НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Факультет прикладної математики
Кафедра прикладної математики

Звіт
із лабораторної роботи №3
з дисципліни «Теорія керування»
на тему
«Числове розв’язання задач варіаційного числення»

Виконав:

студент групи КМ-01
Іваник Ю. П.

Перевірили:

Професор ПМА ФПМ
Норкін В.І.
Асистент ПМА ФПМ
Жук І.С.

Київ — 2024

Зміст

Теоретичні відомості

Розглянемо задачу варіаційного числення, тобто задачу нескінченновимірної оптимізації у просторі неперервно диференційованих функцій з фіксованими кінцями:

$$J(x(\cdot)) = \int_{\alpha}^{\beta} I(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \min_{x(\cdot):x(\alpha)=a,x(\beta)=b}.$$

Апроксимуємо цю задачу скінчено-вимірною задачею оптимізації наступним чином.

На інтервалі інтегрування $[\alpha, \beta]$ визначимо точки $t_i = \alpha + i(\beta - \alpha)/N$, $i = 0,..., N+1$, де $(N+1)$ - число точок, $N \sim 10$. Довжина інтервалу між сусідньома точками дорівнює $\Delta t = (\beta - \alpha)/N$.

Введемо $N-1$ змінну $x_i = x(t_i)$, $i = 1,..., N-1$, позначимо $x_0 = a$, $x_N = b$.

Апроксимуємо інтеграл в задачі варіаційного числення за формулою прямокутників:

$$J(x(\cdot)) \approx \sum_{i=0}^{N-1} I\left(t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i)\right)\Delta t.$$

Похідну $\dot{x}(t_i)$ апроксимуємо скінченою різницею:

$$\dot{x}(t_i) \approx (x(t_{i+1}) - x(t_i))/\Delta t = (x_{i+1} - x_i)/\Delta t.$$

Друга похідна апроксимується за формулою:

$$\ddot{x}(t_i) = \left(\left(x(t_{i+1}) - x(t_i)\right)/\Delta t - \left(x(t_i) - x(t_{i-1})\right)/\Delta t\right)/\Delta t =$$
$$= \left(x(t_{i+1}) - 2x(t_i) + x(t_i)\right)/\left(\Delta t\right)^2 = \left(x_{i+1} - 2x_i + x_i\right)/\left(\Delta t\right)^2.$$

Тепер замість вихідної нескінченновимірної оптимізаційної задачі маємо оптимізаційну задачу у $(N-1)$-вимірному просторі:

$$J_N(x_1,...,x_{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} I\left(t_i, x_i, (x_{i+1} - x_i)/\Delta t\right) \cdot \Delta t \to \min_{x_1,...,x_{N-1}}.$$

Також можна розглянути так звану регулярізовану задачу з додатковим квадратичним членом в цільової функції з параметром регулярізації $\lambda \ge 0$:

$$J_N^{\lambda}(x_1,...,x_{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} I\left(t_i, x_i, (x_{i+1}-x_i)/\Delta t\right)\Delta t + \lambda \sum_{i=0}^{N-1}\left((x_{i+1}-x_i)/\Delta t\right)^2 \Delta t \to \min_{x_1,...,x_{N-1}}$$

Якщо вихідна задача містить декілька функцій $x_1(t), x_2(t),...$, то для кожної із них вводяться свої змінні, $x_{1i} = x_1(t_i)$, $x_{2i} = x_2(t_i)$. Таким чином, оптимізаційна задачу буде містити $2N$ змінних, $x_{11}, x_{12},..., x_{1N}, x_{21}, x_{22},..., x_{2N}$.

