Лабораторна робота № 1. Навігаційна задача швидкодії

а) Розв'язання числовим методом (d1 - метод прицілювання та d2 - метод одно крокового передбачення).

См. Лейтман (1968, розділ 1.17).

Розглянемо корабель (берегової охорони), що рухається зі швидкістю, постійної за величиною відносно води, швидкість течії якої може змінюватися в міру віддалення від берегової лінії (рис. 1.1). Ми бажаємо визначити програму управління рулями, при якій корабель досягає заданої кінцевої точки з заданого початкового пункту за мінімальний час.

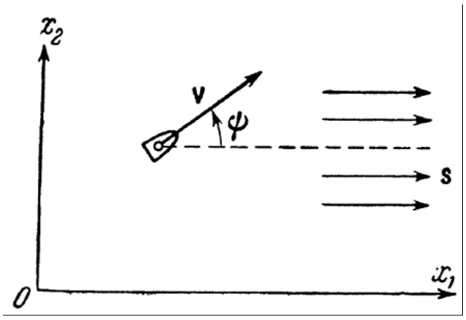

Рисунок 1.1 – Схема руху

Нехай осі x_1 і x_2 відповідно паралельні і перпендикулярні вектору швидкості течії $\mathbf{S}$, і нехай буде регульований кут ψ між векторами $\mathbf{S}$ і $\mathbf{V}$. Припустимо, що абсолютна величина швидкості течії s залежить від координати x_2, Тобто $s = s_0 f(x_2)$, Наприклад, $s = s_0 x_2$ або $s = s_0 \sin x_2$ і т.п. Рівняння руху корабля такі:

$$\frac{dx_1}{dt} = s(x_2) + v \cdot \cos\psi, \qquad \frac{dx_2}{dt} = v \cdot \sin\psi,$$

де $s(x_2)$ і v - абсолютні величини векторів $\mathbf{S}$ і $\mathbf{V}$. Або, в еквівалентній формі,

$$\frac{dx_1}{dt} = s(x_2) + v \cdot u_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = v \cdot u_2,$$

причому

$$u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

Таким чином, маємо систему з вектором стану (x_1, x_2), рівняннями стану , керуючим вектором (u_1, u_2) і множиною значень U керуючого вектора, визначеним рівністю . Ми бажаємо визначити допустиме управління u^*, Яке переводить систему з точки $(0,0)$ в момент $t=0$ в точку $\left(x_1^*=l\cdot\cos\varphi, x_2^*=l\cdot\sin\varphi\right)$ за мінімальний час. Параметри s_0, v, l, φ - задані, $f(x_2)$ - задана функція.

Наближено вирішимо завдання числовим методом.

Дискретизуємо рівняння . Введемо часовий інтервал $\tau=\frac{l/v}{N}$, де N - досить велике число. Наближено запишемо рівняння в кінцево-різницевої вигляді:

$$\frac{x_1(t+\tau)-x_1(t)}{\tau}=s(x_2(t))+v\cdot u_1, \qquad \frac{x_2(t+\tau)-x_2(t)}{\tau}=v\cdot u_2,$$

Звідки

$$x_1(t+\tau)=x_1(t)+\left(s(x_2(t))+v\cdot u_1\right)\tau, \quad x_2(t+\tau)=x_2(t)+vu_2\tau .$$

d2) Будемо шукати (міопичне = короткозоре, або data-driven) управління $\left(u_1(t),u_2(t)\right)$ як рішення наступного завдання:

$$\begin{aligned}&\left(x_1^*-x_1(t+\tau)\right)^2+\left(x_2^*-x_2(t+\tau)\right)^2=\\&=\left(x_1^*-\left(x_1(t)+\left(s(x_2(t))+v\cdot u_1\right)\tau\right)\right)^2+\left(x_2^*-(x_2(t)+vu_2\tau)\right)^2\to\min_{u:u_1^2+u_2^2=1}.\end{aligned}$$

Вирішимо цю задачу оптимізації методом множників Лагранжа, розглянемо задачу:

$$\left(x_1^*-\left(x_1(t)+\left(s(x_2(t))+v\cdot u_1\right)\tau\right)\right)^2+\left(x_2^*-\left(x_2(t)+vu_2\tau\right)\right)^2+\lambda\left(u_1^2+u_2^2-1\right)\to\min_{u_1,u_2}.$$

