НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет прикладної математики

Кафедра прикладної математики

Звіт

із лабораторної роботи

з дисципліни «АЛГОРИТМИ І СИСТЕМИ КОМП’ЮТЕРНОЇ

МАТЕМАТИКИ 1.МАТЕМАТИЧНІ АЛГОРИТМИ»

на тему

“Транспортна задача”

|  |  |
| --- | --- |
| Виконав: | Перевірила: |
| студент групи КМ-01 | Асистент кафедри ПМА |
| Романецький М.С. | Ковальчук-Химюк Л. О. |

Київ — 2023

Зміст

[Вступ 3](#_Toc149928885)

[Основна частина 4](#_Toc149928886)

[Варіант 8 4](#_Toc149928887)

[Вимоги до ПЗ 5](#_Toc149928888)

[Теоретичні відомості 5](#_Toc149928889)

[Алгоритми розв’язання 6](#_Toc149928890)

[Висновки 8](#_Toc149928891)

[Відповіді на контрольні питання 9](#_Toc149928892)

[Перелік посилань 10](#_Toc149928893)

[Додаток А – Код програми 11](#_Toc149928894)

# Вступ

Метою даної роботи є вивчити методи розв’язання транспортної задачі, практичне розв’язання транспортної задачі лінійного програмування на ЕОМ за допомогою СКМ.

# Основна частина

## Варіант 8

Транспортна задача

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Транспортні витрати (матриця С) | Об’єм виробництва (вектор а) | Об’єм потреб  (вектор b) |
|  |  |  |

Транспортна задача може бути зведена до задачі лінійного програмування (ЛП)

Позначимо як вартість перевезення одиниці товару від джерела до призначення , як кількість товарів, яку потрібно перевезти від джерела до призначення , як обсяг товарів, які можуть бути відправлені з джерела , як обсяг товарів, які повинні бути доставлені до призначення .

Математична модель даної задачі:

1. **Цільова функція (мінімізація вартості перевезення)**:

Мінімізувати , де - вартість перевезення одиниці товару від i-го джерела до j-го призначення.

1. **Обмеження на обсяг товарів, які приходять до кожного призначення**:

для j = 1, 2, 3, 4, 5

де – обсяг товарів, які можуть бути доставлені до j-го призначення

1. **Обмеження на обсяг товарів, які виходять з кожного джерела**:

для i = 1, 2, 3, 4

де – обсяг товарів, які можуть бути відправлені до i-го джерела

1. **Необхідно враховувати, що кількість товарів не може бути від'ємною**:

для i = 1, 2, 3, 4 та j = 1, 2, 3, 4, 5

1. **Додаткове обмеження на кількість товарів, яку можна перевезти**:

для i = 1, 2, 3, 4 та j = 1, 2, 3, 4, 5

Це обмеження враховує той факт, що кількість перевезених товарів не може перевищувати обсяг товарів, які доступні в джерелі *i*, а також обсяг товарів, які потрібно доставити до призначення *j*.

## Вимоги до ПЗ

1. Реалізувати перевірки на некоректний ввід (порожнє введення, символи замість числа, тощо).
2. У програмі повинно бути передбачено можливість гнучкого налагодження розмірності розв’язуваної задачі.
3. Має зберігатись логічно правильне розв’язання (нижня межа інтегрування не має перевищувати верхню, тощо)

## Теоретичні відомості

Транспортна задача є однією з класичних задач оптимізації, яка виникає в різних галузях, де потрібно оптимізувати розподіл ресурсів або товарів з джерела до призначення з мінімальними витратами чи максимізацією прибутку. Основні відомості про транспортну задачу включають:

1. Постановка задачі: Транспортна задача полягає у вирішенні проблеми розподілу обмежених ресурсів (наприклад, товарів чи сировини) від джерел (наприклад, фабрик або складів) до призначень (наприклад, розділових пунктів або споживачів) з мінімальними витратами або максимізацією прибутку.
2. Варіанти задачі: Транспортні задачі можуть бути поділені на прямі (мінімізація витрат) та обернені (максимізація прибутку). Також існують варіації, такі як вирішення задачі найменшої вартості, задачі максимізації прибутку тощо.
3. Основні складові: Транспортна задача включає в себе матрицю вартостей (вартість перевезення одиниці товару від джерела до призначення), вектор обсягів ресурсів (доступність товарів на джерелах) і вектор обсягів запитів (потреба в товарах на призначеннях).
4. Основна мета: Основною метою транспортної задачі є знайти такий план розподілу товарів, який задовольняє обмеженням на ресурси та попит і забезпечує оптимальний результат, такий як мінімізація загальних витрат або максимізація прибутку.
5. Методи розв'язку: Для вирішення транспортних задач використовують різні методи, включаючи симплекс-метод, методи планування, метод потенціалів, метод мінімального елемента тощо. Вибір методу може залежати від конкретної задачі та обсягів даних.
6. Застосування: Транспортні задачі мають широкі застосування в логістиці, постачанні, транспорті, виробництві та багатьох інших галузях. Вони допомагають оптимізувати розподіл ресурсів, планування перевезень та ефективність ділових процесів.
7. Результат: Результатом розв'язку транспортної задачі є оптимальний план розподілу товарів, де вказані обсяги товарів, які перевозяться від кожного джерела до призначення, і вартість цього плану.

