

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Факультет прикладної математики
Кафедра прикладної математики

Звіт
із лабораторної роботи №1
з дисципліни «Теорія оптимального керування»
на тему
«Навігаційна задача швидкодії»

Виконала:

студентка групи КМ-01
Резниченко Є. С.

Перевірили:

Професор ПМА ФПМ
Норкін В.І.
Асистент ПМА ФПМ
Жук І.С.

Зміст

Постановка задачі.....	3
Теоретична частина.....	4
Основна частина.....	5
Дослідження параметру s_0 :	6
Дослідження параметру v :	7
Дослідження параметру l :	8
Дослідження параметру φ :	9
Дослідження параметру N :	10
Висновок.....	13
Додаток А – Код програми	14

Постановка задачі

1. Задати вихідні дані $s_0 = \sqrt{n}$, $v = \sqrt{n}$, $l = n$, $\varphi = n\pi/25$, $f(x_2) = x_2$, де n - номер студента у списку групи.
2. Запрограмувати рекурентні співвідношення в системі Python.
3. Побудувати графік траєкторії судна
(а також цілі для випадку завдань В, Г). На графіках вказувати:
А. назву графіка і назви осей координат,
В. точку призначення і значення фіксованих параметрів,
С. легенду (який колір відповідає якомусь значенню параметра),
D. час досягнення цілі.
4. Дослідити залежність траєкторії от варіації параметрів s_0 , v , l , φ , N
5. При яких значеннях параметрів, в тому числі за скільки ітерацій і за який час, корабель досягає точки призначення (для даної (міопичної) стратегії управління)?
6. Підготувати звіт про роботу в електронному вигляді (з графіками, висновками і лістингом програми).
7. Надіслати звіт викладачеві на електронну адресу.

Варіант роботи відповідає порядковому номеру студента. У ході роботи $n = 15$.

Теоретична частина

Шукатимемо (міопичне = короткозоре) управління $(u_1(t), u_2(t))$ як рішення наступного завдання:

$$\begin{aligned} & \left(x_1^* - x_1(t + \tau)\right)^2 + \left(x_2^* - x_2(t + \tau)\right)^2 = \\ & = \left(x_1^* - \left(x_1(t) + (s(x_2(t)) + v \cdot u_1) \tau\right)\right)^2 + \left(x_2^* - (x_2(t) + v u_2 \tau)\right)^2 \rightarrow \min_{u: u_1^2 + u_2^2 = 1}. \end{aligned}$$

Рішення даної задачі оптимізації відбувається методом множників Лагранжа, тому розглянемо задачу:

$$\left(x_1^* - \left(x_1(t) + (s(x_2(t)) + v \cdot u_1) \tau\right)\right)^2 + \left(x_2^* - (x_2(t) + v u_2 \tau)\right)^2 + \lambda(u_1^2 + u_2^2 - 1) \rightarrow \min_{u_1, u_2}.$$

Необхідні умови екстремуму мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & -2\left(x_1^* - \left(x_1(t) + (s(x_2(t)) + v \cdot u_1) \tau\right)\right) v \tau + 2\lambda u_1 = 0, \\ & -2\left(x_2^* - (x_2(t) + v u_2 \tau)\right) v \tau + 2\lambda u_2 = 0, \\ & u_1^2 + u_2^2 = 1. \end{aligned}$$

Звідки отримуємо:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{\left(x_1^* - x_1(t) - s(x_2(t)) \cdot \tau\right) \cdot v \cdot \tau}{\lambda(t) + v^2 \tau^2}, \quad u_2(t) = \frac{\left(x_2^* - x_2(t)\right) v \tau}{\lambda(t) + v^2 \tau^2}, \\ \lambda(t) &= \left(\left(x_1^* - x_1(t) - s(x_2(t)) \tau\right)^2 + \left(x_2^* - x_2(t)\right)^2\right)^{1/2} v \tau - v^2 \tau^2; \\ x_1^* &= l \cdot \cos \varphi, \quad x_2^* = l \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