Напишемо необхідні умови екстремуму:

$$-2\left(x_1^*-\left(x_1(t)+\left(s(x_2(t))+v\cdot u_1\right)\tau\right)\right)v\tau+2\lambda u_1=0,$$

$$-2\left(x_2^*-\left(x_2(t)+vu_2\tau\right)\right)v\tau+2\lambda u_2=0,$$

$$u_1^2+u_2^2=1.$$

Звідси

$$u_1(t)=\frac{\left(x_1^*-x_1(t)-s(x_2(t))\cdot\tau\right)\cdot v\cdot\tau}{\lambda(t)+v^2\tau^2}, \quad u_2(t)=\frac{\left(x_2^*-x_2(t)\right)v\tau}{\lambda(t)+v^2\tau^2},$$

$$\lambda(t)=\left(\left(x_1^*-x_1(t)-s(x_2(t))\tau\right)^2+\left(x_2^*-x_2(t)\right)^2\right)^{1/2}v\tau-v^2\tau^2;$$

$x_1^* = l \cdot \cos\varphi$, $x_2^* = l \cdot \sin\varphi$.

Завдання полягає у наступному.

А. У системі Matlab (або Octava, або інший) побудувати траєкторію переміщення судна (і зобразити її графічно) $\{(x_1(t_k), x_2(t_k)),\ t_k = \tau k,\ k = 0,1,...,N,N+1,...,K\}$, згідно наступним рекурентним співвідношенням:

$$x_1(t_{k+1}) = x_1(t_k) + \left(s(x_2(t_k)) + v \cdot u_1(t_k)\right)\tau, \qquad x_2(t_{k+1}) = x_2(t_k) + vu_2(t_k)\tau;$$

$$u_1(t_k) = \frac{\left(x_1^* - x_1(t_k) - s(x_2(t_k)) \cdot \tau\right)v\tau}{\lambda(t_k) + v^2\tau^2}, \qquad u_2(t_k) = \frac{\left(x_2^* - x_2(t_k)\right)v\tau}{\lambda(t_k) + v^2\tau^2},$$

$$\lambda(t_k) = \left(\left(x_1^* - x_1(t_k) - s(x_2(t_k))\tau\right)^2 + \left(x_2^* - x_2(t_k)\right)^2\right)^{1/2} v\tau - v^2\tau^2;$$

$x_1^* = l \cdot \cos\varphi$, $x_2^* = l \cdot \sin\varphi$.

Тут $s(x_2) = s_0 f(x_2)$; s_0, v, l, φ - задані параметри, $f(x_2)$ - задана функція (наприклад, $f(x_2) \equiv 1$, $f(x_2) = x_2$ і т.і.).

Параметр $K = K^*$ (число додаткових ітерацій) обрати таким, щоб досягнути цільової точки $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Тоді число $T^* = \frac{l/v}{N}(N + K^*)$ визначає час руху до цілі. Якщо цілі неможливо досягнути, то $T^* = +\infty$.

Б . Дослідити залежність траєкторії та часу руху до цілі від параметрів задачі s_0, v, l, φ та від параметру точності апроксимації N .

В. Вирішити завдання піймання цілі x^* , якщо вона може втікати з максимальною швидкістю $v^* < v$ (+5 балів).

Г. Вирішити завдання піймання цілі x^* , якщо вона може втікати з деякою максимальною швидкістю, яку ми не знаємо (+5 балів).

Порядок виконання роботи.

1. Задати вихідні дані $s_0 = \sqrt{n}, v = \sqrt{n}, l = n, \varphi = n\pi/25$, $f(x_2) = x_2$, де n - номер студента в списку групи.
2. Запрограмувати рекурентні співвідношення - в системі Matlab (або Octava і т.і.).

3. Побудувати графік траєкторії судна $\left\{\left(x_1(t_k), x_2(t_k)\right),\ t_k = \tau k,\ k = 0,1,\ldots,N,N+1,\ldots,K\right\}$ (а також цілі для випадку завдань В, Г). На графіках вказувати

А) назву графіка і назви осей координат,

Б) точку призначення і значення фіксованих параметрів,

В) легенду (який колір відповідає якомусь значенню параметра),

Г) час досягнення цілі $x^* = (x_1^*, x_2^*)$.

4. Дослідити залежність траєкторії от варіації параметрів s_0, v, l, φ, N.

5. При яких значеннях параметрів, в тому числі за скільки ітерацій і за який час, корабель досягає точки призначення (або піймає ціль в випадку завдань В, Г) (для даної (міопичної) стратегії управління)?

6. Підготувати звіт про роботу в електронному вигляді (з графіками, висновками і лістингом програми).

7. Надіслати звіт викладачеві на електронну адресу.

Література

Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1968. 192 стр.

Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Введение в Octave для инженеров и математиков. М.: ALT Linux, 2012. 368 с.