Математична модель такої задачі має вигляд:

За умови

Для розв’язку транспортної задачі повинна виконуватись умова:

Транспортні задачі є важливим інструментом для оптимізації ресурсів та вирішення проблем розподілу в різних галузях бізнесу та науки.

## Алгоритми розв’язання

Імпортуємо бібліотеки Oct2py [1], numpy [2], collections [3]

Ініціалізуємо власну функцію umova, яка буде відкривати текстовий файл із умовою задачі та записувати в пам’ять, щоб оперувати далі цими даними.

Для розв’язку мовою Python створимо функцію transport яка буде приймати початкові умови та за допомогою методу потенціалів [4] знаходити оптимальний план перевезень та мінімальну вартість перевезень. Більш детально про цю функцію:

1. **assert sum(supply) == sum(demand)**: Ця перевірка забезпечує, що сума доступних ресурсів (постачання) дорівнює сумі запитів (попиту), що є обов'язковою умовою для розв'язання транспортної задачі.
2. **s, d, C = np.copy(supply), np.copy(demand), np.copy(costs)**: Створюються копії вхідних даних **supply**, **demand**, і **costs** для подальшої обробки. Вони будуть використовуватися для розрахунків без зміни початкових даних.
3. **n, m = C.shape**: Визначається кількість джерел (**n**) і кількість призначень (**m**) на основі розміру матриці вартостей **C**.
4. **X = np.zeros((n, m))**: Створюється пуста матриця **X**, яка представлятиме оптимальний план розподілу товарів.
5. **indices = [(i, j) for i in range(n) for j in range(m)]**: Створюється список індексів у вигляді пар (i, j), які представляють всі можливі комбінації джерел і призначень.
6. **xs = sorted(zip(indices, C.flatten()), key=lambda a\_b: a\_b[1])**: Створюється відсортований список пар (індекс, вартість) з усіх можливих варіантів розподілу товарів за зростанням вартості.
7. Наступні кроки реалізують алгоритм розподілу товарів. Деталі алгоритму включають в себе обчислення потенціалів (змінних u і v), побудову матриці чутливості (S), вибір мінімального від'ємного елементу і подальшу оптимізацію опорного плану.
8. Основна частина цього алгоритму має на меті визначити оптимальний план розподілу товарів **X** з мінімальними витратами. Кроки циклу повторюються, доки не буде знайдено оптимальний план.
9. Функція повертає оптимальний план розподілу товарів **X** і сумарну вартість розподілу (мінімальну вартість перевезень).

Для розв’язку мовою Octave перетворимо матрицю і вектори у одновимірні списки. Створимо матрицю рівностей у вектор правих частин рівностей. У циклі заповнюємо матрицю так, щоб кожен рядок відповідав обмеженню постачання або попиту. Нижньою межею розв’язку буде 0, а верхньою нескінченність. Викликаємо вбудовану функцію glpk для вирішення задачі. Вона поверне оптимальний план перевезень. Порахуємо мінімальну вартість перевезень та виведемо її на екран разом із оптимальним планом.

# Висновки

У результаті виконання роботи досягнуто таких результатів:

Розв'язок на мові Python

Оптимальний план перевезень:

[[ 0. 0. 8. 0. 10.]

[ 0. 8. 0. 0. 4.]

[ 0. 0. 0. 3. 14.]

[ 8. 0. 0. 5. 0.]]

Мінімальна вартість перевезень: 371.0

Розв'язок на мові Octave

Оптимальний план перевезень:

[[ 0. 10. 0. 0. 0.]

[ 0. 0. 4. 3. 0.]

[ 8. 8. 0. 14. 5.]

[ 0. 0. 0. 8. 0.]]