Ці задачі можна розв'язувати методами безградієнтного типу (по координатний спуск, Нелдера-Міда, випадкових напрямків, скінчено-різницевий). Альтернативно, ці задачі можна також розв'язувати методами градієнтного типу. Градієнт

$$\nabla J_N(x_1,...,x_{N-1}) = \left(\frac{\partial J_N}{\partial x_1},...,\frac{\partial J_N}{\partial x_{N-1}}\right)$$

функції $J_N(x_1,...,x_{N-1})$ наближено обчислюється наступним чином:

$$\frac{\partial J_N}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial J}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_{i-1}}\left(\frac{1}{\Delta t}\right) + \left.\frac{\partial J}{\partial x}\right|_{t=t_i} + \left.\frac{\partial J}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_i}\left(\frac{-1}{\Delta t}\right) \approx$$

$$\approx \left(\frac{\partial J}{\partial \dot{x}}\left(t_{i-1}, x_{i-1}, (x_i - x_{i-1})/\Delta t\right)\right) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\left(t_i, x_i, (x_{i+1}-x_i)/\Delta t\right)\right)\Delta t -$$

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{x}}\left(t_i, x_i, (x_{i+1}-x_i)/\Delta t\right)\right), \qquad i = 1,..., N-1.$$

Тут спочатку для даної підінтегральної функції $I(t, x(t), \dot{x}(t))$ аналітично обчислюються формули для часткових похідних $\frac{\partial J}{\partial x}$ та $\frac{\partial J}{\partial \dot{x}}$ як функцій змінних $(t, x(t), \dot{x}(t))$, а потім замість них підставляються трійки аргументів $\left(t_{i-1}, x_{i-1}, (x_i - x_{i-1})/\Delta t\right)$ та $\left(t_i, x_i, (x_{i+1}-x_i)/\Delta t\right)$.

Аналогічно,

$$\nabla J_N^{\lambda}(x_1,...,x_{N-1}) = \left(\frac{\partial J_N^{\lambda}}{\partial x_1},...,\frac{\partial J_N^{\lambda}}{\partial x_{N-1}}\right),$$

$$\frac{\partial J_N^{\lambda}}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial J}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_{i-1}}\left(\frac{1}{\Delta t}\right) + \left.\frac{\partial J}{\partial x}\right|_{t=t_i} + \left.\frac{\partial J}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_i}\left(\frac{-1}{\Delta t}\right) + \frac{2\lambda}{(\Delta t)}\left(x_i - x_{i-1}\right) - \frac{2\lambda}{(\Delta t)}\left(x_{i+1}-x_i\right) \approx$$

$$\approx \left(\frac{\partial J}{\partial \dot{x}}\left(t_{i-1}, x_{i-1}, (x_i - x_{i-1})/\Delta t\right)\right) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\left(t_i, x_i, (x_{i+1}-x_i)/\Delta t\right)\right)\Delta t -$$

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{x}}\left(t_i, x_i, (x_{i+1}-x_i)/\Delta t\right)\right) + \frac{2\lambda}{(\Delta t)}\left(x_i - x_{i-1}\right) - \frac{2\lambda}{(\Delta t)}\left(x_{i+1}-x_i\right).$$

Порядок виконання роботи

1) Обрати приклад задачі варіаційного числення зі списку та повідомить викладача.
2) Обрати число точок апроксимації N.
3) Запрограмувати функцію $J_N(x_1,\ldots,x_{N-1})$.
4) Обрати метод безградієнтний (або градієнтний) метод мінімізації $J_N(x_1,\ldots,x_{N-1})$.
5) Застосувати метод до мінімізації $J_N(x_1,\ldots,x_{N-1})$ та побудувати графік залежності отриманого значення мінімізованої функції від числа ітерацій, обрати критерій зупинки методу.
6) Для отриманого розв'язку $(x_1^*,\ldots,x_{N-1}^*)$ (мінімуму) побудувати кусково-лінійну функцію по точкам $\left((\alpha,a),(t_1,x_1^*),\ldots,(t_{N-1},x_{N-1}^*),(\beta,b)\right)$ та зобразити її графічно.
7) Графічно порівняти отриманий наближений розв'язок з точним розв'язком, отриманим аналітично.
8) Дослідити точність апроксимації від числа точок апроксимації.
9) Підготувати письмовий звіт про роботу (та надіслати викладачу).