Основна частина

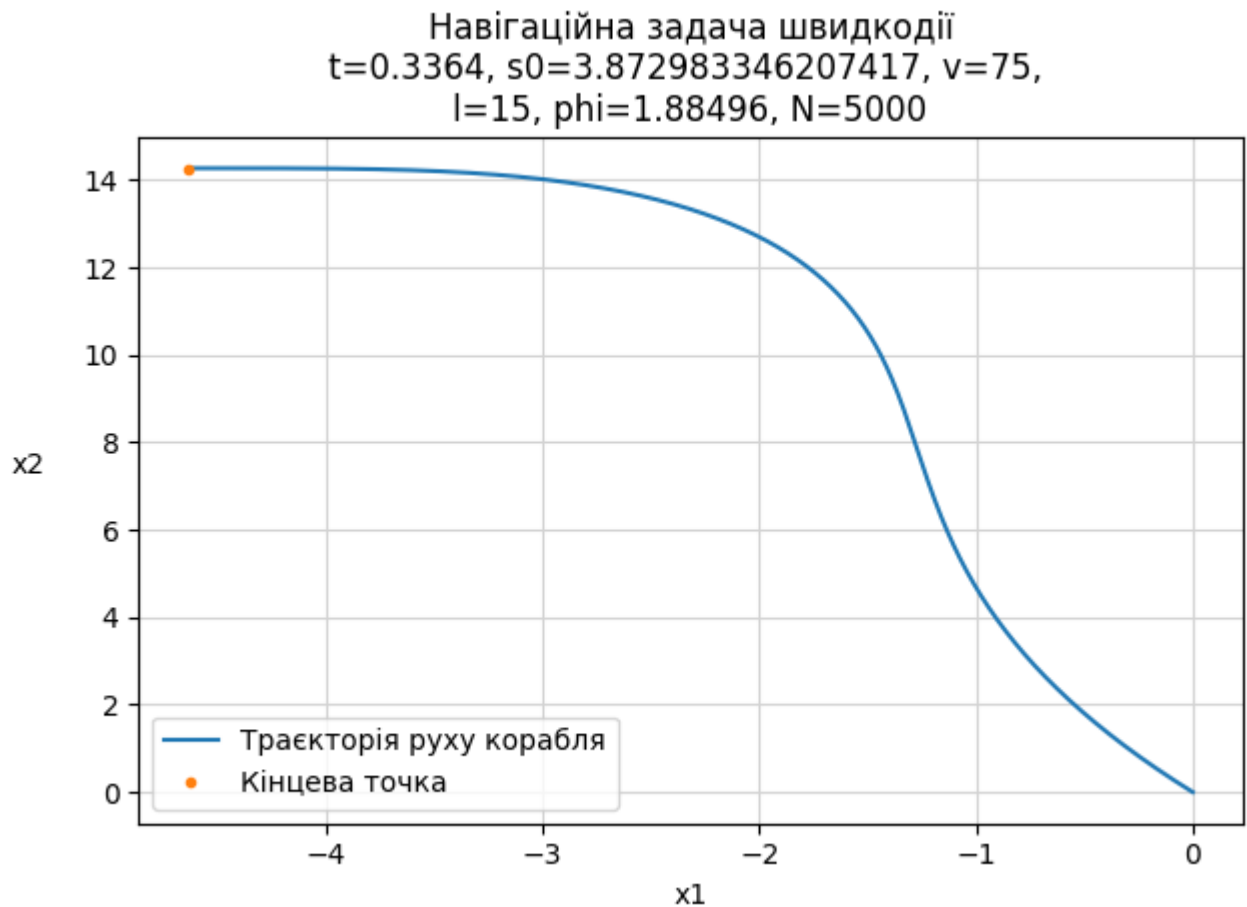
Визначимо вхідні дані відповідно до варіанту:

$$s_0 = \sqrt{15}, v = \sqrt{15}, l = 15, \varphi = \frac{15 * \pi}{25}, f(x_2) = x_2$$

Але при таких вхідних даних човен не зміг потрапити у кінцеву точку.

Тому було збільшено швидкість корабля $v = 75$.

За такої швидкості човен зміг дібратись до заданої точки.



Далі були проведені дослідження залежності траєкторій корабля від зміни різних параметрів.