Мінімальна вартість перевезень: 371.0

Як бачимо, ми отримали різні оптимальні плани, але однакову мінімальну вартість перевезень. Це сталось через те що ми використали різні методи розв’язання задачі. Проте оскільки вартість однакова можемо зробити висновок, що в обох розв’язках ми дійсно знайшли мінімальну вартість. Щоб додатково переконатись у цьому звіримо результати з сервісом онлайн розв’язку транспортних задач linprog.com [5]

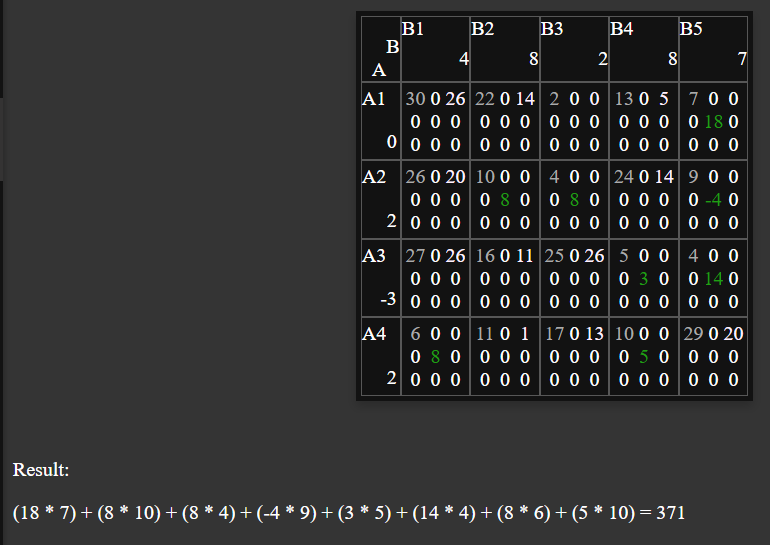


Рис. 1 – Результат розв’язку задачі онлайн сервісом

# Відповіді на контрольні питання

1. Формулювання транспортної задачі полягає в знаходженні оптимального способу перевезення товарів з одного місця в інше при мінімізації витрат. Ранг системи рівнянь визначається як (m + n - 1), де m - кількість рядків у таблиці запитів, а n - кількість стовпців.
2. Постановка транспортної задачі з обмеженнями на пропускну здатність включає обмеження на кількість товарів, які можуть бути перевезені через кожний маршрут. Умови можливості розв'язання полягають у тому, що сума запасів (пропонованих товарів) повинна дорівнювати сумі вимог (заявок) і має існувати хоча б один спосіб забезпечити цю рівність.
3. Розв'язання задач з надлишком запасів чи заявок використовується, коли сума запасів або заявок більша, ніж сума протилежних значень у таблиці запитів. У такому випадку вводять фіктивні запити або заявки для досягнення рівності.
4. Методи знаходження опорного плану включають методи "південно-західного кута", "мінімальної вартості" та "найменшого розходження". Вони використовуються для визначення початкового опорного плану.
5. Сутність угорського методу полягає в знаходженні оптимального розв'язку транспортної задачі шляхом визначення мінімального кількості клітин, які мають бути обрані для перевезення, при цьому забезпечуючи рівновагу між запасами і вимогами.
6. Метод потенціалів використовується для знаходження опорного плану та обчислення мінімального вартісного покриття. Він ґрунтується на визначенні потенціалів для рядків і стовпців таблиці запитів і використовується для оптимізації вартостей перевезення товарів в транспортній задачі.

# Перелік посилань

1. Oct2py - <https://pypi.org/project/oct2py/>
2. Numpy - <https://numpy.org>
3. Collections - [https://www.digitalocean.com/community/tutorials/python-counter-python-collections-counter](https://www.digitalocean.com/community/tutorials/python-counter-python-collections-counter%20)
4. Метод потенціалів - <https://elib.lntu.edu.ua/sites/default/files/elib_upload/ЕНП_ММОЕС_19/page20.html>
5. Онлайн сервіс вирішення транспортних задач - [Linprog.com](https://linprog.com/en/main-potentials/result;queryParams=%7B%22n%22:4,%22m%22:5,%22cost%22:%5B%5B%2230%22,%2222%22,%222%22,%2213%22,%227%22%5D,%5B%2226%22,%2210%22,%224%22,%2224%22,%229%22%5D,%5B%2227%22,%2216%22,%2225%22,%225%22,%224%22%5D,%5B%226%22,%2211%22,%2217%22,%2210%22,%2229%22%5D%5D,%22consumers%22:%5B%228%22,%228%22,%228%22,%228%22,%2228%22%5D,%22suppliers%22:%5B%2218%22,%2212%22,%2217%22,%2213%22%5D%7D)