Для цієї лабораторної роботи було вибрано наступну задачу:

$$\int_0^1 \left((x')^2 + x^2\right) dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Основна частина

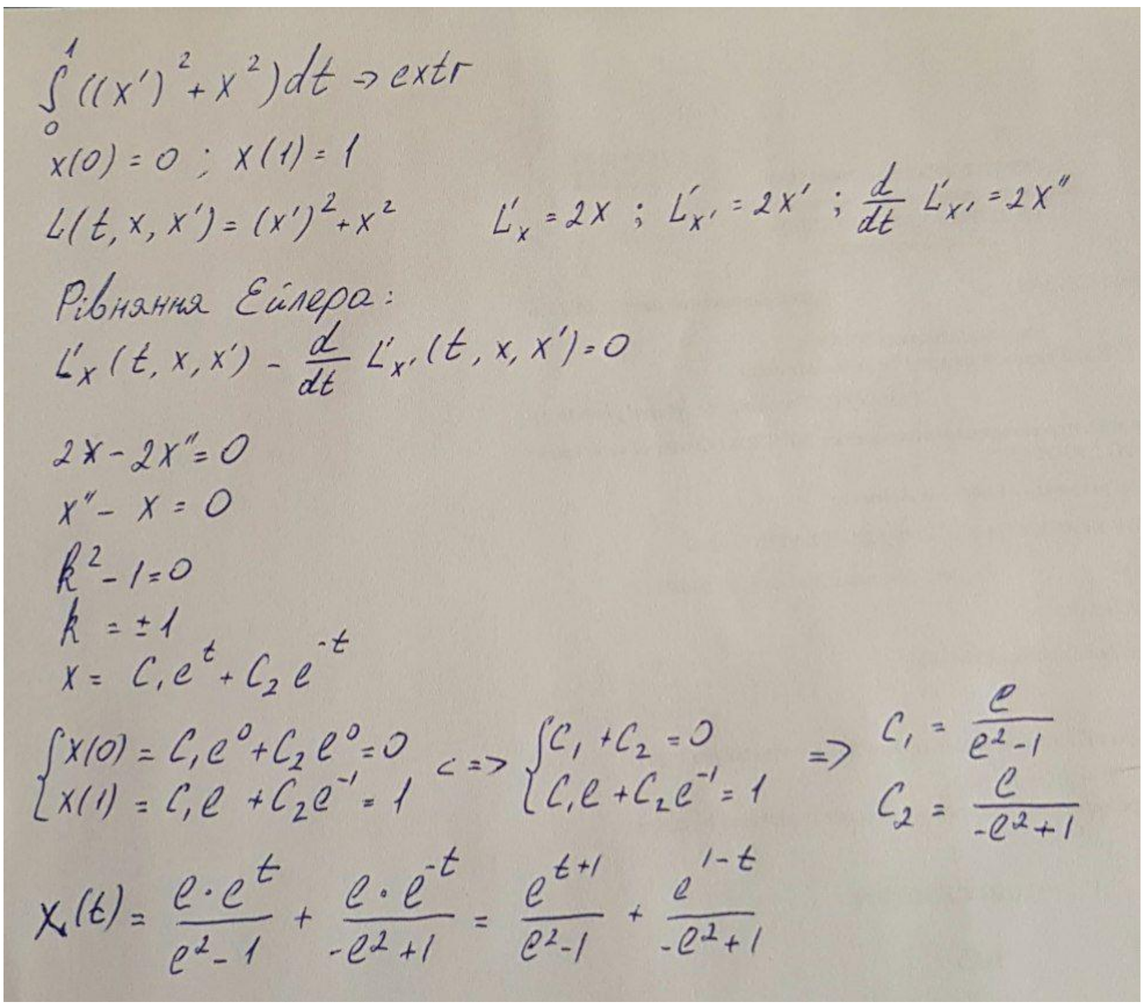
Зафіксуємо наступні параметри:

```
N = 10
A = 0
B = 1
YA = 0
YB = 1
```

Запрограмуємо функцію $J_N(x_1,\ldots,x_{N-1})$.