Дослідження параметру s_0 :

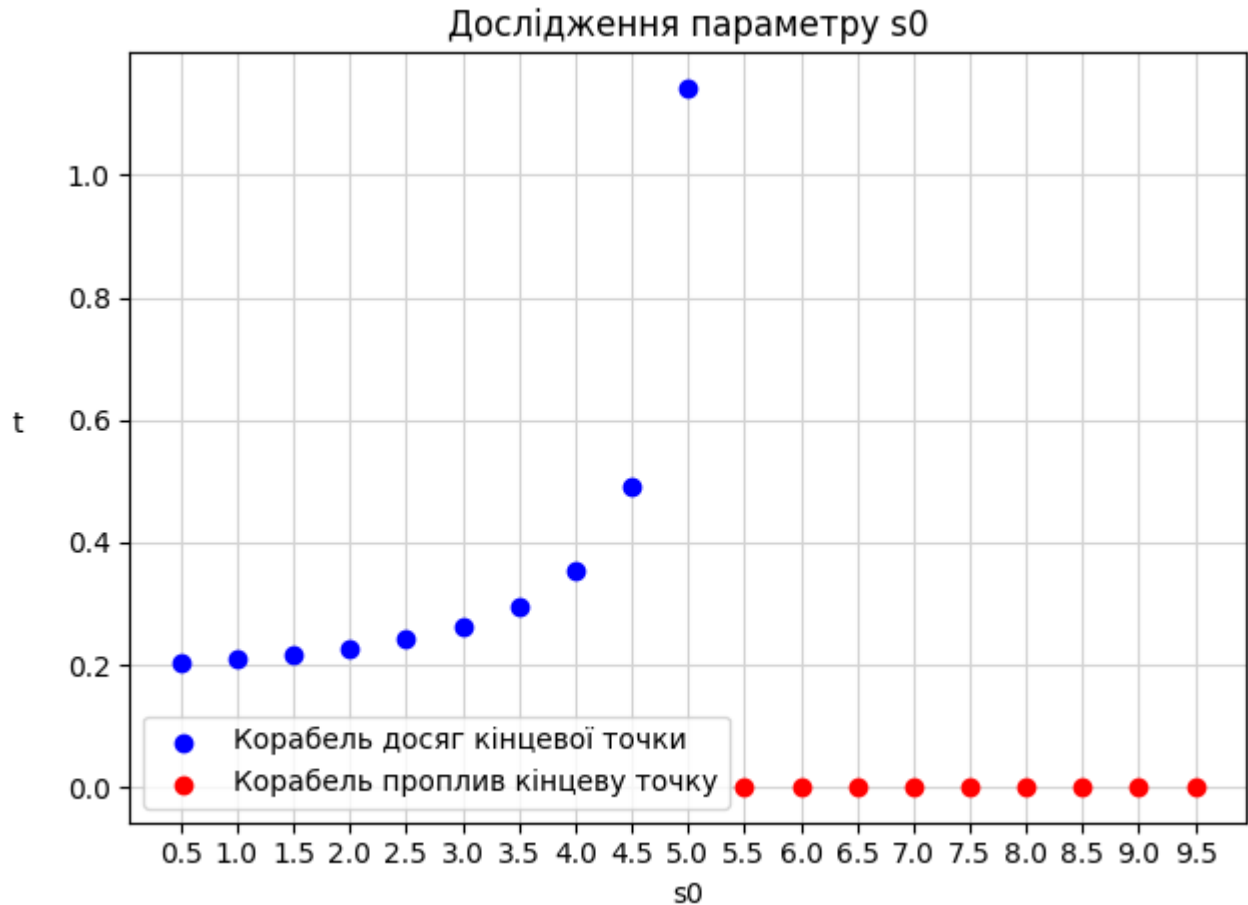


Рис. 2 – Залежність часу досягнення кінцевої точки від швидкості течії s_0

Тут використовувались такі значення інших параметрів:

$$v = 75, l = 15, \varphi = \frac{15\pi}{25}, f(x_2) = x_2, N = 5000$$

$$s_0 = [0.5, 10] \text{ з кроком } 0.5.$$

Із графіка видно, що зі зростанням швидкості течії човен поступово витрачає все більше часу на шлях до кінцевої точки. Це триває до того моменту, коли швидкість течії стає настільки великою, що човен зноситься і він не допливає.

