# Лекція 3. Статистичне виведення в R. Загальні принципи

Данило Тавров

2023-02-22

### План лекції

1 Поняття про статистичне виведення

2 Основні поняття теорії ймовірностей

③ Огляд деяких найважливіших розподілів

- Найближчі дві лекції ми присвятимо пригадуванню основних відомостей із теорії ймовірностей та статистики
- Сьогодні ми згадаємо основні поняття з теорії ймовірностей та подивимося, як їх реалізовано в R
- Корисними матеріалами є:

- Найближчі дві лекції ми присвятимо пригадуванню основних відомостей із теорії ймовірностей та статистики
- Сьогодні ми згадаємо основні поняття з теорії ймовірностей та подивимося, як їх реалізовано в R
- Корисними матеріалами є

- Найближчі дві лекції ми присвятимо пригадуванню основних відомостей із теорії ймовірностей та статистики
- Сьогодні ми згадаємо основні поняття з теорії ймовірностей та подивимося, як їх реалізовано в R
- Корисними матеріалами є:
  - Мій конспект лекцій із «Теорії ймовірностей» (викладено на диску в каталозі з Лекцією 3)
  - Фундаментальна книжка All of Statistics, розділи 1–4 (викладено на диску в загальному каталозі з літературою)

- Найближчі дві лекції ми присвятимо пригадуванню основних відомостей із теорії ймовірностей та статистики
- Сьогодні ми згадаємо основні поняття з теорії ймовірностей та подивимося, як їх реалізовано в R
- Корисними матеріалами є:
  - Мій конспект лекцій із «Теорії ймовірностей» (викладено на диску в каталозі з Лекцією 3)
  - Фундаментальна книжка All of Statistics, розділи 1–4 (викладено на диску в загальному каталозі з літературою)

- Найближчі дві лекції ми присвятимо пригадуванню основних відомостей із теорії ймовірностей та статистики
- Сьогодні ми згадаємо основні поняття з теорії ймовірностей та подивимося, як їх реалізовано в R
- Корисними матеріалами є:
  - Мій конспект лекцій із «Теорії ймовірностей» (викладено на диску в каталозі з Лекцією 3)
  - Фундаментальна книжка All of Statistics, розділи 1–4 (викладено на диску в загальному каталозі з літературою)

- Під статистичним виведенням (statistical inference) будемо розуміти процес формування висновків про популяцію<sup>1</sup> (population) на основі деякої вибірки (sample)
  - Популяція містить повний набір даних про всі можливі спостереження
  - Вибірка є підмножиною популяці
- Маючи на руках дані певної вибірки, ми намагаємося з'ясувати, яка **ймовірнісна модель** (probability model, або ще кажуть **data generating process** DGP) ці дані породила
- Параметром (parameter) модели є деяка її числова характеристика
- Статистикою (statistic) є функція від даних, яка описує вибірку
- Ми хочемо використати підраховані статистики для виведення (to infer) знання про параметри популяції

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Також побутує поняття «генеральна сукупність», але ми ним користуватися не будемо

- Під статистичним виведенням (statistical inference) будемо розуміти процес формування висновків про популяцію<sup>1</sup> (population) на основі деякої вибірки (sample)
  - Популяція містить повний набір даних про всі можливі спостереження
  - Вибірка є підмножиною популяції
- Маючи на руках дані певної вибірки, ми намагаємося з'ясувати, яка ймовірнісна модель (probability model, або ще кажуть data generating process DGP) ці дані породила
- Параметром (parameter) модели є деяка її числова характеристика
- **Статистикою** (statistic) є функція від даних, яка описує вибірку
- Ми хочемо використати підраховані статистики для виведення (to infer) знання про параметри популяції

 $<sup>^{1}</sup>$ Також побутує поняття «генеральна сукупність», але ми ним користуватися не будемо

- Під статистичним виведенням (statistical inference) будемо розуміти процес формування висновків про популяцію<sup>1</sup> (population) на основі деякої вибірки (sample)
  - Популяція містить повний набір даних про всі можливі спостереження
  - Вибірка є підмножиною популяції
- Маючи на руках дані певної вибірки, ми намагаємося з'ясувати, яка **ймовірнісна модель** (probability model, або ще кажуть **data generating process** DGP) ці дані породила
  - У термінах теорії ймовірностей, нас цікавить спільний розподіл (joint probability distribution) усіх випадкових величин із вибірки
- Параметром (parameter) модели є деяка її числова характеристика
- Статистикою (statistic) є функція від даних, яка описує вибірку
- Ми хочемо використати підраховані статистики для виведення (to infer) знання про параметри популяції

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Також побутує поняття «генеральна сукупність», але ми ним користуватися не будемо

- Під статистичним виведенням (statistical inference) будемо розуміти процес формування висновків про популяцію<sup>1</sup> (population) на основі деякої вибірки (sample)
  - Популяція містить повний набір даних про всі можливі спостереження
  - Вибірка є підмножиною популяції
- Маючи на руках дані певної вибірки, ми намагаємося з'ясувати, яка ймовірнісна модель (probability model, або ще кажуть data generating process, DGP) ці дані породила
  - У термінах теорії ймовірностей, нас цікавить спільний розподіл (joint probability distribution) усіх випадкових величин із вибірки
- Параметром (parameter) модели  $\epsilon$  деяка її числова характеристика
- Статистикою (statistic) є функція від даних, яка описує вибірку
- Ми хочемо використати підраховані статистики для виведення (to infer) знання про параметри популяції

 $<sup>^{1}</sup>$ Також побутує поняття «генеральна сукупність», але ми ним користуватися не будемо

- Під статистичним виведенням (statistical inference) будемо розуміти процес формування висновків про популяцію<sup>1</sup> (population) на основі деякої вибірки (sample)
  - Популяція містить повний набір даних про всі можливі спостереження
  - Вибірка є підмножиною популяції
- Маючи на руках дані певної вибірки, ми намагаємося з'ясувати, яка **ймовірнісна модель** (probability model, або ще кажуть **data generating process**, DGP) ці дані породила
  - У термінах теорії ймовірностей, нас цікавить спільний розподіл (joint probability distribution) усіх випадкових величин із вибірки
- Параметром (parameter) модели є деяка її числова характеристика
- Статистикою (statistic) є функція від даних, яка описує вибірку
- Ми хочемо використати підраховані статистики для виведення (to infer) знання про параметри популяції

 $<sup>^{1}</sup>$ Також побутує поняття «генеральна сукупність», але ми ним користуватися не будемо

- Під статистичним виведенням (statistical inference) будемо розуміти процес формування висновків про популяцію<sup>1</sup> (population) на основі деякої вибірки (sample)
  - Популяція містить повний набір даних про всі можливі спостереження
  - Вибірка є підмножиною популяції
- Маючи на руках дані певної вибірки, ми намагаємося з'ясувати, яка **ймовірнісна модель** (probability model, або ще кажуть **data generating process**, DGP) ці дані породила
  - У термінах теорії ймовірностей, нас цікавить **спільний розподіл** (joint probability distribution) усіх випадкових величин із вибірки
- Параметром (parameter) модели є деяка її числова характеристика
- **Статистикою** (statistic) є функція від даних, яка описує вибірку
- Ми хочемо використати підраховані статистики для виведення (to infer) знання про параметри популяції

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Також побутує поняття «генеральна сукупність», але ми ним користуватися не будемо

- Під статистичним виведенням (statistical inference) будемо розуміти процес формування висновків про популяцію<sup>1</sup> (population) на основі деякої вибірки (sample)
  - Популяція містить повний набір даних про всі можливі спостереження
  - Вибірка є підмножиною популяції
- Маючи на руках дані певної вибірки, ми намагаємося з'ясувати, яка **ймовірнісна модель** (probability model, або ще кажуть **data generating process**, DGP) ці дані породила
  - У термінах теорії ймовірностей, нас цікавить **спільний розподіл** (joint probability distribution) усіх випадкових величин із вибірки
- Параметром (parameter) модели є деяка її числова характеристика
- **Статистикою** (statistic) є функція від даних, яка описує вибірку
- Ми хочемо використати підраховані статистики для виведення (to infer) знання про параметри популяції

 $<sup>^{1}</sup>$ Також побутує поняття «генеральна сукупність», але ми ним користуватися не будемо

- Під статистичним виведенням (statistical inference) будемо розуміти процес формування висновків про популяцію<sup>1</sup> (population) на основі деякої вибірки (sample)
  - Популяція містить повний набір даних про всі можливі спостереження
  - Вибірка є підмножиною популяції
- Маючи на руках дані певної вибірки, ми намагаємося з'ясувати, яка ймовірнісна модель (probability model, або ще кажуть data generating process, DGP) ці дані породила
  - У термінах теорії ймовірностей, нас цікавить **спільний розподіл** (joint probability distribution) усіх випадкових величин із вибірки
- Параметром (parameter) модели є деяка її числова характеристика
- Статистикою (statistic) є функція від даних, яка описує вибірку
- Ми хочемо використати підраховані статистики для виведення (to infer) знання про параметри популяції

 $<sup>^{1}</sup>$ Також побутує поняття «генеральна сукупність», але ми ним користуватися не будемо



Рис. 1.1: Імовірність і виведення (Wasserman, p. іх)

- Теорія ймовірностей є формальною мовою невизначености
- У теорії ймовірностей ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо DGP, які є властивості згенерованих даних?»
- У статистичному виведенні ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо дані, що можна сказати про DGP, який їх згенерував?»
- Фактично статистичним виведенням значною мірою є й те, що називають data analysis, machine learning i data mining
- До статистичного виведення в широкому сенсі можна віднести як інференційний аналіз, так і прогнозний, і причиново-наслідковий
- Адже як для прогнозування, так і для встановлення причиново-наслідкових зв'язків потрібно знати характеристики DGP



Рис. 1.1: Імовірність і виведення (Wasserman, p. ix)

- Теорія ймовірностей є формальною мовою невизначености
- У теорії ймовірностей ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо DGP, які є властивості згенерованих даних?»
- У статистичному виведенні ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо дані, що можна сказати про DGP, який їх згенерував?»
- Фактично статистичним виведенням значною мірою є й те, що називають data analysis, machine learning i data mining
- До статистичного виведення в широкому сенсі можна віднести як інференційний аналіз, так і прогнозний, і причиново-наслідковий
- Адже як для прогнозування, так і для встановлення причиново-наслідкових зв'язків потрібно знати характеристики DGP

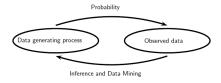


Рис. 1.1: Імовірність і виведення (Wasserman, p. ix)

- Теорія ймовірностей є формальною мовою невизначености
- У теорії ймовірностей ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо DGP, які є властивості згенерованих даних?»
- У статистичному виведенні ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо дані, що можна сказати про DGP, який їх згенерував?»
- Фактично статистичним виведенням значною мірою є й те, що називають data analysis, machine learning i data mining
- До статистичного виведення в широкому сенсі можна віднести як інференційний аналіз, так і прогнозний, і причиново-наслідковий
- Адже як для прогнозування, так і для встановлення причиново-наслідкових зв'язків потрібно знати характеристики DGP

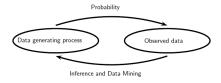


Рис. 1.1: Імовірність і виведення (Wasserman, p. ix)

- Теорія ймовірностей є формальною мовою невизначености
- У теорії ймовірностей ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо DGP, які є властивості згенерованих даних?»
- У статистичному виведенні ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо дані, що можна сказати про DGP, який їх згенерував?»
- Фактично статистичним виведенням значною мірою є й те, що називають data analysis, machine learning i data mining
- До статистичного виведення в широкому сенсі можна віднести як інференційний аналіз, так і прогнозний, і причиново-наслідковий
- Адже як для прогнозування, так і для встановлення причиново-наслідкових зв'язків потрібно знати характеристики DGP

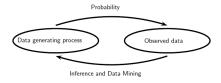


Рис. 1.1: Імовірність і виведення (Wasserman, p. іх)

- Теорія ймовірностей є формальною мовою невизначености
- У теорії ймовірностей ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо DGP, які є властивості згенерованих даних?»
- У статистичному виведенні ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо дані, що можна сказати про DGP, який їх згенерував?»
- Фактично статистичним виведенням значною мірою є й те, що називають data analysis, machine learning i data mining
- До статистичного виведення в широкому сенсі можна віднести як інференційний аналіз, так і прогнозний, і причиново-наслідковий
- Адже як для прогнозування, так і для встановлення причиново-наслідкових зв'язків потрібно знати характеристики DGP

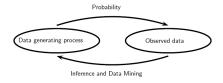


Рис. 1.1: Імовірність і виведення (Wasserman, p. іх)

- Теорія ймовірностей є формальною мовою невизначености
- У теорії ймовірностей ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо DGP, які є властивості згенерованих даних?»
- У статистичному виведенні ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо дані, що можна сказати про DGP, який їх згенерував?»
- Фактично статистичним виведенням значною мірою є й те, що називають data analysis, machine learning i data mining
- До статистичного виведення в широкому сенсі можна віднести як інференційний аналіз, так і прогнозний, і причиново-наслідковий
- Адже як для прогнозування, так і для встановлення причиново-наслідкових зв'язків потрібно знати характеристики DGP

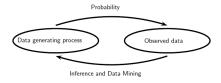


Рис. 1.1: Імовірність і виведення (Wasserman, p. іх)

- Теорія ймовірностей є формальною мовою невизначености
- У теорії ймовірностей ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо DGP, які є властивості згенерованих даних?»
- У статистичному виведенні ми намагаємося відповісти на питання: «Якщо ми знаємо дані, що можна сказати про DGP, який їх згенерував?»
- Фактично статистичним виведенням значною мірою  $\varepsilon$  й те, що називають data analysis, machine learning i data mining
- До статистичного виведення в широкому сенсі можна віднести як інференційний аналіз, так і прогнозний, і причиново-наслідковий
- Адже як для прогнозування, так і для встановлення причиново-наслідкових зв'язків потрібно знати характеристики DGP

### Зв'язок між статистикою і машинним навчанням

I статистика, i data mining, i machine learning пов'язані зі збором та аналізом даних. Протягом певного часу статистичні дослідження виконувалися на кафедрах статистики, а data mining i machine learning досліджувалися на кафедрах комп'ютерних наук. Статистики вважали, що комп'ютерники винаходять велосипед. Комп'ютерники вважали, що статистична теорія не розв'язує їхніх задач. (Wasserman, p. vii)

- Як рівень мінімальної зарплати впливає на безробіття?
- Який зв'язок між освітою та доходами?
- Чи зменшується розмір мозку від недосипання
- Чи є собаки, яких вигулюють чоловіки, агресивніші?
- Які висновки можна зробити на основі соціологічного опитування?
- Які ділянки мозку відповідають за певні активності?
- Чи є ліки ефективні?

- Як рівень мінімальної зарплати впливає на безробіття?
- Який зв'язок між освітою та доходами?
- Чи зменшується розмір мозку від недосипання
- Чи є собаки, яких вигулюють чоловіки, агресивніші?
- Які висновки можна зробити на основі соціологічного опитування?
- Які ділянки мозку відповідають за певні активності?
- Чи є ліки ефективні?

- Як рівень мінімальної зарплати впливає на безробіття?
- Який зв'язок між освітою та доходами?
- Чи зменшується розмір мозку від недосипання?
- Чи є собаки, яких вигулюють чоловіки, агресивніші?
- Які висновки можна зробити на основі соціологічного опитування
- Які ділянки мозку відповідають за певні активності?
- Чи є ліки ефективні?

- Як рівень мінімальної зарплати впливає на безробіття?
- Який зв'язок між освітою та доходами?
- Чи зменшується розмір мозку від недосипання?
- Чи є собаки, яких вигулюють чоловіки, агресивніші?
- Які висновки можна зробити на основі соціологічного опитування
- Які ділянки мозку відповідають за певні активності?
- Чи є ліки ефективні?

- Як рівень мінімальної зарплати впливає на безробіття?
- Який зв'язок між освітою та доходами?
- Чи зменшується розмір мозку від недосипання?
- Чи є собаки, яких вигулюють чоловіки, агресивніші?
- Які висновки можна зробити на основі соціологічного опитування?
- Які ділянки мозку відповідають за певні активності?
- Чи є ліки ефективні?

- Як рівень мінімальної зарплати впливає на безробіття?
- Який зв'язок між освітою та доходами?
- Чи зменшується розмір мозку від недосипання?
- Чи є собаки, яких вигулюють чоловіки, агресивніші?
- Які висновки можна зробити на основі соціологічного опитування?
- Які ділянки мозку відповідають за певні активності?
- Чи є ліки ефективні?

- Як рівень мінімальної зарплати впливає на безробіття?
- Який зв'язок між освітою та доходами?
- Чи зменшується розмір мозку від недосипання?
- Чи є собаки, яких вигулюють чоловіки, агресивніші?
- Які висновки можна зробити на основі соціологічного опитування?
- Які ділянки мозку відповідають за певні активності?
- Чи є ліки ефективні?

- В ідеалі ми воліли би провести експеримент (experiment) і зібрати всі потрібні дані
- Проте на практиці це можливо тільки в окремих випадках і в окремих галузях (медицині, біостатистиці, дуже обмежено в економіці тощо)
- У нашому курсі ми не будемо займатися питання розроблення експериментів
- Ми працюватимемо з даними спостережень (observational data)
- Вибірка, із якою ми працюємо, може викликати питання:

Виконуючи статистичне виведення, потрібно завжди робити певні припушення (assumptions) і правильно їх мотивувати

- В ідеалі ми воліли би провести експеримент (experiment) і зібрати всі потрібні дані
- Проте на практиці це можливо тільки в окремих випадках і в окремих галузях (медицині, біостатистиці, дуже обмежено в економіці тощо)
- У нашому курсі ми не будемо займатися питання розроблення експериментів
- Ми працюватимемо з даними спостережень (observational data
- Вибірка, із якою ми працюємо, може викликати питання:

 Виконуючи статистичне виведення, потрібно завжди робити певні припущення (assumptions) і правильно їх мотивувати

- В ідеалі ми воліли би провести експеримент (experiment) і зібрати всі потрібні дані
- Проте на практиці це можливо тільки в окремих випадках і в окремих галузях (медицині, біостатистиці, дуже обмежено в економіці тощо)
- У нашому курсі ми не будемо займатися питання розроблення експериментів
- Ми працюватимемо з даними спостережень (observational data)
- Вибірка, із якою ми працюємо, може викликати питання:

 Виконуючи статистичне виведення, потрібно завжди робити певні припущення (assumptions) і правильно їх мотивувати

- В ідеалі ми воліли би провести експеримент (experiment) і зібрати всі потрібні дані
- Проте на практиці це можливо тільки в окремих випадках і в окремих галузях (медицині, біостатистиці, дуже обмежено в економіці тощо)
- У нашому курсі ми не будемо займатися питання розроблення експериментів
- Ми працюватимемо з даними спостережень (observational data)
- Вибірка, із якою ми працюємо, може викликати питання:

 Виконуючи статистичне виведення, потрібно завжди робити певні припущення (assumptions) і правильно їх мотивувати

- В ідеалі ми воліли би провести експеримент (experiment) і зібрати всі потрібні дані
- Проте на практиці це можливо тільки в окремих випадках і в окремих галузях (медицині, біостатистиці, дуже обмежено в економіці тощо)
- У нашому курсі ми не будемо займатися питання розроблення експериментів
- Ми працюватимемо з даними спостережень (observational data)
- Вибірка, із якою ми працюємо, може викликати питання:
  - Чи є вибірка репрезентативною (representative) для популяції?
  - Чи наявні в даних спостереження відібрано з однаковою ймовірністю
  - Які існують додаткові змінні (відомі і наявні; відомі, але не наявні; не відомі і не наявні), які можуть спотворити наші висновки?
  - Який вплив мають пропущені дані?
  - Ітл.
- Виконуючи статистичне виведення, потрібно завжди робити певні припущення (assumptions) і поавильно їх мотивувати

- В ідеалі ми воліли би провести експеримент (experiment) і зібрати всі потрібні дані
- Проте на практиці це можливо тільки в окремих випадках і в окремих галузях (медицині, біостатистиці, дуже обмежено в економіці тощо)
- У нашому курсі ми не будемо займатися питання розроблення експериментів
- Ми працюватимемо з даними спостережень (observational data)
- Вибірка, із якою ми працюємо, може викликати питання:
  - Чи є вибірка **репрезентативною** (representative) для популяції?
  - Чи наявні в даних спостереження відібрано з однаковою ймовірністю
  - Які існують додаткові змінні (відомі і наявні; відомі, але не наявні; не відомі і наявні), які можуть спотворити наші висновки?
  - Який вплив мають пропущені дані?
- Виконуючи статистичне виведення, потрібно завжди робити певні припущення (assumptions) і правильно їх мотивувати

- В ідеалі ми воліли би провести експеримент (experiment) і зібрати всі потрібні дані
- Проте на практиці це можливо тільки в окремих випадках і в окремих галузях (медицині, біостатистиці, дуже обмежено в економіці тощо)
- У нашому курсі ми не будемо займатися питання розроблення експериментів
- Ми працюватимемо з даними спостережень (observational data)
- Вибірка, із якою ми працюємо, може викликати питання:
  - Чи є вибірка репрезентативною (representative) для популяції?
  - Чи наявні в даних спостереження відібрано з однаковою ймовірністю?
  - Які існують додаткові змінні (відомі і наявні; відомі, але не наявні; не відомі і не наявні), які можуть спотворити наші висновки?
  - Який вплив мають пропущені дані?
  - Виконуючи статистичне виведення, потрібно завжди робити певні
  - припущення (assumptions) і правильно їх мотивувати

- В ідеалі ми воліли би провести експеримент (experiment) і зібрати всі потрібні дані
- Проте на практиці це можливо тільки в окремих випадках і в окремих галузях (медицині, біостатистиці, дуже обмежено в економіці тощо)
- У нашому курсі ми не будемо займатися питання розроблення експериментів
- Ми працюватимемо з даними спостережень (observational data)
- Вибірка, із якою ми працюємо, може викликати питання:
  - Чи є вибірка репрезентативною (representative) для популяції?
  - Чи наявні в даних спостереження відібрано з однаковою ймовірністю?
  - Які існують додаткові змінні (відомі і наявні; відомі, але не наявні; не відомі і не наявні), які можуть спотворити наші висновки?
  - Який вплив мають пропущені дані?
- Виконуючи статистичне виведення, потрібно завжди робити певні припущення (assumptions) і правильно їх мотивувати

- В ідеалі ми воліли би провести експеримент (experiment) і зібрати всі потрібні дані
- Проте на практиці це можливо тільки в окремих випадках і в окремих галузях (медицині, біостатистиці, дуже обмежено в економіці тощо)
- У нашому курсі ми не будемо займатися питання розроблення експериментів
- Ми працюватимемо з даними спостережень (observational data)
- Вибірка, із якою ми працюємо, може викликати питання:
  - Чи є вибірка репрезентативною (representative) для популяції?
  - Чи наявні в даних спостереження відібрано з однаковою ймовірністю?
  - Які існують додаткові змінні (відомі і наявні; відомі, але не наявні; не відомі і не наявні), які можуть спотворити наші висновки?
  - Який вплив мають пропущені дані?
     Т.л.
- Виконуючи статистичне виведення, потрібно завжди робити певні припущення (assumptions) і правильно їх мотивувати

- В ідеалі ми воліли би провести експеримент (experiment) і зібрати всі потрібні дані
- Проте на практиці це можливо тільки в окремих випадках і в окремих галузях (медицині, біостатистиці, дуже обмежено в економіці тощо)
- У нашому курсі ми не будемо займатися питання розроблення експериментів
- Ми працюватимемо з даними спостережень (observational data)
- Вибірка, із якою ми працюємо, може викликати питання:
  - Чи є вибірка репрезентативною (representative) для популяції?
  - Чи наявні в даних спостереження відібрано з однаковою ймовірністю?
  - Які існують додаткові змінні (відомі і наявні; відомі, але не наявні; не відомі і не наявні), які можуть спотворити наші висновки?
  - Який вплив мають пропущені дані?
  - І т.д.
- Виконуючи статистичне виведення, потрібно завжди робити певн припущення (assumptions) і правильно їх мотивувати

- В ідеалі ми воліли би провести експеримент (experiment) і зібрати всі потрібні дані
- Проте на практиці це можливо тільки в окремих випадках і в окремих галузях (медицині, біостатистиці, дуже обмежено в економіці тощо)
- У нашому курсі ми не будемо займатися питання розроблення експериментів
- Ми працюватимемо з даними спостережень (observational data)
- Вибірка, із якою ми працюємо, може викликати питання:
  - Чи є вибірка репрезентативною (representative) для популяції?
  - Чи наявні в даних спостереження відібрано з однаковою ймовірністю?
  - Які існують додаткові змінні (відомі і наявні; відомі, але не наявні; не відомі і не наявні), які можуть спотворити наші висновки?
  - Який вплив мають пропущені дані?
  - І т.д.
- Виконуючи статистичне виведення, потрібно завжди робити певні припущення (assumptions) і правильно їх мотивувати

- Згідно з частотним підходом (frequentist approach), імовірність деякої події це гранична частота настання події за умови нескінченного повторювання одного й того ж експерименту
- Відтак частотне виведення (frequentist inference) слідує цій інтерпретації для оцінювання параметрів та керування похибками
- Згідно з Беєсівським підходом (Bayesian approach), імовірність являє собою ступінь упевнености (belief) у настанні деякої події
- Відтак Беєсівське виведення (Bayesian inference) слідує цій інтерпретації та розглядає всі невідомі параметри моделей як випадкові
- У нашому курсі розглянемо обидва підходи

- Згідно з частотним підходом (frequentist approach), імовірність деякої події це гранична частота настання події за умови нескінченного повторювання одного й того ж експерименту
- Відтак **частотне виведення** (frequentist inference) слідує цій інтерпретації для оцінювання параметрів та керування похибками
- Згідно з Беєсівським підходом (Bayesian approach), імовірність являє собою ступінь упевнености (belief) у настанні деякої події
- Відтак Беєсівське виведення (Bayesian inference) слідує цій інтерпретації та розглядає всі невідомі параметри моделей як випадкові
- У нашому курсі розглянемо обидва підходи

- Згідно з частотним підходом (frequentist approach), імовірність деякої події це гранична частота настання події за умови нескінченного повторювання одного й того ж експерименту
- Відтак **частотне виведення** (frequentist inference) слідує цій інтерпретації для оцінювання параметрів та керування похибками
- Згідно з **Беєсівським підходом** (Bayesian approach), імовірність являє собою **ступінь упевнености** (belief) у настанні деякої події
- Відтак Беєсівське виведення (Bayesian inference) слідує цій інтерпретації та розглядає всі невідомі параметри моделей як випадкові
- У нашому курсі розглянемо обидва підходи

- Згідно з частотним підходом (frequentist approach), імовірність деякої події це гранична частота настання події за умови нескінченного повторювання одного й того ж експерименту
- Відтак **частотне виведення** (frequentist inference) слідує цій інтерпретації для оцінювання параметрів та керування похибками
- Згідно з **Беєсівським підходом** (Bayesian approach), імовірність являє собою **ступінь упевнености** (belief) у настанні деякої події
- Відтак Беєсівське виведення (Bayesian inference) слідує цій інтерпретації та розглядає всі невідомі параметри моделей як випадкові
- У нашому курсі розглянемо обидва підходи

- Згідно з частотним підходом (frequentist approach), імовірність деякої події це гранична частота настання події за умови нескінченного повторювання одного й того ж експерименту
- Відтак **частотне виведення** (frequentist inference) слідує цій інтерпретації для оцінювання параметрів та керування похибками
- Згідно з **Беєсівським підходом** (Bayesian approach), імовірність являє собою **ступінь упевнености** (belief) у настанні деякої події
- Відтак Беєсівське виведення (Bayesian inference) слідує цій інтерпретації та розглядає всі невідомі параметри моделей як випадкові
- У нашому курсі розглянемо обидва підходи

#### План лекції

Поняття про статистичне виведення

2 Основні поняття теорії ймовірностей

③ Огляд деяких найважливіших розподілів

- Ми коротко згадаємо основні визначення та властивості
- Ви це вже все знаєте з попередніх курсів
- Детальнішу інформацію можна почитати в конспекті лекцій з «Теорі ймовірностей» на диску (КЛТЙ)
- Якщо щось незрозуміло чи не пам'ятаєте відразу заповнюйте прогалини

- Ми коротко згадаємо основні визначення та властивості
- Ви це вже все знаєте з попередніх курсів
- Детальнішу інформацію можна почитати в конспекті лекцій з «Теорії ймовірностей» на диску (КЛТЙ)
- Якщо щось незрозуміло чи не пам'ятаєте відразу заповнюйте прогалини

- Ми коротко згадаємо основні визначення та властивості
- Ви це вже все знаєте з попередніх курсів
- Детальнішу інформацію можна почитати в конспекті лекцій з «Теорії ймовірностей» на диску (КЛТЙ)
- Якщо щось незрозуміло чи не пам'ятаєте відразу заповнюйте прогалини

- Ми коротко згадаємо основні визначення та властивості
- Ви це вже все знаєте з попередніх курсів
- Детальнішу інформацію можна почитати в конспекті лекцій з «Теорії ймовірностей» на диску (КЛТЙ)
- Якщо щось незрозуміло чи не пам'ятаєте відразу заповнюйте прогалини

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту множина всіх можливих його результатів. Може бути:
- о Елемент $\omega \in \Omega$  елементапна полія (sample)
- ullet Подія (event) A це деяка підмножина (subset) простору  $\Omega$ :  $A\subseteq \Omega$

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - Скінченний (finite): |\( \Omega \) |
  - Зліченний (countable):  $|\Omega| = \aleph_0$
  - Незліченний (uncountable): |Ω| =
- $\omega \in \mathcal{M} = \omega$  влемент $\omega \in \mathcal{M} = \omega$  влементарна подія (sample) в Полія (event)  $A = \omega$  не леяка пілмножина (subset

#### Визначення 2.1

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - ullet Скінченний (finite):  $|\Omega| < \infty$
  - Зліченний (countable):  $|\Omega| = \aleph_0$
  - Незліченний (uncountable):  $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- $\omega$  Елемент  $\omega \in M$  велементарна подія (sample

Данило Тавров

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - ullet Скінченний (finite):  $|\Omega| < \infty$
  - ullet Зліченний (countable):  $|\Omega|=\aleph_0$
  - Незліченний (uncountable):  $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- ullet Елемент  $\omega \in \Omega$  елементарна подія (sample)
- ullet Подія (event) A це деяка підмножина (subset) простору  $\Omega$ :  $A\subseteq \Omega$

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - ullet Скінченний (finite):  $|\Omega| < \infty$
  - Зліченний (countable):  $|\Omega|=\aleph_0$
  - ullet Незліченний (uncountable):  $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- ullet Елемент  $\omega \in \Omega$  елементарна подія (sample)
- ullet Подія (event) A це деяка підмножина (subset) простору  $\Omega$ :  $A\subseteq \Omega$
- ullet На просторі  $\Omega$  ми визначаємо  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal A$  множину подій, які нас цікавлять

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - ullet Скінченний (finite):  $|\Omega| < \infty$
  - Зліченний (countable):  $|\Omega|=\aleph_0$
  - ullet Незліченний (uncountable):  $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- ullet Елемент  $\omega \in \Omega$  елементарна подія (sample)
- ullet Подія (event) A це деяка підмножина (subset) простору  $\Omega$ :  $A\subseteq$
- ullet На просторі  $\Omega$  ми визначаємо  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal A$  множину подій, які нас цікавлять

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - ullet Скінченний (finite):  $|\Omega| < \infty$
  - Зліченний (countable):  $|\Omega|=\aleph_0$
  - Незліченний (uncountable):  $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- ullet Елемент  $\omega \in \Omega$  елементарна подія (sample)
- ullet Подія (event) A це деяка підмножина (subset) простору  $\Omega$ :  $A\subseteq\Omega$



#### Визначення 2.1

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - ullet Скінченний (finite):  $|\Omega| < \infty$
  - Зліченний (countable):  $|\Omega|=\aleph_0$
  - ullet Незліченний (uncountable):  $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- ullet Елемент  $\omega \in \Omega$  елементарна подія (sample)
- На просторі  $\Omega$  ми визначаємо  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal A$  множину подій, які нас цікавлять  $^2$ 
  - ullet На скінченному й зліченному просторах ми беремо множину всіх підмножин:  $\mathcal{A}=2^{\Omega}$
  - На незліченному просторі (як правило,  $\mathbb R$  або  $\mathbb R^k$ ) ми беремо Борелеву  $\sigma$ -алгебру (Borel  $\sigma$ -algebra)  $^3$   $\mathcal B$  або  $\mathcal B^k$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Деталі можна почитати в КЛТЙ 1.5

#### Визначення 2.1

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - ullet Скінченний (finite):  $|\Omega| < \infty$
  - ullet Зліченний (countable):  $|\Omega|=\aleph_0$
  - ullet Незліченний (uncountable):  $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- ullet Елемент  $\omega \in \Omega$  елементарна подія (sample)
- Подія (event) A це деяка підмножина (subset) простору  $\Omega$ :  $A\subseteq \Omega$
- ullet На просторі  $\Omega$  ми визначаємо  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal A$  множину подій, які нас цікавлять  $^2$ 
  - На скінченному й зліченному просторах ми беремо множину всіх підмножин:  $\mathcal{A}=2^{\Omega}$
  - На незліченному просторі (як правило,  $\mathbb R$  або  $\mathbb R^k$ ) ми беремо Борелеву  $\sigma$ -алгебру (Borel  $\sigma$ -algebra)  $^3$   $\mathcal B$  або  $\mathcal B^k$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Деталі можна почитати в КЛТЙ 1.5

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту — множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - Скінченний (finite):  $|\Omega| < \infty$
  - Зліченний (countable):  $|\Omega| = \aleph_0$
  - Незліченний (uncountable):  $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- Елемент  $\omega \in \Omega$  елементарна подія (sample)
- Подія (event) A це деяка підмножина (subset) простору  $\Omega$ :  $A \subseteq \Omega$
- На просторі  $\Omega$  ми визначаємо  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{A}$  множину подій, які нас цікавлять<sup>2</sup>
  - ullet На скінченному й зліченному просторах ми беремо множину всіх підмножин:  $\mathcal{A}=2^{\Omega}$
  - На незліченному просторі (як правило,  $\mathbb{R}$  або  $\mathbb{R}^k$ ) ми беремо **Борелеву**  $\sigma$ -алгебру (Borel  $\sigma$ -algebra)<sup>3</sup>  $\mathcal{B}$  ago  $\mathcal{B}^k$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Деталі можна почитати в КЛТЙ 1.5

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Еміль Борель (Félix Édouard Justin Émile Borel, 1871-1956) — французький математик Лекція 3. Статистичне виведення в R. Загальні принц Данило Тавров

#### Визначення 2.1

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - ullet Скінченний (finite):  $|\Omega| < \infty$
  - Зліченний (countable):  $|\Omega| = \aleph_0$
  - ullet Незліченний (uncountable):  $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- ullet Елемент  $\omega \in \Omega$  елементарна подія (sample)
- ullet Подія (event) A це деяка підмножина (subset) простору  $\Omega$ :  $A\subseteq \Omega$
- ullet На просторі  $\Omega$  ми визначаємо  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal A$  множину подій, які нас цікавлять  $^2$ 
  - На скінченному й зліченному просторах ми беремо множину всіх підмножин:  $\mathcal{A}=2^{\Omega}$
  - На незліченному просторі (як правило,  $\mathbb R$  або  $\mathbb R^k$ ) ми беремо Борелеву  $\sigma$ -алгебру (Borel  $\sigma$ -algebra)  $^3$   $\mathcal B$  або  $\mathcal B^k$

- $\bullet$   $(\Omega, \mathcal{A})$  вимірний простір (measurable space)
- ullet Множини в  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{A}$  вимірні множини (measurable sets)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Деталі можна почитати в КЛТЙ 1.5

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Еміль Борель (Félix Édouard Justin Émile Borel, 1871–1956)— французький математик

Данило Тавров
Лекція 3. Статистичне вивелення в R. Загальні принц 2023-02-22

#### Визначення 2.1

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту — множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - Скінченний (finite):  $|\Omega| < \infty$
  - Зліченний (countable):  $|\Omega| = \aleph_0$
  - Незліченний (uncountable):  $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- Елемент  $\omega \in \Omega$  елементарна подія (sample)
- Подія (event) A це деяка підмножина (subset) простору  $\Omega$ :  $A\subseteq \Omega$
- На просторі  $\Omega$  ми визначаємо  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{A}$  множину подій, які нас цікавлять<sup>2</sup>
  - ullet На скінченному й зліченному просторах ми беремо множину всіх підмножин:  $\mathcal{A}=2^{\Omega}$
  - На незліченному просторі (як правило,  $\mathbb R$  або  $\mathbb R^k$ ) ми беремо **Борелеву**  $\sigma$ -алгебру (Borel  $\sigma$ -algebra)<sup>3</sup>  $\mathcal{B}$  ago  $\mathcal{B}^k$

- $(\Omega, \mathcal{A})$  вимірний простір (measurable space)
- Множини в  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{A}$  вимірні множини (measurable sets)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Деталі можна почитати в КЛТЙ 1.5

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Еміль Борель (Félix Édouard Justin Émile Borel, 1871-1956) — французький математик Лекція 3. Статистичне виведення в R. Загальні принц Данило Тавров

#### Визначення 2.1

- Простір елементарних подій (sample space)  $\Omega$  для деякого випадкового експерименту множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - ullet Скінченний (finite):  $|\Omega| < \infty$
  - Зліченний (countable):  $|\Omega|=\aleph_0$
  - ullet Незліченний (uncountable):  $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- ullet Елемент  $\omega \in \Omega$  елементарна подія (sample)
- Подія (event) A це деяка підмножина (subset) простору  $\Omega$ :  $A\subseteq \Omega$
- На просторі  $\Omega$  ми визначаємо  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal A$  множину подій, які нас цікавлять  $\sigma$ 
  - На скінченному й зліченному просторах ми беремо множину всіх підмножин:  $\mathcal{A}=2^{\Omega}$
  - На незліченному просторі (як правило,  $\mathbb R$  або  $\mathbb R^k$ ) ми беремо **Борелеву**  $\sigma$ -алгебру (Borel  $\sigma$ -algebra)  $\mathcal B$  або  $\mathcal B^k$

#### Визначення 2.2

- $\bullet$   $(\Omega, \mathcal{A})$  вимірний простір (measurable space)
- Множини в  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{A}$  вимірні множини (measurable sets)

Данило Тавров

Лекція 3. Статистичне виведення в R. Загальні принц

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Деталі можна почитати в КЛТЙ 1.5

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Еміль Борель (Félix Édouard Justin Émile Borel, 1871-1956) — французький математик

- ullet Функція  $\mu:\mathcal{A} o\mathbb{R}$  **міра** (measure), якщо:
  - $\mu(A) > 0$  для всіх  $A \in \mathcal{A}$
  - $\mu \in \sigma$ -адитивною ( $\sigma$ -additive)

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{j})\;,\quad A_{j}\in\mathcal{A}\;,\;j=1,2,\ldots\;,\quad A_{i}\cap A_{j}=\emptyset\;,\;i\neq j \qquad (2.1)$$

- Якщо  $\mu(\Omega)=1$ , то  $\mu$  називають імовірнісною мірою (probability measure) і позначають через  $\mathbb P$
- ullet Трійку  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  називають імовірнісним простором (probability space)
- Деякі властивості ймовірнісної міри:

- ullet Функція  $\mu:\mathcal{A} 
  ightarrow \mathbb{R}$  **міра** (measure), якщо:
  - $\mu(A) \geq 0$  для всіх  $A \in \mathcal{A}$
  - $\mu \in \sigma$ -адитивною ( $\sigma$ -additive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{j})\;,\quad A_{j}\in\mathcal{A}\;,\;j=1,2,\ldots\;,\quad A_{i}\cap A_{j}=\emptyset\;,\;i\neq j \qquad \text{(2.1)}$$

- ullet Якщо  $\mu(\Omega)=1$ , то  $\mu$  називають **імовірнісною мірою** (probability measure) і позначають через  ${\mathbb P}$
- Трійку  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  називають імовірнісним простором (probability space
- Деякі властивості ймовірнісної міри

- ullet Функція  $\mu:\mathcal{A} \to \mathbb{R}$  **міра** (measure), якщо:
  - $\mu(A) \geq 0$  для всіх  $A \in \mathcal{A}$
  - $\mu \in \sigma$ -адитивною ( $\sigma$ -additive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{j})\;,\quad A_{j}\in\mathcal{A}\;,\;j=1,2,\ldots\;,\quad A_{i}\cap A_{j}=\emptyset\;,\;i\neq j \qquad \text{(2.1)}$$



- ullet Трійку  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  називають **імовірнісним простором** (probability space
- Деякі властивості ймовірнісної міри



- ullet Функція  $\mu:\mathcal{A} 
  ightarrow \mathbb{R}$  **міра** (measure), якщо:
  - $\bullet$   $\mu(A) \geq 0$  для всіх  $A \in \mathcal{A}$
  - $\mu \in \sigma$ -адитивною ( $\sigma$ -additive):

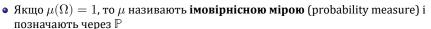
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{j})\;,\quad A_{j}\in\mathcal{A}\;,\;j=1,2,\ldots\;,\quad A_{i}\cap A_{j}=\emptyset\;,\;i\neq j \qquad \text{(2.1)}$$



- Якщо  $\mu(\Omega)=1$ , то  $\mu$  називають **імовірнісною мірою** (probability measure) і позначають через  $\mathbb P$
- ullet Трійку  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  називають **імовірнісним простором** (probability space)
- Деякі властивості ймовірнісної міри;

- ullet Функція  $\mu:\mathcal{A} o\mathbb{R}$  **міра** (measure), якщо:
  - $\mu(A) \geq 0$  для всіх  $A \in \mathcal{A}$
  - $\mu \in \sigma$ -адитивною ( $\sigma$ -additive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{j})\;,\quad A_{j}\in\mathcal{A}\;,\;j=1,2,\ldots\;,\quad A_{i}\cap A_{j}=\emptyset\;,\;i\neq j \qquad \text{(2.1)}$$

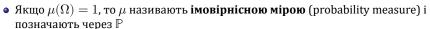


- ullet Трійку  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  називають **імовірнісним простором** (probability space)
- Деякі властивості ймовірнісної міри:



- Функція  $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$  міра (measure), якщо:
  - $\bullet$   $\mu(A) \geq 0$  для всіх  $A \in \mathcal{A}$
  - $\mu \in \sigma$ -адитивною ( $\sigma$ -additive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{j})\;,\quad A_{j}\in\mathcal{A}\;,\;j=1,2,\ldots\;,\quad A_{i}\cap A_{j}=\emptyset\;,\;i\neq j \qquad \text{(2.1)}$$

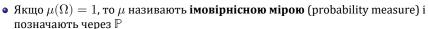


- Трійку  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  називають **імовірнісним простором** (probability space)
- Деякі властивості ймовірнісної міри:

  - Данило Тавров

- ullet Функція  $\mu:\mathcal{A} o\mathbb{R}$  **міра** (measure), якщо:
  - $\mu(A) \geq 0$  для всіх  $A \in \mathcal{A}$
  - $\mu \in \sigma$ -адитивною ( $\sigma$ -additive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{j})\;,\quad A_{j}\in\mathcal{A}\;,\;j=1,2,\ldots\;,\quad A_{i}\cap A_{j}=\emptyset\;,\;i\neq j \qquad \text{(2.1)}$$

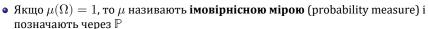


- Трійку  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  називають **імовірнісним простором** (probability space)
- Деякі властивості ймовірнісної міри:
  - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

  - $P(A^c) = 1 P(A^c)$
  - $\bullet \ \mathbb{P}(A^{\circ}) = \mathbb{I} \mathbb{P}(A)$
  - $\bullet \ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(A \cap B)$

- ullet Функція  $\mu:\mathcal{A} 
  ightarrow \mathbb{R}$  **міра** (measure), якщо:
  - $\mu(A) \geq 0$  для всіх  $A \in \mathcal{A}$
  - $\mu \in \sigma$ -адитивною ( $\sigma$ -additive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{j})\;,\quad A_{j}\in\mathcal{A}\;,\;j=1,2,\ldots\;,\quad A_{i}\cap A_{j}=\emptyset\;,\;i\neq j \qquad \text{(2.1)}$$

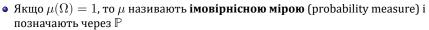


- Трійку  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  називають **імовірнісним простором** (probability space)
- Деякі властивості ймовірнісної міри:
  - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
  - $\bullet \mathbb{P}(A) < 1$
  - $\bullet \mathbb{P}(A^c) = 1 \mathbb{P}(A$
  - $\bullet \ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(A \cap B)$
  - Якщо  $A_1 \subseteq A_2$ , то  $\mathbb{P}\left(A_1\right) \leq \mathbb{P}\left(A_2\right)$

# Імовірнісна міра

- ullet Функція  $\mu:\mathcal{A} 
  ightarrow \mathbb{R}$  **міра** (measure), якщо:
  - $\bullet$   $\mu(A) \geq 0$  для всіх  $A \in \mathcal{A}$
  - $\mu \in \sigma$ -адитивною ( $\sigma$ -additive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{j})\;,\quad A_{j}\in\mathcal{A}\;,\;j=1,2,\ldots\;,\quad A_{i}\cap A_{j}=\emptyset\;,\;i\neq j \qquad \text{(2.1)}$$

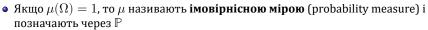


- ullet Трійку  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  називають **імовірнісним простором** (probability space)
- Деякі властивості ймовірнісної міри:
  - $\bullet \ \mathbb{P}\left(\emptyset\right) = 0$
  - $\mathbb{P}(A) < 1$
  - $\bullet \mathbb{P}(A^c) = 1 \mathbb{P}(A)$
  - $\bullet \ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(A \cap B)$
  - Якщо  $A_1 \subseteq A_2$ , то  $\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_2)$
  - Якщо  $A_1 \subseteq A_2$ , то  $\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_2)$

# Імовірнісна міра

- ullet Функція  $\mu:\mathcal{A} o\mathbb{R}$  **міра** (measure), якщо:
  - $\mu(A) \geq 0$  для всіх  $A \in \mathcal{A}$
  - $\mu \in \sigma$ -адитивною ( $\sigma$ -additive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{j})\;,\quad A_{j}\in\mathcal{A}\;,\;j=1,2,\ldots\;,\quad A_{i}\cap A_{j}=\emptyset\;,\;i\neq j \qquad \text{(2.1)}$$

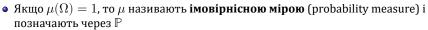


- ullet Трійку  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  називають **імовірнісним простором** (probability space)
- Деякі властивості ймовірнісної міри:
  - $\bullet \ \mathbb{P}\left(\emptyset\right)=0$
  - $\bullet \mathbb{P}(A) < 1$
  - $\bullet \mathbb{P}(A^c) = 1 \mathbb{P}(A)$
  - $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(A \cap B)$
  - Якщо  $A_1 \subseteq A_2$ , то  $\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_2)$ 
    - 71KH(0 71] \( \sigma 112, 10 \( \text{11} \) \( \sigma 112)

# Імовірнісна міра

- Функція  $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$  міра (measure), якщо:
  - $\mu(A) \geq 0$  для всіх  $A \in \mathcal{A}$
  - $\mu \in \sigma$ -адитивною ( $\sigma$ -additive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{j})\;,\quad A_{j}\in\mathcal{A}\;,\;j=1,2,\ldots\;,\quad A_{i}\cap A_{j}=\emptyset\;,\;i\neq j \qquad \text{(2.1)}$$



- Трійку  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  називають **імовірнісним простором** (probability space)
- Деякі властивості ймовірнісної міри:
  - $\bullet \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
  - $\bullet \mathbb{P}(A) < 1$
  - $\bullet \mathbb{P}(A^c) = 1 \mathbb{P}(A)$
  - $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(A \cap B)$

  - Якщо  $A_1 \subseteq A_2$ , то  $\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_2)$

### Визначення 2.4

- ullet Наприклад,  $\Omega$  може містити всіх можливих людей
- ullet Тоді  $X:\Omega o\mathbb{R}^+$  відповідає зросту кожної людини
- Випадкові величини, як правило, позначаємо великими літерами латинського алфавіту (X,Y,Z тощо)
- ullet Значення, яких вони набувають маленькими (x,y,z тощо)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Строго формально, ще й вимірну; див. КЛТЙ 4.1

### Визначення 2.4

- ullet Наприклад,  $\Omega$  може містити всіх можливих людей
- ullet Тоді  $X:\Omega o \mathbb{R}^+$  відповідає зросту кожної людини
- Випадкові величини, як правило, позначаємо великими літерами латинського алфавіту (X,Y,Z тощо)
- Значення, яких вони набувають маленькими (x, y, z тощо)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Строго формально, ще й вимірну; див. КЛТЙ 4.1

### Визначення 2.4

- ullet Наприклад,  $\Omega$  може містити всіх можливих людей
- ullet Тоді  $X:\Omega o \mathbb{R}^+$  відповідає зросту кожної людини
- Випадкові величини, як правило, позначаємо великими літерами латинського алфавіту (X,Y,Z тощо)
- Значення, яких вони набувають маленькими (x, y, z тощо)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Строго формально, ще й вимірну; див. КЛТЙ 4.1

### Визначення 2.4

- ullet Наприклад,  $\Omega$  може містити всіх можливих людей
- ullet Тоді  $X:\Omega o\mathbb{R}^+$  відповідає зросту кожної людини
- Випадкові величини, як правило, позначаємо великими літерами латинського алфавіту (X,Y,Z тощо)
- Значення, яких вони набувають маленькими (x, y, z тощо)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Строго формально, ще й вимірну; див. КЛТЙ 4.1

### Визначення 2.4

- ullet Наприклад,  $\Omega$  може містити всіх можливих людей
- ullet Тоді  $X:\Omega o\mathbb{R}^+$  відповідає зросту кожної людини
- Випадкові величини, як правило, позначаємо великими літерами латинського алфавіту (X,Y,Z тощо)
- ullet Значення, яких вони набувають маленькими (x,y,z тощо)

 $<sup>^4</sup>$ Строго формально, ще й вимірну; див. КЛТЙ 4.1

### Визначення 2.5

 $\bullet\;$  Випадкова величина X задає на вимірному просторі  $(\mathbb{R},\mathcal{B})$  ймовірнісну міру

$$\mathbb{P}_{X}\left(A\right) \equiv \mathbb{P}_{X}\left(X \in A\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) \;, \qquad A \in \mathcal{B} \tag{2.2}$$

- Таку міру називають **розподілом** (distribution) 2
- ullet Випадкові величини X і Y рівні за розподілом (equal in distribution),  $X \stackrel{d}{=} Y$  якщо  $\mathbb{P}_X (A) = \mathbb{P}_Y (A)$  для всіх  $A \in \mathcal{B}$



### Визначення 2.5

 $\bullet\;$  Випадкова величина X задає на вимірному просторі  $(\mathbb{R},\mathcal{B})$  ймовірнісну міру

$$\mathbb{P}_{X}\left(A\right) \equiv \mathbb{P}_{X}\left(X \in A\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) \;, \qquad A \in \mathcal{B} \tag{2.2}$$