Для знаходження наближеного розв’язку будемо використовувати функцію Scipy.optimize.minimize, яка оптимізує задану функцію градієнтним методом.

Щоб порівняти результати, треба вручну розв'язати задачу та отримати аналітичний розв’язок:



$$\int_0^1 ((x')^2 + x^2)\,dt \to extr$$

$$x(0) = 0\ ;\ x(1) = 1$$

$$L(t, x, x') = (x')^2 + x^2 \qquad L'_x = 2x\ ;\ L'_{x'} = 2x'\ ;\ \frac{d}{dt} L'_{x'} = 2x''$$

Рівняння Ейлера:

$$L'_x(t, x, x') - \frac{d}{dt} L'_{x'}(t, x, x') = 0$$

$$2x - 2x'' = 0$$

$$x'' - x = 0$$

$$k^2 - 1 = 0$$

$$k = \pm 1$$

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

$$\begin{cases} x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0 \\ x(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e + C_2 e^{-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = \frac{e}{e^2 - 1},\quad C_2 = \frac{e}{-e^2 + 1}$$

$$x_*(t) = \frac{e \cdot e^t}{e^2 - 1} + \frac{e \cdot e^{-t}}{-e^2 + 1} = \frac{e^{t+1}}{e^2 - 1} + \frac{e^{1-t}}{-e^2 + 1}$$

Рис. 1 – Аналітичний розв’язок для даної задачі

Проведемо графічне порівняння отриманих результатів:

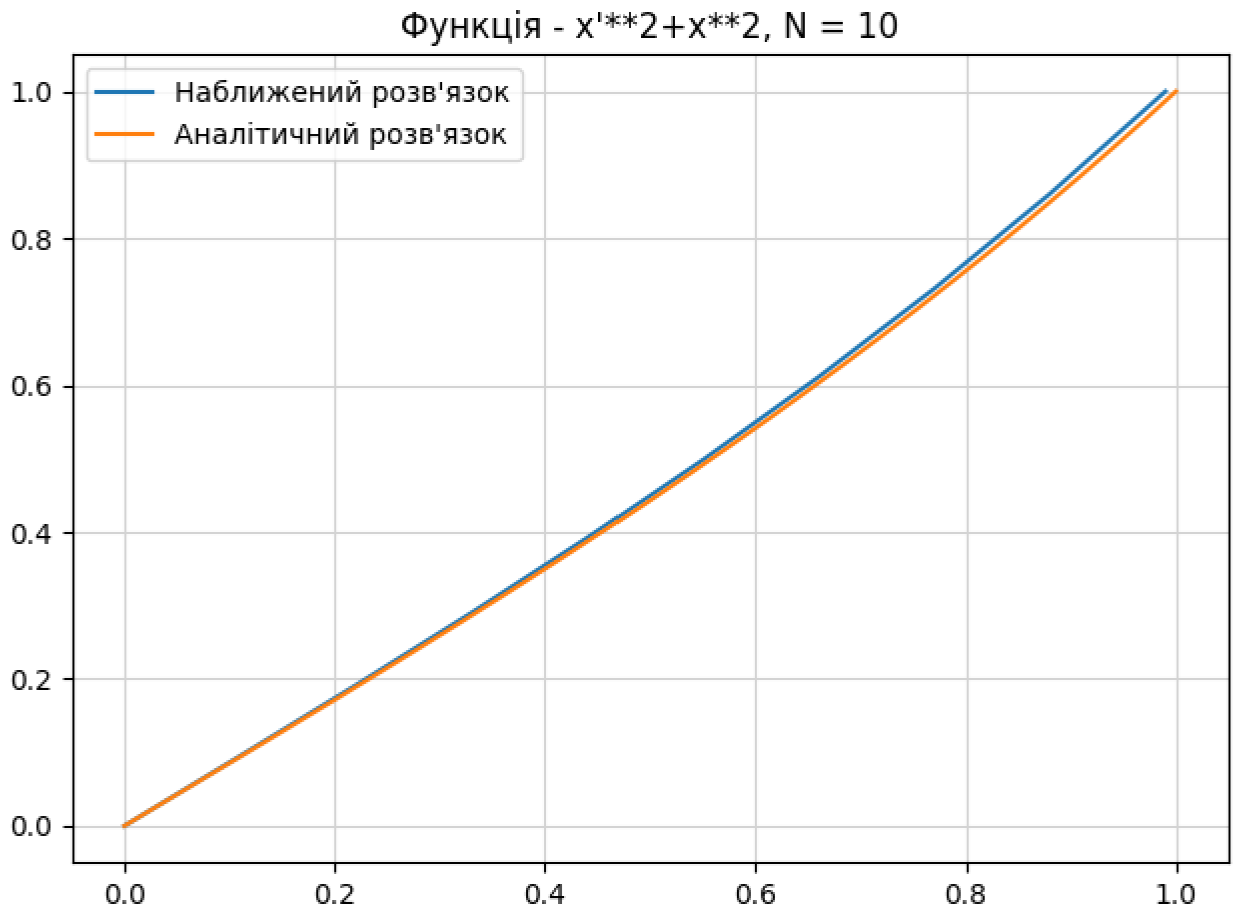


Рис. 2 – Порівняння розв’язків при N=10

Як бачимо, розв’язки досить точно співпали, але все ж таки чим більше t, тим більша різниця виникає між розв’язками, тому збільшимо параметр N до 100 і подивимось на результат.

