недоліки, і вибір залежить від конкретного завдання та вимог до точності.
4. **Опишіть процедуру автоматичного обрання кроку в методі Рунге-Кутта –** Процедура автоматичного обрання кроку в методі Рунге-Кутта називається "кроком адаптації". Вона полягає в тому, щоб динамічно змінювати розмір кроку в залежності від поточних умов розв'язку. На кожному кроці обчислюється деякий показник точності, і наступний крок вибирається так, щоб досягнути заданого рівня точності. Це дозволяє ефективно розв'язувати різні диференціальні рівняння з різними характерами розв'язків.
5. **Як оцінюють точність отриманого розв'язку в методах прогнозу і корекції?** Оцінка точності отриманого розв'язку в методах прогнозу і корекції відбувається шляхом порівняння результату прогнозу (наближеного розв'язку) з результатом корекції (кінцевим розв'язком). Точність оцінюється за допомогою різниці між цими двома значеннями, і зазвичай використовується показник помилки, такий як середньоквадратична помилка або абсолютна помилка. Мета полягає в тому, щоб зробити прогнози та корекції настільки точними, наскільки це можливо, і зменшити вплив наближень на кінцевий результат.

Перелік посилань

1. Pandas - https://pandas.pydata.org
2. Matplotlib - https://matplotlib.org
3. Метод Рунге-Кутта - https://ukrayinska.libretexts.org/Математика/Диференційні_рівняння/Перший_курс_з_диференціальних_рівнянь_для_вчених_та_інженерів_(Herman)/03%3A_Чисельні_рішення/3.04%3A_Методи_Рунге-Кутта