- Таку міру називають **розподілом** (distribution) X
- ullet Випадкові величини X і Y рівні за розподілом (equal in distribution),  $X\stackrel{d}{=}Y$ , якщо  $\mathbb{P}_X\left(A\right)=\mathbb{P}_Y\left(A\right)$  для всіх  $A\in\mathcal{B}$



### Визначення 2.5

 $\bullet\;$  Випадкова величина X задає на вимірному просторі  $(\mathbb{R},\mathcal{B})$  ймовірнісну міру

$$\mathbb{P}_{X}\left(A\right) \equiv \mathbb{P}_{X}\left(X \in A\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) \;, \qquad A \in \mathcal{B} \tag{2.2}$$

- Таку міру називають **розподілом** (distribution) X
- Випадкові величини X і Y рівні за розподілом (equal in distribution),  $X \stackrel{d}{=} Y$ , якщо  $\mathbb{P}_{X}(A) = \mathbb{P}_{Y}(A)$  для всіх  $A \in \mathcal{B}$

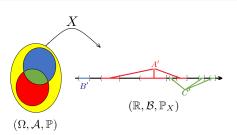


### Визначення 2.5

ullet Випадкова величина X задає на вимірному просторі  $(\mathbb{R},\mathcal{B})$  ймовірнісну міру

$$\mathbb{P}_{X}(A) \equiv \mathbb{P}_{X}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) , \qquad A \in \mathcal{B}$$
 (2.2)

- ullet Таку міру називають **розподілом** (distribution) X
- ullet Випадкові величини X і Y **рівні за розподілом** (equal in distribution),  $X\stackrel{d}{=}Y$ , якщо  $\mathbb{P}_X\left(A\right)=\mathbb{P}_Y\left(A\right)$  для всіх  $A\in\mathcal{B}$



Ш

- ullet Нехай маємо випадкову величину  $X:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o (\mathbb{R},\mathcal{B})$  з розподілом  $\mathbb{P}_X$
- Наприклад, це може бути «вага людини, кг»
- Ми не маємо жодного уявлення про простір  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , на якому вона визначена
- Ми тільки спостерігаємо значення 2
- ullet Нас цікавить обчислити ймовірність, наприклад, події X>100
- За (2.2) ми повинні порахувати  $\mathbb{P}_{V}(X > 100) = \mathbb{P}(X^{-1}(100; \infty))$
- ullet Без знання простору  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  це зробити просто неможливс
- Тому на практиці використовують такі випадкові величини, розподіл яких можна легко характеризувати

- ullet Нехай маємо випадкову величину  $X:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o (\mathbb{R},\mathcal{B})$  з розподілом  $\mathbb{P}_X$
- Наприклад, це може бути «вага людини, кг»
- ullet Ми не маємо жодного уявлення про простір  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , на якому вона визначен
- Ми тільки спостерігаємо значення 2
- ullet Нас цікавить обчислити ймовірність, наприклад, події X>100
- ullet 3a (2.2) ми повинні порахувати  $\mathbb{P}_X(X>100)=\mathbb{P}(X^{-1}(100;\infty))$
- ullet Без знання простору  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  це зробити просто неможливс
- Тому на практиці використовують такі випадкові величини, розподіл яких можна легко характеризувати

- ullet Нехай маємо випадкову величину  $X:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o (\mathbb{R},\mathcal{B})$  з розподілом  $\mathbb{P}_X$
- Наприклад, це може бути «вага людини, кг»
- ullet Ми не маємо жодного уявлення про простір  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ , на якому вона визначена
- ullet Ми тільки спостерігаємо значення X
- ullet Нас цікавить обчислити ймовірність, наприклад, події X>100
- ullet За (2.2) ми повинні порахувати  $\mathbb{P}_{X}\left(X>100
  ight)=\mathbb{P}\left(X^{-1}(100;\infty)
  ight)$
- ullet Без знання простору  $(M,\mathcal{A},\mathbb{P})$  це зробити просто неможливо
- Тому на практиці використовують такі випадкові величини, розподіл яких можна легко характеризувати

- $\bullet$  Нехай маємо випадкову величину  $X:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B})$  з розподілом  $\mathbb{P}_X$
- Наприклад, це може бути «вага людини, кг»
- Ми не маємо жодного уявлення про простір  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , на якому вона визначена
- ullet Ми тільки спостерігаємо значення X
- ullet Нас цікавить обчислити ймовірність, наприклад, події X>100
- ullet За (2.2) ми повинні порахувати  $\mathbb{P}_X \left( X > 100 \right) = \mathbb{P} \left( X^{-1}(100; \infty) \right)$
- ullet Без знання простору  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  це зробити просто неможливо
- Тому на практиці використовують такі випадкові величини, розподіл яких можна легко характеризувати

- $\bullet$  Нехай маємо випадкову величину  $X:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B})$  з розподілом  $\mathbb{P}_X$
- Наприклад, це може бути «вага людини, кг»
- ullet Ми не маємо жодного уявлення про простір  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ , на якому вона визначена
- ullet Ми тільки спостерігаємо значення X
- ullet Нас цікавить обчислити ймовірність, наприклад, події X>100
- За (2.2) ми повинні порахувати  $\mathbb{P}_X (X > 100) = \mathbb{P} (X^{-1}(100; \infty))$
- ullet Без знання простору  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  це зробити просто неможлив
- Тому на практиці використовують такі випадкові величини, розподіл яких можна легко характеризувати

- $\bullet$  Нехай маємо випадкову величину  $X:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B})$  з розподілом  $\mathbb{P}_X$
- Наприклад, це може бути «вага людини, кг»
- ullet Ми не маємо жодного уявлення про простір  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ , на якому вона визначена
- ullet Ми тільки спостерігаємо значення X
- ullet Нас цікавить обчислити ймовірність, наприклад, події X>100
- ullet За (2.2) ми повинні порахувати  $\mathbb{P}_X\left(X>100
  ight)=\mathbb{P}\left(X^{-1}(100;\infty)
  ight)$
- ullet Без знання простору  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  це зробити просто неможливо
- Тому на практиці використовують такі випадкові величини, розподіл яких можна легко характеризувати

- $\bullet$  Нехай маємо випадкову величину  $X:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B})$  з розподілом  $\mathbb{P}_X$
- Наприклад, це може бути «вага людини, кг»
- ullet Ми не маємо жодного уявлення про простір  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ , на якому вона визначена
- ullet Ми тільки спостерігаємо значення X
- ullet Нас цікавить обчислити ймовірність, наприклад, події X>100
- ullet За (2.2) ми повинні порахувати  $\mathbb{P}_X \left( X > 100 \right) = \mathbb{P} \left( X^{-1}(100; \infty) \right)$
- ullet Без знання простору  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  це зробити просто неможливо
- Тому на практиці використовують такі випадкові величини, розподіл яких можна легко характеризувати

- $\bullet$  Нехай маємо випадкову величину  $X:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o (\mathbb{R},\mathcal{B})$  з розподілом  $\mathbb{P}_X$
- Наприклад, це може бути «вага людини, кг»
- ullet Ми не маємо жодного уявлення про простір  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ , на якому вона визначена
- ullet Ми тільки спостерігаємо значення X
- ullet Нас цікавить обчислити ймовірність, наприклад, події X>100
- ullet 3а (2.2) ми повинні порахувати  $\mathbb{P}_X \left( X > 100 \right) = \mathbb{P} \left( X^{-1}(100; \infty) \right)$
- ullet Без знання простору  $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$  це зробити просто неможливо
- Тому на практиці використовують такі випадкові величини, розподіл яких можна легко характеризувати

- Нехай на вимірному просторі  $(\Omega, \mathcal{A})$  визначено дві міри,  $\mu$  і  $\nu$

$$\forall A \in \mathcal{A} \ , \ \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Йоганн Карл Август Радон (Johann Karl August Radon, 1887–1956) — австрійський математик. Отто Марчин Никодим (Otto Marcin Nikodym, 1887–1974) — польський математик

### Визначення 2.6

- $\bullet\,$  Нехай на вимірному просторі  $(\Omega,\mathcal{A})$  визначено дві міри,  $\mu$  і  $\nu$
- Міра  $\nu$  є **абсолютно неперервною відносно**  $\mu$  (absolutely continuous with respect to  $\mu$ ), що позначають як  $\nu\ll\mu$ , якщо

$$\forall A \in \mathcal{A} \;,\; \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

Teopeмa 2.7 (Тeopeмa Радона-Никодима (Radon–Nikodym theorem)<sup>5</sup>)

 $u \sim \mu$ • Тоді Іспує невід'ємна (вимірна) функція  $f:\Omega \to [0;\infty)$  така, що  $u(A) = \int_A f \, d\mu \;, \qquad \forall A \in \mathcal{A} \tag{2.3}$ 

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Йоганн Карл Август Радон (Johann Karl August Radon, 1887–1956) — австрійський математик. Отто Марчин Никодим (Otto Marcin Nikodym, 1887–1974) — польський математик

#### Визначення 2.6

- $\bullet\,$  Нехай на вимірному просторі  $(\Omega,\mathcal{A})$  визначено дві міри,  $\mu$  і  $\nu$
- Міра  $\nu$  є абсолютно неперервною відносно  $\mu$  (absolutely continuous with respect to  $\mu$ ), що позначають як  $\nu\ll\mu$ , якщо

$$\forall A \in \mathcal{A} \;,\; \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

# Teopeма 2.7 (Теоpeма Радона-Никодима (Radon–Nikodym theorem)5)

- Нехай на вимірному просторі  $(\Omega,\mathcal{A})$  визначено дві  $(\sigma$ -скінченні) міри  $\mu$  і  $\nu$ ,  $\nu\ll\mu$
- ullet Тоді існує невід'ємна (вимірна) функція  $f:\Omega o[0;\infty)$  така, що

$$\gamma(A) = \int_{A} f \, d\mu \;, \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$
 (2.3)

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Йоганн Карл Август Радон (Johann Karl August Radon, 1887–1956) — австрійський математик. Отто Марчин Никодим (Otto Marcin Nikodym, 1887–1974) — польський математик

#### Визначення 2.6

- $\bullet\,$  Нехай на вимірному просторі  $(\Omega,\mathcal{A})$  визначено дві міри,  $\mu$  і  $\nu$
- Міра  $\nu$  є абсолютно неперервною відносно  $\mu$  (absolutely continuous with respect to  $\mu$ ), що позначають як  $\nu \ll \mu$ , якщо

$$\forall A \in \mathcal{A} \;,\; \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

# Teopeма 2.7 (Теоpeма Радона-Никодима (Radon–Nikodym theorem)5)

- Нехай на вимірному просторі  $(\Omega,\mathcal{A})$  визначено дві ( $\sigma$ -скінченні) міри  $\mu$  і  $\nu$ ,  $\nu\ll\mu$
- $\bullet\,$  Тоді існує невід'ємна (вимірна) функція  $f:\Omega \to [0;\infty)$  така, що

$$\nu(A) = \int_{A} f \, d\mu \;, \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$
 (2.3)

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Йоганн Карл Август Радон (Johann Karl August Radon, 1887–1956) — австрійський математик. Отто Марчин Никодим (Otto Marcin Nikodym, 1887–1974) — польський математик

#### Визначення 2.6

- $\bullet\,$  Нехай на вимірному просторі  $(\Omega,\mathcal{A})$  визначено дві міри,  $\mu$  і  $\nu$
- Міра  $\nu$  є **абсолютно неперервною відносно**  $\mu$  (absolutely continuous with respect to  $\mu$ ), що позначають як  $\nu\ll\mu$ , якщо

$$\forall A \in \mathcal{A} , \ \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

# Teopeма 2.7 (Теоpeма Радона-Никодима (Radon–Nikodym theorem)<sup>5</sup>)

- Нехай на вимірному просторі  $(\Omega,\mathcal{A})$  визначено дві ( $\sigma$ -скінченні) міри  $\mu$  і  $\nu$ ,  $\nu\ll\mu$
- ullet Тоді існує невід'ємна (вимірна) функція  $f:\Omega o [0;\infty)$  така, що

$$\nu(A) = \int_{A} f \, d\mu \;, \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$
 (2.3)

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Йоганн Карл Август Радон (Johann Karl August Radon, 1887–1956) — австрійський математик. Отто Марчин Никодим (Otto Marcin Nikodym, 1887–1974) — польський математик

- На практиці нас цікавлять такі випадкові величини X, розподіл яких  $\mathbb{P}_X$ абсолютно неперервний відносно деякої міри

- На практиці нас цікавлять такі випадкові величини X, розподіл яких  $\mathbb{P}_X$  абсолютно неперервний відносно деякої міри
- Тоді ймовірність будь-якої події  $X\in A, A\in \mathcal{B}$ , можна обчислити за допомогою (2.3) як  $\mathbb{P}_X\left(X\in A\right)=\int_A f\,d\mu$
- Випадкова величина X дискретна, якщо її образ зліченний, тобто  $X \in X_0 = \{x_1, x_2, ...\}$

- На практиці нас цікавлять такі випадкові величини X, розподіл яких  $\mathbb{P}_X$  абсолютно неперервний відносно деякої міри
- Тоді ймовірність будь-якої події  $X\in A$ ,  $A\in \mathcal{B}$ , можна обчислити за допомогою (2.3) як  $\mathbb{P}_X\left(X\in A\right)=\int_A f\,d\mu$
- lacktriangledown Випадкова величина X **дискретна**, якщо її образ зліченний, тобто  $X \in X_0 = \{x_1, x_2, ...\}$ 
  - ullet Тоді можна показати, що  $\mathbb{P}_X \ll \sharp$
  - ullet Тут # це лічна міра (counting measure): # $(A)=|X_0\cap A|$ ,  $A\in\mathcal{B}$
  - ullet Тоді  $\mathbb{P}\left(X\in A
    ight)=\int_{A}f\,d\#=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- lacktriangle Випадкова величина X неперервна, якщо її образ незліченний і  $\mathbb{P}_X \ll X$

- На практиці нас цікавлять такі випадкові величини X, розподіл яких  $\mathbb{P}_X$  абсолютно неперервний відносно деякої міри
- Тоді ймовірність будь-якої події  $X\in A, A\in \mathcal{B}$ , можна обчислити за допомогою (2.3) як  $\mathbb{P}_X\left(X\in A\right)=\int_A f\,d\mu$
- lacktriangled Випадкова величина X **дискретна**, якщо її образ зліченний, тобто  $X \in X_0 = \{x_1, x_2, ...\}$ 
  - ullet Тоді можна показати, що  $\mathbb{P}_X \ll \#$
  - f A Тут # це лічна міра (counting measure): # $(A)=|X_0\cap A|$ ,  $A\in\mathcal B$
  - ullet Тоді  $\mathbb{P}\left(X\in A
    ight)=\int_{A}f\,d\#=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- lacktriangle Випадкова величина X неперервна, якщо її образ незліченний і  $\mathbb{P}_X \ll \lambda$

- На практиці нас цікавлять такі випадкові величини X, розподіл яких  $\mathbb{P}_X$  абсолютно неперервний відносно деякої міри
- Тоді ймовірність будь-якої події  $X\in A, A\in \mathcal{B}$ , можна обчислити за допомогою (2.3) як  $\mathbb{P}_X\left(X\in A\right)=\int_A f\,d\mu$
- lacktriangled Випадкова величина X **дискретна**, якщо її образ зліченний, тобто  $X \in X_0 = \{x_1, x_2, ...\}$ 
  - Тоді можна показати, що  $\mathbb{P}_X \ll \#$
  - ullet Тут # це лічна міра (counting measure): # $(A)=|X_0\cap A|$ ,  $A\in\mathcal{B}$
  - Тоді  $\mathbb{P}\left(X \in A\right) = \int_A f \, d\# = \sum_{x \in X_0 \cap A} f(x)$
- ullet Випадкова величина X неперервна, якщо її образ незліченний і  $\mathbb{P}_X \ll \lambda$

- На практиці нас цікавлять такі випадкові величини X, розподіл яких  $\mathbb{P}_X$  абсолютно неперервний відносно деякої міри
- Тоді ймовірність будь-якої події  $X\in A, A\in \mathcal{B}$ , можна обчислити за допомогою (2.3) як  $\mathbb{P}_X$   $(X\in A)=\int_A f\,d\mu$
- lacktriangled Випадкова величина X **дискретна**, якщо її образ зліченний, тобто  $X \in X_0 = \{x_1, x_2, ...\}$ 
  - $\bullet$  Тоді можна показати, що  $\mathbb{P}_X \ll \#$
  - ullet Тут # це лічна міра (counting measure): # $(A)=|X_0\cap A|$ ,  $A\in\mathcal{B}$
  - $\bullet$  Тоді  $\mathbb{P}\left(X\in A\right)=\int_{A}f\,d\#=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- ② Випадкова величина X неперервна, якщо її образ незліченний і  $\mathbb{P}_X \ll \lambda$

- На практиці нас цікавлять такі випадкові величини X, розподіл яких  $\mathbb{P}_X$  абсолютно неперервний відносно деякої міри
- Тоді ймовірність будь-якої події  $X\in A, A\in \mathcal{B}$ , можна обчислити за допомогою (2.3) як  $\mathbb{P}_X\left(X\in A\right)=\int_A f\,d\mu$
- lacktriangle Випадкова величина X **дискретна**, якщо її образ зліченний, тобто  $X \in X_0 = \{x_1, x_2, ...\}$ 
  - ullet Тоді можна показати, що  $\mathbb{P}_X \ll \#$
  - ullet Тут # це лічна міра (counting measure): # $(A)=|X_0\cap A|$ ,  $A\in\mathcal{B}$
  - Тоді  $\mathbb{P}\left(X\in A
    ight)=\int_{A}f\,d\#=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- ② Випадкова величина X неперервна, якщо її образ незліченний і  $\mathbb{P}_X \ll \lambda$ 
  - Тут  $\lambda$  це **міра Лебега** (Lebesgue measure)
  - Міра Лебега єдина ( $\sigma$ -скінченна $^7$ ) міра, яка має інтерпретацію довжини інтервалу
  - Тобто  $\lambda((a;b]) = b a$

• Togi<sup>8</sup>  $\mathbb{P}(X \in A) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx$ 

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Анрі Лебег (Henri Lebesgue, 1875–1941) — французький математик

- На практиці нас цікавлять такі випадкові величини X, розподіл яких  $\mathbb{P}_X$  абсолютно неперервний відносно деякої міри
- Тоді ймовірність будь-якої події  $X\in A, A\in \mathcal{B}$ , можна обчислити за допомогою (2.3) як  $\mathbb{P}_X$   $(X\in A)=\int_A f\,d\mu$
- lacktriangle Випадкова величина X **дискретна**, якщо її образ зліченний, тобто  $X \in X_0 = \{x_1, x_2, ...\}$ 
  - ullet Тоді можна показати, що  $\mathbb{P}_{X} \ll \#$
  - Тут # це лічна міра (counting measure):  $\#(A) = |X_0 \cap A|, A \in \mathcal{B}$
  - $\bullet$  Тоді  $\mathbb{P}\left(X\in A\right)=\int_{A}f\,d\#=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- f Q Випадкова величина X **неперервна**, якщо її образ незліченний і  $\mathbb{P}_X \ll \lambda$ 
  - Тут  $\lambda$  це **міра Лебега** (Lebesgue measure) $^6$
  - Міра Лебега єдина ( $\sigma$ -скінченна $^7$ ) міра, яка має інтерпретацію довжини інтервалу
  - Тобто  $\lambda((a;b]) = b a$
  - $\bullet$  Тоді<sup>8</sup>  $\mathbb{P}\left(X \in A\right) = \int_A f \, d\lambda = \int_A f(x) \, dx$

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Анрі Лебег (Henri Lebesgue, 1875–1941) — французький математик

- На практиці нас цікавлять такі випадкові величини X, розподіл яких  $\mathbb{P}_X$  абсолютно неперервний відносно деякої міри
- Тоді ймовірність будь-якої події  $X\in A, A\in \mathcal{B}$ , можна обчислити за допомогою (2.3) як  $\mathbb{P}_X\left(X\in A\right)=\int_A f\,d\mu$
- lacktriangle Випадкова величина X **дискретна**, якщо її образ зліченний, тобто  $X \in X_0 = \{x_1, x_2, \ldots\}$ 
  - ullet Тоді можна показати, що  $\mathbb{P}_{X} \ll \#$
  - Тут # це лічна міра (counting measure):  $\#(A) = |X_0 \cap A|, A \in \mathcal{B}$
  - Тоді  $\mathbb{P}\left(X\in A
    ight)=\int_{A}f\,d\#=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- $m{0}$  Випадкова величина X неперервна, якщо її образ незліченний і  $\mathbb{P}_X \ll \lambda$ 
  - $\bullet$  Тут  $\lambda$  це **міра Лебега** (Lebesgue measure) $^6$
  - Міра Лебега єдина ( $\sigma$ -скінченна $^7$ ) міра, яка має інтерпретацію довжини інтервалу
  - Тобто  $\lambda((a;b]) = b a$
  - Тоді $^8$   $\mathbb{P}\left(X\in A\right)=\int_A f\,d\lambda=\int_A f(x)\,dx$

 $<sup>^6</sup>$ Анрі Лебег (Henri Lebesgue, 1875–1941) — французький математик

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Це для нашого курсу непринципово; дис. КЛТЙ 2.4

- На практиці нас цікавлять такі випадкові величини X, розподіл яких  $\mathbb{P}_X$  абсолютно неперервний відносно деякої міри
- Тоді ймовірність будь-якої події  $X\in A$ ,  $A\in \mathcal{B}$ , можна обчислити за допомогою (2.3) як  $\mathbb{P}_X$   $(X\in A)=\int_A f\,d\mu$
- lacktriangle Випадкова величина X **дискретна**, якщо її образ зліченний, тобто  $X \in X_0 = \{x_1, x_2, ...\}$ 
  - ullet Тоді можна показати, що  $\mathbb{P}_X \ll \#$ 
    - Тут # це лічна міра (counting measure):  $\#(A) = |X_0 \cap A|, A \in \mathcal{B}$
    - $\bullet$  Тоді  $\mathbb{P}\left(X\in A\right)=\int_{A}f\,d\#=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- $m{0}$  Випадкова величина X неперервна, якщо її образ незліченний і  $\mathbb{P}_X \ll \lambda$ 
  - $\bullet$  Тут  $\lambda$  це **міра Лебега** (Lebesgue measure) $^6$
  - Міра Лебега єдина ( $\sigma$ -скінченна $^7$ ) міра, яка має інтерпретацію довжини інтервалу
  - Тобто  $\lambda((a;b]) = b a$
  - ullet Тоді $^8$   $\mathbb{P}\left(X\in A
    ight)=\int_A f\,d\lambda=\int_A f(x)\,dx$

 $<sup>^6</sup>$ Анрі Лебег (Henri Lebesgue, 1875–1941) — французький математик

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Це для нашого курсу непринципово; дис. КЛТЙ 2.4

- На практиці нас цікавлять такі випадкові величини X, розподіл яких  $\mathbb{P}_X$  абсолютно неперервний відносно деякої міри
- Тоді ймовірність будь-якої події  $X\in A$ ,  $A\in \mathcal{B}$ , можна обчислити за допомогою (2.3) як  $\mathbb{P}_X\left(X\in A\right)=\int_A f\,d\mu$
- lacktriangle Випадкова величина X **дискретна**, якщо її образ зліченний, тобто  $X \in X_0 = \{x_1, x_2, ...\}$ 
  - Тоді можна показати, що  $\mathbb{P}_X \ll \#$ 
    - Тут # це лічна міра (counting measure):  $\#(A) = |X_0 \cap A|, A \in \mathcal{B}$
    - Тоді  $\mathbb{P}\left(X \in A\right) = \int_{A} f \, d\# = \sum_{x \in X_{0} \cap A} f(x)$
- $oldsymbol{0}$  Випадкова величина X неперервна, якщо її образ незліченний і  $\mathbb{P}_X \ll \lambda$ 
  - ullet Тут  $\lambda$  це **міра Лебега** (Lebesgue measure) $^6$
  - Міра Лебега єдина ( $\sigma$ -скінченна $^7$ ) міра, яка має інтерпретацію довжини інтервалу
  - Тобто  $\lambda((a;b]) = b a$
  - Тоді $^8$   $\mathbb{P}\left(X\in A\right)=\int_A f\,d\lambda=\int_A f(x)\,dx$

 $<sup>^6</sup>$ Анрі Лебег (Henri Lebesgue, 1875–1941) — французький математик

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Це для нашого курсу непринципово; дис. КЛТЙ 2.4

 $<sup>^{8}</sup>$ На практиці зустрічаються тільки такі величини, де перехід до інтегралу Рімана справді можливий

$$\bullet \,$$
 Отже якщо  $X$  дискретна, то  $\mathbb{P}_X \, (X \in A) = \int_A f \, d\mu = \sum_{x \in X_0 \cap A} f(x)$ 

• Носієм (support) дискретної величини є її образ: supp  $(X)=X_0$ 

Таку функцію f називають **функцією ймовірности** (probability mass function) і частіше позначають через  $p_Y(x) \equiv \mathbb{P}_Y(X=x)$ 

- Ця функція дає ймовірність будь-якого елемента носія
- ullet За межами носія  $p_X(x)=0$ ,  $x
  otin \mathrm{supp}\,(X)$
- ullet Також повинно бути справедливим  $\sum_{X \in \mathcal{X}} p_X(X) = 1$

- $\bullet \,$  Отже якщо X дискретна, то  $\mathbb{P}_{X}\left(X\in A\right)=\int_{A}f\,d\mu=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- $\bullet$  Носієм (support) дискретної величини є її образ:  $\mathrm{supp}\,(X)=X_0$ 
  - ullet Наприклад, X може відповідати числу дітей у сім'ї, і тоді supp  $(X)=\{0,1,2,...$
  - Або числу гербів після підкидання двох монеток, і тоді  $\sup_{X} (X) = \{0, 1, 2\}$

#### Визначення 2.8

Таку функцію f називають **функцією ймовірности (**probability mass function) і частіше позначають через  $p_{\scriptscriptstyle Y}(x) \equiv \mathbb{P}_{\scriptscriptstyle Y}(X=x)$ 

- Ия функція дає ймовірність будь-якого едемента носія
- За межами носія  $p_X(x) = 0$ ,  $x \notin \text{supp}(X)$
- $\bullet$  Також повинно бути справедливим  $\sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} p_X(x) = 1$

- $\bullet \,$  Отже якщо X дискретна, то  $\mathbb{P}_X \, (X \in A) = \int_A f \, d\mu = \sum_{x \in X_0 \cap A} f(x)$
- ullet Hociєм (support) дискретної величини є її образ: supp  $(X)=X_0$ 
  - Наприклад, X може відповідати числу дітей у сім'ї, і тоді  $\sup (X) = \{0,1,2,...\}$
  - Або числу гербів після підкидання двох монеток, і тоді  $\mathrm{supp}\,(X)=\{0,1,2\}$

#### Визначення 2.8

Таку функцію f називають функцією ймовірности (probability mass function) і частіше позначають через  $p_X(x) \equiv \mathbb{P}_X\left(X=x\right)$ 

- Ця функція дає ймовірність будь-якого елемента носія
- ullet За межами носія  $p_X(x)=0$ ,  $x\notin \mathrm{supp}\,(X)$
- $\bullet$  Також повинно бути справедливим  $\sum_{x \in \mathrm{supp}(X)} p_X(x) = 1$

- $\bullet \,$  Отже якщо X дискретна, то  $\mathbb{P}_X \, (X \in A) = \int_A f \, d\mu = \sum_{x \in X_\circ \cap A} f(x)$
- **Hociєм** (support) дискретної величини є її образ: supp  $(X) = X_0$ 
  - Наприклад, X може відповідати числу дітей у сім'ї, і тоді supp  $(X)=\{0,1,2,\ldots\}$  Або числу гербів після підкидання двох монеток, і тоді supp  $(X)=\{0,1,2\}$

- Отже якщо X дискретна, то  $\mathbb{P}_{X}\left(X\in A\right)=\int_{A}f\,d\mu=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- **Hociem** (support) дискретної величини є її образ: supp  $(X) = X_0$ 
  - Наприклад, X може відповідати числу дітей у сім'ї, і тоді supp  $(X)=\{0,1,2,\ldots\}$  Або числу гербів після підкидання двох монеток, і тоді supp  $(X)=\{0,1,2\}$

#### Визначення 2.8

Таку функцію f називають функцією ймовірности (probability mass function) і частіше позначають через  $p_X(x) \equiv \mathbb{P}_X(X=x)$ 







- Отже якщо X дискретна, то  $\mathbb{P}_{X}\left(X\in A\right)=\int_{A}f\,d\mu=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- **Hociem** (support) дискретної величини є її образ: supp  $(X) = X_0$ 
  - Наприклад, X може відповідати числу дітей у сім'ї, і тоді supp  $(X)=\{0,1,2,\ldots\}$  Або числу гербів після підкидання двох монеток, і тоді supp  $(X)=\{0,1,2\}$

#### Визначення 2.8

Таку функцію f називають функцією ймовірности (probability mass function) і частіше позначають через  $p_X(x) \equiv \mathbb{P}_X(X=x)$ 

- Ця функція дає ймовірність будь-якого елемента носія
- За межами носія  $p_X(x) = 0$ ,  $x \notin \text{supp}(X)$

2023-02-22

- Отже якщо X дискретна, то  $\mathbb{P}_{X}\left(X\in A\right)=\int_{A}f\,d\mu=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- **Hociem** (support) дискретної величини є її образ: supp  $(X) = X_0$ 
  - Наприклад, X може відповідати числу дітей у сім'ї, і тоді supp  $(X)=\{0,1,2,\ldots\}$  Або числу гербів після підкидання двох монеток, і тоді supp  $(X)=\{0,1,2\}$

#### Визначення 2.8

Таку функцію f називають функцією ймовірности (probability mass function) і частіше позначають через  $p_X(x) \equiv \mathbb{P}_X(X=x)$ 

- Ця функція дає ймовірність будь-якого елемента носія
- ullet За межами носія  $p_X(x)=0$ ,  $x \notin \mathrm{supp}\,(X)$

- Отже якщо X дискретна, то  $\mathbb{P}_{X}\left(X\in A\right)=\int_{A}f\,d\mu=\sum_{x\in X_{0}\cap A}f(x)$
- **Hociem** (support) дискретної величини є її образ: supp  $(X) = X_0$ 

  - Наприклад, X може відповідати числу дітей у сім'ї, і тоді  $\sup$  (X) =  $\{0,1,2,...\}$  Або числу гербів після підкидання двох монеток, і тоді  $\sup$  (X) =  $\{0,1,2\}$

#### Визначення 2.8

Таку функцію f називають функцією ймовірности (probability mass function) і частіше позначають через  $p_X(x) \equiv \mathbb{P}_X(X=x)$ 



- ullet За межами носія  $p_X(x)=0$ ,  $x \notin \mathrm{supp}\,(X)$
- ullet Також повинно бути справедливим  $\sum p_X(x)=1$  $x \in \text{supp}(X$



$$\bullet$$
 Якщо ж  $X$  неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X\in A\right)=\int_A f_X\,d\lambda=\int_A f_X(x)\,dx$ 

• Носієм неперервної величини є  $\mathrm{supp}\,(x)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$ 

Таку функцію  $f_X$  називають **щільністю розподілу** (probability density function, PDF)

- Якщо ж X неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X\in A\right)=\int_A f_X\,d\lambda=\int_A f_X(x)\,dx$
- Носієм неперервної величини є  $\mathrm{supp}\,(x)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$ 
  - ullet Наприклад, X може відповідати зросту людини, і тоді  $\mathrm{supp}\,(X)=(0;\infty)$
  - Або частці пацієнтів, що одужали після вживання ліків, і тоді  $\mathrm{supp}\,(X) = [0;1]$

#### Визначення 2.9

Таку функцію  $f_X$  називають **щільністю розподілу** (probability density function, PDF)

Теорема 2.10

- ullet Якщо ж X неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X\in A
  ight)=\int_A f_X\,d\lambda=\int_A f_X(x)\,dx$
- **Hocieм** неперервної величини є  $\mathrm{supp}\,(x)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$ 
  - Наприклад, X може відповідати зросту людини, і тоді  $\operatorname{supp}(X) = (0; \infty)$
  - Або частці пацієнтів, що одужали після вживання ліків, і тоді  $\mathrm{supp}\,(X) = [0;1]$

### Визначення 2.9

Таку функцію  $f_X$  називають **щільністю розподілу** (probability density function, PDF)

### Теорема 2.10

- ullet Якщо ж X неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X\in A
  ight)=\int_A f_X\,d\lambda=\int_A f_X(x)\,dx$
- Носієм неперервної величини є supp  $(x) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ 
  - Наприклад, X може відповідати зросту людини, і тоді  $\operatorname{supp}(X) = (0; \infty)$
  - Або частці пацієнтів, що одужали після вживання ліків, і тоді  $\mathrm{supp}\,(X) = [0;1]$

#### Визначення 2.9

Таку функцію  $f_X$  називають **щільністю розподілу** (probability density function, PDF)

### Теорема 2.10

- ullet Якщо ж X неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X\in A
  ight)=\int_A f_X\,d\lambda=\int_A f_X(x)\,dx$
- Носієм неперервної величини є  $\mathrm{supp}\,(x)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$ 
  - ullet Наприклад, X може відповідати зросту людини, і тоді  $\sup(X)=(0,\infty)$
  - Або частці пацієнтів, що одужали після вживання ліків, і тоді  $\mathrm{supp}\,(X) = [0;1]$

### Визначення 2.9

Таку функцію  $f_X$  називають **щільністю розподілу** (probability density function, PDF)

### Теорема 2.10

$$f(x) \geq 0$$
 для всіх  $x \in \mathbb{R}$ 

$$\circ \int f(t) dt = 1$$

- ullet Якщо ж X неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X\in A
  ight)=\int_A f_X\,d\lambda=\int_A f_X(x)\,dx$
- **Носієм** неперервної величини є  $\mathrm{supp}\,(x)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$ 
  - ullet Наприклад, X може відповідати зросту людини, і тоді  $\sup (X) = (0;\infty)$
  - Або частці пацієнтів, що одужали після вживання ліків, і тоді  $\mathrm{supp}\,(X) = [0;1]$

### Визначення 2.9

Таку функцію  $f_X$  називають **щільністю розподілу** (probability density function, PDF)

#### Теорема 2.10

$$ullet f(x) \geq 0$$
 для всіх  $x \in \mathbb{R}$   $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt = 1$ 

- ullet Якщо ж X неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X\in A
  ight)=\int_A f_X\,d\lambda=\int_A f_X(x)\,dx$
- **Носієм** неперервної величини є  $\mathrm{supp}\,(x)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$ 
  - ullet Наприклад, X може відповідати зросту людини, і тоді  $\sup(X) = (0;\infty)$
  - Або частці пацієнтів, що одужали після вживання ліків, і тоді  $\mathrm{supp}\,(X) = [0;1]$

#### Визначення 2.9

Таку функцію  $f_X$  називають **щільністю розподілу** (probability density function, PDF)

### Теорема 2.10

- ullet  $f(x) \geq 0$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$
- $\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt = 1$

- ullet Якщо ж X неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X\in A
  ight)=\int_A f_X\,d\lambda=\int_A f_X(x)\,dx$
- Носієм неперервної величини є  $\mathrm{supp}\,(x)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$ 
  - ullet Наприклад, X може відповідати зросту людини, і тоді  $\sup (X) = (0; \infty)$
  - Або частці пацієнтів, що одужали після вживання ліків, і тоді  $\mathrm{supp}\,(X) = [0;1]$

### Визначення 2.9

Таку функцію  $f_X$  називають **щільністю розподілу** (probability density function, PDF)

### Теорема 2.10

- ullet  $f(x) \geq 0$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$   $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt = 1$

- Щільність розподілу дуже подібна до функції ймовірности, проте не зовсім
- Для розподілів із неперервною функцією розподілу  $\mathbb{P}_{X}\left(X=x\right)=0$
- А щільність розподілу це ймовірність **нескінченно малого інтервалу**  $\mathbb{P}_X\left(X\in(x;x+dx)\right)=f(x)dx$

- ullet Шільність f(x) сама по собі **не є ймовірніст**к
- Вона навіть може перевищувати 1

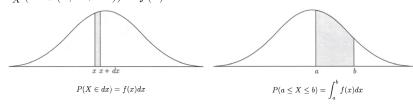
- Щільність розподілу дуже подібна до функції ймовірности, проте не зовсім
- Для розподілів із неперервною функцією розподілу  $\mathbb{P}_{X}\left(X=x
  ight)=0$
- А щільність розподілу це ймовірність **нескінченно малого інтервалу**  $\mathbb{P}_X\left(X\in(x;x+dx)\right)=f(x)dx$

- ullet Щільність f(x) сама по собі **не є ймовірністк**
- Вона навіть може перевищувати ї

- Щільність розподілу дуже подібна до функції ймовірности, проте не зовсім
- $\bullet\,$  Для розподілів із неперервною функцією розподілу  $\mathbb{P}_X\,(X=x)=0$
- А щільність розподілу це ймовірність **нескінченно малого інтервалу**:  $\mathbb{P}_X\left(X\in(x;x+dx)\right)=f(x)dx$

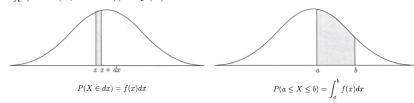
- lacktriangle Щільність f(x) сама по собі **не є ймовірністю**
- Вона навіть може перевищувати

- Щільність розподілу дуже подібна до функції ймовірности, проте не зовсім
- $\bullet\,$  Для розподілів із неперервною функцією розподілу  $\mathbb{P}_X\,(X=x)=0$
- А щільність розподілу це ймовірність **нескінченно малого інтервалу**:  $\mathbb{P}_X\left(X\in(x;x+dx)\right)=f(x)dx$



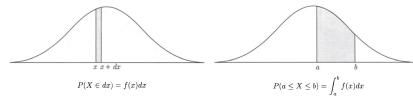
- ullet Щільність f(x) сама по собі **не є ймовірністю**
- Вона навіть може перевищувати 1

- Щільність розподілу дуже подібна до функції ймовірности, проте не зовсім
- Для розподілів із неперервною функцією розподілу  $\mathbb{P}_X\left(X=x\right)=0$
- А щільність розподілу це ймовірність **нескінченно малого інтервалу**:  $\mathbb{P}_X\left(X\in(x;x+dx)\right)=f(x)dx$



- ullet Щільність f(x) сама по собі **не є ймовірністю**
- Вона навіть може перевищувати 1

- Щільність розподілу дуже подібна до функції ймовірности, проте не зовсім
- Для розподілів із неперервною функцією розподілу  $\mathbb{P}_X\left(X=x\right)=0$
- А щільність розподілу це ймовірність **нескінченно малого інтервалу**:  $\mathbb{P}_X\left(X\in(x;x+dx)\right)=f(x)dx$



- ullet Щільність f(x) сама по собі **не є ймовірністю**
- Вона навіть може перевищувати 1

- ullet Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A
  ight)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - ullet Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - ullet Також будь-які зліченні множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , парні числа тощо
  - В  $\mathbb{R}^{\kappa}$  це є будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{\kappa-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множин міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно

- Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A\right)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - Також будь-які зліченні множини (N, Z, парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно

- Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A\right)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - Також будь-які зліченні множини (N, Z, парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це є будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно

- Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A\right)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - Також будь-які зліченні множини (N, Z, парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне **майже напевно** (almost surely, a.s.) або **3 імовірністю 1** (with probability 1, w.p.1), якщо воно **не виконується** на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно

- ullet Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A
  ight)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - Також будь-які зліченні множини (№, ℤ, парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно
- Також будь-яка шільність унікальна з точністю до міри нуль

- ullet Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A
  ight)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - ullet Також будь-які зліченні множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
  - ullet Це означає, що вона **може** набувати від'ємних значень, але такі події є нульовими
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно

- ullet Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A
  ight)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - ullet Також будь-які зліченні множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- lacktriangle Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
  - Це означає, що вона **може** набувати від'ємних значень, але такі події є нульовими
  - Тобто на практиці вони ніколи не виринатимуть
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно

- ullet Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A
  ight)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - ullet Також будь-які зліченні множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
  - Це означає, що вона може набувати від'ємних значень, але такі події є нульовими
  - Тобто на практиці вони ніколи не виринатимуть
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно

- ullet Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A
  ight)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - ullet Також будь-які зліченні множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
  - Це означає, що вона може набувати від'ємних значень, але такі події є нульовими
  - Тобто на практиці вони ніколи не виринатимуть
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно
  - Наприклад, може вимагатися функція, яка є неперервною майже напевно
  - Це означає, що вона в принципі може мати зліченну кількість точок розриву
  - Наприклад, f(x) = 1/x є неперервною майже напевно
- Також будь-яка щільність унікальна з точністю до міри нуль

- Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A\right)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - Також будь-які зліченні множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
  - Це означає, що вона може набувати від'ємних значень, але такі події є нульовими
  - Тобто на практиці вони ніколи не виринатимуть
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно
  - Наприклад, може вимагатися функція, яка є неперервною майже напевно
  - Це означає, що вона в принципі може мати зліченну кількість точок розриву
  - Наприклад, f(x) = 1/x є неперервною майже напевно
- Також будь-яка щільність унікальна з точністю до міри нуль

- Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A\right)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - Також будь-які зліченні множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
  - Це означає, що вона може набувати від'ємних значень, але такі події є нульовими
  - Тобто на практиці вони ніколи не виринатимуть
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно
  - Наприклад, може вимагатися функція, яка є неперервною майже напевно
  - Це означає, що вона в принципі може мати зліченну кількість точок розриву
  - Наприклад, f(x) = 1/x є неперервною майже напевно
- Також будь-яка щільність унікальна з точністю до міри нуль

- ullet Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A
  ight)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - ullet Також будь-які зліченні множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\varepsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
  - Це означає, що вона може набувати від'ємних значень, але такі події є нульовими
  - Тобто на практиці вони ніколи не виринатимуть
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно
  - Наприклад, може вимагатися функція, яка є неперервною майже напевно
  - Це означає, що вона в принципі може мати зліченну кількість точок розриву
  - Наприклад, f(x) = 1/x є неперервною майже напевно
- Також будь-яка щільність унікальна з точністю до міри нуль

- Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A\right)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - ullet Також будь-які зліченні множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
  - Це означає, що вона може набувати від'ємних значень, але такі події є нульовими
  - Тобто на практиці вони ніколи не виринатимуть
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно
  - Наприклад, може вимагатися функція, яка є неперервною майже напевно
  - Це означає, що вона в принципі може мати зліченну кількість точок розриву
  - Наприклад, f(x) = 1/x є неперервною майже напевно
- Також будь-яка щільність унікальна з точністю до міри нуль
  - Тобто якщо в одній точці поміняти значення щільности, суть не зміниться
  - Адже інтеграл від значення в одній точці не зміниться

- Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A\right)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - ullet Також будь-які зліченні множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
  - Це означає, що вона може набувати від'ємних значень, але такі події є нульовими
  - Тобто на практиці вони ніколи не виринатимуть
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно
  - Наприклад, може вимагатися функція, яка є неперервною майже напевно
  - Це означає, що вона в принципі може мати зліченну кількість точок розриву
  - Наприклад, f(x) = 1/x є неперервною майже напевно
- Також будь-яка щільність унікальна з точністю до міри нуль
  - Тобто якщо в одній точці поміняти значення щільности, суть не зміниться
  - Адже інтеграл від значення в одній точці не зміниться

#### Події міри нуль

- ullet Подію A, імовірність якої  $\mathbb{P}\left(A
  ight)=0$ , називають **подією міри нуль** (measure zero event, null set)
  - Множинами міри нуль є множини з одного елемента  $\{x\}$ ,  $x\in\mathbb{R}$
  - ullet Також будь-які зліченні множини ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , парні числа тощо)
  - ullet В  $\mathbb{R}^k$  це  $\epsilon$  будь-які множини розмірности  $\mathbb{R}^{k-1}$  (лінії на площині і т.п.)
- Кажуть, що деяке твердження істинне майже напевно (almost surely, a.s.) або з імовірністю 1 (with probability 1, w.p.1), якщо воно не виконується на множині міри нуль
- ullet Наприклад, можемо казати, що випадкова величина X>0 майже напевно
  - Це означає, що вона може набувати від'ємних значень, але такі події є нульовими
  - Тобто на практиці вони ніколи не виринатимуть
- Доведення низки теоретичних властивостей прекрасно працює, якщо якась властивість виконується тільки «майже» напевно
  - Наприклад, може вимагатися функція, яка є неперервною майже напевно
  - Це означає, що вона в принципі може мати зліченну кількість точок розриву
  - Наприклад, f(x) = 1/x є неперервною майже напевно
- Також будь-яка щільність унікальна з точністю до міри нуль
  - Тобто якщо в одній точці поміняти значення щільности, суть не зміниться
  - Адже інтеграл від значення в одній точці не зміниться

- Окрім дискретних і неперервних величин, існують величини мішані

$$F_X(x) \equiv \mathbb{P}_X (X \le x) = \mathbb{P}_X ((-\infty; x]) , \quad x \in \mathbb{R}$$
 (2.4)

- Окрім дискретних і неперервних величин, існують величини мішані
- Обчислювати ймовірності з такими величинами через відповідні інтеграли неочевидно
- Існує апарат, який працює для повністю довільних випадкових величин

#### Визначення 2.11

$$F_X(x) \equiv \mathbb{P}_X\left(X \leq x\right) = \mathbb{P}_X\left((-\infty;x]\right) \;, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

- Можна довести, що між розподілом і функцією розподілу існує взаємно однозначне відображення
- Тобто кожна випадкова величина має функцію розподілу, навіть якщо вона не має функції ймовірности чи шільности

- Окрім дискретних і неперервних величин, існують величини мішані
- Обчислювати ймовірності з такими величинами через відповідні інтеграли неочевидно
- Існує апарат, який працює для повністю довільних випадкових величин

#### Визначення 2.1

$$F_X(x) \equiv \mathbb{P}_X\left(X \leq x\right) = \mathbb{P}_X\left((-\infty;x]\right) \;, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

- Можна довести, що між розподілом і функцією розподілу існує взаємно однозначне відображення
- Тобто кожна випадкова величина має функцію розподілу, навіть якщо вона не має функції ймовірности чи щільности

- Окрім дискретних і неперервних величин, існують величини мішані
- Обчислювати ймовірності з такими величинами через відповідні інтеграли неочевидно
- Існує апарат, який працює для повністю довільних випадкових величин

#### Визначення 2.11

$$F_X(x) \equiv \mathbb{P}_X\left(X \leq x\right) = \mathbb{P}_X\left((-\infty;x]\right) \;, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

- Можна довести, що між розподілом і функцією розподілу існує взаємно однозначне відображення
- Тобто кожна випадкова величина має функцію розподілу, навіть якщо вона не має функції ймовірности чи щільности

- Окрім дискретних і неперервних величин, існують величини мішані
- Обчислювати ймовірності з такими величинами через відповідні інтеграли неочевидно
- Існує апарат, який працює для повністю довільних випадкових величин

#### Визначення 2.11

$$F_X(x) \equiv \mathbb{P}_X\left(X \leq x\right) = \mathbb{P}_X\left((-\infty;x]\right) \;, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

- Можна довести, що між розподілом і функцією розподілу існує взаємно однозначне відображення
- Тобто кожна випадкова величина має функцію розподілу, навіть якщо вона не має функції ймовірности чи щільности

- Окрім дискретних і неперервних величин, існують величини мішані
- Обчислювати ймовірності з такими величинами через відповідні інтеграли неочевидно
- Існує апарат, який працює для повністю довільних випадкових величин

#### Визначення 2.11

$$F_X(x) \equiv \mathbb{P}_X\left(X \leq x\right) = \mathbb{P}_X\left((-\infty;x]\right) \;, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

- Можна довести, що між розподілом і функцією розподілу існує взаємно однозначне відображення
- Тобто кожна випадкова величина має функцію розподілу, навіть якщо вона не має функції ймовірности чи щільности

- Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$  Є неперервною справа:  $\lim_{x \downarrow c} F_X(x) = F_X(c)$
  - Є нормованою:
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 , \qquad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності:

ullet Якщо випадкова величина неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X=x
ight)=\mathbb{C}$ 

- ullet Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - $\bullet$  Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - ullet Є неперервною справа:  $\lim_{x \to c} F_X(x) = F_X(c)$
  - Є нормованою:

$$\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0 \;, \qquad \lim_{x\to \infty} F_X(x) = 1$$

- за допомогою функціи розподілу можна обчислювати имовірності:
- ullet Якщо випадкова величина неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X=x
  ight)$

Данило Тавров

- ullet Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - ullet Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - ullet Є неперервною справа:  $\lim_{x \downarrow c} F_X(x) = F_X(c)$ 
    - ullet Границю зліва прийнято позначати як  $F_X(x-)$
  - Є нормованою

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 , \qquad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

• За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності

ullet Якщо випадкова величина неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X=x
ight)=0$ 

- Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - ullet Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - ullet Є неперервною справа:  $\lim_{x\downarrow c} F_X(x) = F_X(c)$ 
    - ullet Границю зліва прийнято позначати як  $F_X(x-)$
  - Є нормованою

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 , \qquad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

• За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності:

- Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - ullet Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - ullet Є неперервною справа:  $\lim_{x \downarrow c} F_X(x) = F_X(c)$ 
    - Границю зліва прийнято позначати як  $F_X(x-)$
  - Є нормованою:

$$\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0 \;, \qquad \lim_{x\to \infty} F_X(x) = 1$$

• За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності:

- ullet Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - ullet Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - ullet Є неперервною справа:  $\lim_{x \downarrow c} F_X(x) = F_X(c)$ 
    - Границю зліва прийнято позначати як  $F_X(x-)$
  - Є нормованою:

$$\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0 \;, \qquad \lim_{x\to \infty} F_X(x) = 1$$

- За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності:
  - $\bullet \mathbb{P}_X (X \ge x) = 1 F(x 1)$
  - $\mathbb{P}_{X}^{1}(X=x)=F(x)-F(x-x)$
  - $\mathbb{P}_X(X = x) = F(x) F(x-)$

- ullet Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - ullet Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - ullet Є неперервною справа:  $\lim_{x \downarrow c} F_X(x) = F_X(c)$ 
    - Границю зліва прийнято позначати як  $F_X(x-)$
  - Є нормованою:

$$\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0 \;, \qquad \lim_{x\to \infty} F_X(x) = 1$$

- За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності:
  - $\mathbb{P}_{X}(X \ge x) = 1 F(x 1)$ •  $\mathbb{P}_{X}((a; b)) = F(b) - F(a), a, b \in \mathbb{R}$
  - $\mathbb{P}_X((a, b]) = F(b) F(a), a, b$
  - $\mathbb{P}_{X}(X = x) = F(x) F(x-)$
- ullet Якщо випадкова величина неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X=x
  ight)=0$

- ullet Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - ullet Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - ullet Є неперервною справа:  $\lim_{x\downarrow c}F_X(x)=F_X(c)$ 
    - Границю зліва прийнято позначати як  $F_X(x-)$
  - Є нормованою:

$$\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0 \; , \qquad \lim_{x\to \infty} F_X(x) = 1$$