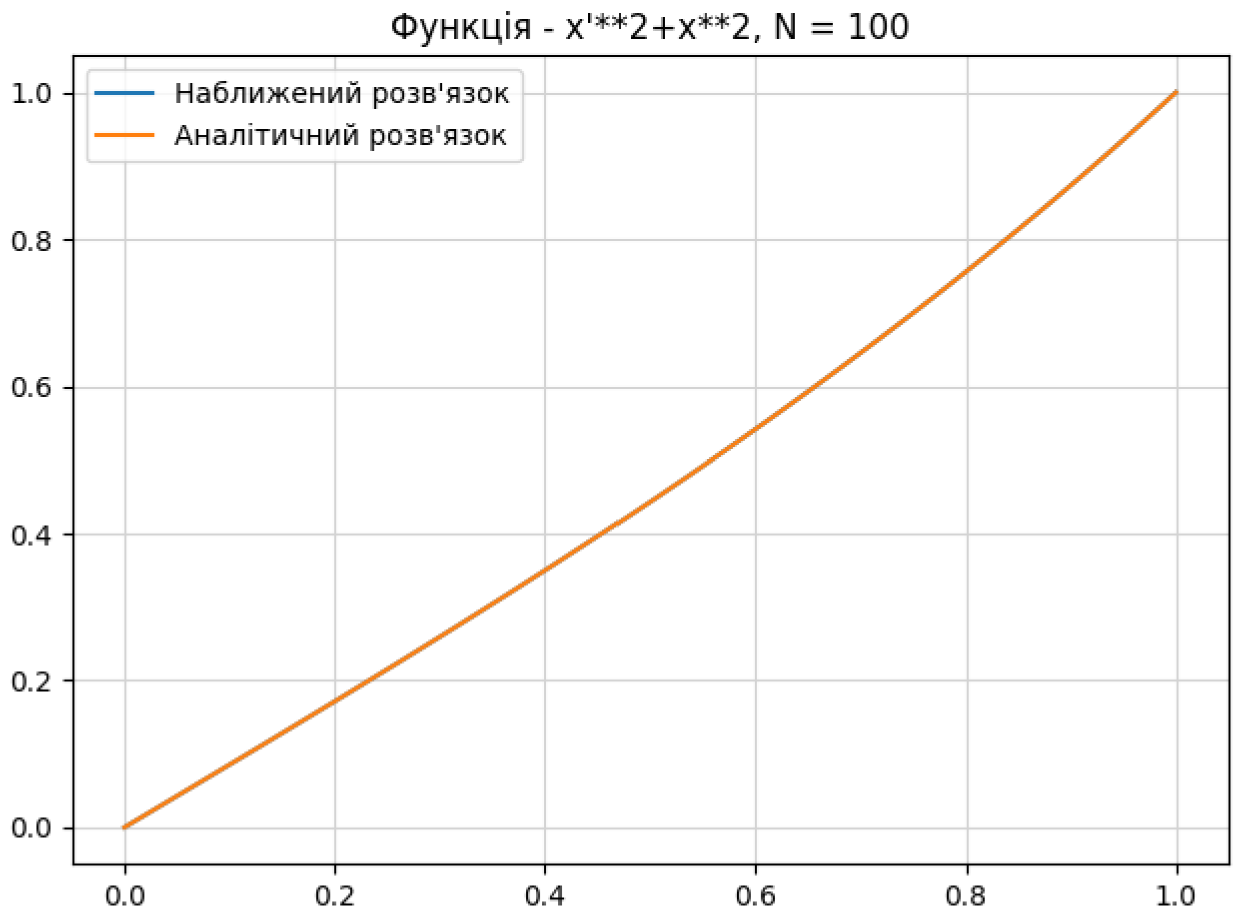


Рис. 3 – Порівняння розв’язків при N=100

Отже, збільшення параметру N (Число точок апроксимації) покращило точність і тепер аналітичний розв’язок, і наближений візуально не мають різниці.

Висновок

В ході виконання цієї лабораторної роботи ми дослідили задачу варіаційного числення, а також аналітичні та наближені методи її вирішення.

Графіки наближеного та аналітичного розв'язків повністю співпадають. Зі збільшенням кількості точок апроксимації підвищується точність обчислень і зменшується значення цільової функції.

Додаток А – Код програми

Іваник Лаб 3.py:

```
import numpy as np
import scipy.optimize
import matplotlib.pyplot as plt


PRECISION = 4
np.set_printoptions(precision=PRECISION)


def j(args):
    global x_list
    x_list = []
    _b = B + step
    dt = (_b-A)/N

    func_str = ""
    for i in range(1, N + 2):
        x_list.append(A + (i - 1) * dt)
        func_str += "(" + FUNC.replace("x'", f"((y{i + 1}-y{i})/{dt})")\
                                  .replace("x", f"(x{i})")\
                                  .replace("t", f"{dt}") + f")*{dt}"
        if i != N+1:
            func_str += "+"
    func_str = func_str.replace("y", "x")
    func_str = f"(1/{N})*(" + func_str + ")"

    f_str = func_str

    f_str = f_str.replace(f'x{N}', str(YB))
    for i in range(len(args), 1, -1):
        f_str = f_str.replace(f"x{i}", str(args[i - 1]))
    f_str = f_str.replace('x1', str(YA))
    return eval(f_str)


def solve(n):
    x0 = np.array([1 for _ in range(n + 2)])
    res = scipy.optimize.minimize(j, x0)
    print(f"Значення мінімізованої функції: {round(res.fun, PRECISION)}")

    result = res.x[1:-2]
```

```
    result[-1] = YB
    y_list = np.concatenate([[YA], result])

    t_plot = np.linspace(A, B, 200)
    analytic = [np.e ** (t + 1) / (np.e ** 2 - 1) + np.e ** (1 - t) / (-np.e ** 2 +
1) for t in t_plot]

    plt.plot(x_list[:-1], y_list, label="Наближений розв'язок")
    plt.plot(t_plot, analytic, label="Аналітичний розв'язок")
    plt.title(f"Функція - {FUNC}, N = {N}")
    plt.legend()
    ax = plt.gca()
    ax.set_axisbelow(True)
    plt.grid(c='lightgrey')
    plt.tight_layout()
    plt.show()


if __name__ == "__main__":
    N = 100             #  Число точок апроксимації
    A = 0               #  Нижня межа інтегрування
    B = 1               #  Верхня межа інтегрування
    YA = 0              #  x(0) = 0
    YB = 1              #  x(1) = 1
    FUNC = "x'**2+x**2"

    step = (B-A)/N
    solve(N)
```