Додаток А – Скріншоти роботи програми

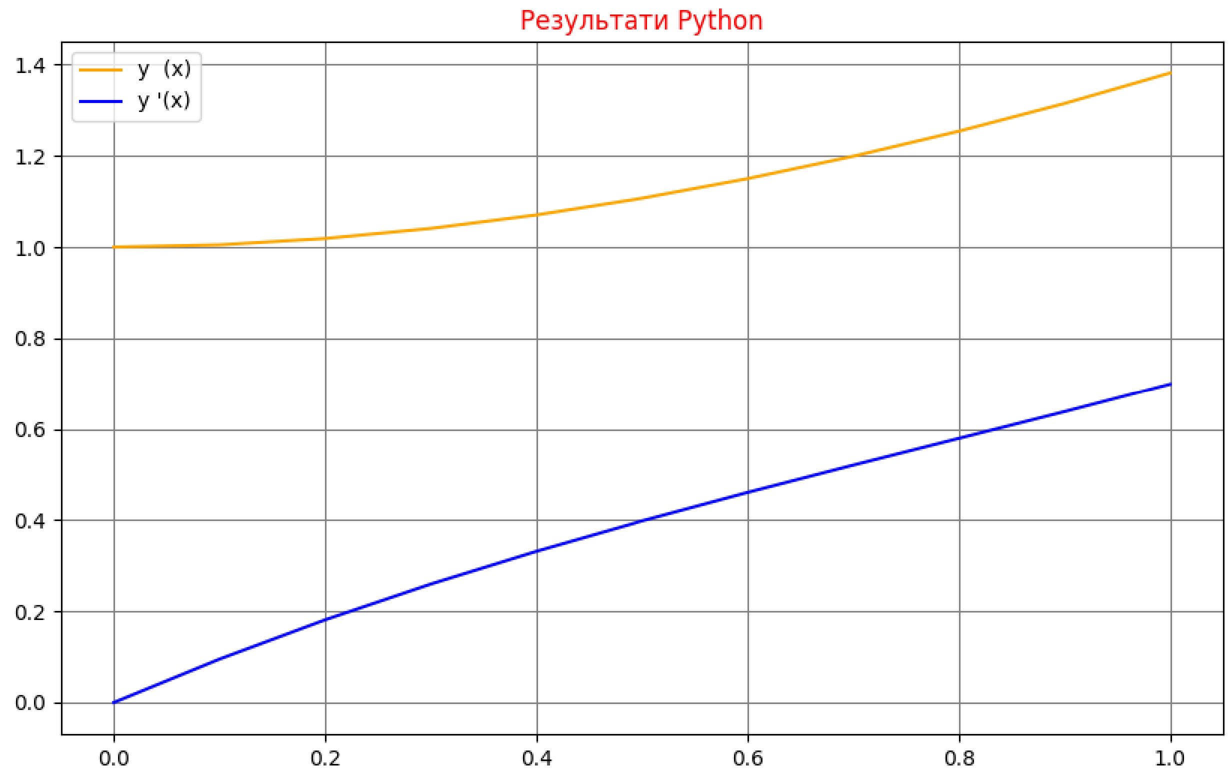

Рис. 1 – Графік результатів на Python

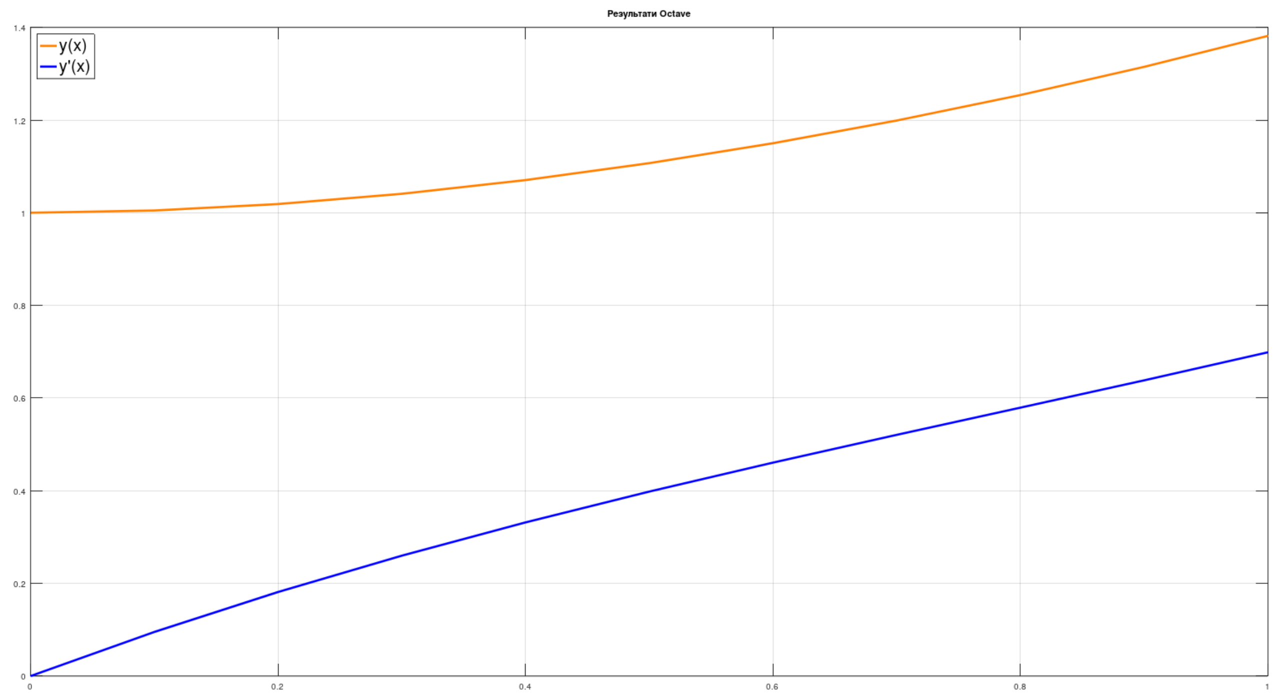

Рис. 2 – Графік результатів на Octave

Додаток Б – Код програми

Вміст файлу main.py :