- За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності:
  - $\mathbb{P}_X(X \ge x) = 1 F(x-)$
  - $\bullet \ \mathbb{P}_X^{R}\left((a;b]\right) = F(b) F(a) \text{, } a,b \in \mathbb{R}$
  - $\mathbb{P}_X (X = x) = F(x) F(x-)$
- ullet Якщо випадкова величина неперервна, то  $\mathbb{P}_{X}\left(X=x
  ight)=0$

- ullet Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - ullet Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - ullet Є неперервною справа:  $\lim_{x\downarrow c}F_X(x)=F_X(c)$ 
    - Границю зліва прийнято позначати як  $F_X(x-)$
  - Є нормованою:

$$\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0 \;, \qquad \lim_{x\to \infty} F_X(x) = 1$$

- За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності:
  - $\mathbb{P}_X (X \ge x) = 1 F(x-)$
  - $\bullet \ \mathbb{P}_{X}^{A}((a; \overline{b}]) = F(b) F(a), a, b \in \mathbb{R}$
  - $\bullet \mathbb{P}_X^{\Lambda}(X=x) = F(x) F(x-)$
- Якщо випадкова величина неперервна, то  $\mathbb{P}_{X}\left(X=x\right)=0$

- ullet Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - ullet Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - Є неперервною справа:  $\lim_{x\downarrow c} F_X(x) = F_X(c)$ 
    - Границю зліва прийнято позначати як  $F_X(x-)$
  - Є нормованою:

$$\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0 \;, \qquad \lim_{x\to \infty} F_X(x) = 1$$

- За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності:
  - $\bullet \mathbb{P}_X (X \ge x) = 1 F(x-)$
  - $\mathbb{P}_{X}^{A}((a; \overline{b}]) = F(b) F(a), a, b \in \mathbb{R}$
  - $\bullet \mathbb{P}_X^{\Lambda}(X=x) = F(x) F(x-)$
- Якщо випадкова величина неперервна, то  $\mathbb{P}_X\left(X=x\right)=0$ 
  - Відтак  $\mathbb{P}_X (X \ge x) = 1 F(x)$ 
    - Вілтав

$$\mathbb{P}_{X}\left((a;b]\right) = \mathbb{P}_{X}\left([a;b]\right) = \mathbb{P}_{X}\left((a;b)\right) = \mathbb{P}_{X}\left([a;b]\right) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x) \, dx$$
  $a,b \in \mathbb{R}$ 

- ullet Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - ullet Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - ullet Є неперервною справа:  $\lim_{x\downarrow c}F_X(x)=F_X(c)$ 
    - Границю зліва прийнято позначати як  $F_X(x-)$
  - Є нормованою:

$$\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0 \;, \qquad \lim_{x\to \infty} F_X(x) = 1$$

- За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності:
  - $\bullet \mathbb{P}_X (X \ge x) = 1 F(x-)$
  - $\bullet \ \mathbb{P}_{X}^{A}\left((a;\overline{b}]\right) = F(b) F(a), a,b \in \mathbb{R}$
  - $\mathbb{P}_{X}(X = x) = F(x) F(x-)$
- Якщо випадкова величина неперервна, то  $\mathbb{P}_{X}\left(X=x\right)=0$ 
  - $\bullet$  Відтак  $\mathbb{P}_X (X \geq x) = 1 F(x)$
  - Відтак

$$\mathbb{P}_{X}\left((a;b]\right)=\mathbb{P}_{X}\left([a;b)\right)=\mathbb{P}_{X}\left((a;b)\right)=\mathbb{P}_{X}\left([a;b]\right)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}f(x)\,dx,$$
  $a,b\in\mathbb{R}$ 

- ullet Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - ullet Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - ullet Є неперервною справа:  $\lim_{x\downarrow c}F_X(x)=F_X(c)$ 
    - Границю зліва прийнято позначати як  $F_X(x-)$
  - Є нормованою:

$$\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0 \;, \qquad \lim_{x\to \infty} F_X(x) = 1$$

- За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності:
  - $\bullet \mathbb{P}_X (X \ge x) = 1 F(x-)$
  - $\mathbb{P}_{X}^{A}((a; \overline{b}]) = F(b) F(a), a, b \in \mathbb{R}$
  - $\bullet \mathbb{P}_{X}^{A}(X=x) = F(x) F(x-)$
- Якщо випадкова величина неперервна, то  $\mathbb{P}_{X}\left(X=x\right)=0$ 
  - $\bullet$  Відтак  $\mathbb{P}_X (X \ge x) = 1 F(x)$
  - Відтак

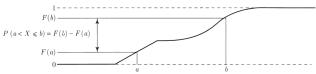
$$\begin{array}{l} \mathbb{P}_{X}\left((a;b]\right)=\mathbb{P}_{X}\left([a;b)\right)=\mathbb{P}_{X}\left((a;b)\right)=\mathbb{P}_{X}\left([a;b]\right)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}f(x)\,dx,\\ a,b\in\mathbb{R} \end{array}$$

- ullet Функція розподілу  $F_X(x)$  має такі властивості:
  - ullet Є неспадною:  $F_X(x) \leq F_X(y)$ , якщо  $x \leq y$
  - ullet Є неперервною справа:  $\lim_{x\downarrow c}F_X(x)=F_X(c)$ 
    - Границю зліва прийнято позначати як  $F_X(x-)$
  - Є нормованою:

$$\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0 \;, \qquad \lim_{x\to \infty} F_X(x) = 1$$

- За допомогою функцій розподілу можна обчислювати ймовірності:
  - $\bullet \ \mathbb{P}_X (X \ge x) = 1 F(x 1)$
  - $\mathbb{P}_X^{\Lambda}((a; \overline{b})) = F(b) F(a), a, b \in \mathbb{R}$
  - $\mathbb{P}_{X}(X = x) = F(x) F(x-)$
- Якщо випадкова величина неперервна, то  $\mathbb{P}_{X}\left(X=x\right)=0$ 
  - $\bullet$  Відтак  $\mathbb{P}_X (X \ge x) = 1 F(x)$
  - Відтак

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}_{X}\left((a;b]\right)=\mathbb{P}_{X}\left([a;b)\right)=\mathbb{P}_{X}\left((a;b)\right)=\mathbb{P}_{X}\left([a;b]\right)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}f(x)\,dx,\\ a,b\in\mathbb{R} \end{array}$$



## Зв'язок між функціями розподілу та щільностями

ullet Для **неперервної** величини X маємо

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^x f_X(x) \, dx$$

• Іншими словами, для всіх точок x, у яких функція  $F_X$  диференційовна:

$$f_X(x) = F_X'(x) \tag{2.5}$$

## Зв'язок між функціями розподілу та щільностями

• Для неперервної величини X маємо

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^x f_X(x) \, dx$$

• Іншими словами, для всіх точок x, у яких функція  $F_X$  диференційовна:

$$f_X(x) = F_X'(x) \tag{2.5}$$

## ullet Нехай X має функцію розподілу $F_X$

- Нехай *g* деяка вимірна<sup>9</sup> функція
- Функцію розподілу  $F_Y$  випадкової величини Y=g(X) можна дістати за визначенням:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}_Y\left(Y \le y\right) = \mathbb{P}_X\left(g(X) \le y\right) \tag{2.6}$$

• Якщо Х дискретна

$$\mathbb{P}_{Y}(Y = y) = \mathbb{P}_{X}(g(X) = y) = \sum_{x:g(x)=y} \mathbb{P}_{X}(X = x)$$
 (2.7)

$$f_{Y}(y) = f_{X}(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \cdot \mathbbm{1} \left\{ y \in g(\operatorname{supp}\left(X\right)) \right\} \tag{2.8}$$

- ullet Нехай X має функцію розподілу  $F_X$
- Нехай g деяка вимірна $^9$  функція
- Функцію розподілу  $F_Y$  випадкової величини Y=g(X) можна дістати за визначенням:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}_Y\left(Y \leq y\right) = \mathbb{P}_X\left(g(X) \leq y\right) \tag{2.6}$$

• Якщо Х дискретна

$$\mathbb{P}_{Y}(Y=y) = \mathbb{P}_{X}(g(X)=y) = \sum_{x:g(x)=y} \mathbb{P}_{X}(X=x)$$
 (2.7)

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \cdot \mathbbm{1} \left\{ y \in g(\operatorname{supp}(X)) \right\} \tag{2.8}$$

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Для наших цілей мова про довільну функцію

- ullet Нехай X має функцію розподілу  $F_X$
- ullet Нехай g деяка вимірна $^9$  функція
- Функцію розподілу  $F_Y$  випадкової величини Y=g(X) можна дістати за визначенням:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}_Y \left( Y \le y \right) = \mathbb{P}_X \left( g(X) \le y \right) \tag{2.6}$$

• Якщо Х дискретна,

$$\mathbb{P}_{Y}(Y = y) = \mathbb{P}_{X}(g(X) = y) = \sum_{x:g(x)=y} \mathbb{P}_{X}(X = x)$$
 (2.7)

$$f_{Y}(y)=f_{X}(g^{-1}(y))\cdot\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|\cdot\mathbb{1}\left\{ y\in g(\operatorname{supp}\left(X\right))\right\} \tag{2.8}$$

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Для наших цілей мова про довільну функцію

- ullet Нехай X має функцію розподілу  $F_X$
- ullet Нехай g деяка вимірна $^9$  функція
- Функцію розподілу  $F_Y$  випадкової величини Y=g(X) можна дістати за визначенням:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}_Y\left(Y \leq y\right) = \mathbb{P}_X\left(g(X) \leq y\right) \tag{2.6}$$

ullet Якщо X дискретна,

$$\mathbb{P}_{Y}\left(Y=y\right)=\mathbb{P}_{X}\left(g(X)=y\right)=\sum_{x:g(x)=y}\mathbb{P}_{X}\left(X=x\right) \tag{2.7}$$

ullet Якщо X неперервна, то справедлива формула заміни змінних:

$$f_{Y}(y) = f_{X}(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \cdot \mathbb{1} \left\{ y \in g(\operatorname{supp}\left(X\right)) \right\} \tag{2.8}$$

• Tyr  $f_X$  неперервна на supp (X)

 $q^{-1}(q)$  неперерино диференційоння на  $q(\sup (X))$ 

<sup>9</sup>Для наших цілей мова про довільну функцію

- ullet Нехай X має функцію розподілу  $F_X$
- ullet Нехай g деяка вимірна $^9$  функція
- $\bullet$  Функцію розподілу  $F_Y$  випадкової величини Y=g(X) можна дістати за визначенням:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}_Y \left( Y \le y \right) = \mathbb{P}_X \left( g(X) \le y \right) \tag{2.6}$$

ullet Якщо X дискретна,

$$\mathbb{P}_{Y}\left(Y=y\right)=\mathbb{P}_{X}\left(g(X)=y\right)=\sum_{x:g(x)=y}\mathbb{P}_{X}\left(X=x\right) \tag{2.7}$$

$$f_{Y}(y) = f_{X}(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \cdot \mathbb{1} \left\{ y \in g(\text{supp}(X)) \right\} \tag{2.8}$$

- ullet Тут  $f_X$  неперервна на  $\mathrm{supp}\,(X)$
- ullet g взаємно однозначна на  $\operatorname{supp}\left(X\right)$
- $\bullet g^{-1}(y)$  неперервно диференційовна на  $g(\operatorname{supp}(X))$

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Для наших цілей мова про довільну функцію

- ullet Нехай X має функцію розподілу  $F_X$
- Нехай g деяка вимірна $^9$  функція
- $\bullet$  Функцію розподілу  $F_Y$  випадкової величини Y=g(X) можна дістати за визначенням:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}_Y\left(Y \leq y\right) = \mathbb{P}_X\left(g(X) \leq y\right) \tag{2.6}$$

ullet Якщо X дискретна,

$$\mathbb{P}_{Y}\left(Y=y\right)=\mathbb{P}_{X}\left(g(X)=y\right)=\sum_{x:g(x)=y}\mathbb{P}_{X}\left(X=x\right) \tag{2.7}$$

$$f_{Y}(y) = f_{X}(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \cdot \mathbb{1} \left\{ y \in g(\operatorname{supp}(X)) \right\} \tag{2.8}$$

- $\bullet \:$  Тут  $f_X$  неперервна на  $\mathrm{supp}\,(X)$
- ullet g взаємно однозначна на  $\mathrm{supp}\,(X)$
- ullet  $g^{-1}(y)$  неперервно диференційовна на  $g(\mathrm{supp}\,(X))$

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Для наших цілей мова про довільну функцію

- ullet Нехай X має функцію розподілу  $F_X$
- ullet Нехай g деяка вимірна $^9$  функція
- Функцію розподілу  $F_Y$  випадкової величини Y=g(X) можна дістати за визначенням:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}_Y \left( Y \le y \right) = \mathbb{P}_X \left( g(X) \le y \right) \tag{2.6}$$

ullet Якщо X дискретна,

$$\mathbb{P}_{Y}\left(Y=y\right)=\mathbb{P}_{X}\left(g(X)=y\right)=\sum_{x:g(x)=y}\mathbb{P}_{X}\left(X=x\right) \tag{2.7}$$

$$f_{Y}(y) = f_{X}(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \cdot \mathbb{1} \left\{ y \in g(\operatorname{supp}\left(X\right)) \right\} \tag{2.8}$$

- ullet Тут  $f_X$  неперервна на  $\mathrm{supp}\,(X)$
- ullet g взаємно однозначна на  $\mathrm{supp}\,(X)$
- ullet  $g^{-1}(y)$  неперервно диференційовна на  $g(\mathrm{supp}\,(X))$

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Для наших цілей мова про довільну функцію

- ullet Нехай X має функцію розподілу  $F_X$
- Нехай g деяка вимірна $^9$  функція
- Функцію розподілу  $F_Y$  випадкової величини Y=g(X) можна дістати за визначенням:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}_Y \left( Y \le y \right) = \mathbb{P}_X \left( g(X) \le y \right) \tag{2.6}$$

ullet Якщо X дискретна,

$$\mathbb{P}_{Y}\left(Y=y\right)=\mathbb{P}_{X}\left(g(X)=y\right)=\sum_{x:g(x)=y}\mathbb{P}_{X}\left(X=x\right) \tag{2.7}$$

$$f_{Y}(y) = f_{X}(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \cdot \mathbb{1} \left\{ y \in g(\text{supp}(X)) \right\} \tag{2.8}$$

- ullet Тут  $f_X$  неперервна на  $\mathrm{supp}\,(X)$
- ullet g взаємно однозначна на  $\mathrm{supp}\,(X)$
- $g^{-1}(y)$  неперервно диференційовна на  $g(\operatorname{supp}(X))$

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Для наших цілей мова про довільну функцію

#### Визначення 2.12

- ullet Вимірну функцію  $\mathbf{X}:\Omega o \mathbb{R}^k$  називають **випадковим вектором**
- Можна довести, що  ${\bf X}$  є випадковим вектором тоді й тільки тоді, коли  $X_i$  є випадковими величинами,  $i=1,\dots,k$
- Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{\top}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})\to(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$  утворює розподіл  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(A\right) \equiv \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left((X_1, \dots, X_k)^\top \in A\right) \;, \qquad A \in \mathcal{B}^k \tag{2.9}$$

- Такий розподіл називають спільним розподілом (joint distribution)
- Функція відповідного розподілу має вид

$$\mathbb{F}_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 \leq x_1,\ldots,X_k \leq x_k
ight)$$

Таку функцію розподілу називають спільною функцією розподілу (joint distribution function)



#### Визначення 2.12

- ullet Вимірну функцію  $\mathbf{X}:\Omega o\mathbb{R}^k$  називають **випадковим вектором**
- Можна довести, що  ${\bf X}$  є випадковим вектором тоді й тільки тоді, коли  $X_i$  є випадковими величинами,  $i=1,\dots,k$
- Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^\top:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})\to(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$  утворює розподіл  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(A\right) \equiv \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left((X_1, \dots, X_k)^\top \in A\right) \;, \qquad A \in \mathcal{B}^k \tag{2.9}$$

- Такий розподіл називають спільним розподілом (joint distribution)
- Функція відповідного розподілу має вид

$$\mathcal{F}_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 \leq x_1,\ldots,X_k \leq x_k\right) \tag{2.11}$$

Таку функцію розподілу називають спільною функцією розподілу (joint distribution function)



#### Визначення 2.12

- ullet Вимірну функцію  $\mathbf{X}:\Omega o\mathbb{R}^k$  називають **випадковим вектором**
- Можна довести, що  ${\bf X}$  є випадковим вектором тоді й тільки тоді, коли  $X_i$  є випадковими величинами,  $i=1,\dots,k$
- Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^\top:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})\to(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$  утворює розподіл  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(A\right) \equiv \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left((X_1, \dots, X_k)^\top \in A\right) \;, \qquad A \in \mathcal{B}^k \tag{2.9}$$

- Такий розподіл називають спільним розподілом (joint distribution)
- Функція відповідного розподілу має вид

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 \le x_1, \dots, X_k \le x_k\right) \tag{2.10}$$

 Таку функцію розподілу називають спільною функцією розподілу (joint distribution function)



#### Визначення 2.12

- ullet Вимірну функцію  $\mathbf{X}:\Omega o\mathbb{R}^k$  називають **випадковим вектором**
- Можна довести, що  ${\bf X}$  є випадковим вектором тоді й тільки тоді, коли  $X_i$  є випадковими величинами,  $i=1,\dots,k$
- Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^\top:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})\to(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$  утворює розподіл  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(A\right) \equiv \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left((X_1, \dots, X_k)^\top \in A\right) \;, \qquad A \in \mathcal{B}^k \tag{2.9}$$

- Такий розподіл називають спільним розподілом (joint distribution)
- Функція відповідного розподілу має вид

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 \le x_1, \dots, X_k \le x_k\right) \tag{2.10}$$

• Таку функцію розподілу називають **спільною функцією розподілу** (joint distribution function)



#### Визначення 2.12

- ullet Вимірну функцію  $\mathbf{X}:\Omega o\mathbb{R}^k$  називають **випадковим вектором**
- Можна довести, що  ${\bf X}$  є випадковим вектором тоді й тільки тоді, коли  $X_i$  є випадковими величинами,  $i=1,\dots,k$
- Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^\top:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})\to(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$  утворює розподіл  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(A\right) \equiv \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left((X_1, \dots, X_k)^\top \in A\right) \;, \qquad A \in \mathcal{B}^k \tag{2.9}$$

- Такий розподіл називають спільним розподілом (joint distribution)
- Функція відповідного розподілу має вид

$$F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 \leq x_1,\ldots,X_k \leq x_k\right) \tag{2.10}$$

• Таку функцію розподілу називають **спільною функцією розподілу** (joint distribution function)



#### Визначення 2.12

- ullet Вимірну функцію  $\mathbf{X}:\Omega o\mathbb{R}^k$  називають **випадковим вектором**
- Можна довести, що  ${\bf X}$  є випадковим вектором тоді й тільки тоді, коли  $X_i$  є випадковими величинами,  $i=1,\dots,k$
- Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^\top:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})\to(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$  утворює розподіл  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(A\right) \equiv \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left((X_1, \dots, X_k)^\top \in A\right) \;, \qquad A \in \mathcal{B}^k \tag{2.9}$$

- Такий розподіл називають спільним розподілом (joint distribution)
- Функція відповідного розподілу має вид

$$F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 \leq x_1,\ldots,X_k \leq x_k\right) \tag{2.10}$$

• Таку функцію розподілу називають **спільною функцією розподілу** (joint distribution function)



- Добутком двох вимірних просторів,  $(X,\mathcal{X})$  і  $(Y,\mathcal{Y})$  (product space) називають декартів добуток  $X\times Y$
- ullet На X imes Y можна визначити **добуток мір** (product measure)  $\pi(A imes B) = \mu(A) \nu(B)$ ,  $A \in \mathcal{X}$ ,  $B \in \mathcal{Y}$



<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Гвідо Фубіні (Guido Fubini, 1879–1943) – італійський математик

### Визначення 2.13

- Добутком двох вимірних просторів,  $(X,\mathcal{X})$  і  $(Y,\mathcal{Y})$  (product space) називають декартів добуток  $X \times Y$
- На  $X \times Y$  можна визначити **добуток мір** (product measure)  $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ ,  $A \in \mathcal{X}$ ,  $B \in \mathcal{Y}$



<sup>10</sup>Гвідо Фубіні (Guido Fubini, 1879–1943) – італійський математик

### Визначення 2.13

- Добутком двох вимірних просторів,  $(X,\mathcal{X})$  і  $(Y,\mathcal{Y})$  (product space) називають декартів добуток  $X \times Y$
- ullet На X imes Y можна визначити **добуток мір** (product measure)  $\pi(A imes B) = \mu(A) \nu(B), A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y}$

# Теорема 2.14 (Теорема Фубіні (Fubini Theorem) $^{10}$ )

- ullet Нехай маємо X imes Y і ( $\sigma$ -скінченний) добуток мір  $\mu imes 
  u \equiv \pi$
- ullet Якщо  $f:X imes Y o \mathbb{R}$  невід'ємна або інтегровна (майже напевно), то

$$\int_{X\times Y} f(x,y) \, d\pi = \int_X \left( \int_Y f(x,y) \, d\nu \right) \, d\mu = \int_Y \left( \int_X f(x,y) \, d\mu \right) \, d\nu \quad \text{(2.11)}$$

 $<sup>^{10}</sup>$ Гвідо Фубіні (Guido Fubini, 1879–1943) – італійський математик

### Визначення 2.13

- Добутком двох вимірних просторів,  $(X,\mathcal{X})$  і  $(Y,\mathcal{Y})$  (product space) називають декартів добуток  $X\times Y$
- ullet На X imes Y можна визначити **добуток мір** (product measure)  $\pi(A imes B) = \mu(A) \nu(B), A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y}$

# Теорема 2.14 (Теорема Фубіні (Fubini Theorem) $^{10}$ )

- ullet Нехай маємо X imes Y і ( $\sigma$ -скінченний) добуток мір  $\mu imes 
  u \equiv \pi$
- ullet Якщо  $f:X imes Y o \mathbb{R}$  невід'ємна або інтегровна (майже напевно), то

$$\int_{X\times Y} f(x,y) \, d\pi = \int_X \left( \int_Y f(x,y) \, d\nu \right) \, d\mu = \int_Y \left( \int_X f(x,y) \, d\mu \right) \, d\nu \quad (2.11)$$

 $<sup>^{10}</sup>$ Гвідо Фубіні (Guido Fubini, 1879–1943) – італійський математик

### Визначення 2.13

- Добутком двох вимірних просторів,  $(X,\mathcal{X})$  і  $(Y,\mathcal{Y})$  (product space) називають декартів добуток  $X\times Y$
- ullet На X imes Y можна визначити **добуток мір** (product measure)  $\pi(A imes B) = \mu(A) \nu(B)$ ,  $A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y}$

# Теорема 2.14 (Теорема Фубіні (Fubini Theorem) $^{10}$ )

- ullet Нехай маємо X imes Y і ( $\sigma$ -скінченний) добуток мір  $\mu imes 
  u \equiv \pi$
- ullet Якщо  $f:X imes Y o \mathbb{R}$  невід'ємна або інтегровна (майже напевно), то

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\pi = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu\right)\,d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu\right)\,d\nu \qquad \text{(2.11)}$$

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Гвідо Фубіні (Guido Fubini, 1879–1943) – італійський математик

### Визначення 2.13

- Добутком двох вимірних просторів,  $(X,\mathcal{X})$  і  $(Y,\mathcal{Y})$  (product space) називають декартів добуток  $X \times Y$
- На  $X \times Y$  можна визначити **добуток мір** (product measure)  $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B), A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y}$

# Teopeмa 2.14 (Теорема Фубіні (Fubini <u>Theorem) 10)</u>

- Нехай маємо  $X \times Y$  і ( $\sigma$ -скінченний) добуток мір  $\mu \times \nu \equiv \pi$
- Якщо  $f: X \times Y \to \mathbb{R}$  невід'ємна або інтегровна (майже напевно), то

$$\int_{X\times Y} f(x,y) \, d\pi = \int_X \left( \int_Y f(x,y) \, d\nu \right) \, d\mu = \int_Y \left( \int_X f(x,y) \, d\mu \right) \, d\nu \quad (2.11)$$

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Гвідо Фубіні (Guido Fubini, 1879–1943) – італійський математик

### Визначення 2.15

- ullet Нехай маємо **дискретний** випадковий вектор  $\mathbf{X}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o (\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$
- ullet Иого розподіл абсолютно неперервний відносно лічної міри  $\# imes ... imes \# = \#_k$
- Тоді **спільною функцією ймовірности** (joint probability mass function)

$$p_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 = x_1,\ldots,X_k = x_k\right) \cdot \mathbb{1}\left\{(x_1,\ldots,x_k)^\top \in \operatorname{supp}\left(\mathbf{X}\right)\right\} \tag{2.12}$$

ullet До того ж  $\sum_{(x_1,\dots,x_k)^{ op}\in \mathrm{supp}(\mathbf{X})} p_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k) = 1$ 

#### Визначення 2.15

- ullet Нехай маємо **дискретний** випадковий вектор  $\mathbf{X}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o (\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$
- ullet Його розподіл абсолютно неперервний відносно лічної міри  $\# imes ... imes \# = \#_k$
- Тоді **спільною функцією ймовірности** (joint probability mass function) є

$$p_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 = x_1,\ldots,X_k = x_k\right) \cdot \mathbb{1}\left\{(x_1,\ldots,x_k)^\top \in \operatorname{supp}\left(\mathbf{X}\right)\right\} \tag{2.12}$$

$$\bullet$$
 До того ж  $\sum_{(x_1,\dots,x_k)^{\top}\in \mathrm{supp}(\mathbf{X})}p_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k)=1$ 

Ш

#### Визначення 2.15

- ullet Нехай маємо **дискретний** випадковий вектор  $\mathbf{X}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o (\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$
- $\bullet$  Його розподіл абсолютно неперервний відносно лічної міри  $\# \times ... \times \# \equiv \#_k$
- ullet Тоді **спільною функцією ймовірности** (joint probability mass function) ullet

$$p_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 = x_1,\ldots,X_k = x_k\right) \cdot \mathbb{1}\left\{(x_1,\ldots,x_k)^\top \in \operatorname{supp}\left(\mathbf{X}\right)\right\} \tag{2.12}$$

$$\bullet$$
 До того ж  $\sum_{(x_1,\dots,x_k)^{\top}\in \mathrm{supp}(\mathbf{X})}p_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k)=1$ 

Ш

### Визначення 2.15

- ullet Нехай маємо **дискретний** випадковий вектор  $\mathbf{X}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o (\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$
- Його розподіл абсолютно неперервний відносно лічної міри  $\# \times ... \times \# \equiv \#_k$
- ullet Тоді **спільною функцією ймовірности** (joint probability mass function) ullet

$$p_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 = x_1,\ldots,X_k = x_k\right) \cdot \mathbb{1}\left\{(x_1,\ldots,x_k)^\top \in \operatorname{supp}\left(\mathbf{X}\right)\right\} \tag{2.12}$$

$$\bullet$$
 До того ж  $\sum_{(x_1,\dots,x_k)^\top\in \mathrm{supp}(\mathbf{X})} p_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k) = 1$ 



#### Визначення 2.15

- ullet Нехай маємо **дискретний** випадковий вектор  $\mathbf{X}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o (\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$
- Його розподіл абсолютно неперервний відносно лічної міри  $\# \times ... \times \# \equiv \#_k$
- Тоді **спільною функцією ймовірности** (joint probability mass function) є

$$p_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 = x_1,\ldots,X_k = x_k\right) \cdot \mathbb{1}\left\{(x_1,\ldots,x_k)^\top \in \operatorname{supp}\left(\mathbf{X}\right)\right\} \tag{2.12}$$

$$\bullet$$
 До того ж  $\sum_{(x_1,\dots,x_k)^{\top} \in \operatorname{supp}(\mathbf{X})} p_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k) = 1$ 

- ullet Нехай розподіл деякого випадкового вектора  $\mathbf{X}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(A) = \int_{A} f_{\mathbf{X}} d\lambda_{k} = \int_{A} f_{\mathbf{X}}(x_{1}, \dots, x_{k}) dx_{1} \dots dx_{k}, \quad \forall A \in \mathcal{B}^{k} \quad (2.13)$$

#### Визначення 2.15

- ullet Нехай маємо **дискретний** випадковий вектор  $\mathbf{X}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o (\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$
- ullet Його розподіл абсолютно неперервний відносно лічної міри  $\# imes ... imes \# \equiv \#_k$
- Тоді **спільною функцією ймовірности** (joint probability mass function) є

$$p_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 = x_1,\ldots,X_k = x_k\right) \cdot \mathbb{1}\left\{(x_1,\ldots,x_k)^\top \in \operatorname{supp}\left(\mathbf{X}\right)\right\} \tag{2.12}$$

 $\bullet$  До того ж  $\sum_{(x_1,\dots,x_k)^\top\in\operatorname{supp}(\mathbf{X})}p_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k)=1$ 

- ullet Нехай розподіл деякого випадкового вектора  $\mathbf{X}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$ абсолютно неперервний відносно міри Лебега  $\lambda \times ... \times \lambda \equiv \lambda_k$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(A\right) = \int_{A} f_{\mathbf{X}} \, d\lambda_{k} = \int_{A} f_{\mathbf{X}}(x_{1}, \dots, x_{k}) \, dx_{1} \dots dx_{k} \,, \qquad \forall A \in \mathcal{B}^{k} \qquad (2.13)$$

#### Визначення 2.15

- ullet Нехай маємо **дискретний** випадковий вектор  $\mathbf{X}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o (\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$
- Його розподіл абсолютно неперервний відносно лічної міри  $\# \times ... \times \# \equiv \#_k$
- ullet Тоді **спільною функцією ймовірности** (joint probability mass function)  $\epsilon$

$$p_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 = x_1,\ldots,X_k = x_k\right) \cdot \mathbb{1}\left\{(x_1,\ldots,x_k)^\top \in \operatorname{supp}\left(\mathbf{X}\right)\right\} \tag{2.12}$$

 $\bullet$  До того ж  $\sum_{(x_1,\dots,x_k)^{\top} \in \operatorname{supp}(\mathbf{X})} p_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k) = 1$ 

- Нехай розподіл деякого випадкового вектора  $\mathbf{X}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})\to(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}^k)$  абсолютно неперервний відносно міри Лебега  $\lambda\times\ldots\times\lambda\equiv\lambda_k$
- Тоді **спільною щільністю розподілу** (joint probability density function)  $\epsilon$  функція  $f_{\mathbf{X}}$  така, що

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(A\right) = \int_{A} f_{\mathbf{X}} \, d\lambda_{k} = \int_{A} f_{\mathbf{X}}(x_{1}, \dots, x_{k}) \, dx_{1} \dots dx_{k} \; , \qquad \forall A \in \mathcal{B}^{k} \qquad \text{(2.13)}$$

• За аналогією з одновимірним випадком маємо властивість

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_k) \, dt_1 \dots dt_k \tag{2.14}$$

• Відповідно, маємо

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \dots \partial x_k} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) \tag{2.15}$$

• Також можна довести, що

• За аналогією з одновимірним випадком маємо властивість

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_k) \, dt_1 \dots dt_k \tag{2.14}$$

• Відповідно, маємо

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1\ldots\partial x_k} F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) \tag{2.15}$$

• Також можна довести, що

• За аналогією з одновимірним випадком маємо властивість

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_k) \, dt_1 \dots dt_k \tag{2.14}$$

• Відповідно, маємо

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \dots \partial x_k} F_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k) \tag{2.15}$$

• Також можна довести, що:

$$f_{\mathbf{X}} \ge 0$$
 
$$\int_{\mathbb{R}^k} f_{\mathbf{X}} d\lambda_k = 1$$

• За аналогією з одновимірним випадком маємо властивість

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_k) \, dt_1 \dots dt_k \tag{2.14}$$

• Відповідно, маємо

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1\ldots\partial x_k} F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) \tag{2.15}$$

- Також можна довести, що:
  - $f_{\mathbf{X}} \geq 0$

• За аналогією з одновимірним випадком маємо властивість

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_k) \, dt_1 \dots dt_k \tag{2.14}$$

• Відповідно, маємо

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1\ldots\partial x_k} F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) \tag{2.15}$$

- Також можна довести, що:
  - $f_{\mathbf{X}} \geq 0$
  - $\bullet \ \int_{\mathbb{R}^k} f_{\mathbf{X}} d\lambda_k = 1$

## Маржинальні розподіли

- Розподіл  $\mathbb{P}_j$  випадкової величини  $X_j$  j-ої координати деякого випадкового вектора  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)$  називають **маржинальним розподілом** (marginal distribution)
- Маржинальним розподілам відповідають маржинальні функції розподілу (marginal distribution function):

$$\begin{split} F_{X_j}(x) &= \mathbb{P}_{X_j}\left(X_j \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_{j-1} \in \mathbb{R}, X_j \leq x, X_{j+1} \in \mathbb{R}, \dots, X_k \in \mathbb{R}\right) \end{split} \tag{2.16}$$



## Маржинальні розподіли

- Розподіл  $\mathbb{P}_j$  випадкової величини  $X_j-j$ -ої координати деякого випадкового вектора  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)$  називають **маржинальним розподілом** (marginal distribution)
- Маржинальним розподілам відповідають маржинальні функції розподілу (marginal distribution function):

$$\begin{split} F_{X_j}(x) &= \mathbb{P}_{X_j} \left( X_j \leq x \right) \\ &= \mathbb{P}_{\mathbf{X}} \left( X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_{j-1} \in \mathbb{R}, \frac{\pmb{X_j}}{} \leq \pmb{x}, X_{j+1} \in \mathbb{R}, \dots, X_k \in \mathbb{R} \right) \end{split} \tag{2.16}$$



## Маржинальні щільності розподілів

### Твердження 2.18

- ullet Нехай  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$  має щільність  $f_{\mathbf{X}}$
- ullet Тоді розподіл  $\mathbb{P}_{X_j}$  має **маржинальну щільність розподілу** (marginal probability density function)

$$f_j(x) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_k) \, dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_k \quad \text{(2.17)}$$

## Маржинальні щільності розподілів

### Твердження 2.18

- ullet Нехай  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$  має щільність  $f_{\mathbf{X}}$
- ullet Тоді розподіл  $\mathbb{P}_{X_j}$  має **маржинальну щільність розподілу** (marginal probability density function)

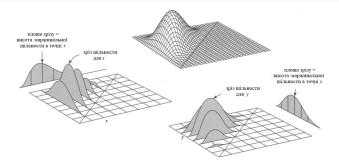
$$f_j(x) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_k) \, dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_k \quad \text{(2.17)}$$

## Маржинальні щільності розподілів

### Твердження 2.18

- ullet Нехай  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$  має щільність  $f_{\mathbf{X}}$
- $\bullet$  Тоді розподіл  $\mathbb{P}_{X_j}$  має **маржинальну щільність розподілу** (marginal probability density function)

$$f_j(x) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_k) \, dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_k \quad \text{(2.17)}$$



- На практиці зустрічаються ситуації, коли випадковий вектор X складається з величин, деякі з яких є неперервними, а деякі — дискретними
- Наприклад, нас може цікавити аналіз ціни X квартири, яка має площу Y та має Z кімнат
- ullet Спільний розподіл  $(X,Y,Z)^{ op}$  абсолютно неперервний відносно добутку двох мір Лебега і лічної міри:  $\lambda imes \lambda imes \#$
- Тому й обчислення спільних імовірностей буде приблизно таке:

$$\mathbb{P}_{X,Y,Z}\left((X,Y,Z)^{\top} \in A\right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \ dxdy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}$$

- На практиці зустрічаються ситуації, коли випадковий вектор X складається з величин, деякі з яких є неперервними, а деякі — дискретними
- Наприклад, нас може цікавити аналіз ціни X квартири, яка має площу Y та має Z кімнат
- Спільний розподіл  $(X,Y,Z)^{\top}$  абсолютно неперервний відносно добутку двох мір Лебега і лічної міри:  $\lambda \times \lambda \times \#$
- Тому й обчислення спільних імовірностей буде приблизно таке

$$\mathbb{P}_{X,Y,Z}\left((X,Y,Z)^{\top} \in A\right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}}$$

- На практиці зустрічаються ситуації, коли випадковий вектор **X** складається з величин, деякі з яких є неперервними, а деякі дискретними
- Спільний розподіл  $(X,Y,Z)^{ op}$  абсолютно неперервний відносно добутку двох мір Лебега і лічної міри:  $\lambda \times \lambda \times \#$
- Тому й обчислення спільних імовірностей буде приблизно таке:

$$\mathbb{P}_{X,Y,Z}\left((X,Y,Z)^{\top} \in A\right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}}$$

- На практиці зустрічаються ситуації, коли випадковий вектор **X** складається з величин, деякі з яких є неперервними, а деякі дискретними
- Спільний розподіл  $(X,Y,Z)^{ op}$  абсолютно неперервний відносно добутку двох мір Лебега і лічної міри:  $\lambda \times \lambda \times \#$
- Тому й обчислення спільних імовірностей буде приблизно таке:

$$\mathbb{P}_{X,Y,Z}\left((X,Y,Z)^{\top} \in A\right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{z \in \operatorname{supp}(Z)} f_{X,Y,Z}(x,y,z) \cdot \mathbb{1}\left\{(x,y,z)^{\top} \in A\right\} \, dx dy$$

- ullet Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega,\mathcal{A})$
- ullet Нехай  $A,B\in\mathcal{A}$  деякі події,  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$
- ullet Тоді **умовна ймовірність** A за умови B (conditional probability of A given B):

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{2.18}$$

- ullet  $\mathbb{P}\left(A
  ight)$  апріорна ймовірність (prior)
- ullet  $\mathbb{P}\left(A\mid B
  ight)$  апостеріорна ймовірність (posterior)
  - Не існує такої події, як  $A \mid B$ ! Це просто позначення
- Можна довести, що умовна ймовірність це повноцінна ймовірнісна міра

- ullet Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega,\mathcal{A})$
- ullet Нехай  $A,B\in \mathcal{A}$  деякі події,  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$
- ullet Тоді **умовна ймовірність** A за умови B (conditional probability of A given B):

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{2.18}$$

- ullet  $\mathbb{P}\left(A\right)$  апріорна ймовірність (prior)
- ullet  $\mathbb{P}\left(A\mid B\right)$  апостеріорна ймовірність (posterior)

- ullet Не існує такої події, як  $A \mid B$ ! Це просто позначення
- Можна довести, що умовна ймовірність це повноцінна ймовірнісна міра

#### Визначення 2.19

- Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega, \mathcal{A})$
- ullet Нехай  $A,B\in \mathcal{A}$  деякі події,  $\mathbb{P}\left( B
  ight) >0$
- ullet Тоді **умовна ймовірність** A за умови B (conditional probability of A given B):

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$
 (2.18)

- ullet  $\mathbb{P}\left(A\right)$  апріорна ймовірність (prior)
- ullet  $\mathbb{P}\left(A\mid B\right)$  апостеріорна ймовірність (posterior)



• Можна довести, що умовна ймовірність — це повноцінна ймовірнісна міра



- Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega, \mathcal{A})$
- ullet Нехай  $A,B\in \mathcal{A}$  деякі події,  $\mathbb{P}\left( B
  ight) >0$
- ullet Тоді **умовна ймовірність** A за умови B (conditional probability of A given B):

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{2.18}$$

- ullet  $\mathbb{P}\left(A
  ight)$  апріорна ймовірність (prior)
- $\bullet$   $\mathbb{P}(A \mid B)$  апостеріорна ймовірність (posterior)







#### Визначення 2.19

- ullet Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega,\mathcal{A})$
- ullet Нехай  $A,B\in \mathcal{A}$  деякі події,  $\mathbb{P}\left( B
  ight) >0$
- ullet Тоді **умовна ймовірність** A за умови B (conditional probability of A given B):

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$
 (2.18)

- ullet  $\mathbb{P}\left(A
  ight)$  апріорна ймовірність (prior)
- $\bullet$   $\mathbb{P}(A \mid B)$  апостеріорна ймовірність (posterior)



• Можна довести, що умовна ймовірність — це повноцінна ймовірнісна міра

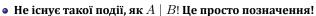


### Визначення 2.19

- Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega, \mathcal{A})$
- ullet Нехай  $A,B\in \mathcal{A}$  деякі події,  $\mathbb{P}\left( B
  ight) >0$
- ullet Тоді **умовна ймовірність** A за умови B (conditional probability of A given B):

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{2.18}$$

- ullet  $\mathbb{P}\left(A
  ight)$  апріорна ймовірність (prior)
- $\bullet$   $\mathbb{P}(A \mid B)$  апостеріорна ймовірність (posterior)



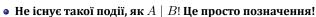
• Можна довести, що умовна ймовірність — це повноцінна ймовірнісна міра

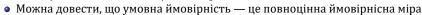


- Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega, \mathcal{A})$
- ullet Нехай  $A,B\in \mathcal{A}$  деякі події,  $\mathbb{P}\left( B
  ight) >0$
- ullet Тоді **умовна ймовірність** A за умови B (conditional probability of A given B):

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$
 (2.18)

- ullet  $\mathbb{P}\left(A
  ight)$  апріорна ймовірність (prior)
- ullet  $\mathbb{P}\left(A\mid B\right)$  апостеріорна ймовірність (posterior)

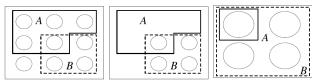






## Обумовлення як перенормалізація

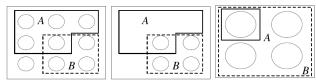
 $\bullet\,$  Обумовлення події A подією B означає, що ми **перенормалізовуємо** ймовірнісну міру



• Tyt  $\mathbb{P}(A) = 5/9$ , проте  $\mathbb{P}(A \mid B) = 1/4$ 

## Обумовлення як перенормалізація

 $\bullet\,$  Обумовлення події A подією B означає, що ми **перенормалізовуємо** ймовірнісну міру



• Tyt  $\mathbb{P}\left(A\right)=5/9$  , spote  $\mathbb{P}\left(A\mid B\right)=1/4$ 

## Обчислення умовних імовірностей

#### Теорема 2.20

- ullet Нехай  $\mathbb{P}\left(A_1\cap\ldots\cap A_n\right)>0$
- Тоді

$$\begin{split} \mathbb{P}\left(A_{1}\cap\ldots\cap A_{n}\right) &= \mathbb{P}\left(A_{1}\right)\mathbb{P}\left(A_{2}\mid A_{1}\right)\mathbb{P}\left(A_{3}\mid A_{1}, A_{2}\right)\ldots\mathbb{P}\left(A_{n}\mid A_{1},\ldots,A_{n-1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(A_{2}\right)\mathbb{P}\left(A_{1}\mid A_{2}\right)\mathbb{P}\left(A_{1}\mid A_{2}, A_{3}\right)\ldots\mathbb{P}\left(A_{n}\mid A_{1},\ldots,A_{n-1}\right) \\ &= \ldots \end{split}$$

І т.д. для всіх можливих комбінацій подій

## Обчислення умовних імовірностей

#### Теорема 2.20

- ullet Нехай  $\mathbb{P}\left(A_1\cap\ldots\cap A_n\right)>0$
- Тоді

$$\begin{split} \mathbb{P}\left(A_{1}\cap\ldots\cap A_{n}\right) &= \mathbb{P}\left(A_{1}\right)\mathbb{P}\left(A_{2}\mid A_{1}\right)\mathbb{P}\left(A_{3}\mid A_{1},A_{2}\right)\ldots\mathbb{P}\left(A_{n}\mid A_{1},\ldots,A_{n-1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(A_{2}\right)\mathbb{P}\left(A_{1}\mid A_{2}\right)\mathbb{P}\left(A_{1}\mid A_{2},A_{3}\right)\ldots\mathbb{P}\left(A_{n}\mid A_{1},\ldots,A_{n-1}\right) \\ &= \ldots \end{split}$$

І т.д. для всіх можливих комбінацій подій

## Обчислення умовних імовірностей

#### Теорема 2.20

- ullet Нехай  $\mathbb{P}\left(A_1\cap\ldots\cap A_n\right)>0$
- Тоді

$$\begin{split} \mathbb{P}\left(A_{1}\cap\ldots\cap A_{n}\right) &= \mathbb{P}\left(A_{1}\right)\mathbb{P}\left(A_{2}\mid A_{1}\right)\mathbb{P}\left(A_{3}\mid A_{1},A_{2}\right)\ldots\mathbb{P}\left(A_{n}\mid A_{1},\ldots,A_{n-1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(A_{2}\right)\mathbb{P}\left(A_{1}\mid A_{2}\right)\mathbb{P}\left(A_{1}\mid A_{2},A_{3}\right)\ldots\mathbb{P}\left(A_{n}\mid A_{1},\ldots,A_{n-1}\right) \\ &= \ldots \end{split}$$

• І т.д. для всіх можливих комбінацій подій

# Теорема 2.21 (Теорема Беєса (Bayes' Theorem)<sup>11</sup>)

- $\bullet$  Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega,\mathcal{A})$
- ullet Для подій  $A,B\in\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , справедливо:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Teopeма 2.22 (Закон повної ймовірности (Law of total probability))

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Томас Беєс (Thomas Bayes, 1701–1761) — англійський статистик, філософ і священник

# Теорема 2.21 (Теорема Беєса (Bayes' Theorem)<sup>11</sup>)

- ullet Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega,\mathcal{A})$
- ullet Для подій  $A,B\in\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , справедливо:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$
 (2.20)

Teopeмa 2.22 (Закон повної ймовірности (Law of total probability))

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Томас Беєс (Thomas Bayes, 1701–1761) — англійський статистик, філософ і священник

# Теорема 2.21 (Теорема Беєса (Bayes' Theorem)<sup>11</sup>)

- ullet Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega,\mathcal{A})$
- ullet Для подій  $A,B\in\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , справедливо:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$
 (2.20)

## Теорема 2.22 (Закон повної ймовірности (Law of total probability))

- Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega, \mathcal{A})$
- ullet Розгляньмо розбиття:  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$
- ullet Тут  $\mathbb{P}\left(A_i\right)>0$  для всіх i
- Тоді

<sup>11</sup> Томас Беєс (Thomas Bayes, 1701–1761) — англійський статистик, філософ і священник

# Теорема 2.21 (Теорема Беєса (Bayes' Theorem)<sup>11</sup>)

- ullet Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega,\mathcal{A})$
- ullet Для подій  $A,B\in\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , справедливо:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$
 (2.20)

## Теорема 2.22 (Закон повної ймовірности (Law of total probability))

- ullet Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega,\mathcal{A})$
- Розгляньмо розбиття:  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
- ullet Тут  $\mathbb{P}\left(A_i\right)>0$  для всіх i
- Толі

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Томас Беєс (Thomas Bayes, 1701–1761) — англійський статистик, філософ і священник

# Teopeмa 2.21 (Тeopeмa Беєса (Bayes' Theorem) $^{11}$ )

- Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega, \mathcal{A})$
- Для подій  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}(B) > 0$ , справедливо:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$
 (2.20)

## Teopeмa 2.22 (Закон повної ймовірности (Law of total probability))

- Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega, \mathcal{A})$
- ullet Розгляньмо розбиття:  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i, A_i \cap A_i = \emptyset$ ,  $i \neq j$
- $\bullet$  Тут  $\mathbb{P}(A_i) > 0$  для всіх i

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)$$
 (2.21)

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Томас Беєс (Thomas Bayes, 1701–1761) — англійський статистик, філософ і священник

# Teopeмa 2.21 (Тeopeмa Беєса (Bayes' Theorem) $^{11}$ )

- Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega, \mathcal{A})$
- Для подій  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}(B) > 0$ , справедливо:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$
 (2.20)

## Teopeмa 2.22 (Закон повної ймовірности (Law of total probability))

- Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega, \mathcal{A})$
- ullet Розгляньмо розбиття:  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i, A_i \cap A_i = \emptyset$ ,  $i \neq j$
- Тут  $\mathbb{P}(A_i) > 0$  для всіх i

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i) \, \mathbb{P}(A_i) \tag{2.21}$$

37 / 90

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Томас Беєс (Thomas Bayes, 1701–1761) — англійський статистик, філософ і священник

# Теорема 2.21 (Теорема Беєса (Bayes' Theorem) $^{11}$ )

- Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega, \mathcal{A})$
- ullet Для подій  $A,B\in\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}\left(B\right)>0$ , справедливо:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$
 (2.20)

## Теорема 2.22 (Закон повної ймовірности (Law of total probability))

- ullet Нехай маємо вимірний простір  $(\Omega,\mathcal{A})$
- $\bullet$  Розгляньмо розбиття:  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$  ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ,  $i \neq j$
- Тут  $\mathbb{P}(A_i) > 0$  для всіх i
- Тоді

$$\mathbb{P}\left(B\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B \mid A_{i}\right) \mathbb{P}\left(A_{i}\right) \tag{2.21}$$

 $<sup>^{11}</sup>$ Томас Беєс (Thomas Bayes, 1701–1761) — англійський статистик, філософ і священник

- Аналогічні результати можна показати, якщо обумовити додатковою подією
- Нехай  $A,B,C\in\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}\left(B\cap C\right)>0$
- Тод

$$\mathbb{P}\left(A\mid B,C\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B\mid A,C\right)\mathbb{P}\left(A\mid C\right)}{\mathbb{P}\left(B\mid C\right)} \tag{2.22}$$

- Нехай  $A_1, \dots, A_n$  утворюють розбиття  $\Omega$ , і  $\mathbb{P}(A_i \cap B) > 0$  для всіх
- Толі

$$\mathbb{P}\left(B\mid C\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B\mid A_{i}, C\right) \mathbb{P}\left(A_{i}\mid C\right) \tag{2.23}$$

- Аналогічні результати можна показати, якщо обумовити додатковою подією
- ullet Нехай  $A,B,C\in\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}\left(B\cap C
  ight)>0$

• Тоді

$$\mathbb{P}\left(A\mid B,C\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B\mid A,C\right)\mathbb{P}\left(A\mid C\right)}{\mathbb{P}\left(B\mid C\right)} \tag{2.22}$$

- ullet Нехай  $A_1,\ldots,A_n$  утворюють розбиття  $\Omega$ , і  $\mathbb{P}\left(A_i\cap B\right)>0$  для всіх
- Тол

$$\mathbb{P}\left(B\mid C\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B\mid A_{i}, C\right) \mathbb{P}\left(A_{i}\mid C\right) \tag{2.23}$$

- Аналогічні результати можна показати, якщо обумовити додатковою подією
- ullet Нехай  $A,B,C\in\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}\left(B\cap C
  ight)>0$
- Тоді

$$\mathbb{P}(A \mid B, C) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A, C) \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$$
(2.22)

- ullet Нехай  $A_1,\ldots,A_n$  утворюють розбиття  $\Omega$ , і  $\mathbb{P}\left(A_i\cap B\right)>0$  для всіх i
- Тол

$$\mathbb{P}\left(B\mid C\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B\mid A_{i}, C\right) \mathbb{P}\left(A_{i}\mid C\right) \tag{2.23}$$

- Аналогічні результати можна показати, якщо обумовити додатковою подією
- ullet Нехай  $A,B,C\in\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}\left(B\cap C
  ight)>0$
- Тоді

$$\mathbb{P}(A \mid B, C) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A, C) \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$$
(2.22)