Дослідження параметру v :

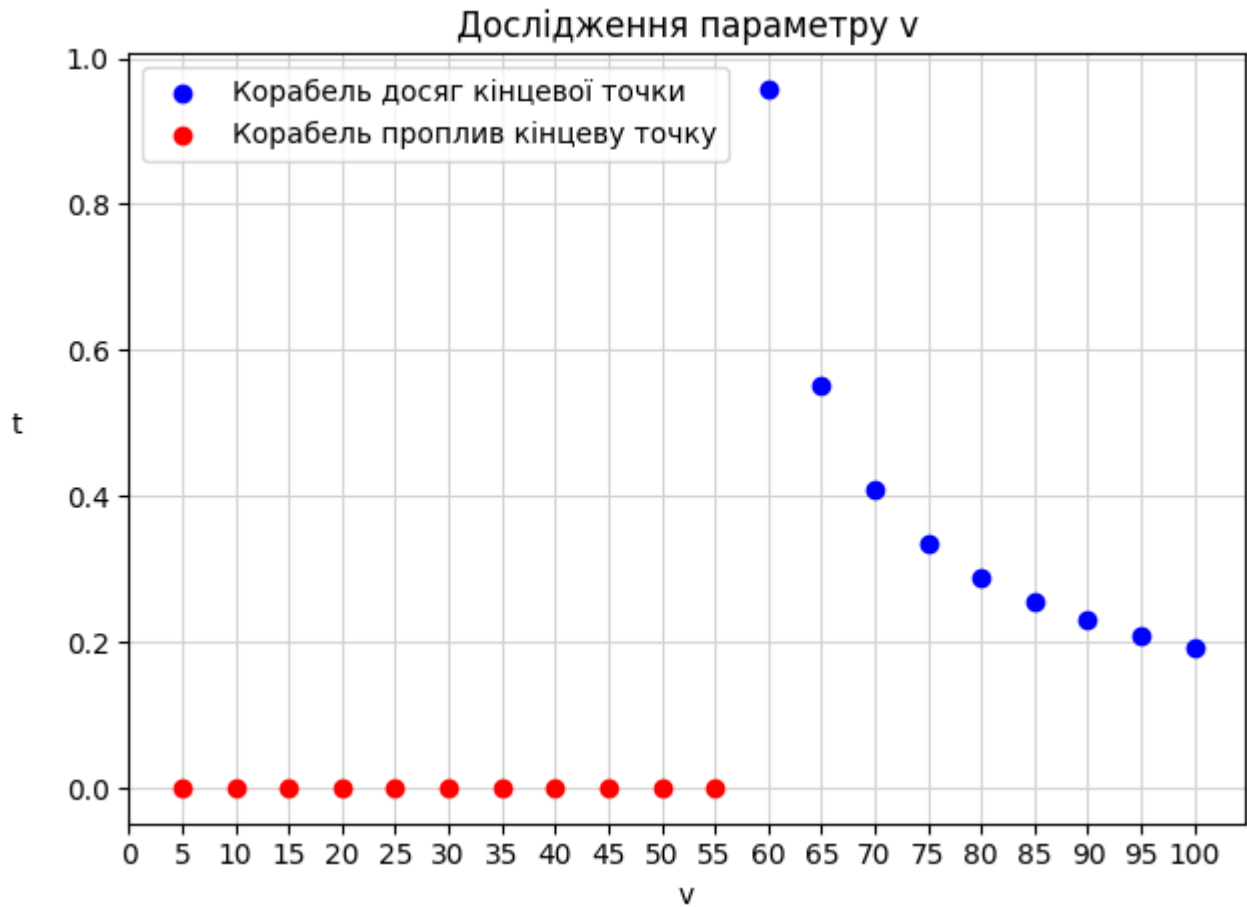


Рис. 3 – Залежність часу досягнення кінцевої точки від швидкості човна v

Тут використовувались такі значення інших параметрів:

$$s_0 = \sqrt{15}, \quad l = 15, \quad \varphi = \frac{15\pi}{25}, \quad f(x_2) = x_2, \quad N = 5000$$

$$v = [5, 100] \text{ з кроком } 5.$$

Човен допливає до точки коли його власна швидкість 60 і більше.