# Додаток А – Код програми

Вміст файлу main.ipynb :

from oct2py import octave

import numpy as np

from collections import Counter

def umova():

    with open('data.txt', 'r', encoding='utf-8') as file:

        lines = [line.strip() for line in file.readlines()]

*# Знайти рядки з мітками*

    indices = {label: lines.index(label) for label in ['вектор a', 'вектор b', 'матриця С']}

*# Читання векторів та матриці*

    a = np.fromstring(lines[indices['вектор a'] + 1], sep=',')

    b = np.fromstring(lines[indices['вектор b'] + 1], sep=',')

    C\_start, C\_end = indices['матриця С'] + 1, len(lines)

    C = np.genfromtxt(lines[C\_start:C\_end], delimiter=',')

    return a, b, C

def transport(supply, demand, costs):

    assert sum(supply) == sum(demand)

    s, d, C = np.copy(supply), np.copy(demand), np.copy(costs)

    n, m = C.shape

    X = np.zeros((n, m))

    indices = [(i, j) for i in range(n) for j in range(m)]

    xs = sorted(zip(indices, C.flatten()), key=lambda a\_b: a\_b[1])

    for (i, j), \_ in xs:

        if d[j] != 0:

            remains = s[i] - d[j] if s[i] >= d[j] else 0

            grabbed = s[i] - remains

            X[i, j], s[i], d[j] = grabbed, remains, d[j] - grabbed

    while True:

        u = np.array([np.nan] \* n)

        v = np.array([np.nan] \* m)

        S = np.zeros((n, m))

        nonzero = list(zip(\*np.where(X > 0)))

        u[nonzero[0][0]] = 0

        while any(np.isnan(u)) or any(np.isnan(v)):

            for i, j in nonzero:

                if np.isnan(u[i]) and not np.isnan(v[j]):

                    u[i] = C[i, j] - v[j]

                elif not np.isnan(u[i]) and np.isnan(v[j]):

                    v[j] = C[i, j] - u[i]

        S = C - u[:, None] - v

        s = np.min(S)

        if s >= 0:

            break

        start = tuple(np.argwhere(S == s)[0])

        T = np.copy(X)

        T[start] = 1

        while True:

            \_xs, \_ys = np.nonzero(T)

            xcount, ycount = Counter(\_xs), Counter(\_ys)

            for x in xcount.keys():

                if xcount[x] <= 1: T[x, :] = 0

            for y in ycount.keys():

                if ycount[y] <= 1: T[:, y] = 0

            if all(x > 1 for x in xcount.values()) and all(y > 1 for y in ycount.values()):

                break

        path = [start]

        fringe = set(tuple(p) for p in np.argwhere(T > 0))

        size = len(fringe)

        while len(path) < size:

            last = path[-1]

            fringe.remove(last)

            next\_ = min(fringe, key=lambda x\_y: abs(last[0]-x\_y[0]) + abs(last[1]-x\_y[1]))

            path.append(next\_)

        neg, pos = path[1::2], path[::2]

        q = min(X[tuple(zip(\*neg))])

        X[tuple(zip(\*neg))] -= q

        X[tuple(zip(\*pos))] += q

    return X, np.sum(X \* C)

supply, demand, costs = umova()

*# print(supply)*

*# print(demand)*

*# print(costs)*

routes, total\_cost = transport(supply, demand, costs)

print('Розв\'язок на мові Python\n')

print('Оптимальний план перевезень:')

print(routes)

print(f'Мінімальна вартість перевезень: {total\_cost}')

C = costs.astype(int).flatten().tolist()

b = np.concatenate((supply, demand)).astype(int).tolist()

m = len(supply)

n = len(demand)

A\_eq = octave.zeros(m + n, m \* n)

b\_eq = octave.zeros(m + n, 1)

for i in range(m):

    A\_eq[i, i\*n:(i+1)\*n] = 1

    b\_eq[i] = b[i]

for j in range(n):

    A\_eq[m+j, j::n] = 1

    b\_eq[m+j] = b[m+j]

lb = octave.zeros(m \* n, 1)

ub = octave.inf(m \* n, 1)

param = {'msglev': 1}  *#  двофазний простий симплекс*

ctype = 'S' \* (m + n)

vartype = 'C' \* (m \* n)

sense = 1

results = octave.glpk(C, A\_eq, b\_eq, lb, ub, ctype, vartype, sense, param)

plan = np.reshape(results, (n, m)).T

oct\_total\_cost = octave.dot(C, results)

print('Розв\'язок на мові Octave\n')

print('Оптимальний план перевезень:')

print(plan)

print(f'Мінімальна вартість перевезень: {oct\_total\_cost}')