- Нехай  $A_1,\dots,A_n$  утворюють розбиття  $\Omega$ , і  $\mathbb{P}\left(A_i\cap B\right)>0$  для всіх i
- Тоді

$$\mathbb{P}(B \mid C) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i, C) \mathbb{P}(A_i \mid C)$$
 (2.23)

- Аналогічні результати можна показати, якщо обумовити додатковою подією
- ullet Нехай  $A,B,C\in\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}\left(B\cap C
  ight)>0$
- Тоді

$$\mathbb{P}(A \mid B, C) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A, C) \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$$
(2.22)

- ullet Нехай  $A_1,\ldots,A_n$  утворюють розбиття  $\Omega$ , і  $\mathbb{P}\left(A_i\cap B\right)>0$  для всіх i
- Тоді

$$\mathbb{P}(B \mid C) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i, C) \mathbb{P}(A_i \mid C)$$
 (2.23)

- На практиці ми скрізь стикаємося з ситуаціями, коли треба порахувати ймовірності подій (у тому числі з випадковими величинами) за умови іншої випадкової величини
- ullet Наприклад, X відповідає ціні квартири (у грн), а Y її площі (у кв. м)
- ullet Нас може цікавити ймовірність  $\mathbb{P}_{X|Y} \, (X > 100\,000 \mid Y = 70)$
- Проте ми знаємо, що для неперервної величини  $\mathbb{P}_{V}\left(Y=70\right)=0$
- Щоб обійти це обмеження, ми формально розглядаємо обумовлення σ-алгеброю, яку породжує Y

- На практиці ми скрізь стикаємося з ситуаціями, коли треба порахувати ймовірності подій (у тому числі з випадковими величинами) за умови іншої випадкової величини
- ullet Наприклад, X відповідає ціні квартири (у грн), а Y її площі (у кв. м)
- Нас може цікавити ймовірність  $\mathbb{P}_{Y|Y}$  ( $X > 100\,000 \mid Y = 70$
- Проте ми знаємо, що для неперервної величини  $\mathbb{P}_{_{m{V}}}(Y=70)=0$
- Щоб обійти це обмеження, ми формально розглядаємо обумовлення  $\sigma_{-2}$  деброю дку породжує V

- На практиці ми скрізь стикаємося з ситуаціями, коли треба порахувати ймовірності подій (у тому числі з випадковими величинами) за умови іншої випадкової величини
- Наприклад, X відповідає ціні квартири (у грн), а Y її площі (у кв. м)
- Нас може цікавити ймовірність  $\mathbb{P}_{X|Y}\left(X>100\,000\mid Y=70\right)$

- На практиці ми скрізь стикаємося з ситуаціями, коли треба порахувати ймовірності подій (у тому числі з випадковими величинами) за умови іншої випадкової величини
- ullet Наприклад, X відповідає ціні квартири (у грн), а Y її площі (у кв. м)
- Нас може цікавити ймовірність  $\mathbb{P}_{X|Y}\left(X>100\,000\mid Y=70\right)$
- Проте ми знаємо, що для неперервної величини  $\mathbb{P}_{V}(Y=70)=0$

- На практиці ми скрізь стикаємося з ситуаціями, коли треба порахувати ймовірності подій (у тому числі з випадковими величинами) за умови іншої випадкової величини
- ullet Наприклад, X відповідає ціні квартири (у грн), а Y її площі (у кв. м)
- ullet Нас може цікавити ймовірність  $\mathbb{P}_{X|Y}\left(X>100\ 000\mid Y=70
  ight)$
- Проте ми знаємо, що для неперервної величини  $\mathbb{P}_{Y}\left(Y=70\right)=0$
- Щоб обійти це обмеження, ми формально розглядаємо обумовлення  $\sigma$ -алгеброю, яку породжує Y
  - Деталі можна прочитати в КЛТЙ 12.2
  - Фактично, мова про те. шо

$$\mathbb{P}_{X|Y}\left(X > 100\,000 \mid Y = 70\right) = \lim_{h_n \to 0} \mathbb{P}_{X|Y}\left(X > 100\,00 \mid Y \in (70 - h_n; 70 + h_n)\right)$$

- На практиці ми скрізь стикаємося з ситуаціями, коли треба порахувати ймовірності подій (у тому числі з випадковими величинами) за умови іншої випадкової величини
- ullet Наприклад, X відповідає ціні квартири (у грн), а Y її площі (у кв. м)
- ullet Нас може цікавити ймовірність  $\mathbb{P}_{X|Y}\left(X>100\,000\mid Y=70\right)$
- Проте ми знаємо, що для неперервної величини  $\mathbb{P}_{Y}\left(Y=70\right)=0$
- Щоб обійти це обмеження, ми формально розглядаємо обумовлення  $\sigma$ -алгеброю, яку породжує Y
  - Деталі можна прочитати в КЛТЙ 12.2
  - Фактично, мова про те, що

$$\mathbb{P}_{X|Y}\left(X > 100\,000 \mid Y = 70\right) = \lim_{h_n \to 0} \mathbb{P}_{X|Y}\left(X > 100\,00 \mid Y \in (70 - h_n; 70 + h_n)\right)$$

- На практиці ми скрізь стикаємося з ситуаціями, коли треба порахувати ймовірності подій (у тому числі з випадковими величинами) за умови іншої випадкової величини
- ullet Наприклад, X відповідає ціні квартири (у грн), а Y її площі (у кв. м)
- ullet Нас може цікавити ймовірність  $\mathbb{P}_{X|Y}\left(X>100\,000\mid Y=70\right)$
- Проте ми знаємо, що для неперервної величини  $\mathbb{P}_{Y}\left(Y=70\right)=0$
- Щоб обійти це обмеження, ми формально розглядаємо обумовлення  $\sigma$ -алгеброю, яку породжує Y
  - Деталі можна прочитати в КЛТЙ 12.2
  - Фактично, мова про те, що

$$\mathbb{P}_{X\mid Y}\left(X>100\,000\mid Y=70\right)=\lim_{h_{n}\rightarrow0}\mathbb{P}_{X\mid Y}\left(X>100\,00\mid Y\in\left(70-h_{n};70+h_{n}\right)\right)$$

- На практиці ми скрізь стикаємося з ситуаціями, коли треба порахувати ймовірності подій (у тому числі з випадковими величинами) за умови іншої випадкової величини
- ullet Наприклад, X відповідає ціні квартири (у грн), а Y її площі (у кв. м)
- ullet Нас може цікавити ймовірність  $\mathbb{P}_{X|Y}\left(X>100\,000\mid Y=70\right)$
- Проте ми знаємо, що для неперервної величини  $\mathbb{P}_{Y}\left(Y=70\right)=0$
- Щоб обійти це обмеження, ми формально розглядаємо обумовлення  $\sigma$ -алгеброю, яку породжує Y
  - Деталі можна прочитати в КЛТЙ 12.2
  - Фактично, мова про те, що

$$\mathbb{P}_{X\mid Y}\left(X>100\,000\mid Y=70\right)=\lim_{h_{n}\rightarrow0}\mathbb{P}_{X\mid Y}\left(X>100\,00\mid Y\in\left(70-h_{n};70+h_{n}\right)\right)$$

#### Визначення 2.23

- Нехай випадкові величини X та Z мають спільний **дискретний** розподіл зі щільністю з функцією ймовірности  $p_{Z,X} \equiv \mathbb{P}_{Z,X}\left((Z=z)\cap (X=x)\right)$
- ullet Тоді умовною функцією ймовірности Z за умови X (conditional probability mass function of Z given X) ullet

$$\mathbb{P}_{Z|X}(Z=z \mid X=x) = \frac{\mathbb{P}_{Z,X}((Z=z) \cap (X=x))}{\mathbb{P}_{X}(X=x)}$$
 (2.24)

ullet Якщо  $\mathbb{P}_X\left(X=x
ight)=0$  для деякого x, умовну ймовірність **не визначен**о



Визначення 2.24

#### Визначення 2.23

- Нехай випадкові величини X та Z мають спільний **дискретний** розподіл зі щільністю з функцією ймовірности  $p_{Z,X} \equiv \mathbb{P}_{Z,X} \left( (Z=z) \cap (X=x) \right)$
- ullet Тоді умовною функцією ймовірности Z за умови X (conditional probability mass function of Z given X) ullet

$$\mathbb{P}_{Z|X}(Z=z \mid X=x) = \frac{\mathbb{P}_{Z,X}((Z=z) \cap (X=x))}{\mathbb{P}_{X}(X=x)}$$
 (2.24)

• Якщо  $\mathbb{P}_X\left(X=x\right)=0$  для деякого x, умовну ймовірність **не визначено** 



Визначення 2.24

#### Визначення 2.23

- Нехай випадкові величини X та Z мають спільний **дискретний** розподіл зі щільністю з функцією ймовірности  $p_{Z,X} \equiv \mathbb{P}_{Z,X} \left( (Z=z) \cap (X=x) \right)$
- ullet Тоді умовною функцією ймовірности Z за умови X (conditional probability mass function of Z given X) ullet

$$\mathbb{P}_{Z|X}(Z=z \mid X=x) = \frac{\mathbb{P}_{Z,X}((Z=z) \cap (X=x))}{\mathbb{P}_{X}(X=x)}$$
 (2.24)

 Якщо  $\mathbb{P}_X\left(X=x\right)=0$  для деякого x, умовну ймовірність **не визначено** 



Визначення 2.24

#### Визначення 2.23

- Нехай випадкові величини X та Z мають спільний **дискретний** розподіл зі щільністю з функцією ймовірности  $p_{Z,X} \equiv \mathbb{P}_{Z,X} \, ((Z=z) \cap (X=x))$
- ullet Тоді умовною функцією ймовірности Z за умови X (conditional probability mass function of Z given X) ullet

$$\mathbb{P}_{Z|X}(Z=z \mid X=x) = \frac{\mathbb{P}_{Z,X}((Z=z) \cap (X=x))}{\mathbb{P}_{X}(X=x)}$$
 (2.24)

 Якщо  $\mathbb{P}_X\left(X=x\right)=0$  для деякого x, умовну ймовірність **не визначено** 

#### Визначення 2.24

- $\bullet$  Нехай випадкові величини X та Z мають спільний **неперервний** розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Тоді умовною щільністю розподілу Z за умови X (conditional probability density of Z given X) ullet

$$f_{Z|X}(z \mid x) = \begin{cases} \frac{f_{Z,X}(z,x)}{f_X(x)}, & f_X(x) \neq 0\\ \xi(z), & f_X(x) = 0 \end{cases}$$

ullet Тут  $\xi$   $\epsilon$  деякою абсолютно довільною щільністю розподілу

#### Визначення 2.23

- Нехай випадкові величини X та Z мають спільний **дискретний** розподіл зі щільністю з функцією ймовірности  $p_{Z,X} \equiv \mathbb{P}_{Z,X} \, ((Z=z) \cap (X=x))$
- ullet Тоді умовною функцією ймовірности Z за умови X (conditional probability mass function of Z given X) ullet

$$\mathbb{P}_{Z|X}(Z=z \mid X=x) = \frac{\mathbb{P}_{Z,X}((Z=z) \cap (X=x))}{\mathbb{P}_{X}(X=x)}$$
 (2.24)

 Якщо  $\mathbb{P}_X\left(X=x\right)=0$  для деякого x, умовну ймовірність **не визначено** 

#### Визначення 2.24

- $\bullet\,$  Нехай випадкові величини X та Z мають спільний **неперервний** розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Тоді **умовною щільністю розподілу** Z **за умови** X (conditional probability density of Z given X) ullet

$$f_{Z|X}(z \mid x) = \begin{cases} \frac{f_{Z,X}(z,x)}{f_X(x)}, & f_X(x) \neq 0\\ \xi(z), & f_X(x) = 0 \end{cases}$$
 (2.2)

• Тут  $\xi$  є деякою абсолютно довільною щільністю розподілу

#### Визначення 2.23

- Нехай випадкові величини X та Z мають спільний **дискретний** розподіл зі щільністю з функцією ймовірности  $p_{Z,X} \equiv \mathbb{P}_{Z,X} \left( (Z=z) \cap (X=x) \right)$
- ullet Тоді умовною функцією ймовірности Z за умови X (conditional probability mass function of Z given X) ullet

$$\mathbb{P}_{Z|X}(Z=z \mid X=x) = \frac{\mathbb{P}_{Z,X}((Z=z) \cap (X=x))}{\mathbb{P}_{X}(X=x)}$$
 (2.24)

• Якщо  $\mathbb{P}_X\left(X=x\right)=0$  для деякого x, умовну ймовірність **не визначено** 

#### Визначення 2.24

- ullet Нехай випадкові величини X та Z мають спільний **неперервний** розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Тоді **умовною щільністю розподілу** Z **за умови** X (conditional probability density of Z given X) ullet

$$f_{Z|X}(z \mid x) = \begin{cases} \frac{f_{Z,X}(z,x)}{f_X(x)}, & f_X(x) \neq 0\\ \xi(z), & f_X(x) = 0 \end{cases}$$
 (2.25)

• Тут É є деякою абсолютно довідьною шідьністю розполіду

#### Визначення 2.23

- ullet Нехай випадкові величини X та Z мають спільний **дискретний** розподіл зі щільністю з функцією ймовірности  $p_{Z|X} \equiv \mathbb{P}_{Z|X} \left( (Z=z) \cap (X=x) \right)$
- ullet Тоді **умовною функцією ймовірности** Z **за умови** X (conditional probability mass function of Z given X)  $\epsilon$

$$\mathbb{P}_{Z|X}(Z=z \mid X=x) = \frac{\mathbb{P}_{Z,X}((Z=z) \cap (X=x))}{\mathbb{P}_{X}(X=x)}$$
 (2.24)

• Якщо  $\mathbb{P}_{X}(X=x)=0$  для деякого x, умовну ймовірність **не визначено** 

#### Визначення 2.24

- ullet Нехай випадкові величини X та Z мають спільний **неперервний** розподіл зі щільністю  $f_{Z|X}$
- ullet Тоді **умовною щільністю розподілу** Z **за умови** X (conditional probability density of Z given X)  $\epsilon$

$$f_{Z|X}(z \mid x) = \begin{cases} \frac{f_{Z,X}(z,x)}{f_X(x)} , & f_X(x) \neq 0\\ \xi(z) , & f_X(x) = 0 \end{cases}$$
 (2.25)

• Тут  $\xi$  є деякою абсолютно довільною щільністю розподілу Лекція 3. Статистичне виведення в R. Загальні принц

40 / 90

## Інтуїтивна інтерпретація умовної функції ймовірности

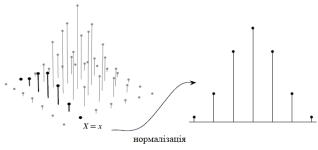
- ullet Ми «вирізаємо» зі спільної функції ймовірности частину, яка відповідає X=x
- Ми додатково **ділимо** на  $\mathbb{P}_X\left(X=x\right)$  для нормалізації новоутвореної (умовної функції ймовірности, щоб сума її значень дорівнювала 1

## Інтуїтивна інтерпретація умовної функції ймовірности

- ullet Ми «вирізаємо» зі спільної функції ймовірности частину, яка відповідає X=x
- ullet Ми додатково **ділимо** на  $\mathbb{P}_X\left(X=x
  ight)$  для нормалізації новоутвореної (умовної) функції ймовірности, щоб сума її значень дорівнювала 1

### Інтуїтивна інтерпретація умовної функції ймовірности

- ullet Ми «вирізаємо» зі спільної функції ймовірности частину, яка відповідає X=x
- ullet Ми додатково **ділимо** на  $\mathbb{P}_X\left(X=x
  ight)$  для нормалізації новоутвореної (умовної) функції ймовірности, щоб сума її значень дорівнювала 1



## Інтуїтивна інтерпретація умовної щільности розподілу

- ullet Ми «вирізаємо» зі спільної щільности розподілу частину, яка відповідає X=x
- Потім ми її ділимо на  $f_X(x)$  для нормалізації новоутвореної (умовної щільности розподілу, щоб її інтеграл дорівнював 1

 Для умовної щільности також, із цілком очевидних міркувань, справедлива теорема Беєса:

$$f_{Z|X}(z\mid x) = \frac{f_{X|Z}(x\mid z)f_{Z}(z)}{f_{X}(x)}\;,\quad f_{X}(x) > 0 \tag{2.26}$$

## Інтуїтивна інтерпретація умовної щільности розподілу

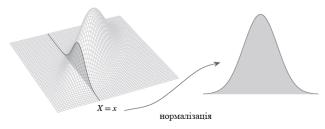
- ullet Ми «вирізаємо» зі спільної щільности розподілу частину, яка відповідає X=x
- Потім ми її ділимо на  $f_X(x)$  для нормалізації новоутвореної (умовної) щільности розподілу, щоб її інтеграл дорівнював 1

 Для умовної щільности також, із цілком очевидних міркувань, справедлива теорема Беєса:

$$f_{Z|X}(z \mid x) = \frac{f_{X|Z}(x \mid z)f_{Z}(z)}{f_{X}(x)} \; , \quad f_{X}(x) > 0 \tag{2.26} \label{eq:2.26}$$

### Інтуїтивна інтерпретація умовної щільности розподілу

- ullet Ми «вирізаємо» зі спільної щільности розподілу частину, яка відповідає X=x
- ullet Потім ми її ділимо на  $f_X(x)$  для нормалізації новоутвореної (умовної) щільности розподілу, щоб її інтеграл дорівнював 1

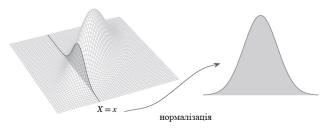


 Для умовної щільности також, із цілком очевидних міркувань, справедлива теорема Беєса:

$$f_{Z|X}(z\mid x) = \frac{f_{X|Z}(x\mid z)f_{Z}(z)}{f_{X}(x)}\;,\quad f_{X}(x) > 0 \tag{2.26}$$

## Інтуїтивна інтерпретація умовної щільности розподілу

- ullet Ми «вирізаємо» зі спільної щільности розподілу частину, яка відповідає X=x
- Потім ми її ділимо на  $f_X(x)$  для нормалізації новоутвореної (умовної) щільности розподілу, щоб її інтеграл дорівнював 1



 Для умовної щільности також, із цілком очевидних міркувань, справедлива теорема Беєса:

$$f_{Z|X}(z \mid x) = \frac{f_{X|Z}(x \mid z)f_{Z}(z)}{f_{X}(x)}, \quad f_{X}(x) > 0$$
 (2.26)

#### Визначення 2.25

ullet Події A і B називають **незалежними** (independent)( $A \perp \!\!\! \perp B$ ), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \tag{2.27}$$

- ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(A
  ight)>0$  і  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , то маємо  $\mathbb{P}\left(A\mid B
  ight)=\mathbb{P}\left(A
  ight)$ ,  $\mathbb{P}\left(B\mid A
  ight)=\mathbb{P}\left(B\mid A
  ight)$
- ullet Можна довести, що якщо  $A \perp\!\!\!\perp B$ , то  $A \perp\!\!\!\perp B^c$ ,  $A^c \perp\!\!\!\perp B$ ,  $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

Визначення 2.26

Події A і B умовно незалежні (conditionally independent) за умови настання події C

#### Визначення 2.25

ullet Події A і B називають **незалежними** (independent)( $A \perp \!\!\! \perp B$ ), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \tag{2.27}$$

- ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(A
  ight)>0$  і  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , то маємо  $\mathbb{P}\left(A\mid B
  ight)=\mathbb{P}\left(A
  ight)$ ,  $\mathbb{P}\left(B\mid A
  ight)=\mathbb{P}\left(B
  ight)$
- ullet Можна довести, що якщо  $A \perp\!\!\!\perp B$ , то  $A \perp\!\!\!\perp B^c$ ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B$ ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B^c$

Визначення 2.26

Події A і B умовно незалежні (conditionally independent) за умови настання події C

#### Визначення 2.25

ullet Події A і B називають **незалежними** (independent)( $A \perp \!\!\! \perp B$ ), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \tag{2.27}$$

- ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(A
  ight)>0$  і  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , то маємо  $\mathbb{P}\left(A\mid B
  ight)=\mathbb{P}\left(A
  ight)$ ,  $\mathbb{P}\left(B\mid A
  ight)=\mathbb{P}\left(B
  ight)$
- ullet Можна довести, що якщо  $A \perp\!\!\!\perp B$ , то  $A \perp\!\!\!\perp B^c$ ,  $A^c \perp\!\!\!\perp B$ ,  $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

Визначення 2.26

#### Визначення 2.25

ullet Події A і B називають **незалежними** (independent)( $A \perp \!\!\! \perp B$ ), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$$
 (2.27)

- ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(A
  ight)>0$  і  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , то маємо  $\mathbb{P}\left(A\mid B
  ight)=\mathbb{P}\left(A
  ight)$ ,  $\mathbb{P}\left(B\mid A
  ight)=\mathbb{P}\left(B
  ight)$
- ullet Можна довести, що якщо  $A \perp\!\!\!\perp B$ , то  $A \perp\!\!\!\!\perp B^c$ ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B$ ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B^c$

#### Визначення 2.26

ullet Події  $A_1,\ldots,A_n$  незалежні ( $A_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\!\perp A_n$ ), якщо:

#### Визначення 2.25

ullet Події A і B називають **незалежними** (independent)( $A \perp \!\!\! \perp B$ ), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$$
 (2.27)

- ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(A
  ight)>0$  і  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , то маємо  $\mathbb{P}\left(A\mid B
  ight)=\mathbb{P}\left(A
  ight)$ ,  $\mathbb{P}\left(B\mid A
  ight)=\mathbb{P}\left(B
  ight)$
- ullet Можна довести, що якщо  $A \perp\!\!\!\perp B$ , то  $A \perp\!\!\!\!\perp B^c$ ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B$ ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B^c$

#### Визначення 2.26

 $\bullet$  Події  $A_1,\dots,A_n$  незалежні ( $A_1 \perp \!\!\! \perp \dots \perp \!\!\!\! \perp A_n$ ), якщо:

$$ullet$$
  $\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j
ight)=\mathbb{P}\left(A_i
ight)\mathbb{P}\left(A_j
ight)$  для всіх  $i\neq j$ 

$$ullet$$
  $\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j\cap A_k
ight)=\mathbb{P}\left(A_i
ight)\mathbb{P}\left(A_j
ight)\mathbb{P}\left(A_k
ight)$  для всіх  $i,j,k$  різні



#### Визначення 2.25

ullet Події A і B називають **незалежними** (independent)( $A \perp \!\!\! \perp B$ ), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \tag{2.27}$$

- ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(A
  ight)>0$  і  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , то маємо  $\mathbb{P}\left(A\mid B
  ight)=\mathbb{P}\left(A
  ight)$ ,  $\mathbb{P}\left(B\mid A
  ight)=\mathbb{P}\left(B
  ight)$
- ullet Можна довести, що якщо  $A \perp\!\!\!\perp B$ , то  $A \perp\!\!\!\!\perp B^c$  ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B$  ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B^c$

#### Визначення 2.26

- ullet Події  $A_1,\ldots,A_n$  незалежні  $(A_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp A_n)$ , якщо:
  - $\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j\right)=\mathbb{P}\left(A_i\right)\mathbb{P}\left(A_j\right)$  для всіх  $i\neq j$
  - ullet  $\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)=\mathbb{P}\left(A_i\right)\mathbb{P}\left(A_j\right)\mathbb{P}\left(A_k\right)$  для всіх i,j,k різних
  - і т.д

# Визначення 2.27

Події A і B умовно незалежні (conditionally independent) за умови настання події C ( $A \perp \!\!\! \perp B \mid C$ ), якщо  $\mathbb{P}$   $(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}$   $(A \mid C) \mathbb{P}$   $(B \mid C)$ 

#### Визначення 2.25

ullet Події A і B називають **незалежними** (independent)( $A \perp \!\!\! \perp B$ ), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \tag{2.27}$$

- ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(A
  ight)>0$  і  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , то маємо  $\mathbb{P}\left(A\mid B
  ight)=\mathbb{P}\left(A
  ight)$ ,  $\mathbb{P}\left(B\mid A
  ight)=\mathbb{P}\left(B
  ight)$
- ullet Можна довести, що якщо  $A \perp\!\!\!\perp B$ , то  $A \perp\!\!\!\!\perp B^c$  ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B$  ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B^c$

#### Визначення 2.26

- ullet Події  $A_1,\ldots,A_n$  незалежні  $(A_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp A_n)$ , якщо:
  - $\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j\right)=\mathbb{P}\left(A_i\right)\mathbb{P}\left(A_j\right)$  для всіх  $i\neq j$
  - ullet  $\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j\cap A_k
    ight)=\mathbb{P}\left(A_i
    ight)\mathbb{P}\left(A_j
    ight)\mathbb{P}\left(A_k
    ight)$  для всіх i,j,k різних
  - і т.д.

### Визначення 2.27

Події A і B **умовно незалежні** (conditionally independent) за умови настання події C ( $A \perp \!\!\! \perp B \mid C$ ), якщо  $\mathbb{P}$   $(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}$   $(A \mid C) \, \mathbb{P}$   $(B \mid C)$ 

#### Визначення 2.25

ullet Події A і B називають **незалежними** (independent)( $A \perp \!\!\! \perp B$ ), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \tag{2.27}$$

- ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(A
  ight)>0$  і  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , то маємо  $\mathbb{P}\left(A\mid B
  ight)=\mathbb{P}\left(A
  ight)$ ,  $\mathbb{P}\left(B\mid A
  ight)=\mathbb{P}\left(B
  ight)$
- ullet Можна довести, що якщо  $A \perp\!\!\!\perp B$ , то  $A \perp\!\!\!\perp B^c$ ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B$ ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B^c$

#### Визначення 2.26

- ullet Події  $A_1,\ldots,A_n$  незалежні  $(A_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp A_n)$ , якщо:
  - $\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j\right)=\mathbb{P}\left(A_i\right)\mathbb{P}\left(A_j\right)$  для всіх  $i\neq j$
  - ullet  $\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j\cap A_k
    ight)=\mathbb{P}\left(A_i
    ight)\mathbb{P}\left(A_j
    ight)\mathbb{P}\left(A_k
    ight)$  для всіх i,j,k різних
  - і т.д.

### Визначення 2.27

Події A і B умовно незалежні (conditionally independent) за умови настання події C ( $A \perp \!\!\!\perp B \mid C$ ), якщо  $\mathbb{P} \left( A \cap B \mid C \right) = \mathbb{P} \left( A \mid C \right) \mathbb{P} \left( B \mid C \right)$ 

#### Визначення 2.25

ullet Події A і B називають **незалежними** (independent)( $A \perp \!\!\! \perp B$ ), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$$
 (2.27)

- ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(A
  ight)>0$  і  $\mathbb{P}\left(B
  ight)>0$ , то маємо  $\mathbb{P}\left(A\mid B
  ight)=\mathbb{P}\left(A
  ight)$ ,  $\mathbb{P}\left(B\mid A
  ight)=\mathbb{P}\left(B
  ight)$ 
  - ullet Можна довести, що якщо  $A \perp\!\!\!\perp B$ , то  $A \perp\!\!\!\!\perp B^c$ ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B$ ,  $A^c \perp\!\!\!\!\perp B^c$

#### Визначення 2.26

- ullet Події  $A_1,\ldots,A_n$  незалежні  $(A_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp A_n)$ , якщо:
  - $\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j\right)=\mathbb{P}\left(A_i\right)\mathbb{P}\left(A_j\right)$  для всіх  $i\neq j$
  - ullet  $\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j\cap A_k
    ight)=\mathbb{P}\left(A_i
    ight)\mathbb{P}\left(A_j
    ight)\mathbb{P}\left(A_k
    ight)$  для всіх i,j,k різних
  - і т.д.

## Визначення 2.27

Події A і B умовно незалежні (conditionally independent) за умови настання події C ( $A \perp \!\!\!\perp B \mid C$ ), якщо  $\mathbb{P}\left(A \cap B \mid C\right) = \mathbb{P}\left(A \mid C\right) \mathbb{P}\left(B \mid C\right)$ 

### Визначення 2.28

ullet Випадкові вектори  $\mathbf{X}_1:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^{d_1}$ , …,  $\mathbf{X}_k:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^{d_k}$  незалежні (independent), якщо

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}, \ldots, \mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{1}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{k}}\left(\mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) \; , \; H_{i} \in \mathcal{B}^{d_{i}} \; , \tag{2.28}$$

ullet Можна довести, що  $X_1,\dots,X_k$  незалежні **тоді й тільки тоді**, коли

Також можна довести, що якщо незалежні випадкові величини, то незалежні від них

#### Визначення 2.28

ullet Випадкові вектори  $\mathbf{X}_1:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^{d_1}$ , …,  $\mathbf{X}_k:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^{d_k}$  незалежні (independent), якщо

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}, \ldots, \mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{1}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{k}}\left(\mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) \; , \; H_{i} \in \mathcal{B}^{d_{i}} \; , \tag{2.28}$$

- ullet Можна довести, що  $X_1,\dots,X_k$  незалежні **тоді й тільки тоді**, коли
  - $\bullet \ F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_k}(x_k) \ , \quad x_i \in (-\infty,\infty) \cup \{\infty\}$ 
    - ullet Якщо існують щільності, то  $f_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k)=f_1(x_1)\cdot\ldots\cdot f_k(x_k)$  ,  $\qquad x_i\in\mathbb{F}$ 
      - Зокрема, для дискретних величин
  - Також можна довести, що якщо незалежні випадкові величини, то незалежні й функції віл них

#### Визначення 2.28

ullet Випадкові вектори  $\mathbf{X}_1:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^{d_1}$ , …,  $\mathbf{X}_k:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^{d_k}$  незалежні (independent), якщо

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}, \ldots, \mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{1}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{k}}\left(\mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) \; , \; H_{i} \in \mathcal{B}^{d_{i}} \; , \tag{2.28}$$

- ullet Можна довести, що  $X_1,\dots,X_k$  незалежні **тоді й тільки тоді**, коли
  - $\bullet \ F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = F_{X_1}^{1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_k}(x_k) \ , \quad x_i \in (-\infty,\infty) \cup \{\infty\}$
  - Якщо існують щільності, то  $f_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k)=f_1(x_1)\cdot\dots\cdot f_k(x_k)$  ,  $\qquad x_i\in\mathbb{F}$ 
    - Зокрема, для дискретних величин
      - $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k\right)=\mathbb{P}_{X_1}\left(X_1=x_1\right)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}_{X_k}\left(X_k=x_k\right)$
- Також можна довести, що якщо незалежні випадкові величини, то незалежні й функції від них

#### Визначення 2.28

ullet Випадкові вектори  $\mathbf{X}_1:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^{d_1}$ , …,  $\mathbf{X}_k:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^{d_k}$  незалежні (independent), якщо

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}, \ldots, \mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{1}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{k}}\left(\mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) \; , \; H_{i} \in \mathcal{B}^{d_{i}} \; , \tag{2.28}$$

- $\bullet\,$  Можна довести, що  $X_1,\dots,X_k$  незалежні **тоді й тільки тоді**, коли
  - $\bullet \ F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \vec{F_{X_1}}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_k}(x_k) \;, \quad x_i \in (-\infty;\infty) \cup \{\infty\}$
  - Якщо існують щільності, то  $f_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k) = f_1(x_1)\cdot\dots\cdot f_k(x_k)$  ,  $x_i\in\mathbb{R}$
  - Зокрема, для дискретних величин  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1=x_1,\dots,X_k=x_k\right)=\mathbb{P}_{X_1}\left(X_1=x_1\right)\cdot\dots\cdot\mathbb{P}_{X_k}\left(X_k=x_k\right)$
- Також можна довести, що якщо незалежні випадкові величини, то незалежні й функції від них

#### Визначення 2.28

ullet Випадкові вектори  $\mathbf{X}_1:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^{d_1}$ , ...,  $\mathbf{X}_k:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^{d_k}$  незалежні (independent), якщо

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}, \ldots, \mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{1}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{k}}\left(\mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) \; , \; H_{i} \in \mathcal{B}^{d_{i}} \; , \tag{2.28}$$

- ullet Можна довести, що  $X_1,\dots,X_k$  незалежні **тоді й тільки тоді**, коли
  - $\bullet \ F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = F_{X_1}^{\Gamma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_k}(x_k) \ , \quad x_i \in (-\infty,\infty) \cup \{\infty\}$
  - Якщо існують щільності, то  $f_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_k) = f_1(x_1)\cdot\dots\cdot f_k(x_k)\;, \qquad x_i\in\mathbb{R}$
  - Зокрема, для дискретних величин  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(X_1=x_1,\dots,X_k=x_k\right)=\mathbb{P}_{X_1}\left(X_1=x_1\right)\cdot\dots\cdot\mathbb{P}_{X_k}\left(X_k=x_k\right)$
- Також можна довести, що якщо незалежні випадкові величини, то незалежні й функції від них

#### Визначення 2.28

ullet Випадкові вектори  $\mathbf{X}_1:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) \to \mathbb{R}^{d_1},...,\mathbf{X}_k:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) \to \mathbb{R}^{d_k}$  незалежні (independent), якщо

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}, \ldots, \mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{1}}\left(\mathbf{X}_{1} \in H_{1}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_{\mathbf{X}_{k}}\left(\mathbf{X}_{k} \in H_{k}\right) \; , \; H_{i} \in \mathcal{B}^{d_{i}} \; , \tag{2.28}$$

- Можна довести, що  $X_1, \dots, X_k$  незалежні **тоді й тільки тоді**, коли
  - $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_k}(x_k), \quad x_i \in (-\infty, \infty) \cup \{\infty\}$
  - Якщо існують щільності, то  $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_k(x_k)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$
  - Зокрема, для дискретних величин  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \mathbb{P}_{X_1}(X_1 = x_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}_{X_k}(X_k = x_k)$
- Також можна довести, що якщо незалежні випадкові величини, то незалежні й функції від них

# Сподівання випадкової величини

### Визначення 2.29

**Сподіванням** (expectation) будь-якої випадкової величини X  $\varepsilon$  її інтеграл:

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int X \, d\mathbb{P}$$

(2.29)

- ullet  $\mathbb{E}\left[X
  ight]\in\mathbb{R}$ , тобто воно  $\epsilon$  (сталим) **числом**
- Поняття сподівання подібне до поняття центру мас у фізиці

# Сподівання випадкової величини

### Визначення 2.29

**Сподіванням** (expectation) будь-якої випадкової величини X  $\varepsilon$  її інтеграл:

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int X \, d\mathbb{P}$$

(2.29)

- ullet  $\mathbb{E}\left[X
  ight]\in\mathbb{R}$ , тобто воно  $\epsilon$  (сталим) **числом**
- Поняття сподівання подібне до поняття центру мас у фізиці

• Для **дискретно**ї величини X з функцією ймовірности  $p_X$  сподівання g(X) дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot p_X(x) \, d\# = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x) \cdot p_X(x) \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx \tag{2.31}$$

- Сподівання може бути нескінченним
- Сподівання може взагалі не існувати (наприклад, у розподілу Коші)
- ullet Якщо сподівання скінченне, кажуть, що воно існує і що X інтегровна
- ullet Для інтегровних X та Y можна довести такі властивості:

• Для **дискретної** величини X з функцією ймовірности  $p_X$  сподівання g(X) дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot p_X(x) \, d\# = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x) \cdot p_X(x) \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx \tag{2.31}$$

- Сподівання може бути нескінченним
- Сподівання може взагалі не існувати (наприклад, у розподілу Коші)
- ullet Якщо сподівання скінченне, кажуть, що воно **існує** і що X **інтегровна**
- ullet Для інтегровних X та Y можна довести такі властивості:

• Для **дискретної** величини X з функцією ймовірности  $p_X$  сподівання g(X) дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot p_X(x) \, d\# = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x) \cdot p_X(x) \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx \tag{2.31}$$

- Сподівання може бути нескінченним
- Сподівання може взагалі не існувати (наприклад, у розподілу Коші)
- ullet Якщо сподівання скінченне, кажуть, що воно **існує** і що X **інтегровна**
- ullet Для інтегровних X та Y можна довести такі властивості

• Для **дискретної** величини X з функцією ймовірности  $p_X$  сподівання g(X) дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot p_X(x) \, d\# = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x) \cdot p_X(x) \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx \tag{2.31}$$

- Сподівання може бути нескінченним
- Сподівання може взагалі не існувати (наприклад, у розподілу Коші)
- ullet Якщо сподівання скінченне, кажуть, що воно **існує** і що X **інтегровна**
- ullet Для інтегровних X та Y можна довести такі властивості

• Для **дискретної** величини X з функцією ймовірности  $p_X$  сподівання g(X) дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot p_X(x) \, d\# = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x) \cdot p_X(x) \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx \tag{2.31}$$

- Сподівання може бути нескінченним
- Сподівання може взагалі не існувати (наприклад, у розподілу Коші)
- ullet Якщо сподівання скінченне, кажуть, що воно **існує** і що X **інтегровна**
- ullet Для інтегровних X та Y можна довести такі властивості:

• Для **дискретної** величини X з функцією ймовірности  $p_X$  сподівання g(X) дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot p_X(x) \, d\# = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x) \cdot p_X(x) \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx \tag{2.31}$$

- Сподівання може бути нескінченним
- Сподівання може взагалі не існувати (наприклад, у розподілу Коші)
- ullet Якщо сподівання скінченне, кажуть, що воно **існує** і що X **інтегровна**
- ullet Для інтегровних X та Y можна довести такі властивості:  ${}_{\bullet}$  Якщо  $X \geq 0$  майже напевно, то  $\mathbb{E}\left[X\right] \geq 0$ 
  - ullet Лінійність сподівання: для всіх  $a,b\in\mathbb{R}$  виконується  $\mathbb{E}\left[aX+bY
    ight]=a\mathbb{E}\left[X
    ight]+b\mathbb{E}\left[Y
    ight]$
  - Minimital choquadhin. And box  $a, b \in \mathbb{R}$  but only to both  $a \in [x] + b \in [x]$
  - Монотонність: якщо  $A \leq Y$  майже напевно, то  $\mathbb{E}[A] \leq \mathbb{E}[Y]$

• Для **дискретно**ї величини X з функцією ймовірности  $p_X$  сподівання g(X) дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot p_X(x) \, d\# = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x) \cdot p_X(x) \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx \tag{2.31}$$

- Сподівання може бути нескінченним
- Сподівання може взагалі не існувати (наприклад, у розподілу Коші)
- ullet Якщо сподівання скінченне, кажуть, що воно **існує** і що X **інтегровна**
- ullet Для інтегровних X та Y можна довести такі властивості:
  - ullet Якщо  $X \geq 0$  майже напевно, то  $\mathbb{E}\left[X\right] \geq 0$
  - Лінійність сподівання: для всіх  $a,b\in\mathbb{R}$  виконується  $\mathbb{E}\left[aX+bY\right]=a\mathbb{E}\left[X\right]+b\mathbb{E}\left[Y\right]$
  - Монотонність: якщо  $X \leq Y$  майже напевно, то  $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$
  - ullet Якщо X=Y майже напевно, то  $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[Y]$

 $\bullet \;$  Для **дискретної** величини X з функцією ймовірности  $p_X$  сподівання g(X) дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot p_X(x) \, d\# = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x) \cdot p_X(x) \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx \tag{2.31}$$

- Сподівання може бути нескінченним
- Сподівання може взагалі не існувати (наприклад, у розподілу Коші)
- ullet Якщо сподівання скінченне, кажуть, що воно **існує** і що X **інтегровна**
- ullet Для інтегровних X та Y можна довести такі властивості:
  - ullet Якщо  $X \geq 0$  майже напевно, то  $\mathbb{E}\left[X\right] \geq 0$
  - $\bullet$  Лінійність сподівання: для всіх  $a,b\in\mathbb{R}$  виконується  $\mathbb{E}\left[aX+bY\right]=a\mathbb{E}\left[X\right]+b\mathbb{E}\left[Y\right]$
  - Монотонність: якщо  $X \leq Y$  майже напевно, то  $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$
  - $\bullet$  Якщо X=Y майже напевно, то  $\mathbb{E}|X|=\mathbb{E}|Y|$

• Для **дискретно**ї величини X з функцією ймовірности  $p_X$  сподівання g(X) дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot p_X(x) \, d\# = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x) \cdot p_X(x) \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx \tag{2.31}$$

- Сподівання може бути нескінченним
- Сподівання може взагалі не існувати (наприклад, у розподілу Коші)
- Якщо сподівання скінченне, кажуть, що воно існує і що X інтегровна
- ullet Для інтегровних X та Y можна довести такі властивості:
  - ullet Якщо  $X \geq 0$  майже напевно, то  $\mathbb{E}\left[X\right] \geq 0$
  - Лінійність сподівання: для всіх  $a,b\in\mathbb{R}$  виконується  $\mathbb{E}\left[aX+bY\right]=a\mathbb{E}\left[X\right]+b\mathbb{E}\left[Y\right]$
  - Монотонність: якщо  $X \leq Y$  майже напевно, то  $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$
  - ullet Якщо X=Y майже напевно, то  $\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[Y\right]$

 $\bullet \;$  Для **дискретної** величини X з функцією ймовірности  $p_X$  сподівання g(X) дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot p_X(x) \, d\# = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x) \cdot p_X(x) \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int g(x) \cdot f_X(x) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx \tag{2.31}$$

- Сподівання може бути нескінченним
- Сподівання може взагалі не існувати (наприклад, у розподілу Коші)
- Якщо сподівання скінченне, кажуть, що воно існує і що X інтегровна
- ullet Для інтегровних X та Y можна довести такі властивості:
  - ullet Якщо  $X\geq 0$  майже напевно, то  $\mathbb{E}\left[X
    ight]\geq 0$
  - Лінійність сподівання: для всіх  $a,b\in\mathbb{R}$  виконується  $\mathbb{E}\left[aX+bY\right]=a\mathbb{E}\left[X\right]+b\mathbb{E}\left[Y\right]$
  - ullet Монотонність: якщо  $X \leq Y$  майже напевно, то  $\mathbb{E}\left[X\right] \leq \mathbb{E}\left[Y\right]$
  - Якщо X=Y майже напевно, то  $\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[Y\right]$

#### Визначення 2.30

ullet Дисперсією (variance) випадкової величини X є

$$\operatorname{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] \tag{2.32}$$

ullet Середньоквадратичним відхиленням (standard deviation) випадкової величини X  $\epsilon$ 

$$d(X) = \sqrt{Var(X)}$$
 (2.33)

- ullet Часто Var (X) позначають через  $\sigma_X^2$ , і тоді sd (X) має позначення  $\sigma_X$
- Дисперсія показує, наскільки далеко (в середньому) стоять від  $\mathbb{E}\left[X\right]$  значення величини X
- ullet Тобто **наскільки сильно** значення величини X **розкидано** відносно  $\mathbb{E}\left[X$
- ullet Можна показати, що  $\mathrm{Var}\left(X
  ight) = \mathbb{E}\left[X^2
  ight] (\mathbb{E}\left[X
  ight])$
- Варто звернути увагу, що дисперсія не є лінійною

#### Визначення 2.30

ullet Дисперсією (variance) випадкової величини X є

$$\operatorname{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] \tag{2.32}$$

ullet Середньоквадратичним відхиленням (standard deviation) випадкової величини X ullet

$$\mathrm{sd}\left(X\right)=\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}\tag{2.33}$$

- ullet Часто Var (X) позначають через  $\sigma_X^2$ , і тоді sd (X) має позначення  $\sigma_X$
- $\bullet$  Дисперсія показує, наскільки далеко (в середньому) стоять від  $\mathbb{E}\left[X\right]$  значення величини X
- ullet Тобто **наскільки сильно** значення величини X **розкидано** відносно  $\mathbb{E}\left[X
  ight]$
- lacktriangle Можна показати, що  ${
  m Var}\left(X
  ight)=\mathbb{E}\left[X^{z}
  ight]-\left(\mathbb{E}\left[X
  ight]$
- ullet варто звернути увагу, що дисперсія не  $\epsilon$  лініиною

#### Визначення 2.30

ullet Дисперсією (variance) випадкової величини X є

$$\operatorname{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] \tag{2.32}$$

ullet Середньоквадратичним відхиленням (standard deviation) випадкової величини X ullet

$$\mathrm{sd}\left(X\right)=\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}\tag{2.33}$$

- ullet Часто Var (X) позначають через  $\sigma_X^2$ , і тоді sd (X) має позначення  $\sigma_X$
- Дисперсія показує, наскільки далеко (в середньому) стоять від  $\mathbb{E}\left[X\right]$  значення величини X
- ullet Тобто наскільки сильно значення величини X розкидано відносно  $\mathbb{E}\left[X
  ight]$
- ullet Можна показати, що Var  $(X)=\mathbb{E}\left[X^2
  ight]-(\mathbb{E}\left[X
  ight])^2$
- варто звернути увагу, що дисперсія не є лініиною

#### Визначення 2.30

ullet Дисперсією (variance) випадкової величини X є

$$\operatorname{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] \tag{2.32}$$

ullet Середньоквадратичним відхиленням (standard deviation) випадкової величини X ullet

$$\mathrm{sd}\left(X\right)=\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}\tag{2.33}$$

- ullet Часто Var (X) позначають через  $\sigma_X^2$ , і тоді sd (X) має позначення  $\sigma_X$
- Дисперсія показує, наскільки **далеко (в середньому)** стоять від  $\mathbb{E}\left[X\right]$  значення величини X
- ullet Тобто наскільки сильно значення величини X розкидано відносно  $\mathbb{E}[X]$
- ullet Можна показати, що  $\mathrm{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[X^2\right] (\mathbb{E}\left[X\right])^2$
- Варто звернути увагу, що дисперсія не є лінійною

#### Визначення 2.30

ullet Дисперсією (variance) випадкової величини X є

$$\operatorname{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] \tag{2.32}$$

ullet Середньоквадратичним відхиленням (standard deviation) випадкової величини X ullet

$$\mathrm{sd}\left(X\right)=\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}\tag{2.33}$$

- ullet Часто Var (X) позначають через  $\sigma_X^2$ , і тоді sd (X) має позначення  $\sigma_X$
- Дисперсія показує, наскільки **далеко (в середньому)** стоять від  $\mathbb{E}\left[X\right]$  значення величини X
- ullet Тобто **наскільки сильно** значення величини X **розкидано** відносно  $\mathbb{E}\left[X\right]$
- ullet Можна показати, що  $\mathrm{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[X^2\right] (\mathbb{E}\left[X\right])^2$
- Варто звернути увагу, що дисперсія не є лінійною

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

#### Визначення 2.30

ullet Дисперсією (variance) випадкової величини X є

$$\operatorname{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] \tag{2.32}$$

ullet Середньоквадратичним відхиленням (standard deviation) випадкової величини X ullet

$$\mathrm{sd}\left(X\right)=\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}\tag{2.33}$$

- ullet Часто Var (X) позначають через  $\sigma_X^2$ , і тоді sd (X) має позначення  $\sigma_X$
- Дисперсія показує, наскільки **далеко (в середньому)** стоять від  $\mathbb{E}\left[X\right]$  значення величини X
- ullet Тобто **наскільки сильно** значення величини X **розкидано** відносно  $\mathbb{E}\left[X
  ight]$
- ullet Можна показати, що  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=\mathbb{E}\left[X^{2}
  ight]-(\mathbb{E}\left[X
  ight])^{2}$
- Варто звернути увагу, що дисперсія не є лінійною

$$Var\left(aX+b\right) = a^2 Var\left(X\right)$$

Лекція 3. Статистичне виведення в R. Загальні принц

#### Визначення 2.30

ullet Дисперсією (variance) випадкової величини X є

$$\operatorname{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right] \tag{2.32}$$

• Середньоквадратичним відхиленням (standard deviation) випадкової величини X є

$$\mathrm{sd}\left(X\right)=\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}\tag{2.33}$$

- ullet Часто Var (X) позначають через  $\sigma_X^2$ , і тоді sd (X) має позначення  $\sigma_X$
- Дисперсія показує, наскільки **далеко (в середньому)** стоять від  $\mathbb{E}\left[X\right]$  значення величини X
- ullet Тобто **наскільки сильно** значення величини X **розкидано** відносно  $\mathbb{E}\left[X
  ight]$
- ullet Можна показати, що  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=\mathbb{E}\left[X^{2}
  ight]-(\mathbb{E}\left[X
  ight])^{2}$
- Варто звернути увагу, що дисперсія не є лінійною:

$$\operatorname{Var}\left(aX+b\right)=a^{2}\operatorname{Var}\left(X\right)$$

## Нерівність Єнсена

# Теорема 2.31 (Нерівність Єнсена (Jensen's inequality) $^{12}$ )

- ullet Нехай функція  $arphi:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  опукла
- ullet Нехай випадкові величини X і arphi(X) інтегровн
- Тод:

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \geq \varphi(\mathbb{E}\left[X\right])$$

(2.34)

- ullet Якщо функція **вгнута** (concave), тобто опукла вгору, то  $\mathbb{E}\left[ arphi(X) 
  ight] \leq arphi(\mathbb{E}\left[ X 
  ight])$
- ullet  $\mathbb{E}\left[arphi(X)
  ight]=arphi(\mathbb{E}\left[X
  ight])$  тоді й тільки тоді, коли arphi(X)=a+bX майже напевн
- Конкретні приклади:

# Теорема 2.31 (Нерівність Єнсена (Jensen's inequality) $^{12}$ )

- ullet Нехай функція  $arphi:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  опукла
- ullet Нехай випадкові величини X і arphi(X) інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \ge \varphi(\mathbb{E}\left[X\right]$$

(2.34)

- ullet Якщо функція **вгнута** (concave), тобто опукла вгору, то  $\mathbb{E}\left[ arphi(X) 
  ight] \leq arphi(\mathbb{E}\left[ X 
  ight])$
- ullet  $\mathbb{E}\left[arphi(X)
  ight]=arphi(\mathbb{E}\left[X
  ight])$  тоді й тільки тоді, коли arphi(X)=a+bX майже напевно
- Конкретні приклади

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Йоган Єнсен (Johan Ludwig William Valdemar Jensen, 1859-1925) — данський математик

- ullet Нехай функція  $arphi:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  опукла
- ullet Нехай випадкові величини X і arphi(X) інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \geq \varphi(\mathbb{E}\left[X\right]) \tag{2.34}$$

- ullet Якщо функція **вгнута** (concave), тобто опукла вгору, то  $\mathbb{E}\left[ arphi(X) 
  ight] \leq arphi(\mathbb{E}\left[ X 
  ight])$
- ullet  $\mathbb{E}\left[arphi(X)
  ight]=arphi(\mathbb{E}\left[X
  ight])$  тоді й тільки тоді, коли arphi(X)=a+bX майже напевн
- Конкретні приклади:

- ullet Нехай функція  $arphi:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  опукла
- ullet Нехай випадкові величини X і arphi(X) інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \geq \varphi(\mathbb{E}\left[X\right]) \tag{2.34}$$

- ullet Якщо функція **вгнута** (concave), тобто опукла вгору, то  $\mathbb{E}\left[ arphi(X) 
  ight] \leq arphi(\mathbb{E}\left[ X 
  ight])$
- ullet  $\mathbb{E}\left[arphi(X)
  ight]=arphi(\mathbb{E}\left[X
  ight])$  тоді й тільки тоді, коли arphi(X)=a+bX майже напевно
- Конкретні приклади:

- ullet Нехай функція  $arphi:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  опукла
- ullet Нехай випадкові величини X і arphi(X) інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \ge \varphi(\mathbb{E}\left[X\right]) \tag{2.34}$$

- ullet Якщо функція **вгнута** (concave), тобто опукла вгору, то  $\mathbb{E}\left[ arphi(X) 
  ight] \leq arphi(\mathbb{E}\left[ X 
  ight])$
- $\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right]=\varphi(\mathbb{E}\left[X\right])$  тоді й тільки тоді, коли  $\varphi(X)=a+bX$  майже напевно
- Конкретні приклади:

- ullet Нехай функція  $arphi:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  опукла
- ullet Нехай випадкові величини X і arphi(X) інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \geq \varphi(\mathbb{E}\left[X\right]) \tag{2.34}$$

- ullet Якщо функція **вгнута** (concave), тобто опукла вгору, то  $\mathbb{E}\left[ arphi(X) 
  ight] \leq arphi(\mathbb{E}\left[ X 
  ight])$
- $\mathbb{E}\left[\varphi(X)
  ight]=\varphi(\mathbb{E}\left[X
  ight])$  тоді й тільки тоді, коли  $\varphi(X)=a+bX$  майже напевно
- Конкретні приклади:

$$ullet$$
  $\mathbb{E}\left[|X|\right] \geq |\mathbb{E}\left[X\right]|$ 
 $\bullet$   $\mathbb{E}\left[X^r\right] \geq (\mathbb{E}\left[X\right])^r$  для  $r>1$  для додатних випадкових величин  $X$ 
 $\bullet$   $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] \geq \frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}$  для додатних випадкових величин  $X$ 

 $<sup>\</sup>bullet \; \mathbb{E}[X] \leq (\mathbb{E}[X]) \; \text{ ADM } 0 < T < 1$ 

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Йоган Єнсен (Johan Ludwig William Valdemar Jensen, 1859-1925) — данський математик

- ullet Нехай функція  $arphi:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  опукла
- ullet Нехай випадкові величини X і arphi(X) інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \geq \varphi(\mathbb{E}\left[X\right]) \tag{2.34}$$

- ullet Якщо функція **вгнута** (concave), тобто опукла вгору, то  $\mathbb{E}\left[ arphi(X) 
  ight] \leq arphi(\mathbb{E}\left[ X 
  ight])$
- Конкретні приклади:
  - $\mathbb{E}[|X|] \ge |\mathbb{E}[X]|$
  - ullet  $\mathbb{E}[X^r] \geq (\mathbb{E}[X])^r$  для r>1 для додатних випадкових величин X
  - ullet  $\mathbb{E}\left[rac{1}{X}
    ight] \geq rac{1}{\mathbb{E}\left[X
    ight]}$  для додатних випадкових величин X
  - $\mathbb{E}[\ln X] \leq \ln(\mathbb{E}[X])$  для додатних випадкових величин X

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Йоган Єнсен (Johan Ludwig William Valdemar Jensen, 1859–1925) — данський математик

- ullet Нехай функція  $\varphi:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  опукла
- Нехай випадкові величини X і  $\varphi(X)$  інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \geq \varphi(\mathbb{E}\left[X\right]) \tag{2.34}$$

- Якщо функція **вгнута** (concave), тобто опукла вгору, то  $\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] < \varphi(\mathbb{E}\left[X\right])$
- ullet  $\mathbb{E}\left[arphi(X)
  ight]=arphi(\mathbb{E}\left[X
  ight])$  тоді й тільки тоді, коли arphi(X)=a+bX майже напевно
- Конкретні приклади:

  - $\mathbb{E}\left[|X|\right] \geq |\mathbb{E}\left[X\right]|$   $\mathbb{E}\left[X^r\right] \geq (\mathbb{E}\left[X\right])^r$  для r>1 для додатних випадкових величин X
  - $\mathbb{E}\left|\frac{1}{X}\right| \geq \frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}$  для додатних випадкових величин X

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Йоган Єнсен (Johan Ludwig William Valdemar Jensen, 1859–1925) — данський математик

- ullet Нехай функція  $\varphi:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  опукла
- Нехай випадкові величини X і  $\varphi(X)$  інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \geq \varphi(\mathbb{E}\left[X\right]) \tag{2.34}$$

- Якщо функція **вгнута** (concave), тобто опукла вгору, то  $\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] < \varphi(\mathbb{E}\left[X\right])$
- ullet  $\mathbb{E}\left[arphi(X)
  ight]=arphi(\mathbb{E}\left[X
  ight])$  тоді й тільки тоді, коли arphi(X)=a+bX майже напевно
- Конкретні приклади:

  - $\mathbb{E}[|X|] \ge |\mathbb{E}[X]|$   $\mathbb{E}[X^r] \ge (\mathbb{E}[X])^r$  для r>1 для додатних випадкових величин X
  - ullet  $\mathbb{E}\left[rac{1}{X}
    ight] \geq rac{1}{\mathbb{E}\left[X
    ight]}$  для додатних випадкових величин X
  - ullet  $\mathbb{E}\left[\ln X
    ight] \leq \ln(\mathbb{E}\left[X
    ight])$  для додатних випадкових величин X

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Йоган Єнсен (Johan Ludwig William Valdemar Jensen, 1859–1925) — данський математик

- ullet Нехай функція  $\varphi:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  опукла
- Нехай випадкові величини X і  $\varphi(X)$  інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \geq \varphi(\mathbb{E}\left[X\right]) \tag{2.34}$$

- Якщо функція **вгнута** (concave), тобто опукла вгору, то  $\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] < \varphi(\mathbb{E}\left[X\right])$
- ullet  $\mathbb{E}\left[arphi(X)
  ight]=arphi(\mathbb{E}\left[X
  ight])$  тоді й тільки тоді, коли arphi(X)=a+bX майже напевно
- Конкретні приклади:

  - $\ \dot{\mathbb{E}}[|X|] \ge |\mathbb{E}[X]|$   $\ \mathbb{E}[X^r] \ge (\mathbb{E}[X])^r$  для r>1 для додатних випадкових величин X
  - ullet  $\mathbb{E}\left[rac{1}{X}
    ight] \geq rac{1}{\mathbb{E}\left[X
    ight]}$  для додатних випадкових величин X
  - $\mathbb{E}\left[\ln X
    ight] \leq \ln(\mathbb{E}\left[X
    ight])$  для додатних випадкових величин X
  - $\mathbb{E}[X^r] \leq (\mathbb{E}[X])^r$  для 0 < r < 1

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Йоган Єнсен (Johan Ludwig William Valdemar Jensen, 1859–1925) — данський математик

- ullet Нехай функція  $\varphi:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  опукла
- Нехай випадкові величини X і  $\varphi(X)$  інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \geq \varphi(\mathbb{E}\left[X\right]) \tag{2.34}$$

- Якщо функція **вгнута** (concave), тобто опукла вгору, то  $\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] < \varphi(\mathbb{E}\left[X\right])$
- ullet  $\mathbb{E}\left[arphi(X)
  ight]=arphi(\mathbb{E}\left[X
  ight])$  тоді й тільки тоді, коли arphi(X)=a+bX майже напевно
- Конкретні приклади:
  - $\ \dot{\mathbb{E}}[|X|] \ge |\mathbb{E}[X]|$   $\ \mathbb{E}[X^r] \ge (\mathbb{E}[X])^r$  для r>1 для додатних випадкових величин X
  - ullet  $\mathbb{E}\left[rac{1}{X}
    ight] \geq rac{1}{\mathbb{E}\left[X
    ight]}$  для додатних випадкових величин X
  - $\mathbb{E}\left[\ln X\right] \leq \ln\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)$  для додатних випадкових величин X  $\mathbb{E}\left[X^r\right] \leq (\mathbb{E}\left[X\right])^r$  для 0 < r < 1

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Йоган Єнсен (Johan Ludwig William Valdemar Jensen, 1859–1925) — данський математик

# Теорема 2.32 (Нерівність Маркова (Markov's inequality)<sup>13</sup>)

- ullet Нехай  $g:\mathbb{R} o [0;\infty)$  неспадна вимірна функція
- ullet Тоді для **будь-якої** випадкової величини X має місце

$$\mathbb{P}_{X}\left(X\geq c\right)\leq\frac{\mathbb{E}\left[g(X)\right]}{g(c)}\;,\qquad c>0 \tag{2.35}$$

ullet Класичне формулювання, якщо  $X\geq 0$  майже напевно, а g(x)=x

$$\mathbb{P}_X(X \ge c) \le \frac{\mathbb{E}[X]}{c}, \quad c > 0$$
 (2.36)

ullet Можна прибрати вимогу про невід'ємність величини X, розглянувши |X|:

$$\mathbb{P}_{X}\left(|X| \ge c\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[|X|\right]}{c} \;, \qquad c > 0$$

• Або, що те ж саме

$$\mathbb{P}_{X}\left(|X| \geq c \cdot \mathbb{E}\left[|X|\right]\right) \leq \frac{1}{c} \;, \qquad c > 0$$

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>Андрей Марков (1856–1922) — російський математик

# Teopeмa 2.32 (Нерівність Маркова (Markov's inequality)<sup>13</sup>)

- ullet Нехай  $g:\mathbb{R} o [0;\infty)$  неспадна вимірна функція
- ullet Тоді для **будь-якої** випадкової величини X має місце

$$\mathbb{P}_{X}\left(X\geq c\right)\leq\frac{\mathbb{E}\left[g(X)\right]}{g(c)}\;,\qquad c>0\tag{2.35}$$

• Класичне формулювання, якщо  $X \geq 0$  майже напевно, а g(x) = x:

$$P_X(X \ge c) \le \frac{\mathbb{E}[X]}{c}, \quad c > 0$$
 (2.36)

ullet Можна прибрати вимогу про невід'ємність величини X, розглянувши |X|:

$$\mathbb{P}_{X}\left(|X| \ge c\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[|X|\right]}{c} \;, \qquad c > 0$$

• Або, що те ж саме:

$$\mathbb{P}_{X}\left(|X| \geq c \cdot \mathbb{E}\left[|X|\right]\right) \leq \frac{1}{c} \;, \qquad c > 0$$

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>Андрей Марков (1856–1922) — російський математик

# Теорема 2.32 (Нерівність Маркова (Markov's inequality)<sup>13</sup>)

- ullet Нехай  $g:\mathbb{R} o [0;\infty)$  неспадна вимірна функція
- ullet Тоді для **будь-якої** випадкової величини X має місце

$$\mathbb{P}_{X}\left(X \geq c\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[g(X)\right]}{g(c)} \;, \qquad c > 0 \tag{2.35}$$

• Класичне формулювання, якщо  $X \geq 0$  майже напевно, а g(x) = x:

$$\mathbb{P}_{X}(X \ge c) \le \frac{\mathbb{E}[X]}{c}, \qquad c > 0$$
 (2.36)

ullet Можна прибрати вимогу про невід'ємність величини X, розглянувши |X|:

$$\mathbb{P}_{X}\left(|X| \ge c\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[|X|\right]}{c}, \quad c > 0$$

• Або, що те ж саме:

$$\mathbb{P}_{X}\left(|X| \geq c \cdot \mathbb{E}\left[|X|\right]\right) \leq \frac{1}{c} \;, \qquad c > 0$$

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>Андрей Марков (1856–1922) — російський математик

# Теорема 2.32 (Нерівність Маркова (Markov's inequality)<sup>13</sup>)

- ullet Нехай  $g:\mathbb{R} o [0;\infty)$  неспадна вимірна функція
- ullet Тоді для **будь-якої** випадкової величини X має місце

$$\mathbb{P}_{X}\left(X \geq c\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[g(X)\right]}{g(c)} \;, \qquad c > 0 \tag{2.35}$$

• Класичне формулювання, якщо  $X \geq 0$  майже напевно, а g(x) = x:

$$\mathbb{P}_{X}(X \ge c) \le \frac{\mathbb{E}[X]}{c}, \qquad c > 0$$
 (2.36)

ullet Можна прибрати вимогу про невід'ємність величини X, розглянувши |X|:

$$\mathbb{P}_{X}\left(|X| \geq c\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X|\right]}{c} \;, \qquad c > 0$$

• Або, що те ж саме:

$$\mathbb{P}_{X}\left(|X| \ge c \cdot \mathbb{E}\left[|X|\right]\right) \le \frac{1}{c} \;, \qquad c > 0$$

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>Андрей Марков (1856–1922) — російський математик

# Теорема 2.32 (Нерівність Маркова (Markov's inequality)<sup>13</sup>)

- ullet Нехай  $g:\mathbb{R} o [0;\infty)$  неспадна вимірна функція
- ullet Тоді для **будь-якої** випадкової величини X має місце

$$\mathbb{P}_{X}\left(X \geq c\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[g(X)\right]}{g(c)} \;, \qquad c > 0 \tag{2.35}$$

• Класичне формулювання, якщо  $X \geq 0$  майже напевно, а g(x) = x:

$$\mathbb{P}_X(X \ge c) \le \frac{\mathbb{E}[X]}{c}, \qquad c > 0$$
 (2.36)

• Можна прибрати вимогу про невід'ємність величини X, розглянувши |X|:

$$\mathbb{P}_{X}\left(|X| \ge c\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[|X|\right]}{c} \;, \qquad c > 0$$

Або, що те ж саме:

$$\mathbb{P}_{X}\left(|X| \geq c \cdot \mathbb{E}\left[|X|\right]\right) \leq \frac{1}{c} \;, \qquad c > 0$$

 $<sup>^{13}</sup>$ Андрей Марков (1856–1922) — російський математик

 Чи не найважливішим наслідком нерівности Маркова є нерівність Чебишова (Chebyshev's inequality)<sup>14</sup>:

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq c\right)\leq\frac{\mathrm{Var}\left(X\right)}{c^{2}}\;,\qquad c>0 \tag{2.37}$$

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq c\cdot\sigma_{X}
ight)\leq\frac{1}{c^{2}}\;,\qquad c>0$$

- Випадкова величина не може суттєво відхилятися від свого сподівання на леяку вілстань, що вимірюється в середньоквалратичних відхиляннях
- Якщо порівняти нерівності Маркова й Чебишова, то нерівність Чебишова пропонує точнішу оцінку
- Проте вона вимагає існування скінченної дисперсії (Марков вимагає тільки існування скінченного сподівання)

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup>Пафнутій Чебишов (1821–1894) — російський математик

 Чи не найважливішим наслідком нерівности Маркова є нерівність Чебишова (Chebyshev's inequality)<sup>14</sup>:

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq c\right)\leq\frac{\mathrm{Var}\left(X\right)}{c^{2}}\;,\qquad c>0\tag{2.37}$$

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq c\cdot\sigma_{X}\right)\leq\frac{1}{c^{2}}\;,\qquad c>0$$

- Випадкова величина не може суттєво відхилятися від свого сподівання на деяку відстань, що вимірюється в середньоквадратичних відхиляннях
- Якщо порівняти нерівності Маркова й Чебишова, то нерівність Чебишова пропонує точнішу оцінку
- Проте вона вимагає існування скінченної дисперсії (Марков вимагає тільки існування скінченного сподівання)

 $<sup>^{14}</sup>$ Пафнутій Чебишов (1821–1894) — російський математик

• Чи не **найважливішим** наслідком нерівности Маркова  $\epsilon$  **нерівність Чебишова** (Chebyshev's inequality)<sup>14</sup>:

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq c\right)\leq\frac{\mathrm{Var}\left(X\right)}{c^{2}}\;,\qquad c>0\tag{2.37}$$

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq c\cdot\sigma_{X}\right)\leq\frac{1}{c^{2}}\;,\qquad c>0$$

- Випадкова величина не може суттєво відхилятися від свого сподівання на деяку відстань, що вимірюється в середньоквадратичних відхиляннях
- Якщо порівняти нерівності Маркова й Чебишова, то нерівність Чебишова пропонує точнішу оцінку
- Проте вона вимагає існування скінченної дисперсії (Марков вимагає тільки існування скінченного сподівання)

 $<sup>^{14}</sup>$ Пафнутій Чебишов (1821–1894) — російський математик

• Чи не **найважливішим** наслідком нерівности Маркова  $\epsilon$  **нерівність Чебишова** (Chebyshev's inequality)  $^{14}$ :

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq c\right)\leq\frac{\mathrm{Var}\left(X\right)}{c^{2}}\;,\qquad c>0\tag{2.37}$$

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq c\cdot\sigma_{X}\right)\leq\frac{1}{c^{2}}\;,\qquad c>0$$

- Випадкова величина не може суттєво відхилятися від свого сподівання на деяку відстань, що вимірюється в середньоквадратичних відхиляннях
- Якщо порівняти нерівності Маркова й Чебишова, то нерівність Чебишова пропонує точнішу оцінку
- Проте вона вимагає існування скінченної дисперсії (Марков вимагає тільки існування скінченного сподівання)

 $<sup>^{14}</sup>$ Пафнутій Чебишов (1821–1894) — російський математик

• Чи не **найважливішим** наслідком нерівности Маркова  $\epsilon$  **нерівність Чебишова** (Chebyshev's inequality)<sup>14</sup>:

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq c\right)\leq\frac{\mathrm{Var}\left(X\right)}{c^{2}}\;,\qquad c>0\tag{2.37}$$

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq c\cdot\sigma_{X}\right)\leq\frac{1}{c^{2}}\;,\qquad c>0$$

- Випадкова величина не може суттєво відхилятися від свого сподівання на деяку відстань, що вимірюється в середньоквадратичних відхиляннях
- Якщо порівняти нерівності Маркова й Чебишова, то нерівність Чебишова пропонує точнішу оцінку
- Проте вона вимагає існування скінченної дисперсії (Марков вимагає тільки існування скінченного сподівання)

 $<sup>^{14}</sup>$ Пафнутій Чебишов (1821–1894) — російський математик

# Теорема 2.33

- ullet Нехай X і Y дві незалежні випадкові величини
- ullet Нехай  $f,g:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  вимірні функції такі, що вони невід'ємні чи інтегровні
- Toz

$$\mathbb{E}\left[f(X)g(Y)\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\right]\mathbb{E}\left[g(Y)\right] \tag{2.38}$$

 $lackbr{\bullet}$  Частковий випадок: якщо  $X_1,\ldots,X_k$  незалежні, невід'ємні чи інтегровні, то

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} X_i\right] = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[X_i\right] \tag{2.39}$$

# Теорема 2.33

- ullet Нехай X і Y дві незалежні випадкові величини
- ullet Нехай  $f,g:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  вимірні функції такі, що вони невід'ємні чи інтегровні

• Тод

$$\mathbb{E}\left[f(X)g(Y)\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\right]\mathbb{E}\left[g(Y)\right] \tag{2.38}$$

ullet Частковий випадок: якщо  $X_1,\ldots,X_k$  незалежні, невід'ємні чи інтегровні, то

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} X_i\right] = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[X_i\right] \tag{2.39}$$

## Теорема 2.33

- ullet Нехай X і Y дві незалежні випадкові величини
- ullet Нехай  $f,g:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  вимірні функції такі, що вони невід'ємні чи інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[f(X)g(Y)\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\right]\mathbb{E}\left[g(Y)\right] \tag{2.38}$$

• Частковий випадок: якщо  $X_1, \dots, X_k$  незалежні, невід'ємні чи інтегровні, то

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} X_i\right] = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[X_i\right]$$
 (2.39)

# Теорема 2.33

- ullet Нехай X і Y дві незалежні випадкові величини
- ullet Нехай  $f,g:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  вимірні функції такі, що вони невід'ємні чи інтегровні
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[f(X)g(Y)\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\right]\mathbb{E}\left[g(Y)\right] \tag{2.38}$$

 $\bullet\,$  Частковий випадок: якщо  $X_1,\ldots,X_k$  незалежні, невід'ємні чи інтегровні, то

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} X_i\right] = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[X_i\right]$$
 (2.39)

# Сподівання випадкового вектора

### Визначення 2.34

**Сподіванням** (expectation) випадкового вектора  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^\top : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^k$  є вектор

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left[X_{1}\right] \\ \vdots \\ \mathbb{E}\left[X_{k}\right] \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

• За властивістю лінійности (одновимірного) сподівання:

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}\right] = \mathbf{A}\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right] + \mathbf{b} , \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k , \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$
 (2.41)

# Сподівання випадкового вектора

#### Визначення 2.34

Сподіванням (expectation) випадкового вектора

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^{ op} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) op \mathbb{R}^k$$
 є вектор

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left[X_{1}\right] \\ \vdots \\ \mathbb{E}\left[X_{k}\right] \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

• За властивістю лінійности (одновимірного) сподівання:

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}\right] = \mathbf{A}\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right] + \mathbf{b} , \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k , \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$
 (2.41)

#### Визначення 2.35

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right])(Y-\mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- ullet За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:

- ullet Можна довести, що якщо  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , то  ${\sf Cov}\,(X,Y) = 0$
- Такі випадкові величини називають некорельованими (uncorrelated)
- При цьому дуже важливо пам'ятати, що зворотне твердження в загальному випалку несправедливе

### Визначення 2.35

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right])(Y-\mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:

- - Данило Тавров

### Визначення 2.35

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right])(Y-\mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- ullet За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:
  - $\bullet$  Cov (X, Y) = Cov(Y, X)



### Визначення 2.35

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right])(Y-\mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- ullet За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:
  - $\bullet \ \operatorname{Cov} (X,Y) = \operatorname{Cov} (Y,X)$
  - $\bullet$  Cov (X, X) = Var(X)
  - $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
  - $Cov(X, a) = 0, a \in I$
  - Cov (aX + bY, cV + dW) =
  - acCov(X|V) + adCov(X|W)
  - $\bullet \operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X)$
- $\operatorname{var}\left(\sum_{i=1} X_i\right) = \sum_{i=1} \operatorname{var}\left(X_i\right) + 2\sum_{i < j < j} X_i$
- ullet Можна довести, що якщо  $X \perp \!\!\! \perp Y$ , то  $\mathrm{Cov}(X,Y) = {}^{\mathrm{Total}}$
- При цьому дуже важливо пам'я
  - Данило Тавров

### Визначення 2.35

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right])(Y-\mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- ullet За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:
  - $\bullet$  Cov (X,Y) = Cov(Y,X)
  - $\bullet$  Cov (X, X) = Var(X)
  - $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$
  - Cov  $(X, a) = 0, a \in \mathbb{R}$

### Визначення 2.35

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right])(Y-\mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- ullet За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:
  - $\bullet \ \operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = \operatorname{Cov}\left(Y,X\right)$
  - $\bullet$  Cov (X,X) = Var(X)
  - $\bullet \ \operatorname{Cov} \left( X,Y \right) = \mathbb{E} \left[ XY \right] \mathbb{E} \left[ X \right] \mathbb{E} \left[ Y \right]$
  - $\operatorname{Cov}(X,a) = 0, a \in \mathbb{R}$
  - $\operatorname{Cov}(aX + bY, cV + dW) = ac\operatorname{Cov}(X, V) + ad\operatorname{Cov}(X, W) + bc\operatorname{Cov}(Y, V) + bd\operatorname{Cov}(Y, W)$
  - Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)
  - $\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1} X_i\right) = \sum_{i=1} \operatorname{Var}\left(X_i\right) + 2\sum_{i < j} \operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right)$
- ullet Можна довести, що якщо  $A\perp\!\!\!\!\perp Y$  , то  $\mathsf{Lov}\left(A,Y\right)=0$
- При цьому дуже важливо пам'ятати, що зворотне твердження в загальному видалку несправедливе

#### Визначення 2.35

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right])(Y-\mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- ullet За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:
  - $\bullet \ \operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = \operatorname{Cov}\left(Y,X\right)$
  - $\bullet \; \operatorname{Cov}(X,X) = \operatorname{Var}(X)$
  - $\bullet \ \operatorname{Cov} \left( X,Y \right) = \mathbb{E} \left[ XY \right] \mathbb{E} \left[ X \right] \mathbb{E} \left[ Y \right]$
  - Cov  $(X, a) = 0, a \in \mathbb{R}$
  - $\begin{array}{l} \bullet \ \operatorname{Cov}\left(aX+bY,cV+dW\right) = \\ ac\operatorname{Cov}\left(X,V\right) + ad\operatorname{Cov}\left(X,W\right) + bc\operatorname{Cov}\left(Y,V\right) + bd\operatorname{Cov}\left(Y,W\right) \end{array}$
  - Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)
  - $\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\kappa} \operatorname{Var}\left(X_i\right) + 2\sum_{i < j} \operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right)$
- ullet Можна довести, що якщо  $X \perp \!\!\! \perp Y$ , то  ${\sf Cov}\,(X,Y) = 0$
- При цьому дуже важливо пам'ятати, що зворотне твердження в загальному випадку несправедливе

#### Визначення 2.35

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right])(Y-\mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- ullet За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:
  - $\bullet$  Cov (X,Y) = Cov(Y,X)
  - $\bullet$  Cov (X, X) = Var(X)
  - $\bullet \ \operatorname{Cov} \left( X,Y \right) = \mathbb{E} \left[ XY \right] \mathbb{E} \left[ X \right] \mathbb{E} \left[ Y \right]$
  - Cov (X,a)=0,  $a\in\mathbb{R}$
  - $\bullet$  Cov (aX + bY, cV + dW) =acCov(X, V) + adCov(X, W) + bcCov(Y, V) + bdCov(Y, W)
  - Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)
  - $\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Var}\left(X_i\right) + 2\sum_{i < j} \operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right)$

#### Визначення 2.35

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right])(Y-\mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- ullet За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:
  - $\bullet \ \operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = \operatorname{Cov}\left(Y,X\right)$
  - $\bullet$  Cov (X, X) = Var(X)
  - $\bullet \ \operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = \mathbb{E}\left[XY\right] \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]$
  - Cov (X,a)=0,  $a\in\mathbb{R}$
  - Cov (aX + bY, cV + dW) =
    - $ac \mathsf{Cov}\left(X,V\right) + ad \mathsf{Cov}\left(X,W\right) + bc \mathsf{Cov}\left(Y,V\right) + bd \mathsf{Cov}\left(Y,W\right)$
  - $\bullet \ \operatorname{Var}\left(X+Y\right) = \operatorname{Var}\left(X\right) + \operatorname{Var}\left(Y\right) + 2\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)$
  - $\bullet \ \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{k}X_{i}\right)=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Var}\left(X_{i}\right)+2\sum_{i< j}\operatorname{Cov}\left(X_{i},X_{j}\right)$
- lacktriangle Можна довести, що якщо  $X \perp \!\!\! \perp Y$ , то  $\mathsf{Cov}\left(X,Y
  ight) = 0$
- Такі випадкові величини називають **некорельованими** (uncorrelated
- При цьому дуже важливо пам'ятати, що зворотне твердження в загальному випадку несправедливе

#### Визначення 2.35

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right])(Y-\mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- ullet За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:
  - $\bullet \ \operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = \operatorname{Cov}\left(Y,X\right)$
  - $\bullet$  Cov (X, X) = Var(X)
  - $\bullet \ \operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = \mathbb{E}\left[XY\right] \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]$
  - Cov (X, a) = 0,  $a \in \mathbb{R}$
  - Cov (aX + bY, cV + dW) =
    - $ac \operatorname{Cov}(X,V) + ad \operatorname{Cov}(X,W) + bc \operatorname{Cov}(Y,V) + bd \operatorname{Cov}(Y,W)$
  - $\bullet \ \operatorname{Var}\left(X+Y\right) = \operatorname{Var}\left(X\right) + \operatorname{Var}\left(Y\right) + 2\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)$
  - $\bullet \ \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{k}X_{i}\right)=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Var}\left(X_{i}\right)+2\sum_{i< j}\operatorname{Cov}\left(X_{i},X_{j}\right)$
- $\bullet$  Можна довести, що якщо  $X \perp \!\!\! \perp Y$  , то  $\operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = 0$
- Такі випадкові величини називають **некорельованими** (uncorrelated
- При цьому дуже важливо пам'ятати, що зворотне твердження в загальному випадку несправедливе

## Коваріація

### Визначення 2.35

Коваріацією (covariance) двох випадкових величин X і Y є

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right])(Y-\mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- ullet За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:
  - $\bullet \ \operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = \operatorname{Cov}\left(Y,X\right)$
  - $\bullet$  Cov (X, X) = Var(X)
  - $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$
  - Cov (X,a)=0,  $a\in\mathbb{R}$
  - Cov (aX + bY, cV + dW) =
    - acCov(X, V) + adCov(X, W) + bcCov(Y, V) + bdCov(Y, W)
  - $\bullet \ \operatorname{Var}\left(X+Y\right) = \operatorname{Var}\left(X\right) + \operatorname{Var}\left(Y\right) + 2\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)$
  - $\bullet \ \mbox{Var}\left(\sum_{i=1}^{k}X_{i}\right)=\sum_{i=1}^{k}\mbox{Var}\left(X_{i}\right)+2\sum_{i< j}\mbox{Cov}\left(X_{i},X_{j}\right)$
- ullet Можна довести, що якщо  $X \perp \!\!\! \perp Y$ , то  $\operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = 0$
- Такі випадкові величини називають некорельованими (uncorrelated)
- При цьому дуже важливо пам'ятати, що зворотне твердження в загальному випадку несправедливе

## Коваріація

### Визначення 2.35

Коваріацією (covariance) двох випадкових величин X і Y є

$$\operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])(Y - \mathbb{E}\left[Y\right])\right] \tag{2.42}$$

- За аналогією з позначенням дисперсії  $\sigma_X^2$ , коваріацію часто позначають як  $\sigma_{XY}$
- Можна довести такі властивості коваріацій:
  - $\bullet \ \operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = \operatorname{Cov}\left(Y,X\right)$
  - $\bullet$  Cov (X, X) = Var(X)
  - $\bullet \ \operatorname{Cov} \left( X,Y \right) = \mathbb{E} \left[ XY \right] \mathbb{E} \left[ X \right] \mathbb{E} \left[ Y \right]$
  - $\operatorname{Cov}(X, a) = 0, a \in \mathbb{R}$
  - Cov (aX + bY, cV + dW) =
    - acCov(X, V) + adCov(X, W) + bcCov(Y, V) + bdCov(Y, W)
  - $\bullet \ \operatorname{Var}\left(X+Y\right) = \operatorname{Var}\left(X\right) + \operatorname{Var}\left(Y\right) + 2\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)$
  - $\bullet \ \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{k}X_{i}\right)=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Var}\left(X_{i}\right)+2\sum_{i< j}\operatorname{Cov}\left(X_{i},X_{j}\right)$
- $\bullet$  Можна довести, що якщо  $X \perp \!\!\! \perp Y$  , то  $\operatorname{Cov}\left(X,Y\right) = 0$
- Такі випадкові величини називають некорельованими (uncorrelated)
- При цьому дуже важливо пам'ятати, що зворотне твердження в загальному випадку несправедливе

#### Визначення 2.36

Коефіцієнтом кореляції (correlation) X та Y  $\varepsilon$ 

$$\operatorname{Corr}\left(X,Y\right) = \frac{\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(X\right)\operatorname{Var}\left(Y\right)}} \tag{2.43}$$

- Коефіцієнт кореляції часто позначають як  $ho_{XY}$
- ullet Можна показати, що  $ho_{XY} \in [-1;1]$
- ullet Коваріація Cov (X,Y) показує ступінь **лінійного** зв'язку між X та Y

• Аналогічно для Согг (X,Y): що ближчі значення Согг (X,Y) за модулем до 1, то сильніша лінійна залежність

#### Визначення 2.36

Коефіцієнтом кореляції (correlation) X та Y  $\varepsilon$ 

$$\operatorname{Corr}\left(X,Y\right) = \frac{\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(X\right)\operatorname{Var}\left(Y\right)}} \tag{2.43}$$

- ullet Коефіцієнт кореляції часто позначають як  $ho_{XY}$
- ullet Можна показати, що  $ho_{XY} \in [-1;1]$
- ullet Коваріація Cov (X,Y) показує ступінь **лінійного** зв'язку між X та Y

• Аналогічно для Согг (X,Y): що ближчі значення Согг (X,Y) за модулем до 1, то сильніша лінійна залежність

#### Визначення 2.36

$$\operatorname{Corr}\left(X,Y\right) = \frac{\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(X\right)\operatorname{Var}\left(Y\right)}} \tag{2.43}$$

- ullet Коефіцієнт кореляції часто позначають як  $ho_{XY}$
- ullet Можна показати, що  $ho_{XY} \in [-1;1]$
- Коваріація Соу (X,Y) показує ступінь **лінійного** зв'язку між X та Y

#### Визначення 2.36

$$\operatorname{Corr}\left(X,Y\right) = \frac{\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(X\right)\operatorname{Var}\left(Y\right)}} \tag{2.43}$$

- ullet Коефіцієнт кореляції часто позначають як  $ho_{XY}$
- ullet Можна показати, що  $ho_{XY} \in [-1;1]$
- Коваріація Соу (X,Y) показує ступінь **лінійного** зв'язку між X та Y
  - Якщо Соv (X,Y)>0, то між величинами існує **додатний** лінійний зв'язок: **більші** значення однієї величини свідчать про **більші** значення іншої
  - Якщо  ${\sf Cov}\left(X,Y\right)<0$ , то між величинами існує **від'ємний** лінійний зв'язок: **більш**і значення однієї величини свідчать про **менші** значення іншої
  - Якщо Cov(X,Y) = 0, то **лінійного** зв'язку між величинами **немає**
- Аналогічно для  ${\rm Corr}\,(X,Y)$ : що ближчі значення  ${\rm Corr}\,(X,Y)$  за модулем до 1, то сильніша лінійна залежність

#### Визначення 2.36

$$\operatorname{Corr}\left(X,Y\right) = \frac{\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(X\right)\operatorname{Var}\left(Y\right)}} \tag{2.43}$$

- ullet Коефіцієнт кореляції часто позначають як  $ho_{XY}$
- ullet Можна показати, що  $ho_{XY} \in [-1;1]$
- - Якщо Cov (X,Y)>0, то між величинами існує **додатний** лінійний зв'язок: **більші** значення однієї величини свідчать про **більші** значення іншої
  - Якщо Cov (X,Y)<0, то між величинами існує від'ємний лінійний зв'язок: більші значення однієї величини свідчать про менші значення іншої
  - Якщо Cov(X,Y) = 0, то **лінійного** зв'язку між величинами **немає**
- Аналогічно для Согг (X,Y): що ближчі значення Согг (X,Y) за модулем до 1, то сильніша лінійна залежність

#### Визначення 2.36

$$\operatorname{Corr}\left(X,Y\right) = \frac{\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(X\right)\operatorname{Var}\left(Y\right)}} \tag{2.43}$$

- ullet Коефіцієнт кореляції часто позначають як  $ho_{XY}$
- ullet Можна показати, що  $ho_{XY} \in [-1;1]$
- ullet Коваріація Cov (X,Y) показує ступінь **лінійного** зв'язку між X та Y
  - Якщо Cov (X,Y)>0, то між величинами існує **додатний** лінійний зв'язок: **більші** значення однієї величини свідчать про **більші** значення іншої
  - Якщо Соv (X,Y)<0, то між величинами існує від'ємний лінійний зв'язок: більші значення однієї величини свідчать про менші значення іншої
  - Якщо Cov(X,Y) = 0, то **лінійного** зв'язку між величинами **немає**
- Аналогічно для Согг (X,Y): що ближчі значення Согг (X,Y) за модулем до 1, то сильніша лінійна залежність

#### Визначення 2.36

$$\operatorname{Corr}\left(X,Y\right) = \frac{\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(X\right)\operatorname{Var}\left(Y\right)}} \tag{2.43}$$

- ullet Коефіцієнт кореляції часто позначають як  $ho_{XY}$
- ullet Можна показати, що  $ho_{XY} \in [-1;1]$
- - Я́кщо Cov (X,Y)>0, то між величинами існує **додатний** лінійний зв'язок: **більші** значення однієї величини свідчать про **більші** значення іншої
  - Якщо Соv (X,Y)<0, то між величинами існує від'ємний лінійний зв'язок: більші значення однієї величини свідчать про менші значення іншої
  - Якщо Cov (X,Y)=0, то **лінійного** зв'язку між величинами **немає**
- Аналогічно для Согг (X,Y): що ближчі значення Согг (X,Y) за модулем до 1, то сильніша лінійна залежність

#### Визначення 2.36

$$\operatorname{Corr}\left(X,Y\right) = \frac{\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(X\right)\operatorname{Var}\left(Y\right)}} \tag{2.43}$$

- ullet Коефіцієнт кореляції часто позначають як  $ho_{XY}$
- ullet Можна показати, що  $ho_{XY} \in [-1;1]$
- ullet Коваріація Cov (X,Y) показує ступінь **лінійного** зв'язку між X та Y
  - Я́кщо Cov (X,Y)>0, то між величинами існує **додатний** лінійний зв'язок: **більші** значення однієї величини свідчать про **більші** значення іншої
  - Якщо Соv (X,Y)<0, то між величинами існує від'ємний лінійний зв'язок: більші значення однієї величини свідчать про менші значення іншої
  - Якщо Cov (X,Y)=0, то **лінійного** зв'язку між величинами **немає**
- Аналогічно для  ${\rm Corr}\,(X,Y)$ : що ближчі значення  ${\rm Corr}\,(X,Y)$  за модулем до 1, то сильніша лінійна залежність

#### Визначення 2.37

- ullet Нехай  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{ op}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^k$  деякий випадковий вектор
- Тоді його матрицею коваріацій (covariance matrix) є матриця

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}\right) &= \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])(\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])^{\top}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Var}\left(X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{k}\right) \\ \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{1}\right) & \operatorname{Var}\left(X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{k}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Var}\left(X_{k}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Можна показати, що матриця коваріацій має такі властивості

Concerporations 51 — 51
 Con (ASC 1 b) — 6 V 6 I

Monty come manuscript a  $^{T}\Sigma n \geq 0$  ,  $n \in \mathbb{R}^{n}$ 

- Нехай  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^\top : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^k$  деякий випадковий вектор
- Тоді його матрицею коваріацій (covariance matrix) є матриця

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}\right) &= \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])(\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])^{\top}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Var}\left(X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{k}\right) \\ \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{1}\right) & \operatorname{Var}\left(X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{k}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Var}\left(X_{k}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- ullet Нехай  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{ op}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^k$  деякий випадковий вектор
- Тоді його **матрицею коваріацій** (covariance matrix) є матриця

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}\right) &= \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])(\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])^{\top}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Var}\left(X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{k}\right) \\ \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{1}\right) & \operatorname{Var}\left(X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{k}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Var}\left(X_{k}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Можна показати, що матриця коваріацій має такі властивості:
  - Симетричність:  $\Sigma^{\top} = \Sigma$
  - Cov  $(\mathbf{AX} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}$
  - Невіл'ємна визначеність:  $\mathbf{a}^{\top} \Sigma \mathbf{a} > 0$   $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$

- ullet Нехай  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{ op}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^k$  деякий випадковий вектор
- Тоді його **матрицею коваріацій** (covariance matrix) є матриця

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}\right) &= \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])(\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])^{\top}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Var}\left(X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{k}\right) \\ \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{1}\right) & \operatorname{Var}\left(X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{k}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Var}\left(X_{k}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Можна показати, що матриця коваріацій має такі властивості:
  - ullet Симетричність:  $\Sigma^{\top} = \Sigma$
  - Cov  $(AX + b) = A\Sigma A$
  - Невід'ємна визначеність:  $\mathbf{a}^{\top} \Sigma \mathbf{a} > 0$ .  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$

- ullet Нехай  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{ op}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^k$  деякий випадковий вектор
- Тоді його **матрицею коваріацій** (covariance matrix) є матриця

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}\right) &= \mathbb{E}\left[(\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])(\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])^{\top}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Var}\left(X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{k}\right) \\ \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{1}\right) & \operatorname{Var}\left(X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{k}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Var}\left(X_{k}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Можна показати, що матриця коваріацій має такі властивості:
  - ullet Симетричність:  $\Sigma^{\top} = \Sigma$
  - Cov  $(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^{\top}$
  - ullet Невід'ємна визначеність:  $\mathbf{a}^{ op} \Sigma \mathbf{a} \geq 0$  ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$

- ullet Нехай  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{ op}:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) o\mathbb{R}^k$  деякий випадковий вектор
- Тоді його **матрицею коваріацій** (covariance matrix) є матриця

$$\begin{split} \mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}\right) &= \mathbb{E}\left[ (\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])(\mathbf{X} - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right])^{\top} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Var}\left(X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{1}, X_{k}\right) \\ \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{1}\right) & \operatorname{Var}\left(X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Cov}\left(X_{2}, X_{k}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{1}\right) & \operatorname{Cov}\left(X_{k}, X_{2}\right) & \dots & \operatorname{Var}\left(X_{k}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Можна показати, що матриця коваріацій має такі властивості:
  - ullet Симетричність:  $\Sigma^{ op} = \Sigma$
  - Cov  $(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^{\top}$
  - ullet Невід'ємна визначеність:  $\mathbf{a}^{ op} \Sigma \mathbf{a} \geq 0$  ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$

- Нехай випадкові величини X та Z мають неперервний спільний розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Нехай функція g(Z) інтегровна
- ullet Тоді **умовне сподівання** (conditional expectation) g(Z) за умови X дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \int_{-\infty}^{\infty}g(z)\cdot f_{Z\mid X}(z\mid x)\,dz \tag{2.45}$$

- ullet Варто звернути увагу, що умовне сподівання є **функцією від** z, а не сталою
- Тобто умовне сподівання є випадковою величиною
- Для дискретної величини маємо

$$\mathbb{E}[g(Z)\mid X=x] = \sum_{z\in \mathrm{supp}(Z)} g(z) \mathbb{P}\left(Z=z\mid X=x\right)$$

- ullet Нехай події  $B_1, B_2, ...$  утворюють не більш ніж зліченне розбиття  $\Omega$
- Тоді умовне сподівання

$$\mathbb{E}\left[X\mid B_{i}\right] = \frac{\displaystyle\int_{B_{i}} X\,d\mathbb{P}}{\mathbb{P}\left(B_{i}\right)}$$

(2.46)

ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(B_{\varepsilon}\right)=0$ , то (стале) значення  $\mathbb{E}\left[X\mid B_{\varepsilon}\right]$  може бути довільне

- Нехай випадкові величини X та Z мають неперервний спільний розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Нехай функція g(Z) інтегровна
- Тоді **умовне сподівання** (conditional expectation) g(Z) за умови X дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \cdot f_{Z\mid X}(z\mid x) \, dz \tag{2.45}$$

- ullet Варто звернути увагу, що умовне сподівання є **функцією від** z, а не сталою
- Тобто умовне сподівання є випадковою величиною
- Для дискретної величини маємо

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \sum_{z\in \mathrm{supp}(Z)} g(z) \mathbb{P}\left(Z=z\mid X=x\right)$$

- Нехай події  $B_1, B_2, \dots$  утворюють не більш ніж зліченне розбиття  $\Omega$
- Тоді умовне сподівання

$$\mathbb{E}\left[X\mid B_{i}\right] = \frac{\int_{B_{i}}X\,d\mathbb{P}}{\mathbb{P}\left(B_{i}\right)}$$

(2.46)

ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(B_{i}\right)=0$ , то (стале) значення  $\mathbb{E}\left[X\mid B_{i}\right]$  може бути довільне

- Нехай випадкові величини X та Z мають неперервний спільний розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Нехай функція g(Z) інтегровна
- ullet Тоді **умовне сподівання** (conditional expectation) g(Z) за умови X дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \cdot f_{Z\mid X}(z\mid x) \, dz \tag{2.45}$$

- ullet Варто звернути увагу, що умовне сподівання є **функцією від** z, а не сталою
- Тобто умовне сподівання є випадковою величиною
- Для дискретної величини маємо

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \sum_{z\in \mathrm{supp}(Z)} g(z) \mathbb{P}\left(Z=z\mid X=x\right)$$

- Нехай події  $B_1, B_2, \dots$  утворюють не більш ніж зліченне розбиття  $\Omega$
- Тоді умовне сподівання

$$\mathbb{E}\left[X\mid B_{i}\right] = \frac{\int_{B_{i}}X\,d\mathbb{P}}{\mathbb{P}\left(B_{i}\right)}$$

(2.46)

ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(B_{i}
ight)=0$ , то (стале) значення  $\mathbb{E}\left[X\mid B_{i}
ight]$  може бути довільне

- Нехай випадкові величини X та Z мають неперервний спільний розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Нехай функція g(Z) інтегровна
- ullet Тоді **умовне сподівання** (conditional expectation) g(Z) за умови X дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \int_{-\infty}^{\infty}g(z)\cdot f_{Z\mid X}(z\mid x)\,dz \tag{2.45}$$

- ullet Варто звернути увагу, що умовне сподівання є **функцією від** z, а не сталою
- Тобто умовне сподівання є випадковою величиною!
- Для дискретної величини маємо

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \sum_{z\in \mathrm{supp}(Z)} g(z) \mathbb{P}\left(Z=z\mid X=x\right)$$

- ullet Нехай події  $B_1, B_2, ...$  утворюють не більш ніж зліченне розбиття  $\Omega$
- Тоді умовне сподівання

$$\mathbb{E}\left[X\mid B_{i}\right] = \frac{\int_{B_{i}}X\,d\mathbb{P}}{\mathbb{P}\left(B_{i}\right)}$$

ullet Якшо  $\mathbb{P}\left(B_{i}\right)=0$ , то (стале) значення  $\mathbb{E}\left[X\mid B_{i}\right]$  може бути довільне

- ullet Нехай випадкові величини X та Z мають неперервний спільний розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Нехай функція g(Z) інтегровна
- ullet Тоді **умовне сподівання** (conditional expectation) g(Z) за умови X дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \int_{-\infty}^{\infty}g(z)\cdot f_{Z\mid X}(z\mid x)\,dz \tag{2.45}$$

- Варто звернути увагу, що умовне сподівання є **функцією від** z, а не сталою
- Тобто умовне сподівання є випадковою величиною!
- Для дискретної величини маємо

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \sum_{z\in \mathrm{supp}(Z)} g(z) \mathbb{P}\left(Z=z\mid X=x\right)$$

- ullet Нехай події  $B_1,B_2,...$  утворюють не більш ніж зліченне розбиття  $\Omega$
- Тоді умовне сподівання

$$\mathbb{E}\left[X\mid B_{i}\right] = \frac{\displaystyle\int_{B_{i}} X\,d\mathbb{P}}{\mathbb{P}\left(B_{i}\right)}$$

(2.46

lacksquare Якщо  $\mathbb{P}\left(B_{i}
ight)=0$ , то (стале) значення  $\mathbb{E}\left[X\mid B_{i}
ight]$  може бути довільне

- ullet Нехай випадкові величини X та Z мають неперервний спільний розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Нехай функція g(Z) інтегровна
- ullet Тоді **умовне сподівання** (conditional expectation) g(Z) за умови X дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \int_{-\infty}^{\infty}g(z)\cdot f_{Z\mid X}(z\mid x)\,dz \tag{2.45}$$

- Варто звернути увагу, що умовне сподівання є **функцією від** z, а не сталою
- Тобто умовне сподівання є випадковою величиною!
- Для дискретної величини маємо

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \sum_{z\in \mathrm{supp}(Z)} g(z) \mathbb{P}\left(Z=z\mid X=x\right)$$

- ullet Нехай події  $B_1,B_2,\ldots$  утворюють не більш ніж зліченне розбиття  $\Omega$
- Тоді умовне сподівання

$$\mathbb{E}[X \mid B_i] = \frac{\int_{B_i} X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(B_i)} \tag{2}$$

ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(B_i
ight)=0$ , то (стале) значення  $\mathbb{E}\left[X\mid B_i
ight]$  може бути довільне

- ullet Нехай випадкові величини X та Z мають неперервний спільний розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Нехай функція g(Z) інтегровна
- ullet Тоді **умовне сподівання** (conditional expectation) g(Z) за умови X дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \int_{-\infty}^{\infty}g(z)\cdot f_{Z\mid X}(z\mid x)\,dz \tag{2.45}$$

- ullet Варто звернути увагу, що умовне сподівання  $\epsilon$  **функцією від** z, а не сталою
- Тобто умовне сподівання є випадковою величиною!
- Для дискретної величини маємо

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \sum_{z\in \mathrm{supp}(Z)} g(z) \mathbb{P}\left(Z=z\mid X=x\right)$$

- ullet Нехай події  $B_1,B_2,\ldots$  утворюють не більш ніж зліченне розбиття  $\Omega$
- Тоді умовне сподівання

$$\mathbb{E}\left[X \mid B_i\right] = \frac{\int_{B_i} X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}\left(B_i\right)} \tag{2.46}$$

ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(B_i
ight)=0$ , то (стале) значення  $\mathbb{E}\left[X\mid B_i
ight]$  може бути довільне

- ullet Нехай випадкові величини X та Z мають неперервний спільний розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Нехай функція g(Z) інтегровна
- ullet Тоді **умовне сподівання** (conditional expectation) g(Z) за умови X дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \int_{-\infty}^{\infty}g(z)\cdot f_{Z\mid X}(z\mid x)\,dz \tag{2.45}$$

- Варто звернути увагу, що умовне сподівання є **функцією від** z, а не сталою
- Тобто умовне сподівання є випадковою величиною!
- Для дискретної величини маємо

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \sum_{z\in \mathrm{supp}(Z)} g(z) \mathbb{P}\left(Z=z\mid X=x\right)$$

- ullet Нехай події  $B_1,B_2,\ldots$  утворюють не більш ніж зліченне розбиття  $\Omega$
- Тоді умовне сподівання

$$\mathbb{E}\left[X \mid B_i\right] = \frac{\int_{B_i} X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}\left(B_i\right)} \tag{2.46}$$

ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(B_{i}
ight)=0$ , то (стале) значення  $\mathbb{E}\left[X\mid B_{i}
ight]$  може бути довільне

- ullet Нехай випадкові величини X та Z мають неперервний спільний розподіл зі щільністю  $f_{Z,X}$
- ullet Нехай функція g(Z) інтегровна
- ullet Тоді **умовне сподівання** (conditional expectation) g(Z) за умови X дорівнює

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \cdot f_{Z\mid X}(z\mid x) \, dz \tag{2.45}$$

- ullet Варто звернути увагу, що умовне сподівання  $\epsilon$  **функцією від** z, а не сталою
- Тобто умовне сподівання є випадковою величиною!
- Для дискретної величини маємо

$$\mathbb{E}\left[g(Z)\mid X=x\right] = \sum_{z\in \mathrm{supp}(Z)} g(z) \mathbb{P}\left(Z=z\mid X=x\right)$$

- ullet Нехай події  $B_1,B_2,\ldots$  утворюють не більш ніж зліченне розбиття  $\Omega$
- Тоді умовне сподівання

$$\mathbb{E}\left[X \mid B_i\right] = \frac{\int_{B_i} X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}\left(B_i\right)} \tag{2.46}$$

ullet Якщо  $\mathbb{P}\left(B_{i}
ight)=0$ , то (стале) значення  $\mathbb{E}\left[X\mid B_{i}
ight]$  може бути довільне