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt


def equation_func(x, y, z):
    return x**2 - x + 2 - y


def runge_kutta(x0, y0, z0, h, x_target, equation_func):
    x = x0
    y = y0
    z = z0

    results = [('x', 'y\'(x)', 'y(x)')]

    while x <= x_target:
        results.append((x, z, y))

        k1y = h * z
        k1z = h * equation_func(x, y, z)

        k2y = h * (z + 0.5 * k1z)
        k2z = h * equation_func(x + 0.5 * h, y + 0.5 * k1y, z + 0.5 * k1z)

        k3y = h * (z + 0.5 * k2z)
        k3z = h * equation_func(x + 0.5 * h, y + 0.5 * k2y, z + 0.5 * k2z)

        k4y = h * (z + k3z)
        k4z = h * equation_func(x + h, y + k3y, z + k3z)

        y = y + (1/6) * (k1y + 2 * k2y + 2 * k3y + k4y)
        z = z + (1/6) * (k1z + 2 * k2z + 2 * k3z + k4z)
        x = x + h

    return results


x0 = 0
y0 = 1
z0 = 0
h = 0.1
x_target = 1.0

results = runge_kutta(x0, y0, z0, h, x_target, equation_func)

# Створюємо датафрейм з результатами
df_python = pd.DataFrame(results[1:], columns=results[0])
```

```python
print('\n\n\nРезниченко Є. С. Варіант 15 Лаб 3\n')
print('\nРозв\'язок Python:\n')
print(df_python)

# Створюємо графік для результатів Python
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(df_python.index/10, df_python['y(x)'], label='y  (x)', color='orange')
plt.plot(df_python.index/10, df_python['y\'(x)'], label='y \'(x)', color='blue')
plt.title('Результати Python', color='red')
plt.grid(color='grey')
plt.legend()
plt.show()
```

Вміст файлу main.m :

```
# Початкові значення
x0 = 0.0;
y0 = 1.0;
z0 = 0.0;
h = 0.1;
x_target = 0.9;

# Функція рівняння
function result = equation_func(x, y, z)
    result = x^2 - x + 2 - y;
endfunction

# Метод Рунге-Кутта
function results = runge_kutta(x0, y0, z0, h, x_target)
    x = x0;
    y = y0;
    z = z0;
    results = [];
```

```
    while x <= x_target
        results = [results; [x, z, y]];

        k1y = h * z;
        k1z = h * equation_func(x, y, z);

        k2y = h * (z + 0.5 * k1z);
        k2z = h * equation_func(x + 0.5 * h, y + 0.5 * k1y, z + 0.5 * k1z);

        k3y = h * (z + 0.5 * k2z);
        k3z = h * equation_func(x + 0.5 * h, y + 0.5 * k2y, z + 0.5 * k2z);

        k4y = h * (z + k3z);
        k4z = h * equation_func(x + h, y + k3y, z + k3z);

        y = y + (1/6) * (k1y + 2 * k2y + 2 * k3y + k4y);
        z = z + (1/6) * (k1z + 2 * k2z + 2 * k3z + k4z);
        x = x + h;
    endwhile
    results = [results; [x, z, y]]; # Додаємо останній крок
endfunction

# Виклик методу Рунге-Кутта
results = runge_kutta(x0, y0, z0, h, x_target);

# Вивід результатів у форматі таблиці
fprintf('\nРозв"язок Octave:\n\n');
fprintf('      x      y(x)      y''(x)\n');
fprintf('---------------------------\n');
for i = 1:size(results, 1)
```

```
    fprintf('%6.4f   %8.6f   %8.6f\n', results(i, 1), results(i, 2), results(i, 3));
end


# Створення графіку
figure;
plot(results(:, 1), results(:, 3), '-', 'Color', [1 0.5 0], 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'y(x)');
hold on;
plot(results(:, 1), results(:, 2), 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'y''(x)');
title('Результати Octave');
legend('Location', 'NorthWest', 'FontSize', 20);
grid on;
hold off;
```