# Закон повного сподівання

# Теорема 2.38 (Закон повного сподівання (Law of total expectation))

- ullet Нехай події  $B_1,B_2,\ldots$  утворюють не більш ніж зліченне розбиття  $\Omega$
- ullet Тоді **безумовне** сподівання випадкової величини X дорівнює

$$\mathbb{F}[X] = \sum \mathbb{F}[X \mid B_1] \mathbb{P}(B_1)$$

(2.47)

## Закон повного сподівання

# Teopeмa 2.38 (Закон повного сподівання (Law of total expectation))

- ullet Нехай події  $B_1,B_2,\ldots$  утворюють не більш ніж зліченне розбиття  $\Omega$
- ullet Тоді **безумовне** сподівання випадкової величини X дорівнює

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{i} \mathbb{E}\left[X \mid B_{i}\right] \mathbb{P}\left(B_{i}\right) \tag{2.47}$$

ullet Можна показати, що якщо Y і XY інтегровні, то майже напевно

$$\mathbb{E}\left[XY\mid X\right] = X\mathbb{E}\left[Y\mid X\right] \tag{2.48}$$

Teopeмa 2.39 (Закон ітерованих сподівань (Law of iterated expectations)

- Нехай Х інтегровна
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]]$
- ullet Можна помітити, що  $\mathbb{P}_X\left(X\in A
  ight)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}\left\{X\in A
  ight\}
  ight]$
- Відтак справедливий закон повної ймовірности в неперервному випадку

$$\mathbb{P}_{X}\left(X\in A\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}_{X\mid Y}\left(X\in A\mid Y=y\right)\cdot f_{Y}(y)\,dy\tag{2.50}$$

ullet Можна показати, що якщо Y і XY інтегровні, то майже напевно

$$\mathbb{E}\left[XY\mid X\right] = X\mathbb{E}\left[Y\mid X\right] \tag{2.48}$$

# Теорема 2.39 (Закон ітерованих сподівань (Law of iterated expectations))

- ullet Нехай X інтегровна
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid Y\right]\right]$$

(2.49)

- ullet Можна помітити, що  $\mathbb{P}_{X}\left(X\in A
  ight)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}\left\{X\in A
  ight\}
  ight]$
- Відтак справедливий закон повної ймовірности в неперервному випадку

$$\mathbb{P}_{X}\left(X \in A\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}_{X\mid Y}\left(X \in A \mid Y = y\right) \cdot f_{Y}(y) \, dy \tag{2.50}$$

ullet Можна показати, що якщо Y і XY інтегровні, то майже напевно

$$\mathbb{E}\left[XY\mid X\right] = X\mathbb{E}\left[Y\mid X\right] \tag{2.48}$$

# Теорема 2.39 (Закон ітерованих сподівань (Law of iterated expectations))

- ullet Нехай X інтегровна
- Тоді

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]]$$

(2.49)

- ullet Можна помітити, що  $\mathbb{P}_{X}\left(X\in A
  ight)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}\left\{X\in A
  ight\}
  ight]$
- Відтак справедливий закон повної ймовірности в неперервному випадку

$$\mathbb{P}_{X}\left(X \in A\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}_{X\mid Y}\left(X \in A \mid Y = y\right) \cdot f_{Y}(y) \, dy \tag{2.50}$$

ullet Можна показати, що якщо Y і XY інтегровні, то майже напевно

$$\mathbb{E}\left[XY\mid X\right] = X\mathbb{E}\left[Y\mid X\right] \tag{2.48}$$

# Теорема 2.39 (Закон ітерованих сподівань (Law of iterated expectations))

- ullet Нехай X інтегровна
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid Y\right]\right] \tag{2.49}$$

- можна помітити, що  $\mathbb{P}_{X}\left(X\in A
  ight)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}\left\{X\in A
  ight\}
  ight]$
- Відтак справедливий закон повної ймовірности в неперервному випадку

$$\mathbb{P}_{X}\left(X \in A\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}_{X\mid Y}\left(X \in A \mid Y = y\right) \cdot f_{Y}(y) \, dy \tag{2.50}$$

ullet Можна показати, що якщо Y і XY інтегровні, то майже напевно

$$\mathbb{E}\left[XY\mid X\right] = X\mathbb{E}\left[Y\mid X\right] \tag{2.48}$$

# Теорема 2.39 (Закон ітерованих сподівань (Law of iterated expectations))

- ullet Нехай X інтегровна
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid Y\right]\right] \tag{2.49}$$

- ullet Можна помітити, що  $\mathbb{P}_{X}\left(X\in A
  ight)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}\left\{X\in A
  ight\}
  ight]$
- Відтак справедливий закон повної ймовірности в неперервному випадку

$$\mathbb{P}_{X}\left(X \in A\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}_{X\mid Y}\left(X \in A \mid Y = y\right) \cdot f_{Y}(y) \, dy \tag{2.50}$$

ullet Можна показати, що якщо Y і XY інтегровні, то майже напевно

$$\mathbb{E}\left[XY\mid X\right] = X\mathbb{E}\left[Y\mid X\right] \tag{2.48}$$

# Теорема 2.39 (Закон ітерованих сподівань (Law of iterated expectations))

- ullet Нехай X інтегровна
- Тоді

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid Y\right]\right] \tag{2.49}$$

- ullet Можна помітити, що  $\mathbb{P}_{X}\left(X\in A
  ight)=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}\left\{X\in A
  ight\}
  ight]$
- Відтак справедливий закон повної ймовірности в неперервному випадку:

$$\mathbb{P}_{X}\left(X\in A\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}_{X\mid Y}\left(X\in A\mid Y=y\right)\cdot f_{Y}(y)\,dy\tag{2.50}$$

## Умовна дисперсія

- За аналогією з умовними сподіванням також можна визначити умовні моменти довільного порядку
- Зокрема, умовною дисперсію (conditional variance) величини Z за умови величини X є

$$\operatorname{Var}\left(Z\mid X\right) = \mathbb{E}\left[\left(Z - \mathbb{E}\left[Z\mid X\right]\right)^2\mid X\right] \tag{2.51}$$

Теорема 2.40 (Закон повної дисперсії (Law of total variance))

## Умовна дисперсія

- За аналогією з умовними сподіванням також можна визначити умовні моменти довільного порядку
- ullet Зокрема, умовною дисперсію (conditional variance) величини Z за умови величини X  $\varepsilon$

$$\operatorname{Var}\left(Z\mid X\right) = \mathbb{E}\left[(Z - \mathbb{E}\left[Z\mid X\right])^2\mid X\right] \tag{2.51}$$

Teopeмa 2.40 (Закон повної дисперсії (Law of total variance)

## Умовна дисперсія

- За аналогією з умовними сподіванням також можна визначити умовні моменти довільного порядку
- ullet Зокрема, умовною дисперсію (conditional variance) величини Z за умови величини X  $\varepsilon$

$$\operatorname{Var}\left(Z\mid X\right) = \mathbb{E}\left[(Z - \mathbb{E}\left[Z\mid X\right])^2\mid X\right] \tag{2.51}$$

# Теорема 2.40 (Закон повної дисперсії (Law of total variance))

- ullet Нехай X та Z дві випадкові величини
- ullet Тоді дисперсію Var (X), якщо вона існує, можна розписати так

$$\operatorname{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(X\mid Z\right)\right] + \operatorname{Var}\left(\mathbb{E}\left[X\mid Z\right]\right) \tag{2.52}$$

#### Умовна дисперсія

- За аналогією з умовними сподіванням також можна визначити умовні моменти довільного порядку
- ullet Зокрема, умовною дисперсію (conditional variance) величини Z за умови величини X  $\epsilon$

$$\operatorname{Var}\left(Z\mid X\right) = \mathbb{E}\left[\left(Z - \mathbb{E}\left[Z\mid X\right]\right)^2\mid X\right] \tag{2.51}$$

# Теорема 2.40 (Закон повної дисперсії (Law of total variance))

- ullet Нехай X та Z дві випадкові величини
- Тоді дисперсію Var(X), якщо вона існує, можна розписати так:

$$\operatorname{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(X\mid Z\right)\right] + \operatorname{Var}\left(\mathbb{E}\left[X\mid Z\right]\right) \tag{2.52}$$

### Умовна дисперсія

- За аналогією з умовними сподіванням також можна визначити умовні моменти довільного порядку
- ullet Зокрема, умовною дисперсію (conditional variance) величини Z за умови величини X  $\epsilon$

$$\operatorname{Var}\left(Z\mid X\right) = \mathbb{E}\left[\left(Z - \mathbb{E}\left[Z\mid X\right]\right)^2\mid X\right] \tag{2.51}$$

# Теорема 2.40 (Закон повної дисперсії (Law of total variance))

- ullet Нехай X та Z дві випадкові величини
- Тоді дисперсію Var(X), якщо вона існує, можна розписати так:

$$\operatorname{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(X\mid Z\right)\right] + \operatorname{Var}\left(\mathbb{E}\left[X\mid Z\right]\right) \tag{2.52}$$

### План лекції

Поняття про статистичне виведення

2 Основні поняття теорії ймовірностей

Огляд деяких найважливіших розподілів

- Ми згадаємо деякі найважливіші розподіли, які часто виринають на практиці
- BR усі ці розподіли реалізовані в пакеті stats
- Для кожного розподілу існує 4 функції, які мають однакову назву, але різні префікси:

- Ми згадаємо деякі найважливіші розподіли, які часто виринають на практиці
- В R усі ці розподіли реалізовані в пакеті stats
- Для кожного розподілу існує 4 функції, які мають однакову назву, але різні префікси:

- Ми згадаємо деякі найважливіші розподіли, які часто виринають на практиці
- В R усі ці розподіли реалізовані в пакеті stats
- Для кожного розподілу існує 4 функції, які мають однакову назву, але різні префікси:
  - Функція з префіксом р (від probability) реалізує функцію розподілу
  - Функція з префіксом d (від density) реалізує щільність розподілу / функцік ймовірности
  - Функція з префіксом q (від quantile) реалізує функцію квантилів
  - Функція з префіксом т (від random) реалізує генератор псевдовипадкових чисел згідно з розподілом

- Ми згадаємо деякі найважливіші розподіли, які часто виринають на практиці
- В R усі ці розподіли реалізовані в пакеті stats
- Для кожного розподілу існує 4 функції, які мають однакову назву, але різні префікси:
  - Функція з префіксом р (від probability) реалізує функцію розподілу
  - Функція з префіксом d (від density) реалізує щільність розподілу / функцік ймовірности
  - Функція з префіксом с (від quantile) реалізує функцію квантилів
  - Функція з префіксом r (від random) реалізує генератор псевдовипадкових чисел згідно з розподілом

- Ми згадаємо деякі найважливіші розподіли, які часто виринають на практиці
- В R усі ці розподіли реалізовані в пакеті stats
- Для кожного розподілу існує 4 функції, які мають однакову назву, але різні префікси:
  - Функція з префіксом р (від probability) реалізує функцію розподілу
  - Функція з префіксом d (від density) реалізує щільність розподілу / функцію ймовірности
  - Функція з префіксом q (від quantile) реалізує функцію квантилів
  - Функція з префіксом r (від random) реалізує генератор псевдовипадкових чисел згідно з розподілом

- Ми згадаємо деякі найважливіші розподіли, які часто виринають на практиці
- BR усі ці розподіли реалізовані в пакеті stats
- Для кожного розподілу існує 4 функції, які мають однакову назву, але різні префікси:
  - Функція з префіксом р (від probability) реалізує функцію розподілу
  - Функція з префіксом d (від density) реалізує щільність розподілу / функцію ймовірности
  - Функція з префіксом q (від quantile) реалізує функцію квантилів
  - Функція з префіксом r (від random) реалізує генератор псевдовипадкових чисел згідно з розподілом

- Ми згадаємо деякі найважливіші розподіли, які часто виринають на практиці
- В R усі ці розподіли реалізовані в пакеті stats
- Для кожного розподілу існує 4 функції, які мають однакову назву, але різні префікси:
  - Функція з префіксом р (від probability) реалізує функцію розподілу
  - Функція з префіксом d (від density) реалізує щільність розподілу / функцію ймовірности
  - Функція з префіксом q (від quantile) реалізує функцію квантилів
  - Функція з префіксом r (від random) реалізує генератор псевдовипадкових чисел згідно з розподілом

- ullet Чи не найпростішим розподілом  $\epsilon$  **розподіл Бернуллі** (Bernoulli distritubion) $^{15}$
- Це дискретний розподіл із функцією ймовірности

$$p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x \in \{0,1\} \right\} \tag{3.1}$$

- Тобто X може набувати тільки значень 1 або 0 з імовірностями p або 1-p відповідно
- ullet Це позначають через  $X \sim \mathrm{Bern}\,(p)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X\right]=p$ , а  $\mathrm{Var}\left(X\right)=p(1-p)$

 $<sup>^{15}</sup>$ Яків Бернуллі (Jacob Bernoulli, 1654–1705) — швейцарський математик

- ullet Чи не найпростішим розподілом  $\epsilon$  **розподіл Бернуллі** (Bernoulli distritubion) $^{15}$
- Це дискретний розподіл із функцією ймовірности

$$p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x \in \{0,1\} \right\} \tag{3.1}$$

- $\bullet$  Тобто X може набувати тільки значень 1 або 0 з імовірностями p або 1-p відповідно
- ullet Це позначають через  $X \sim \mathrm{Bern}\,(p)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=p$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=p(1-p)$

 $<sup>^{15}</sup>$ Яків Бернуллі (Jacob Bernoulli, 1654–1705) — швейцарський математик

- ullet Чи не найпростішим розподілом  $\epsilon$  **розподіл Бернуллі** (Bernoulli distritubion) $^{15}$
- Це дискретний розподіл із функцією ймовірности

$$p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x \in \{0,1\} \right\} \tag{3.1}$$

- $\bullet$  Тобто X може набувати тільки значень 1 або 0 з імовірностями p або 1-p відповідно
- ullet Це позначають через  $X \sim \mathrm{Bern}\,(p)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=p$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=p(1-p)$

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>Яків Бернуллі (Jacob Bernoulli, 1654–1705) — швейцарський математик

- ullet Чи не найпростішим розподілом  $\epsilon$  **розподіл Бернуллі** (Bernoulli distritubion) $^{15}$
- Це дискретний розподіл із функцією ймовірности

$$p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x \in \{0,1\} \right\} \tag{3.1}$$

- ullet Тобто X може набувати тільки значень 1 або 0 з імовірностями p або 1-p відповідно
- Це позначають через  $X \sim \mathrm{Bern}\,(p)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=p$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=p(1-p)$

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>Яків Бернуллі (Jacob Bernoulli, 1654–1705) — швейцарський математик

- ullet Чи не найпростішим розподілом  $\epsilon$  **розподіл Бернуллі** (Bernoulli distritubion) $^{15}$
- Це дискретний розподіл із функцією ймовірности

$$p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x \in \{0,1\} \right\} \tag{3.1}$$

- $\bullet$  Тобто X може набувати тільки значень 1 або 0 з імовірностями p або 1-p відповідно
- ullet Це позначають через  $X \sim \mathrm{Bern}\,(p)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=p$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=p(1-p)$

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>Яків Бернуллі (Jacob Bernoulli, 1654–1705) — швейцарський математик

- $\bullet$  Нехай маємо  $X_1,\dots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bern}\left(p\right)$ 
  - Фактично маємо так звану схему Бернулл
    - Тут i.i.d. означає independent and identically distributed (незалежні й однаково розподілені)
- ullet Тоді  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  має **біномний розподіл** із параметрами n і p
- Це позначають через  $X \sim \mathrm{Binom}\,(n,p)$
- X відповідає загальному числу «успіхів» (подій, що стаються з імовірністю p із-посеред n можливих
- Функція ймовірности дорівнює

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \mathbb{1} \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\}$$
 (3.2)

- ullet Очевидно, що якщо  $X \sim \mathrm{Bern}\,(p)$  і  $Y \sim \mathrm{Binom}\,(1,p)$ , то  $X \stackrel{d}{=} \mathrm{I}$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=np$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=np(1-p)$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim \mathrm{Binom}\,(n_i,p), i=1,\ldots,k$ , I всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim \mathrm{Binom}\,\left(\sum_{i=1}^k n_i,p\right)$

- $\bullet$  Нехай маємо  $X_1,\dots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bern}\left(p\right)$ 
  - Фактично маємо так звану схему Бернуллі
  - Тут i.i.d. означає independent and identically distributed (незалежні й однаково розподілені)
- ullet Тоді  $X=\sum_{i=1}^n X_i$  має **біномний розподіл** із параметрами n і p
- Це позначають через  $X \sim \text{Binom}\,(n, p)$
- m X відповідає загальному числу «успіхів» (подій, що стаються з імовірністю p із-посеред n можливих
- Функція ймовірности дорівнює

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \mathbb{1} \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \tag{3.2}$$

- ullet Очевидно, що якщо  $X\sim \operatorname{\mathsf{Bern}}\left(p
  ight)$  і  $Y\sim \operatorname{\mathsf{Binom}}\left(1,p
  ight)$ , то  $X\stackrel{a}{=} 1$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=np$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=np(1-p)$

- $\bullet$  Нехай маємо  $X_1,\dots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bern}\left(p\right)$ 
  - Фактично маємо так звану схему Бернуллі
  - Тут i.i.d. означає independent and identically distributed (незалежні й однаково розподілені)
- ullet Тоді  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  має **біномний розподіл** із параметрами n і p
- Це позначають через  $X \sim \text{Binom}(n, p)$
- X відповідає загальному числу «успіхів» (подій, що стаються з імовірністю p із-посеред n можливих
- Функція ймовірности дорівнює

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \mathbb{1} \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \tag{3.2}$$

- ullet Очевидно, що якщо  $X\sim \mathrm{Bern}\,(p)$  і  $Y\sim \mathrm{Binom}\,(1,p)$ , то  $X\stackrel{a}{=} Y$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=np$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=np(1-p)$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim \mathrm{Binom}\,(n_i,p), i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то
  - $\sum_{i=1}^{\kappa} X_i \sim \operatorname{Binom}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} n_i, p\right)$

- $\bullet$  Нехай маємо  $X_1,\dots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Bern}\left(p\right)$ 
  - Фактично маємо так звану схему Бернуллі
  - Тут i.i.d. означає independent and identically distributed (незалежні й однаково розподілені)
- ullet Тоді  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  має **біномний розподіл** із параметрами n і p
- Це позначають через  $X \sim \text{Binom}(n, p)$
- X відповідає загальному числу «успіхів» (подій, що стаються з імовірністю p із-посеред n можливих
- Функція ймовірности дорівнює

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \mathbb{1} \left\{ k \in \{0,1,\dots,n\} \right\} \tag{3.2}$$

- ullet Очевидно, що якщо  $X\sim \operatorname{Bern}\left(p
  ight)$  і  $Y\sim \operatorname{Binom}\left(1,p
  ight)$ , то  $X\stackrel{d}{=} Y$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X\right]=np$ , а  $\mathrm{Var}\left(X\right)=np(1-p)$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim \mathrm{Binom}\,(n_i,p), i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то
  - $\sum_{i=1}^{\kappa} X_i \sim \operatorname{Binom}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} n_i, p\right)$

- ullet Нехай маємо  $X_1,\dots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \operatorname{Bern}\left(\underline{p}\right)$ 
  - Фактично маємо так звану схему Бернуллі
  - Тут i.i.d. означає independent and identically distributed (незалежні й однаково розподілені)
- ullet Тоді  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  має **біномний розподіл** із параметрами n і p
- Це позначають через  $X \sim \text{Binom}(n, p)$
- X відповідає загальному числу «успіхів» (подій, що стаються з імовірністю p із-посеред n можливих
- Функція ймовірности дорівнює

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \mathbb{1} \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \tag{3.2}$$

- ullet Очевидно, що якщо  $X\sim \mathrm{Bern}\,(p)$  і  $Y\sim \mathrm{Binom}\,(1,p)$ , то  $X\stackrel{d}{=} Y$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=np$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=np(1-1)$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim \mathrm{Binom}\,(n_i,p), i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то
  - $\sum_{i=1}^{\kappa} X_i \sim \operatorname{Binom}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} n_i, p\right)$

- ullet Нехай маємо  $X_1,\dots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \operatorname{Bern}\left(\underline{p}\right)$ 
  - Фактично маємо так звану схему Бернуллі
  - Тут i.i.d. означає independent and identically distributed (незалежні й однаково розподілені)
- ullet Тоді  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  має **біномний розподіл** із параметрами n і p
- Це позначають через  $X \sim \text{Binom}(n, p)$
- X відповідає загальному числу «успіхів» (подій, що стаються з імовірністю p) із-посеред n можливих
- Функція ймовірности дорівнює

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \mathbb{1} \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \tag{3.2}$$

- ullet Очевидно, що якщо  $X\sim \mathrm{Bern}\,(p)$  і  $Y\sim \mathrm{Binom}\,(1,p)$ , то  $X\stackrel{d}{=} Y$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=np$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=np(1-p)$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim \mathrm{Binom}\,(n_i,p), i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то  $\Sigma^k$

- ullet Нехай маємо  $X_1,\dots,X_n \overset{\mathrm{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Bern}\,(\underline{p})$ 
  - Фактично маємо так звану схему Бернуллі
  - Тут i.i.d. означає independent and identically distributed (незалежні й однаково розподілені)
- ullet Тоді  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  має **біномний розподіл** із параметрами n і p
- $\bullet$  Це позначають через  $X \sim \mathrm{Binom}\,(n,p)$
- X відповідає загальному числу «успіхів» (подій, що стаються з імовірністю p) із-посеред n можливих
- Функція ймовірности дорівнює

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \mathbb{1} \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \tag{3.2}$$

- ullet Очевидно, що якщо  $X\sim \mathrm{Bern}\,(p)$  і  $Y\sim \mathrm{Binom}\,(1,p)$ , то  $X\stackrel{d}{=}Y$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=np$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=np(1-p)$
- Можна показати, що якщо  $X_i \sim \text{Binom}\,(n_i,p)$ ,  $i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Binom}\,\Big(\sum_{i=1}^k n_i,p\Big)$

- ullet Нехай маємо  $X_1,\dots,X_n \overset{\mathrm{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Bern}\,(\underline{p})$ 
  - Фактично маємо так звану схему Бернуллі
  - Тут i.i.d. означає independent and identically distributed (незалежні й однаково розподілені)
- ullet Тоді  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  має **біномний розподіл** із параметрами n і p
- $\bullet$  Це позначають через  $X \sim \mathrm{Binom}\,(n,p)$
- X відповідає загальному числу «успіхів» (подій, що стаються з імовірністю p) із-посеред n можливих
- Функція ймовірности дорівнює

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \mathbb{1} \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \tag{3.2}$$

- ullet Очевидно, що якщо  $X\sim \mathrm{Bern}\,(p)$  і  $Y\sim \mathrm{Binom}\,(1,p)$ , то  $X\stackrel{d}{=}Y$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=np$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=np(1-p)$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim \mathrm{Binom}\,(n_i,p)$ ,  $i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim \mathrm{Binom}\left(\sum_{i=1}^k n_i,p\right)$

- ullet Нехай маємо  $X_1,\dots,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \operatorname{Bern}\left(\underline{p}\right)$ 
  - Фактично маємо так звану схему Бернуллі
  - Тут i.i.d. означає independent and identically distributed (незалежні й однаково розподілені)
- ullet Тоді  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  має **біномний розподіл** із параметрами n і p
- Це позначають через  $X \sim \text{Binom}(n, p)$
- X відповідає загальному числу «успіхів» (подій, що стаються з імовірністю p) із-посеред n можливих
- Функція ймовірности дорівнює

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \mathbb{1} \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \tag{3.2}$$

- ullet Очевидно, що якщо  $X\sim \mathrm{Bern}\,(p)$  і  $Y\sim \mathrm{Binom}\,(1,p)$ , то  $X\stackrel{d}{=}Y$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=np$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=np(1-p)$
- Можна показати, що якщо  $X_i \sim$  Binom  $(n_i,p)$ ,  $i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim$  Binom  $\left(\sum_{i=1}^k n_i,p\right)$

- ullet Нехай маємо  $X_1,\dots,X_n \overset{\mathrm{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Bern}\,(\underline{p})$ 
  - Фактично маємо так звану схему Бернуллі
  - Тут i.i.d. означає independent and identically distributed (незалежні й однаково розподілені)
- ullet Тоді  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  має **біномний розподіл** із параметрами n і p
- Це позначають через  $X \sim \text{Binom}\,(n,p)$
- X відповідає загальному числу «успіхів» (подій, що стаються з імовірністю p) із-посеред n можливих
- Функція ймовірности дорівнює

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \mathbb{1} \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\} \tag{3.2}$$

- ullet Очевидно, що якщо  $X\sim \mathrm{Bern}\,(p)$  і  $Y\sim \mathrm{Binom}\,(1,p)$ , то  $X\stackrel{d}{=}Y$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=np$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=np(1-p)$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i\sim \mathrm{Binom}\,(n_i,p)$ ,  $i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i\sim \mathrm{Binom}\left(\sum_{i=1}^k n_i,p\right)$

- Оскільки розподіл Бернуллі є частковим випадком біномного, в пакеті stats існує одна сім'я функцій binom

- Оскільки розподіл Бернуллі є частковим випадком біномного, в пакеті stats існує одна сім'я функцій binom
- Наприклад, нехай компанія виробляє гайки пакетами по 10 штук
- Нехай гайки можуть бути з дефектом з імовірністю 0.1 незалежно одна від одно
- ullet Тоді X=«число дефективних гайок у пакеті» має розподіл  $X\sim$  Binom (10,0.1)
- Наприклад, імовірність того, що в пакеті 2 дефективні гайки дорівню

$$\mathbb{P}_X(X=2) = {10 \choose 2} 0.1^2 (1-0.1)^{10-2}$$

- В R це можна порахувати так
  - ## [1] 0 1937100
- Компанія поверне кошти, якщо в пакеті буде більше 1 дефективної гайки
- За яку частку пакетів повернуть кошти?
- Відповідь дорівнює
- $P_{x}(X > 1) = 1 1$
- Aбо
- 1 dbin
  - ## [1] 0.2639011
  - ## [1] 0.2639011
  - pbinom(1, size = 10, prob = 0)

- Оскільки розподіл Бернуллі є частковим випадком біномного, в пакеті stats існує одна сім'я функцій binom
- Наприклад, нехай компанія виробляє гайки пакетами по 10 штук
- Нехай гайки можуть бути з дефектом з імовірністю 0.1 незалежно одна від одної
- ullet Тоді X=«число дефективних гайок у пакеті» має розподіл  $X\sim$  Binom (10,0.1)
- Наприклад, імовірність того, що в пакеті 2 дефективні гайки дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X=2\right) = \binom{10}{2} 0.1^2 (1-0.1)^{10-2}$$

- B R це можна порахувати так
  - dbinom(2, size = 10
- Компанія поверне кошти, якщо в пакеті буде більше 1 дефективнос
- За яку частку пакетів повернуть кошти?
- Відповідь дорівнює
- $P_{X}(X > 1) = 1 1$
- 1 dbinom(0, size = 10, prob = 0
  - ## (I) 0.2639011 1 - pbinom(1, size = 10, prob = 0.1)
  - pbinom(1, size = 10, prob = 0.1, lower.tail =

- Оскільки розподіл Бернуллі є частковим випадком біномного, в пакеті stats існує одна сім'я функцій binom
- Наприклад, нехай компанія виробляє гайки пакетами по 10 штук
- Нехай гайки можуть бути з дефектом з імовірністю 0.1 незалежно одна від одної
- $\bullet$  Тоді X=«число дефективних гайок у пакеті» має розподіл  $X\sim \mathrm{Binom}\,(10,0.1)$
- Наприклад, імовірність того, що в пакеті 2 дефективні гайки дорівнює

$$\mathbb{P}_X (X = 2) = \binom{10}{2} 0.1^2 (1 - 0.1)^{10-2}$$

- В R це можна порахувати так
  - dbinom(2, size = 10, prob = 0.1)
    ## [1] 0.1937102
- Компанія поверне кошти, якщо в пакеті буде більше 1 дефективної гайки
- За яку частку пакетів повернуть кошти:
- Відповідь дорівнює
- $\mathbb{P}_{X}\left(X>1\right)=1-\mathbb{P}$
- 1 dbinom(0, size = 10, prob = 1
  - ## [1] 0.2639011 1 - pbincm(1, size = 10, prob = 0.1)
- ## [1] 0.2639011 pbinom(1, size = 10, prob = 0.1

- Оскільки розподіл Бернуллі є частковим випадком біномного, в пакеті stats існує одна сім'я функцій binom
- Наприклад, нехай компанія виробляє гайки пакетами по 10 штук
- Нехай гайки можуть бути з дефектом з імовірністю 0.1 незалежно одна від одної
- $\bullet\,$  Тоді X=«число дефективних гайок у пакеті» має розподіл  $X\sim \mathrm{Binom}\,(10,0.1)$
- Наприклад, імовірність того, що в пакеті 2 дефективні гайки дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X=2\right) = \binom{10}{2} 0.1^2 (1-0.1)^{10-2}$$

- B R це можна порахувати так dbinom(2, size = 10, prob = 0.1)
- Компанія поверне кошти, якщо в пакеті буде більше 1 дефективної гайки
- За яку частку пакетів повернуть кошти?

Данило Тавров

- Оскільки розподіл Бернуллі є частковим випадком біномного, в пакеті stats існує одна сім'я функцій binom
- Наприклад, нехай компанія виробляє гайки пакетами по 10 штук
- Нехай гайки можуть бути з дефектом з імовірністю 0.1 незалежно одна від одної
- $\bullet$  Тоді X=«число дефективних гайок у пакеті» має розподіл  $X\sim \mathrm{Binom}\,(10,0.1)$
- Наприклад, імовірність того, що в пакеті 2 дефективні гайки дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X=2\right) = \binom{10}{2} 0.1^2 (1-0.1)^{10-2}$$

• В R це можна порахувати так

```
dbinom(2, size = 10, prob = 0.1)
## [1] 0.1937102
```

- Компанія поверне кошти, якщо в пакеті буде більше 1 дефективної гайки
- За яку частку пакетів повернуть кошти
- Відповідь дорівнює

$$\mathbb{P}_{X}\left(X>1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X\leq1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X=0\right)-\mathbb{P}_{X}\left(X=1\right)$$

- Оскільки розподіл Бернуллі є частковим випадком біномного, в пакеті stats існує одна сім'я функцій binom
- Наприклад, нехай компанія виробляє гайки пакетами по 10 штук
- Нехай гайки можуть бути з дефектом з імовірністю 0.1 незалежно одна від одної
- $\bullet$  Тоді X=«число дефективних гайок у пакеті» має розподіл  $X\sim$  Binom (10,0.1)
- Наприклад, імовірність того, що в пакеті 2 дефективні гайки дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X=2\right) = \binom{10}{2} 0.1^2 (1-0.1)^{10-2}$$

• В R це можна порахувати так

```
dbinom(2, size = 10, prob = 0.1)
## [1] 0.1937102
```

- Компанія поверне кошти, якщо в пакеті буде більше 1 дефективної гайки
- За яку частку пакетів повернуть кошти?
- Відповідь дорівнює

$$\mathbb{P}_{X}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}_{X}(X \le 1) = 1 - \mathbb{P}_{X}(X = 0) - \mathbb{P}_{X}(X = 1)$$

Aбо

$$1 - dbinom(0, size = 10, prob = 0.1) - dbinom(1, size = 10, prob = 0.1)$$

## [1] 0.2639011

```
1 - pbinom(1, size = 10, prob = 0.1)
```

## [1] 0.2639011

pbinom(1, size = 10, prob = 0.1, lower.tail = FALSE)

- Оскільки розподіл Бернуллі є частковим випадком біномного, в пакеті stats існує одна сім'я функцій binom
- Наприклад, нехай компанія виробляє гайки пакетами по 10 штук
- Нехай гайки можуть бути з дефектом з імовірністю 0.1 незалежно одна від одної
- $\bullet$  Тоді X=«число дефективних гайок у пакеті» має розподіл  $X\sim$  Binom (10,0.1)
- Наприклад, імовірність того, що в пакеті 2 дефективні гайки дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X=2\right) = \binom{10}{2} 0.1^2 (1-0.1)^{10-2}$$

• В R це можна порахувати так

```
dbinom(2, size = 10, prob = 0.1)
## [1] 0.1937102
```

- Компанія поверне кошти, якщо в пакеті буде більше 1 дефективної гайки
- За яку частку пакетів повернуть кошти?
- 1 dbinom(0, size = 10, prob = 0.1) dbinom(1, size = 10, prob = 0.1)
  - 1 pbinom(1, size = 10, prob = 0.1)
  - pbinom(1, size = 10, prob = 0.1, lower.tail = FALSE)

- Оскільки розподіл Бернуллі є частковим випадком біномного, в пакеті stats існує одна сім'я функцій binom
- Наприклад, нехай компанія виробляє гайки пакетами по 10 штук
- Нехай гайки можуть бути з дефектом з імовірністю 0.1 незалежно одна від одної
- $\bullet$  Тоді X=«число дефективних гайок у пакеті» має розподіл  $X\sim$  Binom (10,0.1)
- Наприклад, імовірність того, що в пакеті 2 дефективні гайки дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X=2\right) = \binom{10}{2} 0.1^2 (1-0.1)^{10-2}$$

• В R це можна порахувати так

```
dbinom(2, size = 10, prob = 0.1)
## [1] 0.1937102
```

- Компанія поверне кошти, якщо в пакеті буде більше 1 дефективної гайки
- За яку частку пакетів повернуть кошти?
- Відповідь дорівнює

$$\mathbb{P}_{X}\left(X>1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X\leq1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X=0\right)-\mathbb{P}_{X}\left(X=1\right)$$

Або

```
1 - dbinom(0, size = 10, prob = 0.1) - dbinom(1, size = 10
## [1] 0.2639011
1 - pbinom(1, size = 10, prob = 0.1)
## [1] 0.2639011
pbinom(1, size = 10, prob = 0.1, lower.tail = FALSE)
```

- Оскільки розподіл Бернуллі є частковим випадком біномного, в пакеті stats існує одна сім'я функцій binom
- Наприклад, нехай компанія виробляє гайки пакетами по 10 штук
- Нехай гайки можуть бути з дефектом з імовірністю 0.1 незалежно одна від одної
- $\bullet$  Тоді X= «число дефективних гайок у пакеті» має розподіл  $X\sim$  Binom (10,0.1)
- Наприклад, імовірність того, що в пакеті 2 дефективні гайки дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X=2\right) = \binom{10}{2} 0.1^2 (1-0.1)^{10-2}$$

• В R це можна порахувати так

```
dbinom(2, size = 10, prob = 0.1)
## [1] 0.1937102
```

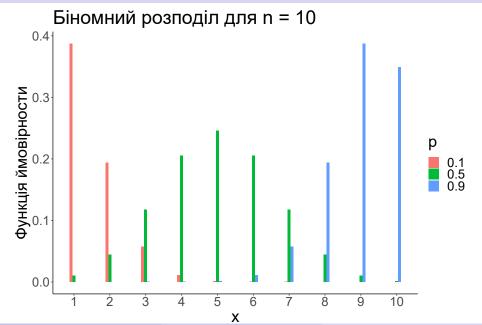
- Компанія поверне кошти, якщо в пакеті буде більше 1 дефективної гайки
- За яку частку пакетів повернуть кошти?
- Відповідь дорівнює

$$\mathbb{P}_{X}\left(X>1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X\leq1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X=0\right)-\mathbb{P}_{X}\left(X=1\right)$$

Або

```
1 - dbinom(0, size = 10, prob = 0.1) - dbinom(1, size = 10, prob = 0.1)
## [1] 0.2639011
1 - pbinom(1, size = 10, prob = 0.1)
## [1] 0.2639011
pbinom(1, size = 10, prob = 0.1, lower.tail = FALSE)
## [1] 0.2639011
```

# Функції ймовірности біномного розподілу



$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \mathbb{1}\left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \tag{3.3}$$

- ullet Це позначають через  $X \sim \operatorname{Pois}\left(\lambda\right)$
- Розподіл Пуассона використовують для моделювання явищ, які стаються нечасто

- ullet Параметр  $\lambda$  можна інтерпретувати як частоту появи деяких подій
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left|X
  ight|=\operatorname{Var}\left(X
  ight)=\lambda$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim \mathrm{Pois}\,(\lambda_i), i=1,\dots,k,$  і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim \mathrm{Pois}\,(\sum_{i=1}^k \lambda_i)$

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Симеон Дені Пуассон (Sim'eon Denis Poisson, 1781-1840) — французький математик

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \mathbb{1}\left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \tag{3.3}$$

- ullet Це позначають через  $X \sim \operatorname{Pois}(\lambda)$
- Розподіл Пуассона використовують для моделювання явищ, які стаються нечасто

- ullet Параметр  $\lambda$  можна інтерпретувати як частоту появи деяких подій
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left|X
  ight|=\operatorname{Var}\left(X
  ight)=\lambda$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim \mathrm{Pois}\,(\lambda_i), i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то

 $<sup>\</sup>sum_{i=1}^{n} X_i \sim \operatorname{Pois}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$ 

 $<sup>^{16}</sup>$ Симеон Дені Пуассон (Sim'eon Denis Poisson, 1781–1840) — французький математик

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \mathbb{1}\left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \tag{3.3}$$

- Це позначають через  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
- Розподіл Пуассона використовують для моделювання явищ, які стаються нечасто
  - Кількість електронних листів, отримуваних за годину
  - Кількість шматочків шоколалу в печиві
  - Число землетрусів на рік у деякому регіоні планети
  - Число типографських помилок на окремо взятій сторінш
  - Параметр  $\lambda$  можна інтерпретувати як частоту появи деяких подій
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{L}\left|X
  ight| = \mathsf{Var}\left(X
  ight) = \lambda$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim ext{Pois}\left(\lambda_i
  ight), i=1,...,k$ , і всі незалежні, то
  - $\sum_{i=1}^n X_i \sim \operatorname{Pois}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i
    ight)$

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Симеон Дені Пуассон (Sim'eon Denis Poisson, 1781–1840) — французький математик

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \mathbb{1}\left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \tag{3.3}$$

- Це позначають через  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
- Розподіл Пуассона використовують для моделювання явищ, які стаються нечасто
  - Кількість електронних листів, отримуваних за годину
  - Кількість шматочків шоколаду в печиві
  - Число землетрусів на рік у деякому регіоні планети
  - Число типографських помилок на окремо взятій сторінці
  - Параметр  $\lambda$  можна інтерпретувати як частоту появи леяких полій
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight] = ext{Var}\left(X
  ight) = \lambda$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim$  Pois  $(\lambda_i)$ ,  $i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то
  - $\sum_{i=1}^{\kappa} X_i \sim \text{Pois}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i\right)$

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Симеон Дені Пуассон (Sim'eon Denis Poisson, 1781–1840) — французький математик

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \mathbb{1}\left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \tag{3.3}$$

- Це позначають через  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
- Розподіл Пуассона використовують для моделювання явищ, які стаються нечасто
  - Кількість електронних листів, отримуваних за годину
  - Кількість шматочків шоколаду в печиві
  - Число землетрусів на рік у деякому регіоні планети
  - Число типографських помилок на окремо взятій сторінці
- ullet Параметр  $\lambda$  можна інтерпретувати як частоту появи деяких подій
- Можна порахувати, що  $\mathbb{E}[X] = \text{Var}(X)$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim \mathrm{Pois}\,(\lambda_i)$ ,  $i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то
  - $\sum_{i=1}^n X_i \sim \operatorname{Pois}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i
    ight)$

 $<sup>^{16}</sup>$ Симеон Дені Пуассон (Sim'eon Denis Poisson, 1781–1840) — французький математик

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \mathbb{1}\left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \tag{3.3}$$

- Це позначають через  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
- Розподіл Пуассона використовують для моделювання явищ, які стаються нечасто
  - Кількість електронних листів, отримуваних за годину
  - Кількість шматочків шоколаду в печиві
  - Число землетрусів на рік у деякому регіоні планети
  - Число типографських помилок на окремо взятій сторінці
- ullet Параметр  $\lambda$  можна інтерпретувати як частоту появи деяких подій
- Можна порахувати, що  $\mathbb{E}[X] = \text{Var}(X) = \lambda$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim \mathrm{Pois}\,(\lambda_i)$ ,  $i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то
  - $\sum_{i=1}^n X_i \sim \operatorname{Pois}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Симеон Дені Пуассон (Sim'eon Denis Poisson, 1781-1840) — французький математик

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \mathbb{1}\left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \tag{3.3}$$

- Це позначають через  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
- Розподіл Пуассона використовують для моделювання явищ, які стаються нечасто
  - Кількість електронних листів, отримуваних за годину
  - Кількість шматочків шоколаду в печиві
  - Число землетрусів на рік у деякому регіоні планети
  - Число типографських помилок на окремо взятій сторінці
- ullet Параметр  $\lambda$  можна інтерпретувати як частоту появи деяких подій
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda$
- lacktriangle Можна показати, що якщо  $X_i \sim \mathrm{Pois}\,(\lambda_i)$ ,  $i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то

$$\sum_{i=1}^k X_i \sim \operatorname{Pois}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right)$$

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Симеон Дені Пуассон (Sim'eon Denis Poisson, 1781–1840) — французький математик

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \mathbb{1}\left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \tag{3.3}$$

- Це позначають через  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
- Розподіл Пуассона використовують для моделювання явищ, які стаються нечасто
  - Кількість електронних листів, отримуваних за годину
  - Кількість шматочків шоколаду в печиві
  - Число землетрусів на рік у деякому регіоні планети
  - Число типографських помилок на окремо взятій сторінці
- ullet Параметр  $\lambda$  можна інтерпретувати як частоту появи деяких подій
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X\right]=\operatorname{Var}\left(X\right)=\lambda$
- Можна показати, що якщо  $X_i \sim \text{Pois}\,(\lambda_i)$ ,  $i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Pois}\,\Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i\Big)$

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Симеон Дені Пуассон (Sim'eon Denis Poisson, 1781–1840) — французький математик

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \mathbb{1}\left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \tag{3.3}$$

- Це позначають через  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
- Розподіл Пуассона використовують для моделювання явищ, які стаються нечасто
  - Кількість електронних листів, отримуваних за годину
  - Кількість шматочків шоколаду в печиві
  - Число землетрусів на рік у деякому регіоні планети
  - Число типографських помилок на окремо взятій сторінці
- ullet Параметр  $\lambda$  можна інтерпретувати як частоту появи деяких подій
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\operatorname{Var}\left(X
  ight)=\lambda$
- Можна показати, що якщо  $X_i \sim \text{Pois}\,(\lambda_i)$ ,  $i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Pois}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right)$

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Симеон Дені Пуассон (Sim'eon Denis Poisson, 1781–1840) — французький математик

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \mathbb{1}\left\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \tag{3.3}$$

- Це позначають через  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
- Розподіл Пуассона використовують для моделювання явищ, які стаються нечасто
  - Кількість електронних листів, отримуваних за годину
  - Кількість шматочків шоколаду в печиві
  - Число землетрусів на рік у деякому регіоні планети
  - Число типографських помилок на окремо взятій сторінці
- ullet Параметр  $\lambda$  можна інтерпретувати як частоту появи деяких подій
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\operatorname{Var}\left(X
  ight)=\lambda$
- Можна показати, що якщо  $X_i \sim \text{Pois}\,(\lambda_i)$ ,  $i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Pois}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right)$

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>Симеон Дені Пуассон (Sim'eon Denis Poisson, 1781-1840) — французький математик

# • У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій pois

- Наприклад, нехай число типографських помилок на окремо взятій сторінці книжки X має розподіл Пуассона Pois (0.5)
- Тобто в середньому 1 помилка на 2 сторінки
- Тоді ймовірність того, що на сторінці буде 2 помилки, дорівнює  $e^{-0.5}0.5^2$

$$\mathbb{P}_X(X=2) = \frac{e^{-4.0.8}}{2!}$$

- В R це можна порахувати так
  - ## F11 0 07501629
- ## [1] 0.07581633
- чому дорівнює имовірність **хоча о одніє**ї помилки на сторінці
- ullet Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_X\left(X\geq 1
  ight)=1-\mathbb{P}_X\left(X< 1
  ight)=1-\mathbb{P}_X\left(X=0
  ight)$
- Aбо
- 1 dpois(0, lambda = 0.5)
  - ## [1] 0.3934693
  - 1 ppois(0, lambda = 0.5) # X <= 0 <=> X < 1
  - ## [1] 0.3934693
  - ppois(0, lambda = 0.5, lower.tail = FALSE)
  - ## [1] 0.3934693

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій pois
- Наприклад, нехай число типографських помилок на окремо взятій сторінці книжки X має розподіл Пуассона Pois (0.5)
- Тобто в середньому 1 помилка на 2 сторінки
- ullet Тоді ймовірність того, що на сторінці буде 2 помилки, дорівнює

$$\mathbb{P}_X(X=2) = \frac{e^{-0.5}0.5^2}{2!}$$

• B R це можна порахувати так

## [1] 0 07581633

• Чому дорівнює ймовірність хоча б однієї помилки на сторінції

 $\bullet$  Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_X\left(X\geq 1\right)=1-\mathbb{P}_X\left(X<1\right)=1-\mathbb{P}_X\left(X=0\right)$ 

Aбо

1 - dpois(0, lambda = 0.5)

## [1] 0.3934693

1 - ppoia(0, lambda = 0.5) #  $X \leftarrow 0 \iff X < 1$ 

## [1] 0.3934693

ppois(0. lambda = 0.5. lower.tail = FAL

## [1] 0.3934693

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій pois
- Наприклад, нехай число типографських помилок на окремо взятій сторінці книжки X має розподіл Пуассона Pois (0.5)
- Тобто в середньому 1 помилка на 2 сторінки

$$\mathbb{P}_X(X=2) = \frac{e^{-0.5}0.5}{2!}$$

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій pois
- Наприклад, нехай число типографських помилок на окремо взятій сторінці книжки X має розподіл Пуассона Pois (0.5)
- Тобто в середньому 1 помилка на 2 сторінки
- Тоді ймовірність того, що на сторінці буде 2 помилки, дорівнює

$$\mathbb{P}_X \left( X = 2 \right) = \frac{e^{-0.5} 0.5^2}{2!}$$

- В R це можна порахувати так
  - ## [1] 0.07581633
- Чому дорівнює ймовірність хоча б однієї помилки на сторінції
- $\bullet$  Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_{X}\left(X\geq1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X<1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X=0\right)$
- A00
  - ## [1] 0.39346933
    - ## [1] U.3934693
    - ## [1] 0.3934693
    - ppois(0, lambda =
    - ## [1] 0.3934693

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій pois
- Наприклад, нехай число типографських помилок на окремо взятій сторінці книжки X має розподіл Пуассона Pois (0.5)
- Тобто в середньому 1 помилка на 2 сторінки
- Тоді ймовірність того, що на сторінці буде 2 помилки, дорівнює

$$\mathbb{P}_X(X=2) = \frac{e^{-0.5}0.5^2}{2!}$$

```
dpois(2, lambda = 0.5)
## [1] 0.07581633
```

- Чому дорівнює ймовірність хоча б однієї помилки на сторінці
- ullet Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_{X}\left(X\geq1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X<1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X=0\right)$
- Aбо
- 1 dpois(0, lambda = 0.5)
  - 1 ppois(0, lambda = 0.5) # X <= 0 <=> X < I
  - ## [1] 0.3934693
  - ppois(0, lambda = 0.5, lower.tail = FALSE)
  - ## [1] 0.3934693

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій pois
- Наприклад, нехай число типографських помилок на окремо взятій сторінці книжки X має розподіл Пуассона Pois (0.5)
- Тобто в середньому 1 помилка на 2 сторінки
- Тоді ймовірність того, що на сторінці буде 2 помилки, дорівнює

$$\mathbb{P}_X \left( X = 2 \right) = \frac{e^{-0.5} 0.5^2}{2!}$$

```
dpois(2, lambda = 0.5)
## [1] 0.07581633
```

- Чому дорівнює ймовірність хоча б однієї помилки на сторінці?
- ullet Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_{X}\left(X > 1\right) = 1 \mathbb{P}_{X}\left(X < 1\right) = 1 \mathbb{P}_{X}\left(X = 0\right)$
- Або
  - ## [1] 0.3934693
    - 1 ppois(0, lambda = 0.5) #  $X \le 0 \le X \le 1$ ## [11 0 3034693
    - ppois(0, lambda = 0.5, lower.tail = FALSE)
    - ## [1] 0.3934693

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій pois
- Наприклад, нехай число типографських помилок на окремо взятій сторінці книжки X має розподіл Пуассона Pois (0.5)
- Тобто в середньому 1 помилка на 2 сторінки
- Тоді ймовірність того, що на сторінці буде 2 помилки, дорівнює

$$\mathbb{P}_X(X=2) = \frac{e^{-0.5}0.5^2}{2!}$$

```
dpois(2, lambda = 0.5)
## [1] 0.07581633
```

- Чому дорівнює ймовірність хоча б однієї помилки на сторінці?
- ullet Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_{X}\left(X\geq1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X<1\right)=1-\mathbb{P}_{X}\left(X=0\right)$
- Або

```
1 - dpois(0, lambda = 0.5)

## [1] 0.3934693

1 - ppois(0, lambda = 0.5) # X <= 0 <=> X < 1

## [1] 0.3934693

ppois(0, lambda = 0.5, lower.tail = FALSE)

## [1] 0.3934693
```

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій pois
- Наприклад, нехай число типографських помилок на окремо взятій сторінці книжки X має розподіл Пуассона Pois (0.5)
- Тобто в середньому 1 помилка на 2 сторінки
- Тоді ймовірність того, що на сторінці буде 2 помилки, дорівнює

$$\mathbb{P}_X \left( X = 2 \right) = \frac{e^{-0.5} 0.5^2}{2!}$$

```
dpois(2, lambda = 0.5)
## [1] 0.07581633
```

- Чому дорівнює ймовірність хоча б однієї помилки на сторінці?
- ullet Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_{X}\left(X > 1\right) = 1 \mathbb{P}_{X}\left(X < 1\right) = 1 \mathbb{P}_{X}\left(X = 0\right)$
- Або

```
1 - dpois(0, lambda = 0.5)

## [1] 0.3934693

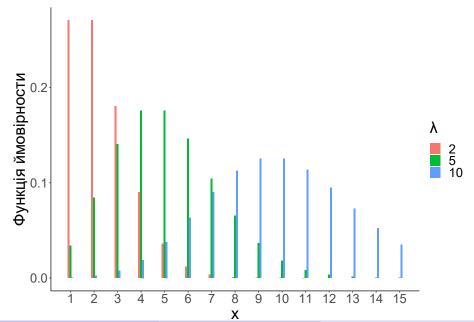
1 - ppois(0, lambda = 0.5) # X <= 0 <=> X < 1

## [1] 0.3934693

ppois(0, lambda = 0.5, lower.tail = FALSE)

## [1] 0.3934693
```

# Функції ймовірности розподілу Пуассона



- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim \mathrm{Binom}\,(n,p)$ ,  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- ullet Тоді функція ймовірности X прямує до функції ймовірности  $Y\sim {\sf Pois}\,(\lambda)$
- Приклади застосування:

- ullet Нехай X=«число відвідувачів вебсайту на день»
- Щодня відвідати сайт незалежно одне від одного вирішує 100 користувачів, з імовірністю відвідання p=0.02
- Строго формально  $X \sim \text{Binom}(100, p)$
- ullet Проте наближено  $X \sim {
  m Pois}\,(100 \cdot 0.02) = {
  m Pois}\,(2)$
- Справді, ймовірності, що сайт відвідають щонайменше 3 користувачі, такіз
  pbincm(2, aise = 10°2, prob = 2\*10°(=2), lower.tail = FALSE) # x >= 3 <=> x > 2
   (1) 0.32333344
  - ## [1] 0.3233236

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim \mathrm{Binom}\,(n,p)$ ,  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- Тоді функція ймовірности X прямує до функції ймовірности  $Y \sim \text{Pois}\left(\lambda\right)$
- Приклади застосування

- ullet Нехай X=«число відвідувачів вебсайту на день»
- Щодня відвідати сайт незалежно одне від одного вирішує 100 користувачів, з імовірністю відвідання p=0.02
- ullet Строго формально  $X \sim \mathrm{Binom}\,(100,p)$
- ullet Проте наближено  $X \sim \operatorname{Pois}\left(100 \cdot 0.02\right) = \operatorname{Pois}\left(2\right)$
- Справді, ймовірності, що сайт відвідають щонайменше 3 користувачі, такі
   «вілоп(2) віле = 1002, доов = 2\*100(-2), доместаці = каізві від з з = 3 ««» д > 2
  - ppois(2, lambda = 2, lower.tail = FALSE)
    - ## [1] 0.3233236

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim$  Binom (n,p),  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- ullet Тоді функція ймовірности X прямує до функції ймовірности  $Y\sim {\sf Pois}\,(\lambda)$
- Приклади застосування:

- ullet Нехай X=«число відвідувачів вебсайту на день»
- Щодня відвідати сайт незалежно одне від одного вирішує 100 користувачів імовірністю відвідання p=0.02
- $\bullet$  Строго формально  $X \sim$  Binom (100, p
- Проте наближено  $X \sim \text{Pois} (100 \cdot 0.02) = \text{Pois} (2)$
- Справді, ймовірності, що сайт відвідають щонайменше 3 користувачі, такі
  - ## [1] 0.3233144

    ppois(2, lambda = 2, lower.tail = FALSE)
  - ppois(2, lambda = 2, lower.tail = FAL
  - ## [1] 0.3233236

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim \mathrm{Binom}\,(n,p)$ ,  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 рокії
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового відділку на день
  - Число вакансій, що відкриваються за рік у судовій системі
  - ullet Число lpha-частинок, випромінюваних протягом фіксованого пер
- Нехай X =«число відвідувачів вебсайту на день»
- Щодня відвідати сайт незалежно одне від одного вирішує 100 користувачів, імовірністю вілвілання p=0.02
- Строго формально  $X \sim \text{Binom} (100, p)$
- ullet Проте наближено  $X \sim ext{Pois} (100 \cdot 0.02) = ext{Pois} (2)$
- Справді, ймовірності, що сайт відвідають щонайменше 3 користувачі, та
  - ## (1) 0.3233144

    mode(2. lember = 2. (mer tail = FMSE)
  - ppois(z) iamou z) ionoi tuii –
  - ## [1] 0.3233236

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim$  Binom (n,p),  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 років
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового відділку на день
  - Число α-частинок, випромінюваних протягом фіксованого п
- ullet Нехай X=«число відвідувачів вебсайту на день» .
- Щодня відвідати саит незалежно одне від одного вирішує 100 користувачів, імовірністю відвідання p=0.02
- Строго формально  $X \sim \text{Binom} (100.$
- Проте наближено  $X \sim \text{Pois} (100 \cdot 0.02) = \text{Pois} (2)$
- Справді, ймовірності, що сайт відвідають щонайменше 3 користувачі,
- ## [1] 0.3233144 pools(2, lambda = 2, lower.tail = FALSE)
- ## [1] 0.3233236

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim$  Binom (n,p),  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- ullet Тоді функція ймовірности X прямує до функції ймовірности  $Y\sim {\sf Pois}\,(\lambda)$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 років
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового відлідку на день
  - Число вакансій, що відкриваються за рік у судовій системі

Данило Тавров

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim$  Binom (n,p),  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- ullet Тоді функція ймовірности X прямує до функції ймовірности  $Y\sim {\sf Pois}\,(\lambda)$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 років
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового віллілку на лень
  - Число вакансій, що відкриваються за рік у судовій системі

ppois(2, lambda = 2, lambda =

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim$  Binom (n,p),  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- Тоді функція ймовірности X прямує до функції ймовірности  $Y \sim \operatorname{Pois}\left(\lambda\right)$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 років
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового відділку на день
  - Число вакансій, що відкриваються за рік у судовій системі
  - Число  $\alpha$ -частинок, випромінюваних протягом фіксованого періоду часу
- lacktriangle Нехай X=«число відвідувачів вебсайту на день»
  - Щодня відвідати сайт незалежно одне від одного вирішує 100 користує імовірністю відвідання n=0.02
  - Строго формально  $X \sim \text{Binom} (100.$
- Thoms use surrous V = Pois(100, 0.09) Pois
- Проте наомилено 21 1013 (100 0.02) 1013 (2)
  - ## [1] 0.3233144
- ppois(2, lambda = 2, lower.tail = FALS
- ## [1] 0.3233236

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim$  Binom (n,p),  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 років
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового відділку на день
  - Число вакансій, що відкриваються за рік у судовій системі
- ullet Нехай X=«число відвідувачів вебсайту на день»
- Щодня відвідати сайт незалежно одне від одного вирішує 100 користувачів, імовірністю відвідання n=0.02

• Число  $\alpha$ -частинок, випромінюваних протягом фіксованого періоду часу

- $lacksymbol{ iny}$  Строго формально  $X\sim$  Binom (100,p)
- Проте наближено  $X \sim \text{Pois} (100 \cdot 0.02) = \text{Pois} (2)$
- Справді, ймовірності, що сайт відвідають щонайменше 3 користувачі, такі
- ## [1] 0.3233144
- ## [1] 0.3233236

- Можна довести таке твердження
- Нехай  $X \sim \text{Binom } (n, p)$ ,  $n \to \infty$ ,  $p_n \to 0$ , але  $np_n \to \lambda$
- Тоді функція ймовірности X прямує до функції ймовірности  $Y \sim \text{Pois}\left(\lambda\right)$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 років
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового відділку на день
  - Число вакансій, що відкриваються за рік у судовій системі
  - ullet Число lpha-частинок, випромінюваних протягом фіксованого періоду часу

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim \mathrm{Binom}\,(n,p)$ ,  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 років
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового відділку на день
  - Число вакансій, що відкриваються за рік у судовій системі
  - Число  $\alpha$ -частинок, випромінюваних протягом фіксованого періоду часу
- Нехай X = «число відвідувачів вебсайту на день»
- Щодня відвідати сайт незалежно одне від одного вирішує 100 користувачів, з імовірністю відвідання p=0.02
- ullet Строго формально  $X \sim \mathrm{Binom}\,(100,p)$
- Проте наближено  $X \sim \text{Pois} (100 \cdot 0.02) = \text{Pois} (2)$
- Справді, ймовірності, що сайт відвідають щонайменше З користувачі, такі
  - ppois(2, lambda = 2, lower.tail = FALSE)
  - ## [1] 0.3233236

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim \mathrm{Binom}\,(n,p)$ ,  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 років
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового відділку на день
  - Число вакансій, що відкриваються за рік у судовій системі
  - Число  $\alpha$ -частинок, випромінюваних протягом фіксованого періоду часу
- Нехай X = «число відвідувачів вебсайту на день»
- ullet Щодня відвідати сайт незалежно одне від одного вирішує 100 користувачів, з імовірністю відвідання p=0.02
- Строго формально  $X \sim \text{Binom}\,(100,p)$
- Проте наближено  $X \sim \text{Pois} (100 \cdot 0.02) = \text{Pois} (2)$
- Справді, ймовірності, що сайт відвідають щонайменше 3 користувачі, такі pbinom(2, size = 10°2, prob = 2\*10°(-2), lower.tail = FALSE) # x >= 3 <=> x > 2
   ## (1) 0.3233144
   poois(2, lambda = 2, lower.tail = FALSE)
  - ## [1] 0.3233236

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim \mathrm{Binom}\,(n,p)$ ,  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- ullet Тоді функція ймовірности X прямує до функції ймовірности  $Y\sim {\sf Pois}\,(\lambda)$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 років
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового відділку на день
  - Число вакансій, що відкриваються за рік у судовій системі
  - Число  $\alpha$ -частинок, випромінюваних протягом фіксованого періоду часу
- ullet Нехай X=«число відвідувачів вебсайту на день»
- ullet Шодня відвідати сайт незалежно одне від одного вирішує 100 користувачів, з імовірністю відвідання p=0.02
- ullet Строго формально  $X \sim \mathrm{Binom}\,(100,p)$
- Проте наближено  $X \sim \text{Pois} (100 \cdot 0.02) = \text{Pois} (2)$
- Справді, ймовірності, що сайт відвідають щонайменше 3 користувачі, такі:
   pbinom(2, size = 10^2, prob = 2\*10^(-2), lower.tail = FALSE) # X >= 3 <=> X > 2
   ## [1] 0.3233144
   ppois(2, lambda = 2, lower.tail = FALSE)
   ## [1] 0.3233236

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim \mathrm{Binom}\,(n,p)$ ,  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 років
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового відділку на день
  - Число вакансій, що відкриваються за рік у судовій системі
  - Число  $\alpha$ -частинок, випромінюваних протягом фіксованого періоду часу
- ullet Нехай X=«число відвідувачів вебсайту на день»
- Щодня відвідати сайт незалежно одне від одного вирішує 100 користувачів, з імовірністю відвідання p=0.02
- ullet Строго формально  $X \sim \mathrm{Binom}\,(100,p)$
- ullet Проте наближено  $X \sim {
  m Pois}\,(100 \cdot 0.02) = {
  m Pois}\,(2)$
- Справді, ймовірності, що сайт відвідають щонайменше 3 користувачі, такі: pbinom(2, size = 10^2, prob = 2\*10^{-2}, lower.tail = FALSE) # x >= 3 <=> x > 2
   ## [1] 0.3233144
   ppois(2, lambda = 2, lower.tail = FALSE)
  - ## [1] 0.323323

- Можна довести таке твердження
- ullet Нехай  $X\sim \mathrm{Binom}\,(n,p)$ ,  $n o\infty$ ,  $p_n o 0$ , але  $np_n o\lambda$
- Приклади застосування:
  - Число осіб у громаді, які доживуть до 100 років
  - Число неправильно набраних телефонних номерів на день
  - Число пакетів собачого корму, проданих у деякому магазині за день
  - Число клієнтів поштового відділку на день
  - Число вакансій, що відкриваються за рік у судовій системі
  - Число  $\alpha$ -частинок, випромінюваних протягом фіксованого періоду часу
- Нехай X = «число відвідувачів вебсайту на день»
- Щодня відвідати сайт незалежно одне від одного вирішує 100 користувачів, з імовірністю відвідання p=0.02
- ullet Строго формально  $X \sim \mathrm{Binom}\,(100,p)$
- ullet Проте наближено  $X \sim \mathrm{Pois}\left(100 \cdot 0.02\right) = \mathrm{Pois}\left(2\right)$
- Справді, ймовірності, що сайт відвідають щонайменше 3 користувачі, такі:

```
pbinom(2, size = 10^2, prob = 2*10^{-2}, lower.tail = FALSE) # X >= 3 <=> X > 2
## [1] 0.3233144
ppois(2, lambda = 2, lower.tail = FALSE)
## [1] 0.3233236
```

# Рівномірний розподіл

#### • Розгляньмо тепер неперервні випадкові величини

• Величина X має **рівномірний розподіл** (uniform distribution) на проміжку (a;b), якщо її щільність дорівнює

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1} \{ x \in (a;b) \}$$
 (3.4)

- ullet Це позначають через  $X \sim \mathrm{U}\left((a;b)\right)$
- Функція рівномірного розподілу має такий вид

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \mathbb{1}\left\{t \in (a;b]\right\} \, dt = \begin{cases} 0 \ , & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \ , & a \le x < b \\ 1 \ , & x \ge b \end{cases} \tag{3.5}$$

- ullet Можна показати, що якщо  $U\sim \mathrm{U}\left((0;1]
  ight)$ , то X=a+(b-a)U
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=rac{a+b}{2}$ , a Var  $(X)=rac{(b-a)^2}{12}$

# Рівномірний розподіл

- Розгляньмо тепер неперервні випадкові величини
- Величина X має **рівномірний розподіл** (uniform distribution) на проміжку (a;b), якщо її щільність дорівнює

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1} \{ x \in (a;b) \}$$
 (3.4)

- ullet Це позначають через  $X \sim \mathrm{U}\left((a;b)\right)$
- Функція рівномірного розподілу має такий вид

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{1}\left\{t \in (a; b]\right\} dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$
 (3.5)

- ullet Можна показати, що якщо  $U \sim \mathrm{U}\left((0;1]\right)$ , то X = a + (b-a)U
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=rac{a+b}{2}$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=rac{(b-a)^2}{12}$

- Розгляньмо тепер неперервні випадкові величини
- Величина X має **рівномірний розподіл** (uniform distribution) на проміжку (a;b), якщо її щільність дорівнює

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1} \{ x \in (a;b) \}$$
 (3.4)

- ullet Це позначають через  $X \sim \mathrm{U}\left((a;b)
  ight)$
- Функція рівномірного розподілу має такий вид

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \mathbb{1}\left\{t \in (a;b]\right\} dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$
 (3.5)

- ullet Можна показати, що якщо  $U\sim \mathrm{U}\left((0;1]
  ight)$ , то X=a+(b-a)U
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X\right]=rac{a+b}{2}$ , а  $\mathrm{Var}\left(X\right)=rac{(b-a)^2}{12}$

- Розгляньмо тепер неперервні випадкові величини
- Величина X має **рівномірний розподіл** (uniform distribution) на проміжку (a;b), якщо її щільність дорівнює

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\left\{x \in (a;b)\right\} \tag{3.4}$$

- ullet Це позначають через  $X \sim \mathrm{U}\left((a;b)
  ight)$
- Функція рівномірного розподілу має такий вид:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \mathbb{1}\left\{t \in (a;b]\right\} \, dt = \begin{cases} 0 \;, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \;, & a \le x < b \\ 1 \;, & x \ge b \end{cases} \tag{3.5}$$

- ullet Можна показати, що якщо  $U\sim \mathrm{U}\left((0;1]
  ight)$ , то X=a+(b-a)U
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=rac{a+b}{2}$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=rac{(b-a)^2}{12}$

- Розгляньмо тепер неперервні випадкові величини
- Величина X має **рівномірний розподіл** (uniform distribution) на проміжку (a;b), якщо її щільність дорівнює

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\left\{x \in (a;b)\right\} \tag{3.4}$$

- ullet Це позначають через  $X \sim \mathrm{U}\left((a;b)
  ight)$
- Функція рівномірного розподілу має такий вид:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \mathbb{1}\left\{t \in (a;b]\right\} \, dt = \begin{cases} 0 \;, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \;, & a \leq x < b \\ 1 \;, & x \geq b \end{cases} \tag{3.5}$$

- ullet Можна показати, що якщо  $U\sim {
  m U\,}((0;1])$ , то X=a+(b-a)U
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=rac{a+b}{2}$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=rac{(b-a)^2}{12}$

- Розгляньмо тепер неперервні випадкові величини
- Величина X має **рівномірний розподіл** (uniform distribution) на проміжку (a;b), якщо її щільність дорівнює

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\left\{x \in (a;b)\right\} \tag{3.4}$$

- ullet Це позначають через  $X \sim \mathrm{U}\left((a;b)
  ight)$
- Функція рівномірного розподілу має такий вид:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \mathbb{1}\left\{t \in (a;b]\right\} \, dt = \begin{cases} 0 \;, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \;, & a \leq x < b \\ 1 \;, & x \geq b \end{cases} \tag{3.5}$$

- ullet Можна показати, що якщо  $U\sim {
  m U\,}((0;1])$ , то X=a+(b-a)U
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=rac{a+b}{2}$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=rac{(b-a)^2}{12}$

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій unif
- Наприклад, нехай між аеропортом та містом що 15 хвилин курсує шатл
- ullet Нехай час очікування шатла X має рівномірний розподіл  $X\sim \mathrm{U}\left((0;15)\right)$
- Чому дорівнює ймовірність, що пасажиру доведеться ждати шатл понад 6 хвилин?
- ullet Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_{X}\left(X\geq 6
  ight)=1-F_{X}(6)=1-rac{6-0}{15-0}$
- Aбо
  - 1 punif(6, min = 0, max = 15)
    - ## [1] 0.6
  - punif(6, min = 0, max = 15, lower.tail = FALSE)
    - ## [1] 0.6

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій unif
- Наприклад, нехай між аеропортом та містом що 15 хвилин курсує шатл
- ullet Нехай час очікування шатла X має рівномірний розподіл  $X \sim \mathrm{U}\left((0;15)\right)$
- Чому дорівнює ймовірність, що пасажиру доведеться ждати шатл понад є хвилин?
- $\bullet$  Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_X\left(X\geq 6\right)=1-F_X(6)=1-\frac{6-0}{15-0}$
- Aбо
  - 1 punif(6, min = 0, max = 15)
  - ## [1] 0.6
  - punif(6, min = 0, max = 15, lower.tail = FALSE)
  - ## [1] 0.6

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій unif
- Наприклад, нехай між аеропортом та містом що 15 хвилин курсує шатл
- $\bullet\,$  Нехай час очікування шатла X має рівномірний розподіл  $X \sim \mathrm{U}\left((0;15)\right)$
- Чому дорівнює ймовірність, що пасажиру доведеться ждати шатл понад б хвилин?
- ullet Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_X\left(X\geq 6
  ight)=1-F_X(6)=1-rac{6-0}{15-0}$ 
  - Або
    - 1 punif(6, min = 0, max = 15)
    - ## [1] 0.6
    - punif(6, min = 0, max = 15, lower.tail = FALSE)
    - ## [1] 0.6

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій unif
- Наприклад, нехай між аеропортом та містом що 15 хвилин курсує шатл
- ullet Нехай час очікування шатла X має рівномірний розподіл  $X \sim \mathrm{U}\left((0;15)
  ight)$
- Чому дорівнює ймовірність, що пасажиру доведеться ждати шатл понад 6 хвилин?
- ullet Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_{X}\left(X\geq 6
  ight)=1-F_{X}(6)=1-rac{6-0}{15-0}$
- Aбо
  - 1 punif(6, min = 0, max = 15)
  - ## [1] 0.6
  - punif(6, min = 0, max = 15, lower.tail = FALSE)
  - ## [1] 0.6

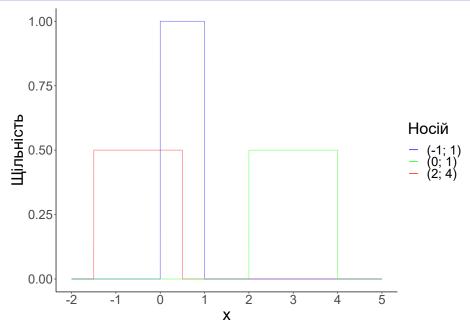
- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій unif
- Наприклад, нехай між аеропортом та містом що 15 хвилин курсує шатл
- ullet Нехай час очікування шатла X має рівномірний розподіл  $X \sim \mathrm{U}\left((0;15)
  ight)$
- Чому дорівнює ймовірність, що пасажиру доведеться ждати шатл понад 6 хвилин?
- $\bullet$  Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_{X}\left(X\geq6\right)=1-F_{X}(6)=1-\frac{6-0}{15-0}$
- Або

```
1 - punif(6, min = 0, max = 15)
## [1] 0.6
punif(6, min = 0, max = 15, lower.tail = FALSE)
## [1] 0.6
```

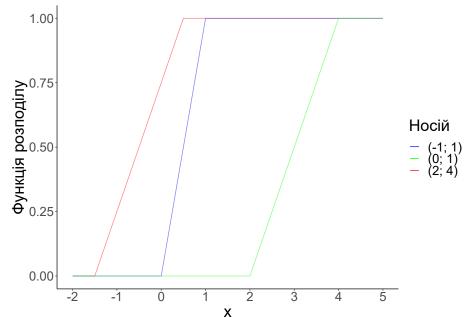
- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій unif
- Наприклад, нехай між аеропортом та містом що 15 хвилин курсує шатл
- Нехай час очікування шатла X має рівномірний розподіл  $X \sim \mathrm{U}\left((0;15)\right)$
- Чому дорівнює ймовірність, що пасажиру доведеться ждати шатл понад 6 хвилин?
- ullet Відповідь дорівнює  $\mathbb{P}_X\left(X\geq 6
  ight)=1-F_X(6)=1-rac{6-0}{15-0}$
- Або

```
1 - punif(6, min = 0, max = 15)
## [1] 0.6
punif(6, min = 0, max = 15, lower.tail = FALSE)
## [1] 0.6
```

# Щільності рівномірного розподілу



# Функції рівномірного розподілу



$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\} \tag{3.6}$$

- ullet Це позначають через  $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$
- Функція експоненційного розподілу має такий вид

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\} dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$
 (3.7)

- Інтерпретація X час очікування настання нової події у потоці подій з інтенсивністю  $\lambda$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=rac{1}{\lambda}$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=rac{1}{\lambda^2}$
- Експоненційний розподіл— **єдиний неперервний**, який не має пам'яти

$$\mathbb{P}_{X}\left(X\geq s+t\mid X\geq s\right)=\mathbb{P}_{X}\left(X\geq t\right)\;,\quad s,t\geq 0$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\} \tag{3.6}$$

- ullet Це позначають через  $X \sim \operatorname{Exp}\left(\lambda\right)$
- Функція експоненційного розподілу має такий вид:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\} dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$
 (3.7)

- Інтерпретація X час очікування настання нової події у потоці подій з інтенсивністю  $\lambda$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=rac{1}{\lambda}$ , a Var  $(X)=rac{1}{\lambda}$
- Експоненційний розподіл **єдиний неперервний**, який не має пам'яти

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\} \tag{3.6}$$

- ullet Це позначають через  $X \sim \operatorname{Exp}\left(\lambda\right)$
- Функція експоненційного розподілу має такий вид:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\} dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$
 (3.7)

- Інтерпретація X час очікування настання нової події у потоці подій з інтенсивністю  $\lambda$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=rac{1}{\lambda}$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=rac{1}{\lambda}$
- Експоненційний розподіл **єдиний неперервний**, який не має пам'яти

$$\mathbb{P}_{X}\left(X\geq s+t\mid X\geq s\right)=\mathbb{P}_{X}\left(X\geq t\right)\;,\quad s,t\geq 0$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\} \tag{3.6}$$

- ullet Це позначають через  $X \sim \operatorname{Exp}\left(\lambda\right)$
- Функція експоненційного розподілу має такий вид:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \{x > 0\} \ dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$
 (3.7)

- Інтерпретація X час очікування настання нової події у потоці подій з інтенсивністю  $\lambda$
- Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{1}{\lambda}$ , a  $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{1}{\lambda^2}$
- Експоненційний розподіл єдиний неперервний, який не має пам'яти:

$$\mathbb{P}_{X}\left(X\geq s+t\mid X\geq s\right)=\mathbb{P}_{X}\left(X\geq t\right)\;,\quad s,t\geq 0$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\} \tag{3.6}$$

- ullet Це позначають через  $X \sim \operatorname{Exp}\left(\lambda\right)$
- Функція експоненційного розподілу має такий вид:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \{x > 0\} \ dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$
 (3.7)

- Інтерпретація X час очікування настання нової події у потоці подій з інтенсивністю  $\lambda$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=rac{1}{\lambda}$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=rac{1}{\lambda^2}$
- Експоненційний розподіл єдиний неперервний, який не має пам'яти:

$$\mathbb{P}_{X}\left(X\geq s+t\mid X\geq s\right)=\mathbb{P}_{X}\left(X\geq t\right)\;,\quad s,t\geq 0$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\} \tag{3.6}$$

- ullet Це позначають через  $X \sim \operatorname{Exp}\left(\lambda\right)$
- Функція експоненційного розподілу має такий вид:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1} \{x > 0\} \ dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$
 (3.7)

- Інтерпретація X час очікування настання нової події у потоці подій з інтенсивністю  $\lambda$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=rac{1}{\lambda}$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=rac{1}{\lambda^2}$
- Експоненційний розподіл єдиний неперервний, який не має пам'яти:

$$\mathbb{P}_{X}\left(X\geq s+t\mid X\geq s\right)=\mathbb{P}_{X}\left(X\geq t\right)\;,\quad s,t\geq 0$$

#### • У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій exp

- Наприклад, нехай тривалість X телефонної розмови (у хвилинах) має експоненційний розподіл із параметром  $\lambda=0.1$
- Тобто в послідовності телефонних дзвінків, де наступний починається відразу після завершення попереднього, завершення розмови стається (в середньому) 0.1 разів на хвилину, або 1 раз на 10 хвилин
- Тоді ймовірність того, що щойно розпочата розмова протриває понад 10 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X>10\right)=1-F(10)=1-(1-e^{-0.1\cdot 10})=e^{-1}$$

Aбо

1 - pexp(10, rate = 0.1)

## [1] 0.3678794

pexp(10, rate = 0.1, lower.tail = FALSE)

## [1] 0.3678794

А ймовірність того, що тривалість буде від 10 до 20 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(10 < X < 20\right) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2}$$

Aбс

xp(20, rate = 0.1) - pexp(10, rate = 0.1)

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій exp
- Наприклад, нехай тривалість X телефонної розмови (у хвилинах) має експоненційний розподіл із параметром  $\lambda=0.1$
- Тобто в послідовності телефонних дзвінків, де наступний починається відразу після завершення попереднього, завершення розмови стається (в середньому 0.1 разів на хвилину, або 1 раз на 10 хвилин
- Тоді ймовірність того, що щойно розпочата розмова протриває понад 10 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X>10\right)=1-F(10)=1-(1-e^{-0.1\cdot 10})=e^{-1}$$

Aбо

1 - pexp(10, rate = 0.1)

## [1] 0.3678794

pexp(10, rate = 0.1, lower.tail = FALSE

- ## [1] 0.3678794
- А ймовірність того, що тривалість буде від 10 до 20 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(10 < X < 20\right) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2}$$

A6c

p(20, rate = 0.1) - pexp(10, rate = 0.1)

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій exp
- Наприклад, нехай тривалість X телефонної розмови (у хвилинах) має експоненційний розподіл із параметром  $\lambda=0.1$
- Тобто в послідовності телефонних дзвінків, де наступний починається відразу після завершення попереднього, завершення розмови стається (в середньому) 0.1 разів на хвилину, або 1 раз на 10 хвилин
- Тоді ймовірність того, що щойно розпочата розмова протриває понад 10 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X>10\right)=1-F(10)=1-(1-e^{-0.1\cdot 10})=e^{-1}$$

Aбо

1 - pexp(10, rate = 0.1)

## [1] 0.367879

pexp(10, rate = 0.1, lower.tail = FALSE

- ## [1] 0.367879
- ullet А ймовірність того, що тривалість буде від 10 до 20 хвилин, дорівню $\epsilon$

$$\mathbb{P}_X\left(10 < X < 20\right) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2}$$

Aбо

pexp(20, rate = 0.1) - pexp(10, rate = 0.1)

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій exp
- Наприклад, нехай тривалість X телефонної розмови (у хвилинах) має експоненційний розподіл із параметром  $\lambda=0.1$
- Тобто в послідовності телефонних дзвінків, де наступний починається відразу після завершення попереднього, завершення розмови стається (в середньому) 0.1 разів на хвилину, або 1 раз на 10 хвилин
- Тоді ймовірність того, що щойно розпочата розмова протриває понад 10 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X>10\right)=1-F(10)=1-(1-e^{-0.1\cdot 10})=e^{-1}$$

Або

1 - pexp(10, rate = 0.1)

## [1] 0.367879

pexp(10, rate = 0.1, lower.tail = FALSE

- ## [1] 0.367879
- А ймовірність того, що тривалість буде від 10 до 20 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(10 < X < 20\right) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2}$$

Абс

(20, rate = 0.1) - pexp(10, rate = 0.1)

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій exp
- Наприклад, нехай тривалість X телефонної розмови (у хвилинах) має експоненційний розподіл із параметром  $\lambda=0.1$
- Тобто в послідовності телефонних дзвінків, де наступний починається відразу після завершення попереднього, завершення розмови стається (в середньому) 0.1 разів на хвилину, або 1 раз на 10 хвилин
- Тоді ймовірність того, що щойно розпочата розмова протриває понад 10 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X>10\right)=1-F(10)=1-(1-e^{-0.1\cdot 10})=e^{-1}$$

• Або

```
1 - pexp(10, rate = 0.1)
## [1] 0.3678794
pexp(10, rate = 0.1, lower.tail = FALSE)
## [1] 0.3678794
```

• А ймовірність того, що тривалість буде від 10 до 20 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(10 < X < 20\right) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2}$$

• Або

pexp(20, rate = 0.1) - pexp(10, rate = 0.1)
## [11 0 2325442

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій exp
- Наприклад, нехай тривалість X телефонної розмови (у хвилинах) має експоненційний розподіл із параметром  $\lambda=0.1$
- Тобто в послідовності телефонних дзвінків, де наступний починається відразу після завершення попереднього, завершення розмови стається (в середньому) 0.1 разів на хвилину, або 1 раз на 10 хвилин
- Тоді ймовірність того, що щойно розпочата розмова протриває понад 10 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X>10\right)=1-F(10)=1-(1-e^{-0.1\cdot 10})=e^{-1}$$

• Або

```
1 - pexp(10, rate = 0.1)
## [1] 0.3678794
pexp(10, rate = 0.1, lower.tail = FALSE)
## [1] 0.3678794
```

• А ймовірність того, що тривалість буде від 10 до 20 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(10 < X < 20\right) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2}$$

Або

pexp(20, rate = 0.1) - pexp(10, rate = 0.1)

- У пакеті stats для розподілу Пуассона існує сім'я функцій exp
- Наприклад, нехай тривалість X телефонної розмови (у хвилинах) має експоненційний розподіл із параметром  $\lambda=0.1$
- Тобто в послідовності телефонних дзвінків, де наступний починається відразу після завершення попереднього, завершення розмови стається (в середньому) 0.1 разів на хвилину, або 1 раз на 10 хвилин
- Тоді ймовірність того, що щойно розпочата розмова протриває понад 10 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(X>10\right)=1-F(10)=1-(1-e^{-0.1\cdot 10})=e^{-1}$$

• Або

```
1 - pexp(10, rate = 0.1)
## [1] 0.3678794
pexp(10, rate = 0.1, lower.tail = FALSE)
## [1] 0.3678794
```

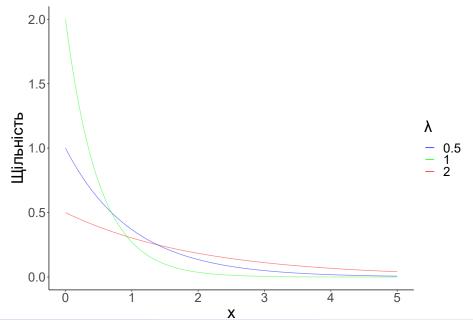
• А ймовірність того, що тривалість буде від 10 до 20 хвилин, дорівнює

$$\mathbb{P}_X\left(10 < X < 20\right) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2}$$

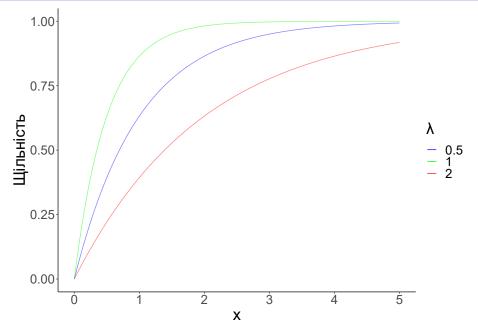
Або

```
pexp(20, rate = 0.1) - pexp(10, rate = 0.1)
## [1] 0.2325442
```

# Щільності експоненційного розподілу



# Функції експоненційного розподілу



- Без перебільшення, **найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей** та статистиці є **нормальний розподіл** (normal distribution)
- ullet Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- ullet Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
- Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z) = \int_{-\infty} \phi(t) \, dt$ , не маєє аналітичного виразу
- Корисні властивості Ф
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=0$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=1$

- Без перебільшення, **найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей та статистиці** є **нормальний розподіл** (normal distribution)
- Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- ullet Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
- Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z)=\int_{-\infty}\phi(t)\,dt$ , не має аналітичного виразу
- Корисні властивості Ф
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=0$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=1$

- Без перебільшення, **найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей та статистиці** є **нормальний розподіл** (normal distribution)
- Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- ullet Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
- Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z) = \int_{-\infty} \phi(t) \, dt$ , не маєє аналітичного виразу
- Корисні властивості Ф
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=0$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=1$

- Без перебільшення, **найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей та статистиці** є **нормальний розподіл** (normal distribution)
- Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- ullet Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
  - ullet Вона є парною функцією:  $\phi(-z)=\phi(z)$
- Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\phi(t)\,dt$ , не має аналітичного виразу
- Корисні властивості Ф:
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=0$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=1$

- Без перебільшення, **найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей** та статистиці є **нормальний розподіл** (normal distribution)
- Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- ullet Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
  - Вона є парною функцією:  $\phi(-z) = \phi(z)$
- Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z)=\int_{-\infty}^z\phi(t)\,dt$ , не має аналітичного виразу
- Корисні властивості Ф:
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=0$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=1$

- Без перебільшення, **найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей** та статистиці є **нормальний розподіл** (normal distribution)
- Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- ullet Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
  - ullet Вона є парною функцією:  $\phi(-z)=\phi(z)$
  - $\bullet \ \phi'(z) = -z\phi(z)$
- $\bullet \;$  Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(t) \, dt$ , не має аналітичного виразу
- Корисні властивості Ф:
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X\right]=0$ , a  $\mathrm{Var}\left(X\right)=1$

- Без перебільшення, **найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей** та статистиці є **нормальний розподіл** (normal distribution)
- Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- ullet Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
  - Вона є парною функцією:  $\phi(-z) = \phi(z)$
  - $\bullet \ \phi'(z) = -z\phi(z)$
- Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z)=\int_{-\infty}^z\phi(t)\,dt$ , не має аналітичного виразу
  - Її рахують чисельно
- Корисні властивості Ф:
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=0$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=1$

- Без перебільшення, найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей та статистиці є нормальний розподіл (normal distribution)
- ullet Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
  - Вона є парною функцією:  $\phi(-z) = \phi(z)$
  - $\bullet$   $\phi'(z) = -z\phi(z)$
- ullet Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z)=\int^z \; \phi(t) \, dt$ , **не має** аналітичного виразу
  - Її рахують чисельно
- Корисні властивості Ф:

- Без перебільшення, найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей та статистиці є нормальний розподіл (normal distribution)
- ullet Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
  - ullet Вона є парною функцією:  $\phi(-z)=\phi(z)$
  - $\bullet$   $\phi'(z) = -z\phi(z)$
- ullet Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z)=\int^z \; \phi(t) \, dt$ , **не має** 
  - аналітичного виразу
  - Її рахують чисельно
- Корисні властивості Ф:
  - $\Phi(z) = 1 \Phi(-z)$

- Без перебільшення, **найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей** та статистиці є **нормальний розподіл** (normal distribution)
- Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- ullet Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
  - ullet Вона є парною функцією:  $\phi(-z) = \phi(z)$
  - $\phi'(z) = -z\phi(z)$
- $\bullet$  Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z)=\int_{-\infty}^z\phi(t)\,dt$  , не має
  - аналітичного виразу
    - Її рахують чисельно
- Корисні властивості  $\Phi$ :

• 
$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

$$ullet \ \Phi^{-1}(p) = -\Phi^{-1}(1-p)$$
 ,  $p \in (0;1)$ 

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
ight]=0$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
ight)=1$ 

- Без перебільшення, **найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей** та статистиці є **нормальний розподіл** (normal distribution)
- Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- ullet Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
  - $\bullet$  Вона є парною функцією:  $\phi(-z) = \phi(z)$
  - $\bullet \ \phi'(z) = -z\phi(z)$
- $\bullet$  Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z)=\int_{-\infty}^z\phi(t)\,dt$  , не має
  - аналітичного виразу
    - Її рахують чисельно
- Корисні властивості Ф:
  - $\Phi(z) = 1 \Phi(-z)$
  - $\bullet \ \Phi^{-1}(p) = -\Phi^{-1}(1-p) \text{, } p \in (0;1)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X\right]=0$ , а  $\mathrm{Var}\left(X\right)=1$

- Без перебільшення, **найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей** та статистиці є **нормальний розподіл** (normal distribution)
- Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- ullet Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
  - ullet Вона є парною функцією:  $\phi(-z)=\phi(z)$
  - $\bullet \ \phi'(z) = -z\phi(z)$
- $\bullet$  Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z)=\int_{-\infty}^z\phi(t)\,dt$  , не має .
  - аналітичного виразу
    - Її рахують чисельно
- Корисні властивості Ф:
  - $\Phi(z) = 1 \Phi(-z)$
  - $\Phi^{-1}(p) = -\Phi^{-1}(1-p), p \in (0;1)$
- $\bullet\,$  Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X\right]=0$ , а  $\mathrm{Var}\left(X\right)=1$ 
  - Звідси позначення N(0,1)

- Без перебільшення, найбільш важливим розподілом у теорії ймовірностей та статистиці є нормальний розподіл (normal distribution)
- ullet Випадкова величина Z має **стандартний** (standard) нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу має вид

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{3.8}$$

- Це позначають через  $Z \sim N(0,1)$
- Корисні властивості  $\phi$ :
  - ullet Вона є парною функцією:  $\phi(-z)=\phi(z)$
  - $\bullet$   $\phi'(z) = -z\phi(z)$
- ullet Функція стандартного нормального розподілу,  $\Phi(z)=\int^z \; \phi(t) \, dt$ , **не має** 
  - аналітичного виразу
    - Її рахують чисельно
- Корисні властивості Ф:
  - $\Phi(z) = 1 \Phi(-z)$
  - $\Phi^{-1}(p) = -\Phi^{-1}(1-p), p \in (0,1)$
- Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X\right]=0$ , а  $\mathrm{Var}\left(X\right)=1$  Звідси позначення N(0,1)

- Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma > 0$ ), якщо  $X = \mu + \sigma Z$ , де  $Z \sim N(0,1)$
- Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на с

Віснує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1) :

- $\bullet$  Можна показати, що  $aX+b\sim N(au+b,a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\mu$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=\sigma^2$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

- Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma > 0$ ), якщо  $X = \mu + \sigma Z$ , де  $Z \sim N(0, 1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- ullet Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на a

• Існує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1)  $N(\mu,\sigma^2)$ :

- Можна показати, що  $aX + b \sim N(au + b, a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\mu$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=\sigma^2$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2\right)$

- Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma>0$ ), якщо  $X=\mu+\sigma Z$ , де  $Z\sim N(0,1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $\bullet\,$  Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на  $\sigma$ 
  - Тоді сподівання буде 0, а дисперсія —
  - Це справедливо також для інших величин
  - V прому контексті Z називають Z-опінкою (Z-score)
- Існує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1) і  $N(n,\sigma^2)$

- Можна показати пто  $aX + b \sim N(au + b \ a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\mu$ , a Var  $(X)=\sigma^2$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, тосі  $\sum_{i=1}^k X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^k X_i \sim N\left$

Данило Тавров

- ullet Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma>0$ ), якщо  $X=\mu+\sigma Z$ , де  $Z\sim N(0,1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- ullet Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на  $\sigma$ 
  - Тоді сподівання буде 0, а дисперсія 1
  - Це справедливо також для інших величин
  - У цьому контексті Z називають Z-оцінкою (Z-score

- Можна показати, що  $aX + b \sim N(au + b, a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\mu$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=\sigma^2$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum^k X_i \sim N\left(\sum^k \mu_i \sum^k \sigma_i^2\right)$ 
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

- ullet Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma>0$ ), якщо  $X=\mu+\sigma Z$ , де  $Z\sim N(0,1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $\bullet\,$  Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на  $\sigma$ 
  - Тоді сподівання буде 0, а дисперсія 1
  - Це справедливо також для інших величин
  - У цьому контексті Z називають Z-оцінкою (Z-score)
- Існує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1) і  $N(\mu,\sigma^2)$ :

- Можна показати, що  $aX + b \sim N(au + b, a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\mu$ , a Var  $(X)=\sigma^2$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2\right)$

- ullet Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma>0$ ), якщо  $X=\mu+\sigma Z$ , де  $Z\sim N(0,1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $\bullet\,$  Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на  $\sigma$ 
  - Тоді сподівання буде 0, а дисперсія 1
  - Це справедливо також для інших величин
  - У цьому контексті Z називають Z-оцінкою (Z-score)
- Існує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1) і  $N(\mu,\sigma^2)$ :

- Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma>0$ ), якщо  $X=\mu+\sigma Z$ , де  $Z\sim N(0,1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- ullet Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на  $\sigma$ 
  - Тоді сподівання буде 0, а дисперсія 1
  - Це справедливо також для інших величин
  - У цьому контексті Z називають Z-оцінкою (Z-score)
- Існує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1) і  $N(\mu,\sigma^2)$ :

• 
$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
  
•  $f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 

- Можна показати, що  $aX + b \sim N(au + b, a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\mu$ , a  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=\sigma$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

- Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma>0$ ), якщо  $X=\mu+\sigma Z$ , де  $Z\sim N(0,1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- ullet Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на  $\sigma$ 
  - Тоді сподівання буде 0, а дисперсія 1
  - Це справедливо також для інших величин
  - ullet У цьому контексті Z називають Z-оцінкою (Z-score)
- Існує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1) і  $N(\mu,\sigma^2)$ :

• 
$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
  
•  $f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 

- ullet Можна показати, що  $aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X\right]=\mu$ , а  $\mathrm{Var}\left(X\right)=\sigma^{2}$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2\right)$

- ullet Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma>0$ ), якщо  $X=\mu+\sigma Z$ , де  $Z\sim N(0,1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- ullet Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на  $\sigma$ 
  - Тоді сподівання буде 0, а дисперсія 1
  - Це справедливо також для інших величин
  - У цьому контексті Z називають Z-оцінкою (Z-score)
- Існує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1) і  $N(\mu,\sigma^2)$ :
  - $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
  - $f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- ullet Можна показати, що  $aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\mu$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=\sigma^2$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,\ldots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2\right)$

- Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma>0$ ), якщо  $X=\mu+\sigma Z$ , де  $Z\sim N(0,1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- ullet Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на  $\sigma$ 
  - Тоді сподівання буде 0, а дисперсія 1
  - Це справедливо також для інших величин
  - У цьому контексті Z називають Z-оцінкою (Z-score)
- Існує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1) і  $N(\mu,\sigma^2)$ :
  - $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
  - $f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- ullet Можна показати, що  $aX+b \sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\mu$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=\sigma^2$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2\right)$

- Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma>0$ ), якщо  $X=\mu+\sigma Z$ , де  $Z\sim N(0,1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- ullet Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на  $\sigma$ 
  - Тоді сподівання буде 0, а дисперсія 1
  - Це справедливо також для інших величин
  - ullet У цьому контексті Z називають Z-оцінкою (Z-score)
- Існує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1) і  $N(\mu,\sigma^2)$ :
  - $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
  - $f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- ullet Можна показати, що  $aX+b \sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\mu$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=\sigma^2$ 
  - Звідси позначення  $N(\mu, \sigma^2)$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2\right)$

- Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma>0$ ), якщо  $X=\mu+\sigma Z$ , де  $Z\sim N(0,1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- ullet Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на  $\sigma$ 
  - Тоді сподівання буде 0, а дисперсія 1
  - Це справедливо також для інших величин
  - У цьому контексті Z називають Z-оцінкою (Z-score)
- Існує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1) і  $N(\mu,\sigma^2)$ :
  - $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

• 
$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Можна показати, що  $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X\right]=\mu$ , а  $\mathrm{Var}\left(X\right)=\sigma^2$ 
  - ullet Звідси позначення  $N(\mu,\sigma^2)$
- ullet Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2\right)$

- Випадкова величина X має **нормальний розподіл** (normal distribution) зі сподіванням  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$  ( $\sigma>0$ ), якщо  $X=\mu+\sigma Z$ , де  $Z\sim N(0,1)$
- ullet Це позначають через  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- ullet Отже завжди можна перейти від X до Z, віднявши  $\mu$  і поділивши на  $\sigma$ 
  - Тоді сподівання буде 0, а дисперсія 1
  - Це справедливо також для інших величин
  - ullet У цьому контексті Z називають Z-оцінкою (Z-score)
- Існує прямий зв'язок між щільностями й функціями розподілу N(0,1) і  $N(\mu,\sigma^2)$ :
  - $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
  - $f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- ullet Можна показати, що  $aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$
- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[X
  ight]=\mu$ , а  $\mathrm{Var}\left(X
  ight)=\sigma^2$ 
  - ullet Звідси позначення  $N(\mu, \sigma^2)$
- Можна показати, що якщо  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i=1,\dots,k$ , і всі незалежні, то  $\sum_{i=1}^k X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^k \mu_i, \sum_{i=1}^k \sigma_i^2\right)$

- У пакеті stats для нормального розподілу існує сім'я функцій norm
- Наприклад, нехай розподіл IQ X серед деякої групи осіб є нормальний зі сподіванням  $\mu=105$  та середньоквадратичним відхиленням  $\sigma=20$
- Тоді IQ щонайбільше 80 у частки осіб

$$\mathbb{P}_{X}\left(X \leq 80\right) = \mathbb{P}_{X}\left(\frac{X - 105}{20} \leq \frac{80 - 105}{20}\right) = \Phi(-1.25)$$

A60

pnorm(80, mean = 105, sd = 20) ## [1] 0.1056498

pnorm((80 - 105) / 20) ## [1] 0.1056498

• А, наприклад, IQ лежить між 95 і 125 у частки осіб

$$\mathbb{P}_{X}\left(95 \leq X \leq 125\right) = \mathbb{P}_{X}\left(\frac{95-105}{20} \leq \frac{X-105}{20} \leq \frac{125-105}{20}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0.5) + \Phi(-0.5) = \Phi(1) - \Phi(1) - \Phi(-0.5) = \Phi(1) - \Phi(1) - \Phi(-0.5) = \Phi(1) - \Phi$$

A60

pnorm(125, mean = 105, sd = 20) - pnorm(95, mean = 105, sd = 20)

pnorm((125 - 105) / 20) - pnorm((95 - 105) / 20)

- У пакеті stats для нормального розподілу існує сім'я функцій norm
- Наприклад, нехай розподіл IQ X серед деякої групи осіб є нормальний зі сподіванням  $\mu=105$  та середньоквадратичним відхиленням  $\sigma=20$  Тобто  $X\sim N(105,20^2)$
- Тоді IQ щонайбільше 80 у частки осіб

$$\mathbb{P}_{X}\left(X \leq 80\right) = \mathbb{P}_{X}\left(\frac{X - 105}{20} \leq \frac{80 - 105}{20}\right) = \Phi(-1.25)$$

- Aбо
- pnorm(80, mean = 105, sd = 20)
- ## [1] 0.1056498
- pnorm((80 105) / 20)
- ## [1] 0.1056498
- А, наприклад, IQ лежить між 95 і 125 у частки осіб

- A 6
  - pnorm(125, mean = 105, sd = 20) pnorm(95, mean = 105, sd = 20)
  - pnorm((125 105) / 20) pnorm((95 105) / 20)

- У пакеті stats для нормального розподілу існує сім'я функцій norm
- Наприклад, нехай розподіл IQ X серед деякої групи осіб є нормальний зі сподіванням  $\mu=105$  та середньоквадратичним відхиленням  $\sigma=20$ 
  - Тобто  $X \sim N(105, 20^2)$
- Тоді IQ щонайбільше 80 у частки осіб

$$\mathbb{P}_X(X \le 80) = \mathbb{P}_X\left(\frac{X - 105}{20} \le \frac{80 - 105}{20}\right) = \Phi(-1.25)$$

Абс

pnorm(80, mean = 105, sd = 20)
## [1] 0.1056498
pnorm((80 - 105) / 20)

## [11 0.1056498

• А, наприклад, IQ лежить між 95 і 125 у частки осіб

$$\mathbb{P}_{X}\left(95 \leq X \leq 125\right) = \mathbb{P}_{X}\left(\frac{95-105}{20} \leq \frac{X-105}{20} \leq \frac{125-105}{20}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0.5) = \Phi(1) - \Phi(1) - \Phi(-0.5) = \Phi(1) - \Phi(1) = \Phi(1) -$$

Aбо

pnorm(125, mean = 105, sd = 20) - pnorm(95, mean = 105, sd = 20)

pnorm((125 - 105) / 20) - pnorm((95 - 195) / 20)

- У пакеті stats для нормального розподілу існує сім'я функцій norm
- Наприклад, нехай розподіл IQ X серед деякої групи осіб є нормальний зі сподіванням  $\mu=105$  та середньоквадратичним відхиленням  $\sigma=20$
- ullet Тобто  $X \sim N(105, 20^2)$
- Тоді IQ щонайбільше 80 у частки осіб

$$\mathbb{P}_X\left(X \leq 80\right) = \mathbb{P}_X\left(\frac{X - 105}{20} \leq \frac{80 - 105}{20}\right) = \Phi(-1.25)$$

• Або

pnorm(80, mean = 105, sd = 20)
## [1] 0.1056498
pnorm((80 - 105) / 20)

• А, наприклад, IQ лежить між 95 і 125 у частки осіб

$$\mathbb{P}_{X}\left(95 \leq X \leq 125\right) = \mathbb{P}_{X}\left(\frac{95-105}{20} \leq \frac{X-105}{20} \leq \frac{125-105}{20}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0.5) = \Phi(1) - \Phi(1) - \Phi(-0.5) = \Phi(1) - \Phi(1) - \Phi(1) = \Phi(1) - \Phi(1) - \Phi(1) = \Phi(1) - \Phi(1) - \Phi(1) = \Phi(1) - \Phi$$

Aбо

pnorm(125, mean = 105, sd = 20) - pnorm(95, mean = 105, sd = 20)
## [1] 0.5328072

pnorm((125 - 105) / 20) - pnorm((95 - 105) / 20)

- У пакеті stats для нормального розподілу існує сім'я функцій norm
- Наприклад, нехай розподіл IQ X серед деякої групи осіб є нормальний зі сподіванням  $\mu=105$  та середньоквадратичним відхиленням  $\sigma=20$  Тобто  $X\sim N(105,20^2)$
- Тоді IQ щонайбільше 80 у частки осіб

$$\mathbb{P}_{X}\left(X \leq 80\right) = \mathbb{P}_{X}\left(\frac{X - 105}{20} \leq \frac{80 - 105}{20}\right) = \Phi(-1.25)$$

Або

```
pnorm(80, mean = 105, sd = 20)
## [1] 0.1056498
pnorm((80 - 105) / 20)
## [1] 0.1056498
```

• А, наприклад, IQ лежить між 95 і 125 у частки осіб

$$\mathbb{P}_X\left(95 \leq X \leq 125\right) = \mathbb{P}_X\left(\frac{95-105}{20} \leq \frac{X-105}{20} \leq \frac{125-105}{20}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0.5)$$

Або

pnorm(125, mean = 105, sd = 20) - pnorm(95, mean = 105, sd = 20)
## [1] 0.5328072

pnorm((125 - 105) / 20) - pnorm((95 - 105) / 20)

pnorm((125 - 105) / 20) - pnorm((95 - 105) / 20 ## [1] 0.5328072

- У пакеті stats для нормального розподілу існує сім'я функцій norm
- Наприклад, нехай розподіл IQ X серед деякої групи осіб є нормальний зі сподіванням  $\mu=105$  та середньоквадратичним відхиленням  $\sigma=20$ 
  - Тобто  $X \sim N(105, 20^2)$
- Тоді IQ щонайбільше 80 у частки осіб

$$\mathbb{P}_X\left(X \leq 80\right) = \mathbb{P}_X\left(\frac{X - 105}{20} \leq \frac{80 - 105}{20}\right) = \Phi(-1.25)$$

Або

```
pnorm(80, mean = 105, sd = 20)
## [1] 0.1056498
pnorm((80 - 105) / 20)
## [1] 0.1056498
```

• А, наприклад, IQ лежить між 95 і 125 у частки осіб

$$\mathbb{P}_X\left(95 \leq X \leq 125\right) = \mathbb{P}_X\left(\frac{95-105}{20} \leq \frac{X-105}{20} \leq \frac{125-105}{20}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0.5)$$

Або

```
pnorm(125, mean = 105, sd = 20) - pnorm(95, mean = 105, sd = 2
## [1] 0.5328072
pnorm((125 - 105) / 20) - pnorm((95 - 105) / 20)
## [1] 0.5328072
```

- У пакеті stats для нормального розподілу існує сім'я функцій norm
- Наприклад, нехай розподіл IQ X серед деякої групи осіб є нормальний зі сподіванням  $\mu=105$  та середньоквадратичним відхиленням  $\sigma=20$ 
  - Тобто  $X \sim N(105, 20^2)$
- Тоді IQ щонайбільше 80 у частки осіб

$$\mathbb{P}_{X}\left(X \leq 80\right) = \mathbb{P}_{X}\left(\frac{X - 105}{20} \leq \frac{80 - 105}{20}\right) = \Phi(-1.25)$$

Або

```
pnorm(80, mean = 105, sd = 20)
## [1] 0.1056498
pnorm((80 - 105) / 20)
## [1] 0.1056498
```

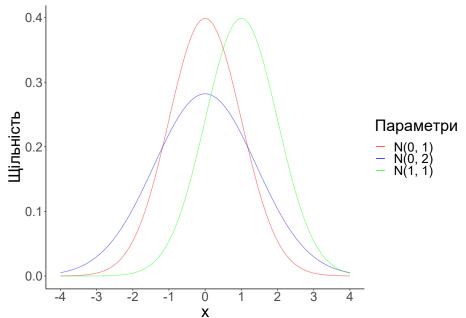
• А, наприклад, IQ лежить між 95 і 125 у частки осіб

$$\mathbb{P}_{X}\left(95 \leq X \leq 125\right) = \mathbb{P}_{X}\left(\frac{95 - 105}{20} \leq \frac{X - 105}{20} \leq \frac{125 - 105}{20}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0.5)$$

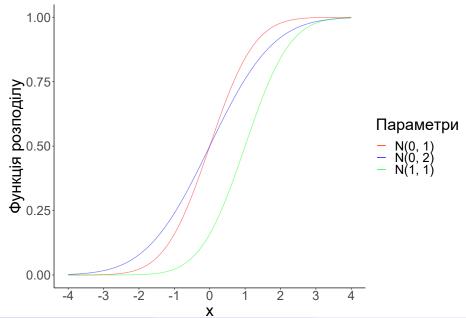
• Або

```
pnorm(125, mean = 105, sd = 20) - pnorm(95, mean = 105, sd = 20)
## [1] 0.5328072
pnorm((125 - 105) / 20) - pnorm((95 - 105) / 20)
## [1] 0.5328072
```

# Щільності нормального розподілу



# Функції нормального розподілу



- Надзвичайно корисним на практиці є так зване правильо трьох сигм (the three sigma rule)
- Наприклад, якщо  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mu\right|\leq\sigma\right)=\mathbb{P}_{X}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|\leq1\right)=\mathbb{P}_{Z}\left(-1\leq Z\leq1\right)$$

- Надзвичайно корисним на практиці є так зване правильо трьох сигм (the three sigma rule)
- ullet Наприклад, якщо  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mu\right| \leq \sigma\right) = \mathbb{P}_{X}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \leq 1\right) = \mathbb{P}_{Z}\left(-1 \leq Z \leq 1\right)$$

- Можна обчислити
  - pnorm(1) pnorm(-1
  - ## [1] 0.6826895
- $\bullet$  Аналогічно для  $\mathbb{P}_X\left(|X-\mu|\leq 2\sigma\right)$  і  $\mathbb{P}_X\left(|X-\mu|\leq 3\sigma\right)$ 
  - pnorm(2) pnorm(-
  - ## [1] 0.9544997
  - onorm(3) pnorm(-3
  - ## [1] 0.9973002

- Надзвичайно корисним на практиці є так зване правильо трьох сигм (the three sigma rule)
- ullet Наприклад, якщо  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,

$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mu\right| \leq \sigma\right) = \mathbb{P}_{X}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \leq 1\right) = \mathbb{P}_{Z}\left(-1 \leq Z \leq 1\right)$$

• Можна обчислити

pnorm(1) - pnorm(-1) ## [1] 0.6826895

• Аналогічно для  $\mathbb{P}_{X}\left(|X-\mu|\leq 2\sigma\right)$  і  $\mathbb{P}_{X}\left(|X-\mu|\leq 3\sigma\right)$ 

pnorm(2) - pnorm(-## [1] 0 9544997

pnorm(3) - pnorm(-3

## [1] 0.9973002

- Надзвичайно корисним на практиці є так зване правильо трьох сигм (the three sigma rule)
- ullet Наприклад, якщо  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,

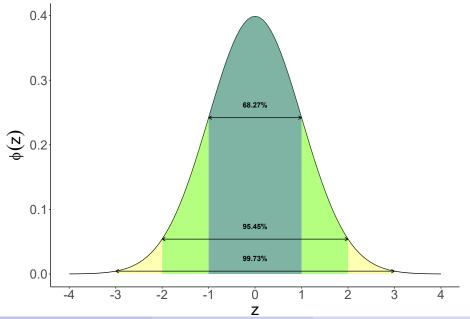
$$\mathbb{P}_{X}\left(\left|X-\mu\right| \leq \sigma\right) = \mathbb{P}_{X}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \leq 1\right) = \mathbb{P}_{Z}\left(-1 \leq Z \leq 1\right)$$

• Можна обчислити

```
pnorm(1) - pnorm(-1)
## [1] 0.6826895
```

• Аналогічно для  $\mathbb{P}_{X}\left(|X-\mu|\leq 2\sigma\right)$  і  $\mathbb{P}_{X}\left(|X-\mu|\leq 3\sigma\right)$ 

```
pnorm(2) - pnorm(-2)
## [1] 0.9544997
pnorm(3) - pnorm(-3)
## [1] 0.9973002
```



ullet Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^ op$  має багатовимірний нормальний розподіл (multivariate normal distribution), якщо

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \vec{\mu}$$

- $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\top}$ , вона є симетричною і додатно визначеною
- ullet  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$  матриця така, що  $\Sigma$  невироджена
- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots Z_n)^{\intercal}$ ,  $Z_i \sim N(0,1)$ , усі  $Z_i$  незалежні
- $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}$
- ullet Це позначають через  $\mathbf{X} \sim N(\overline{\mu}, \Sigma)$
- Альтернативне визначення:  $\mathbf{X} \sim N(\mu, \Sigma)$  якщо будь-яка лінійна комбінаці  $V = \mathbf{c}^{\top}\mathbf{X}$  його усоряннях  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$  мас нормальнуй розполіл
- Зверніть увату: маржинальними розполілами для багатовимірно
- зверніть увагу: маржинальними розподілами для оагатовимірного нормального є нормальні
- Спільна щільність Х дорівнює

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\vec{\mu})}$$

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right]=ec{\mu}$ ,  $\mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}\right)=\Sigma$ 

ullet Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{ op}$  має багатовимірний нормальний розподіл (multivariate normal distribution), якщо

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \vec{\mu}$$

- ullet  $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{ op}$ , вона  $\epsilon$  симетричною і додатно визначеною
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$  матриця така, що  $\Sigma$  невироджена
- $\mathbf{Z} = (Z_1, ..., Z_n)^{\top}, Z_n \sim N(0, 1), vci Z_n$  незалежні
- $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^{\top} \in \mathbb{F}$
- Це позначають через  $\mathbf{X} \sim N(\vec{u}, \Sigma)$
- ullet Альтернативне визначення:  $\mathbf{X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$  якщо (
- $Y=\mathbf{c}^{ o}\mathbf{X}$  його координат,  $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^{\kappa}$ , має нормальний розподіл
- Зверніть увагу: маржинальними розподілами для багатовимірноп
- нормального є нормальні
- Спільна щільність X дорівнює
  - - $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2-\lambda^k)^{N+1}}} e^{-\frac{1}{2}}$
- Можна порахувати, що  $\mathbb{F}\left[\mathbf{X}\right] = \vec{n}$ . Cov  $\left(\mathbf{X}\right) = \Sigma$

ullet Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^ op$  має багатовимірний нормальний розподіл (multivariate normal distribution), якщо

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \vec{\mu}$$

- $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{ op}$ , вона  $\epsilon$  симетричною і додатно визначеною
- $oldsymbol{\bullet}$   $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k imes \mathbb{R}^n$  матриця така, що  $\Sigma$  невироджена
- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots Z_n)^{\top}, Z_i \sim N(0, 1)$ , усі  $Z_i$  незалежні
- $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^{\top} \in \mathbb{R}^n$
- Не позначають через  $\mathbf{X} \sim N(\vec{n}, \Sigma)$
- о Альтепнативне визначення  $\mathbf{X} \sim N(7/\Sigma)$
- $Y=\mathbf{c}^{ op}\mathbf{X}$  його координат,  $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^k$ , має нормальний розподі
- Зверніть увагу: маржинальними розподілами для багатовимірног
- нормального є нормальні
- Спільна щільність X дорівнює
  - - $f_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi |\mathbf{k}|\nabla|}} e^{-\frac{1}{2\pi}}$
- $\mathbf{0}$  Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right] = \vec{n}$ . Cov  $\left(\mathbf{X}\right) = \Sigma$

ullet Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^ op$  має багатовимірний нормальний розподіл (multivariate normal distribution), якщо

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \vec{\mu}$$

- $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\top}$ , вона є симетричною і додатно визначеною
- $oldsymbol{A} \in \mathbb{R}^k imes \mathbb{R}^n$  матриця така, що  $\Sigma$  невироджена
- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots Z_n)^{ op}$ ,  $Z_i \sim N(0,1)$ , усі  $Z_i$  незалежні
- $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^{\top} \in \mathbb{R}^n$
- ullet Це позначають через  $\mathbf{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$
- Альтернативне визначення:  $\mathbf{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$  якщо будь-яка лінійна комбінація  $Y = \mathbf{c}^{\top} \mathbf{X}$  його координат.  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ . має нормальний розподіл
- Зверніть увагу: маржинальними розподілами для багатовимірного нормального є нормальні
- Спільна щільність Х дорівнює

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)k|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \vec{\mu})^{\top}\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \vec{\mu})^{\top}\Sigma^{-1}}$$

 $\bullet$  Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right] = \vec{u}$ . Cov  $\left(\mathbf{X}\right) = \Sigma$ 

ullet Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^ op$  має багатовимірний нормальний розподіл (multivariate normal distribution), якщо

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \vec{\mu}$$

- $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{ op}$ , вона  $\epsilon$  симетричною і додатно визначеною
- $oldsymbol{A} \in \mathbb{R}^k imes \mathbb{R}^n$  матриця така, що  $\Sigma$  невироджена
- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots Z_n)^{ op}$ ,  $Z_i \sim N(0,1)$ , усі  $Z_i$  незалежні
- $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^{\top} \in \mathbb{R}^n$
- Це позначають через  $\mathbf{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$
- Альтернативне визначення:  $\mathbf{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$  якщо будь-яка лінійна комбінація  $Y = \mathbf{c}^{\top}\mathbf{X}$  його координат,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ , має нормальний розподіл
- Зверніть увагу: маржинальними розподілами для багатовимірного нормального є нормальні
- Спільна щільність Х дорівнює

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \hat{\mu})^{\top} \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \hat{\mu})}$$

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\mathbf{X}
ight]=ec{u}$ . Cov  $\left(\mathbf{X}
ight)=\Sigma$ 

ullet Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{ op}$  має багатовимірний нормальний розподіл (multivariate normal distribution), якщо

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \vec{\mu}$$

- $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{ op}$ , вона  $\epsilon$  симетричною і додатно визначеною
- $oldsymbol{\bullet}$   $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k imes \mathbb{R}^n$  матриця така, що  $\Sigma$  невироджена
- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots Z_n)^{\top}$ ,  $Z_i \sim N(0,1)$ , усі  $Z_i$  незалежні
- $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^{\top} \in \mathbb{R}^n$
- ullet Це позначають через  ${f X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$
- Альтернативне визначення:  $\mathbf{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$  якщо будь-яка лінійна комбінація  $Y = \mathbf{c}^{\top} \mathbf{X}$  його координат,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ , має нормальний розподіл
- Зверніть увагу: маржинальними розподілами для багатовимірного нормального є нормальні
- Спільна шільність X дорівнює

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\vec{\mu})}$$

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right] = \vec{u}$ . Cov  $\left(\mathbf{X}\right) = \Sigma$ 

ullet Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{ op}$  має багатовимірний нормальний розподіл (multivariate normal distribution), якщо

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \vec{\mu}$$

- $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{ op}$ , вона  $\epsilon$  симетричною і додатно визначеною
- ullet  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k imes \mathbb{R}^n$  матриця така, що  $\Sigma$  невироджена
- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots Z_n)^{ op}$ ,  $Z_i \sim N(0,1)$ , усі  $Z_i$  незалежні
- $\mathbf{\vec{\mu}} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
- ullet Це позначають через  ${f X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$
- Альтернативне визначення:  $\mathbf{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$  якщо будь-яка лінійна комбінація  $Y = \mathbf{c}^{\top}\mathbf{X}$  його координат,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ , має нормальний розподіл
- Зверніть увагу: маржинальними розподілами для багатовимірного нормального є нормальні
- Спільна щільність Х дорівнює

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \vec{\mu})}$$
(3.9)

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right]=ec{\mu}$ ,  $\mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}\right)=\Sigma$ 

ullet Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{ op}$  має багатовимірний нормальний розподіл (multivariate normal distribution), якщо

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \vec{\mu}$$

- $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{ op}$ , вона  $\epsilon$  симетричною і додатно визначеною
- $oldsymbol{\bullet}$   $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k imes \mathbb{R}^n$  матриця така, що  $\Sigma$  невироджена
- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots Z_n)^{\top}$ ,  $Z_i \sim N(0,1)$ , усі  $Z_i$  незалежні
- $\bullet \vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
- ullet Це позначають через  ${f X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$
- Альтернативне визначення:  $\mathbf{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$  якщо будь-яка лінійна комбінація  $Y = \mathbf{c}^{\top}\mathbf{X}$  його координат,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ , має нормальний розподіл
- Зверніть увагу: маржинальними розподілами для багатовимірного нормального є нормальні
  - Але зворотне твердження у загальному випадку не виконується
- Спільна щільність Х дорівнює

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\vec{\mu})} \tag{3.9}$$

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right]=ec{\mu}$ ,  $\mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}\right)=\Sigma$ 

ullet Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{ op}$  має багатовимірний нормальний розподіл (multivariate normal distribution), якщо

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \vec{\mu}$$

- $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{ op}$ , вона є симетричною і додатно визначеною
- $oldsymbol{\bullet}$   $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k imes \mathbb{R}^n$  матриця така, що  $\Sigma$  невироджена
- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots Z_n)^{\top}$ ,  $Z_i \sim N(0,1)$ , усі  $Z_i$  незалежні
- $\bullet \vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
- ullet Це позначають через  ${f X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$
- Альтернативне визначення:  $\mathbf{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$  якщо будь-яка лінійна комбінація  $Y = \mathbf{c}^{\top}\mathbf{X}$  його координат,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ , має нормальний розподіл
- Зверніть увагу: маржинальними розподілами для багатовимірного нормального є нормальні
  - Але зворотне твердження у загальному випадку не виконується
- Спільна щільність Х дорівнює

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \vec{\mu})} \tag{3.9}$$

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\mathbf{X}
ight]=ec{\mu}$ ,  $\mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}
ight)=\Sigma$ 

ullet Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{ op}$  має багатовимірний нормальний розподіл (multivariate normal distribution), якщо

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \vec{\mu}$$

- $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{ op}$ , вона  $\epsilon$  симетричною і додатно визначеною
- $oldsymbol{\bullet}$   $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k imes \mathbb{R}^n$  матриця така, що  $\Sigma$  невироджена
- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots Z_n)^{\intercal}$ ,  $Z_i \sim N(0,1)$ , усі  $Z_i$  незалежні
- $\bullet \vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
- ullet Це позначають через  ${f X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$
- Альтернативне визначення:  $\mathbf{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$  якщо будь-яка лінійна комбінація  $Y = \mathbf{c}^{\top}\mathbf{X}$  його координат,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ , має нормальний розподіл
- Зверніть увагу: маржинальними розподілами для багатовимірного нормального є нормальні
  - Але зворотне твердження у загальному випадку не виконується
- Спільна щільність Х дорівнює

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \vec{\mu})} \tag{3.9}$$

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\mathbf{X}
ight]=ec{\mu}$ ,  $\mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}
ight)=\Sigma$ 

• Випадковий вектор  $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_k)^{\top}$  має багатовимірний нормальний розподіл (multivariate normal distribution), якщо

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} + \vec{\mu}$$

- $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{ op}$ , вона є симетричною і додатно визначеною
- $oldsymbol{\bullet}$   $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^k imes \mathbb{R}^n$  матриця така, що  $\Sigma$  невироджена
- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots Z_n)^{\top}$ ,  $Z_i \sim N(0,1)$ , усі  $Z_i$  незалежні
- $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^{\top} \in \mathbb{R}^n$
- ullet Це позначають через  ${f X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$
- Альтернативне визначення:  $\mathbf{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$  якщо будь-яка лінійна комбінація  $Y = \mathbf{c}^{\top}\mathbf{X}$  його координат,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ , має нормальний розподіл
- Зверніть увагу: маржинальними розподілами для багатовимірного нормального є нормальні
  - Але зворотне твердження у загальному випадку не виконується
- Спільна щільність Х дорівнює

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \vec{\mu})} \tag{3.9}$$

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\mathbf{X}
ight]=ec{\mu}$ ,  $\mathbf{Cov}\left(\mathbf{X}
ight)=\Sigma$ 

$$\vec{\mu}' = \begin{pmatrix} \mu_{i_1} \\ \mu_{i_2} \\ \vdots \\ \mu_{i_m} \end{pmatrix} \;, \qquad \Sigma' = \begin{pmatrix} \Sigma_{i_1,i_1} & \Sigma_{i_1,i_2} & \dots & \Sigma_{i_1,i_m} \\ \Sigma_{i_2,i_1} & \Sigma_{i_2,i_2} & \dots & \Sigma_{i_2,i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{i_m,i_1} & \Sigma_{i_m,i_2} & \dots & \Sigma_{i_m,i_m} \end{pmatrix}$$

- $\bullet$  Наприклад, нехай  $(X_1,X_2,X_3)^\top \sim N\left((\mu_1,\mu_2,\mu_3)^\top,\Sigma\right)$
- Також для багатовимірного нормального розподілу справедлива унікальна властивість
- ullet Нехай  $\mathbf{X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$  можна подати як конкатенацію  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^{\top}, \mathbf{X}_2^{\top}, \mathbf{X}_2^{\top})$
- Тоді якщо кореляція між будь-якою координатою  $\mathbf{X}_1$  і будь-якою координатою  $\mathbf{X}_2$  нульова, то  $\mathbf{X}_1 \perp \!\!\! \perp \mathbf{X}_2$

$$\vec{\mu}' = \begin{pmatrix} \mu_{i_1} \\ \mu_{i_2} \\ \vdots \\ \mu_{i_m} \end{pmatrix} \;, \qquad \Sigma' = \begin{pmatrix} \Sigma_{i_1,i_1} & \Sigma_{i_1,i_2} & \dots & \Sigma_{i_1,i_m} \\ \Sigma_{i_2,i_1} & \Sigma_{i_2,i_2} & \dots & \Sigma_{i_2,i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{i_m,i_1} & \Sigma_{i_m,i_2} & \dots & \Sigma_{i_m,i_m} \end{pmatrix}$$

- $\bullet$  Наприклад, нехай  $(X_1,X_2,X_3)^\top \sim N\left((\mu_1,\mu_2,\mu_3)^\top,\Sigma\right)$ 
  - ullet Тоді, скажімо,  $(X_1,X_3)^ op \sim N\left((\mu_1,\mu_3)^ op, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{33} \end{pmatrix}
    ight)$
- Також для багатовимірного нормального розподілу справедлива унікальна властивість
- ullet Нехай  $\mathbf{X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$  можна подати як конкатенацію  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^{ op}, \mathbf{X}_2^{ op})$
- Тоді якщо кореляція між будь-якою координатою  $\mathbf{X}_1$  і будь-якою координатою  $\mathbf{X}_2$  нульова, то  $\mathbf{X}_1 \perp \!\!\! \perp \mathbf{X}_2$

$$\vec{\mu}' = \begin{pmatrix} \mu_{i_1} \\ \mu_{i_2} \\ \vdots \\ \mu_{i_m} \end{pmatrix} \;, \qquad \Sigma' = \begin{pmatrix} \Sigma_{i_1,i_1} & \Sigma_{i_1,i_2} & \dots & \Sigma_{i_1,i_m} \\ \Sigma_{i_2,i_1} & \Sigma_{i_2,i_2} & \dots & \Sigma_{i_2,i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{i_m,i_1} & \Sigma_{i_m,i_2} & \dots & \Sigma_{i_m,i_m} \end{pmatrix}$$

- $\bullet$  Наприклад, нехай  $(X_1,X_2,X_3)^\top \sim N\left((\mu_1,\mu_2,\mu_3)^\top,\Sigma\right)$ 
  - ullet Тоді, скажімо,  $(X_1,X_3)^ op \sim N\left((\mu_1,\mu_3)^ op, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{33} \end{pmatrix}
    ight)$
- Також для багатовимірного нормального розподілу справедлива унікальна властивість
- ullet Нехай  ${f X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$  можна подати як конкатенацію  ${f X} = ({f X}_1^ op, {f X}_2^ op)$
- Тоді якщо кореляція між будь-якою координатою  ${f X}_1$  і будь-якою координатою  ${f X}_2$  нульова, то  ${f X}_1 \perp \!\!\! \perp {f X}_2$

$$\vec{\mu}' = \begin{pmatrix} \mu_{i_1} \\ \mu_{i_2} \\ \vdots \\ \mu_{i_m} \end{pmatrix} \;, \qquad \Sigma' = \begin{pmatrix} \Sigma_{i_1,i_1} & \Sigma_{i_1,i_2} & \dots & \Sigma_{i_1,i_m} \\ \Sigma_{i_2,i_1} & \Sigma_{i_2,i_2} & \dots & \Sigma_{i_2,i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{i_m,i_1} & \Sigma_{i_m,i_2} & \dots & \Sigma_{i_m,i_m} \end{pmatrix}$$

- Наприклад, нехай  $(X_1, X_2, X_3)^{\top} \sim N\left((\mu_1, \mu_2, \mu_3)^{\top}, \Sigma\right)$ 
  - ullet Тоді, скажімо,  $(X_1,X_3)^ op \sim N\left((\mu_1,\mu_3)^ op, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{33} \end{pmatrix}
    ight)$
- Також для багатовимірного нормального розподілу справедлива унікальна властивість
- ullet Нехай  $\mathbf{X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$  можна подати як конкатенацію  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^{ op}, \mathbf{X}_2^{ op})$
- ullet Тоді якщо кореляція між будь-якою координатою  ${f X}_1$  і будь-якою координатою  ${f X}_2$  нульова, то  ${f X}_1 \perp \!\!\! \perp {f X}_2$

$$\vec{\mu}' = \begin{pmatrix} \mu_{i_1} \\ \mu_{i_2} \\ \vdots \\ \mu_{i_m} \end{pmatrix} \;, \qquad \Sigma' = \begin{pmatrix} \Sigma_{i_1,i_1} & \Sigma_{i_1,i_2} & \dots & \Sigma_{i_1,i_m} \\ \Sigma_{i_2,i_1} & \Sigma_{i_2,i_2} & \dots & \Sigma_{i_2,i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{i_m,i_1} & \Sigma_{i_m,i_2} & \dots & \Sigma_{i_m,i_m} \end{pmatrix}$$

- Наприклад, нехай  $(X_1,X_2,X_3)^{ op}\sim N\left((\mu_1,\mu_2,\mu_3)^{ op},\Sigma\right)$ 
  - ullet Тоді, скажімо,  $(X_1,X_3)^ op \sim N\left((\mu_1,\mu_3)^ op,egin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{13} \ \Sigma_{33} \end{pmatrix}
    ight)$
- Також для багатовимірного нормального розподілу справедлива унікальна властивість
- ullet Нехай  ${f X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$  можна подати як конкатенацію  ${f X} = \left({f X}_1^{ op}, {f X}_2^{ op}
  ight)^{ op}$
- ullet Тоді якщо кореляція між будь-якою координатою  ${f X}_1$  і будь-якою координатою  ${f X}_2$  нульова, то  ${f X}_1 \perp \!\!\! \perp {f X}_2$

$$\vec{\mu}' = \begin{pmatrix} \mu_{i_1} \\ \mu_{i_2} \\ \vdots \\ \mu_{i_m} \end{pmatrix} \;, \qquad \Sigma' = \begin{pmatrix} \Sigma_{i_1,i_1} & \Sigma_{i_1,i_2} & \dots & \Sigma_{i_1,i_m} \\ \Sigma_{i_2,i_1} & \Sigma_{i_2,i_2} & \dots & \Sigma_{i_2,i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{i_m,i_1} & \Sigma_{i_m,i_2} & \dots & \Sigma_{i_m,i_m} \end{pmatrix}$$

- Наприклад, нехай  $(X_1,X_2,X_3)^{ op}\sim N\left((\mu_1,\mu_2,\mu_3)^{ op},\Sigma\right)$ 
  - ullet Тоді, скажімо,  $(X_1,X_3)^ op \sim N\left((\mu_1,\mu_3)^ op, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{33} \end{pmatrix}
    ight)$
- Також для багатовимірного нормального розподілу справедлива унікальна властивість
- ullet Нехай  ${f X} \sim N(ec{\mu}, \Sigma)$  можна подати як конкатенацію  ${f X} = \left({f X}_1^ op, {f X}_2^ op
  ight)^ op$
- • Тоді якщо кореляція між будь-якою координатою  $\mathbf{X}_1$  і будь-якою координатою  $\mathbf{X}_2$  нульова, то  $\mathbf{X}_1 \perp \!\!\! \perp \mathbf{X}_2$

- На основі нормального можна утворити інші розподіли, винятково важливі в статистиці
- $\bullet$   $Z \sim N(0,1)$ , a  $X=Z^2$
- ullet Тоді X має розподіл  $\chi^2$  з одним ступенем свободи
- Функцію розподілу дуже просто визначити:

$$\begin{split} F_X(x) &= \mathbb{P}_Z\left(Z^2 \leq x\right) = \left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \\ &= \left(2\Phi(\sqrt{x}) - 1\right) \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \end{split}$$

- ullet Звідси  $f_X(x) = \left((2\Phi(\sqrt{x})-1)\cdot \mathbbm{1}\left\{x\geq 0
  ight\}
  ight)' = 2\phi(\sqrt{x})\cdot rac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \mathbbm{1}\left\{x>0
  ight\}$
- ullet У загальному випадку, сума  $X=\sum_{i=1}^r Z_i^2, Z_i \sim N(0,1), i=1,\dots,r$ , де всі величини незалежні, має розподіл  $\chi^2$  з r ступенями свободи
- Це позначають через  $X \sim \chi^2_{\pi}$
- Ії щільність дорівнює:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbb{1}\left\{x > 0\right\}$$

(3.10)

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\chi_r^2
ight]=r$ , Var  $\left(\chi_r^2
ight)=2r$ 

hoозподілу  $\chi^2$  існує сім'я функцій chisq

- На основі нормального можна утворити інші розподіли, винятково важливі в статистиці
- ullet  $Z\sim N(0,1)$ , a  $X=Z^2$
- ullet Тоді X має розподіл  $\chi^2$  з одним ступенем свободи
- Функцію розподілу дуже просто визначити:

$$\begin{split} F_X(x) &= \mathbb{P}_Z\left(Z^2 \leq x\right) = \left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) \cdot \mathbb{I}\left\{x \geq 0\right\} \\ &= \left(2\Phi(\sqrt{x}) - 1\right) \cdot \mathbb{I}\left\{x \geq 0\right\} \end{split}$$

$$ullet$$
 Звідси  $f_X(x) = \left( \left( 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 \right) \cdot \mathbbm{1} \left\{ x \geq 0 
ight\} \right)' = 2\phi(\sqrt{x}) \cdot rac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \mathbbm{1} \left\{ x > 0 
ight\}$ 

- ullet У загальному випадку, сума  $X=\sum_{i=1}^r Z_i^2, Z_i \sim N(0,1), i=1,\dots,r$ , де всі величини незалежні, має розподіл  $\chi^2$  з r ступенями свободи
- ullet Це позначають через  $X \sim \chi^2_{\scriptscriptstyle T}$
- Її щільність дорівнює

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\}$$
 (3.10)

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\chi_r^2\right]=r$ ,  $\mathrm{Var}\left(\chi_r^2\right)=2r$ 

-е. V пакеті  $\mathtt{stats}$  для розподілу  $\chi^2$  існує сім'я функцій <code>chisq</code>

- На основі нормального можна утворити інші розподіли, винятково важливі в статистиці
- $Z \sim N(0,1), a X = Z^2$
- ullet Тоді X має розподіл  $\chi^2$  з одним ступенем свободи
- Функцію розподілу дуже просто визначити:

$$\begin{split} F_X(x) &= \mathbb{P}_Z\left(Z^2 \leq x\right) = \left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \\ &= \left(2\Phi(\sqrt{x}) - 1\right) \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \end{split}$$

- ullet Звідси  $f_X(x)=\left((2\Phi(\sqrt{x})-1)\cdot\mathbbm{1}\left\{x\geq 0
  ight\}
  ight)'=2\phi(\sqrt{x})\cdotrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\mathbbm{1}\left\{x>0
  ight\}$
- У загальному випадку, сума  $X = \sum_{i=1}^r Z_i^2$ ,  $Z_i \sim N(0,1)$ ,  $i=1,\dots,r$ , де всі величини незалежні, має розподіл  $\chi^2$  з r ступенями свободи
- ullet Це позначають через  $X \sim \chi_x^2$
- Її щільність дорівнює

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \cdot 1 \; \{x > 0\}$$

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\chi_r^2
ight]=r$ ,  $\mathrm{Var}\left(\chi_r^2
ight)=2r$ 

 $extbf{posnonin}$ у  $\chi^2$  існує сім'я функцій chisq

- На основі нормального можна утворити інші розподіли, винятково важливі в статистиці
- ullet  $Z\sim N(0,1)$ , a  $X=Z^2$
- ullet Тоді X має **розподіл**  $\chi^2$  **з одним ступенем свободи**
- Функцію розподілу дуже просто визначити:

$$\begin{split} F_X(x) &= \mathbb{P}_Z\left(Z^2 \leq x\right) = \left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) \cdot \mathbb{1} \; \{x \geq 0\} \\ &= \left(2\Phi(\sqrt{x}) - 1\right) \cdot \mathbb{1} \; \{x \geq 0\} \end{split}$$

- Звідси  $f_X(x) = \left( \left( 2\Phi(\sqrt{x}) 1 \right) \cdot \mathbbm{1} \left\{ x \geq 0 \right\} \right)' = 2\phi(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \mathbbm{1} \left\{ x > 0 \right\}$
- У загальному випадку, сума  $X = \sum_{i=1}^r Z_i^2$  ,  $Z_i \sim N(0,1)$ ,  $i=1,\ldots,r$ , де всі величини незалежні, має розподіл  $\chi^2$  з r ступенями свободи
- Це позначають через  $X \sim V_{\pi}^2$
- Її щільність дорівнює

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} x^{\frac{r}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\}.$$

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\chi_r^2\right]=r$ ,  $\mathrm{Var}\left(\chi_r^2\right)=2r$ 

hoзподілу  $\chi^2$  існує сім'я функцій chisq

- На основі нормального можна утворити інші розподіли, винятково важливі в статистиці
- ullet  $Z\sim N(0,1)$ , a  $X=Z^2$
- ullet Тоді X має розподіл  $\chi^2$  з одним ступенем свободи
- Функцію розподілу дуже просто визначити:

$$\begin{split} F_X(x) &= \mathbb{P}_Z\left(Z^2 \leq x\right) = \left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) \cdot \mathbb{1} \; \{x \geq 0\} \\ &= \left(2\Phi(\sqrt{x}) - 1\right) \cdot \mathbb{1} \; \{x \geq 0\} \end{split}$$

- Звідси  $f_X(x) = \left( (2\Phi(\sqrt{x}) 1) \cdot \mathbbm{1} \left\{ x \geq 0 \right\} \right)' = 2\phi(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \mathbbm{1} \left\{ x > 0 \right\}$
- У загальному випадку, сума  $X=\sum_{i=1}^r Z_i^2, Z_i \sim N(0,1), i=1,\dots,r$ , де всі величини незалежні, має **розподіл**  $\chi^2$  **3** r **ступенями свободи**
- Це позначають через  $X \sim \chi^2$
- $\bullet$  Її щільність дорівнює  $^1$

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\}$$
 (3.10)

• Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\chi_r^2\right] = r$ , Var  $\left(\chi_r^2\right) = 2r$ • У пакоті s.t.a.t.s. для позполіту  $\chi^2$  існує сім'я функцій с

- На основі нормального можна утворити інші розподіли, винятково важливі в статистиці
- ullet  $Z \sim N(0,1)$ , a  $X=Z^2$
- ullet Тоді X має **розподіл**  $\chi^2$  **з одним ступенем свободи**
- Функцію розподілу дуже просто визначити:

$$\begin{split} F_X(x) &= \mathbb{P}_Z\left(Z^2 \leq x\right) = \left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) \cdot \mathbb{1} \; \{x \geq 0\} \\ &= \left(2\Phi(\sqrt{x}) - 1\right) \cdot \mathbb{1} \; \{x \geq 0\} \end{split}$$

- Звідси  $f_X(x) = \left( (2\Phi(\sqrt{x}) 1) \cdot \mathbbm{1} \left\{ x \geq 0 \right\} \right)' = 2\phi(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \mathbbm{1} \left\{ x > 0 \right\}$
- У загальному випадку, сума  $X=\sum_{i=1}^r Z_i^2$  ,  $Z_i\sim N(0,1)$  ,  $i=1,\dots,r$  , де всі величини незалежні, має **розподіл**  $\chi^2$  з r ступенями свободи
- Це позначають через  $X \sim \chi_r^2$
- $\bullet$  Її щільність дорівнює $^1$

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\}$$
 (3.10)

 $\bullet\,$  Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\chi_r^2\right] = r$  ,  $\mathrm{Var}\left(\chi_r^2\right) = 2r$ 

- На основі нормального можна утворити інші розподіли, винятково важливі в статистиці
- ullet  $Z \sim N(0,1)$ , a  $X=Z^2$
- ullet Тоді X має **розподіл**  $\chi^2$  **з одним ступенем свободи**
- Функцію розподілу дуже просто визначити:

$$\begin{split} F_X(x) &= \mathbb{P}_Z\left(Z^2 \leq x\right) = \left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) \cdot \mathbb{1} \; \{x \geq 0\} \\ &= \left(2\Phi(\sqrt{x}) - 1\right) \cdot \mathbb{1} \; \{x \geq 0\} \end{split}$$

- ullet Звідси  $f_X(x) = \left((2\Phi(\sqrt{x})-1)\cdot\mathbbm{1}\left\{x\geq 0
  ight\}
  ight)' = 2\phi(\sqrt{x})\cdotrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\mathbbm{1}\left\{x>0
  ight\}$
- У загальному випадку, сума  $X=\sum_{i=1}^r Z_i^2$  ,  $Z_i\sim N(0,1)$  ,  $i=1,\dots,r$  , де всі величини незалежні, має **розподіл**  $\chi^2$  з r ступенями свободи
- ullet Це позначають через  $X \sim \chi^2_r$
- ullet Її щільність дорівнює $^{17}$

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\}$$
 (3.10)

- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\chi_r^2\right]=r$ ,  $\mathrm{Var}\left(\chi_r^2\right)=2r$
- <u> У пакеті stats для розподіл</u>у  $\chi^2$  існує сім'я функцій chisq

- На основі нормального можна утворити інші розподіли, винятково важливі в статистиці
- ullet  $Z\sim N(0,1)$ , a  $X=Z^2$
- ullet Тоді X має розподіл  $\chi^2$  з одним ступенем свободи
- Функцію розподілу дуже просто визначити:

$$\begin{split} F_X(x) &= \mathbb{P}_Z\left(Z^2 \leq x\right) = \left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \\ &= \left(2\Phi(\sqrt{x}) - 1\right) \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \end{split}$$

- ullet Звідси  $f_X(x)=\left((2\Phi(\sqrt{x})-1)\cdot\mathbbm{1}\left\{x\geq 0
  ight\}
  ight)'=2\phi(\sqrt{x})\cdotrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\mathbbm{1}\left\{x>0
  ight\}$
- У загальному випадку, сума  $X=\sum_{i=1}^r Z_i^2$  ,  $Z_i\sim N(0,1)$  ,  $i=1,\dots,r$  , де всі величини незалежні, має **розподіл**  $\chi^2$  з r ступенями свободи
- ullet Це позначають через  $X \sim \chi^2_r$
- ullet Її щільність дорівнює $^{17}$

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\}$$
 (3.10)

• Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\chi_r^2\right]=r$ ,  $\mathrm{Var}\left(\chi_r^2\right)=2r$ • У пакеті stats для розподіду  $\chi^2$  існує сім'я функцій chisq

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup>Що можна легко вивести з властивостей Гамма-розподілу (КЛТЙ 10.2)

- На основі нормального можна утворити інші розподіли, винятково важливі в статистиці
- ullet  $Z\sim N(0,1)$ , a  $X=Z^2$
- ullet Тоді X має розподіл  $\chi^2$  з одним ступенем свободи
- Функцію розподілу дуже просто визначити:

$$\begin{split} F_X(x) &= \mathbb{P}_Z\left(Z^2 \leq x\right) = \left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \\ &= \left(2\Phi(\sqrt{x}) - 1\right) \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \end{split}$$

- ullet Звідси  $f_X(x)=\left((2\Phi(\sqrt{x})-1)\cdot\mathbbm{1}\left\{x\geq 0
  ight\}
  ight)'=2\phi(\sqrt{x})\cdotrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\mathbbm{1}\left\{x>0
  ight\}$
- У загальному випадку, сума  $X=\sum_{i=1}^r Z_i^2$  ,  $Z_i\sim N(0,1)$  ,  $i=1,\dots,r$  , де всі величини незалежні, має **розподіл**  $\chi^2$  з r ступенями свободи
- ullet Це позначають через  $X \sim \chi^2_r$
- ullet Її щільність дорівнює $^{17}$

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\}$$
 (3.10)

ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\chi_r^2
ight]=r$ ,  $\mathrm{Var}\left(\chi_r^2
ight)=2r$ 

ullet У пакеті stats для розподілу  $\chi^2$  існує сім'я функцій chisq

 $<sup>^{17}</sup>$ Що можна легко вивести з властивостей Гамма-розподілу (КЛТЙ 10.2)

- На основі нормального можна утворити інші розподіли, винятково важливі в статистиці
- ullet  $Z\sim N(0,1)$ , a  $X=Z^2$
- ullet Тоді X має **розподіл**  $\chi^2$  **з одним ступенем свободи**
- Функцію розподілу дуже просто визначити:

$$\begin{split} F_X(x) &= \mathbb{P}_Z\left(Z^2 \leq x\right) = \left(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right) \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \\ &= \left(2\Phi(\sqrt{x}) - 1\right) \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \end{split}$$

- ullet Звідси  $f_X(x)=\left((2\Phi(\sqrt{x})-1)\cdot\mathbbm{1}\left\{x\geq 0
  ight\}
  ight)'=2\phi(\sqrt{x})\cdotrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\mathbbm{1}\left\{x>0
  ight\}$
- У загальному випадку, сума  $X=\sum_{i=1}^r Z_i^2, Z_i \sim N(0,1), i=1,\dots,r$ , де всі величини незалежні, має **розподіл**  $\chi^2$  з r ступенями свободи
- ullet Це позначають через  $X \sim \chi_r^2$
- ullet Її щільність дорівнює $^{17}$

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbb{1} \left\{ x > 0 \right\}$$
 (3.10)

- ullet Можна порахувати, що  $\mathbb{E}\left[\chi_r^2\right]=r$ ,  $\mathrm{Var}\left(\chi_r^2\right)=2r$
- ullet У пакеті  $\mathtt{stats}$  для розподілу  $\chi^2$  існує сім'я функцій  $\mathtt{chisq}$

- На основі розподілу  $\chi^2$  можна сформулювати ще два важливі розподіли, які нам знадобляться
- Випадкова величина  $T=\frac{Z}{\sqrt{Y/r}}$ , де  $Z\sim N(0,1)$ ,  $Y\sim \chi^2_r$ , має t-розподіл з r ступенями свободи (він же розподіл Ст'юдента. Student's t-distribution)
- ullet Це позначають через  $T \sim t_x$
- ullet Можна показати, що якщо r=1, то T має розподіл Кош
- ullet Щільність розподілу  $t_r$  дорівнює

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{r\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}$$
(3.11)

- ullet У пакеті stats для t-розподілу існує сім'я функцій t
- ullet Розподіл t прямує до стандартного нормального розподілу, коли  $r o \infty$ , і до того ж дуже швидко

- На основі розподілу  $\chi^2$  можна сформулювати ще два важливі розподіли, які нам знадобляться
- Випадкова величина  $T=\frac{Z}{\sqrt{Y/r}}$ , де  $Z\sim N(0,1)$ ,  $Y\sim\chi^2_r$ , має t-розподіл з r ступенями свободи (він же розподіл Ст'юдента, Student's t-distribution)
- ullet Це позначають через  $T \sim t_s$
- ullet Можна показати, що якщо r=1, то T має розподіл Кош
- ullet Щільність розподілу  $t_r$  дорівнює

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{r\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}$$
(3.11)

- ullet У пакеті  ${ t stats}$  для  ${ t t}$ -розподілу існує  ${ t cim' s}$  функцій  ${ t i}$
- Розподіл t прямує до стандартного нормального розподілу, коли  $r \to \infty$ , і до того ж дуже швидко

- На основі розподілу  $\chi^2$  можна сформулювати ще два важливі розподіли, які нам знадобляться
- Випадкова величина  $T=\frac{Z}{\sqrt{Y/r}}$ , де  $Z\sim N(0,1)$ ,  $Y\sim \chi^2_r$ , має t-розподіл з r ступенями свободи (він же розподіл Ст'юдента, Student's t-distribution)
- ullet Це позначають через  $T \sim t_r$
- Можна показати, що якщо r=1, то T має розподіл Кош
- ullet Щільність розподілу  $t_r$  дорівнює

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{r\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}$$
(3.11)

- ullet У пакеті stats для t-розподілу існує сім'я функцій t
- Розподіл t прямує до стандартного нормального розподілу, коли  $r \to \infty$ , і до того ж дуже швидко

- На основі розподілу  $\chi^2$  можна сформулювати ще два важливі розподіли, які нам знадобляться
- Випадкова величина  $T=\frac{Z}{\sqrt{Y/r}}$ , де  $Z\sim N(0,1)$ ,  $Y\sim \chi^2_r$ , має t-розподіл з r ступенями свободи (він же розподіл Ст'юдента, Student's t-distribution)
- ullet Це позначають через  $T \sim t_r$
- ullet Можна показати, що якщо r=1, то T має розподіл Коші
- ullet Щільність розподілу  $t_r$  дорівнює

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{r\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}$$
(3.11)

- ullet У пакеті stats для t-розподілу існує сім'я функцій t
- $\bullet$  Розподіл t прямує до стандартного нормального розподілу, коли  $r\to\infty$ , і до того ж дуже швидко

- На основі розподілу  $\chi^2$  можна сформулювати ще два важливі розподіли, які нам знадобляться
- Випадкова величина  $T=\frac{Z}{\sqrt{Y/r}}$ , де  $Z\sim N(0,1)$ ,  $Y\sim \chi^2_r$ , має t-розподіл з r ступенями свободи (він же розподіл Ст'юдента, Student's t-distribution)
- ullet Це позначають через  $T \sim t_r$
- ullet Можна показати, що якщо r=1, то T має розподіл Коші
- ullet Щільність розподілу  $t_r$  дорівнює

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{r\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}$$
(3.11)

- ullet У пакеті stats для t-розподілу існує сім'я функцій t
- $\bullet\,$  Розподіл t прямує до стандартного нормального розподілу, коли  $r\to\infty$ , і до того ж дуже швидко

- На основі розподілу  $\chi^2$  можна сформулювати ще два важливі розподіли, які нам знадобляться
- Випадкова величина  $T=\frac{Z}{\sqrt{Y/r}}$ , де  $Z\sim N(0,1)$ ,  $Y\sim \chi^2_r$ , має t-розподіл з r ступенями свободи (він же розподіл Ст'юдента, Student's t-distribution)
- ullet Це позначають через  $T \sim t_r$
- ullet Можна показати, що якщо r=1, то T має розподіл Коші
- ullet Щільність розподілу  $t_r$  дорівнює

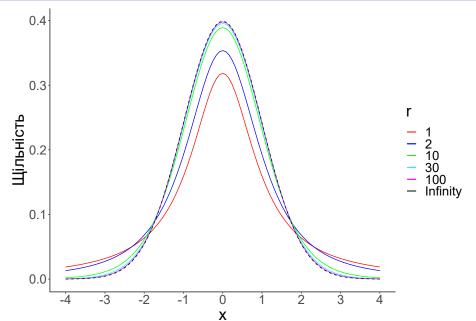
$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{r\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}$$
(3.11)

- ullet У пакеті stats для t-розподілу існує сім'я функцій t
- $\bullet\,$  Розподілt прямує до стандартного нормального розподілу, коли  $r\to\infty$ , і до того ж дуже швидко

- На основі розподілу  $\chi^2$  можна сформулювати ще два важливі розподіли, які нам знадобляться
- Випадкова величина  $T=\frac{Z}{\sqrt{Y/r}}$ , де  $Z\sim N(0,1)$ ,  $Y\sim \chi^2_r$ , має t-розподіл з r ступенями свободи (він же розподіл Ст'юдента, Student's t-distribution)
- ullet Це позначають через  $T \sim t_r$
- ullet Можна показати, що якщо r=1, то T має розподіл Коші
- ullet Щільність розподілу  $t_x$  дорівнює

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{r\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}$$
(3.11)

- ullet У пакеті stats для t-розподілу існує сім'я функцій t
- $\bullet\,$  Розподіл t прямує до стандартного нормального розподілу, коли  $r\to\infty$ , і до того ж дуже швидко



### РозподілF

- Випадкова величина  $F = \frac{X/r_1}{Y/r_2}$ , де  $X \sim \chi^2_{r_1}$ ,  $Y \sim \chi^2_{r_2}$ , має F-розподіл з  $r_1$  і  $r_2$  ступенями свободи (він же розподіл Фішера-Снедекора, Fisher–Snedecor distribution)
- ullet Це позначають через  $F \sim F_{r_1,r_2}$
- ullet Щільність розподілу  $F_{r_1,r_2}$  дорівнює

$$F(x) = \frac{1}{B\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}\right)} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{r_1/2} x^{\frac{r_1}{2} - 1} \left(1 + \frac{r_1}{r_2}x\right)^{-\frac{r_1 + r_2}{2}}$$
(3.12)

ullet У пакеті  $\operatorname{stats}$  для F-розподілу існує сім'я функцій  $\operatorname{f}$ 

### $\mathsf{Posnogin}\,F$

- Випадкова величина  $F=rac{X/r_1}{Y/r_2}$ , де  $X\sim\chi^2_{r_1}$ ,  $Y\sim\chi^2_{r_2}$ , має F-розподіл з  $r_1$  і  $r_2$  ступенями свободи (він же розподіл Фішера-Снедекора, Fisher–Snedecor distribution)
- Це позначають через  $F \sim F_{r_1,r_2}$
- ullet Щільність розподілу  $F_{r_1,r_2}$  дорівнює

$$F(x) = \frac{1}{B\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}\right)} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{r_1/2} x^{\frac{r_1}{2} - 1} \left(1 + \frac{r_1}{r_2}x\right)^{-\frac{r_1 + r_2}{2}}$$
(3.12)

ullet У пакеті stats для F-розподілу існує сім'я функцій f

### РозподілF

- Випадкова величина  $F = \frac{X/r_1}{Y/r_2}$ , де  $X \sim \chi^2_{r_1}$ ,  $Y \sim \chi^2_{r_2}$ , має F-розподіл з  $r_1$  і  $r_2$  ступенями свободи (він же розподіл Фішера-Снедекора, Fisher–Snedecor distribution)
- ullet Це позначають через  $F \sim F_{r_1,r_2}$
- ullet Щільність розподілу  $F_{r_1,r_2}$  дорівнює

$$F(x) = \frac{1}{B\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}\right)} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{r_1/2} x^{\frac{r_1}{2} - 1} \left(1 + \frac{r_1}{r_2}x\right)^{-\frac{r_1 + r_2}{2}}$$
(3.12)

ullet У пакеті stats для F-розподілу існує сім'я функцій f

### $\mathsf{Posnogin}\,F$

- Випадкова величина  $F = \frac{X/r_1}{Y/r_2}$ , де  $X \sim \chi^2_{r_1}$ ,  $Y \sim \chi^2_{r_2}$ , має F-розподіл з  $r_1$  і  $r_2$  ступенями свободи (він же розподіл Фішера-Снедекора, Fisher–Snedecor distribution)
- ullet Це позначають через  $F \sim F_{r_1,r_2}$
- ullet Щільність розподілу  $F_{r_1,r_2}$  дорівнює

$$F(x) = \frac{1}{B\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}\right)} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{r_1/2} x^{\frac{r_1}{2} - 1} \left(1 + \frac{r_1}{r_2}x\right)^{-\frac{r_1 + r_2}{2}}$$
(3.12)

ullet У пакеті  $\operatorname{stats}$  для F-розподілу існує сім'я функцій  $\operatorname{f}$