Дослідження параметру l :

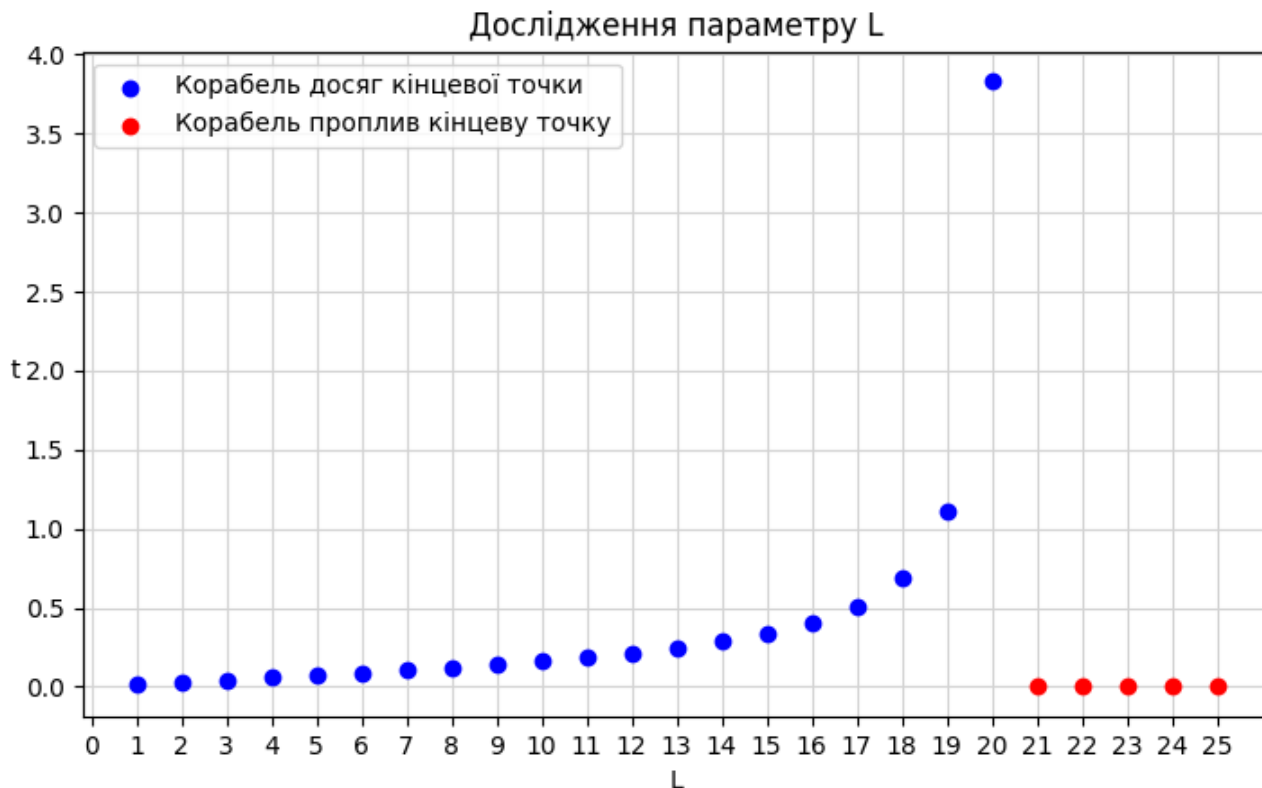


Рис. 4 – Залежність часу досягнення кінцевої точки від відстані до точки 1

Тут використовувались такі значення інших параметрів:

$$s_0 = \sqrt{15}, v = 75, \varphi = \frac{15\pi}{25}, f(x_2) = x_2, N = 5000$$

$$l = [1, 25] \text{ з кроком } 1.$$

У цьому випадку важливо враховувати, що кінцева точка не повинна знаходитися надто далеко від початкової, оскільки функція залежності швидкості течії від координати x_2 є лінійною. Чим ближче точка розташована, тим менше буде швидкість течії, і навпаки - чим далі, тим вище буде швидкість.

Дослідження параметру φ :

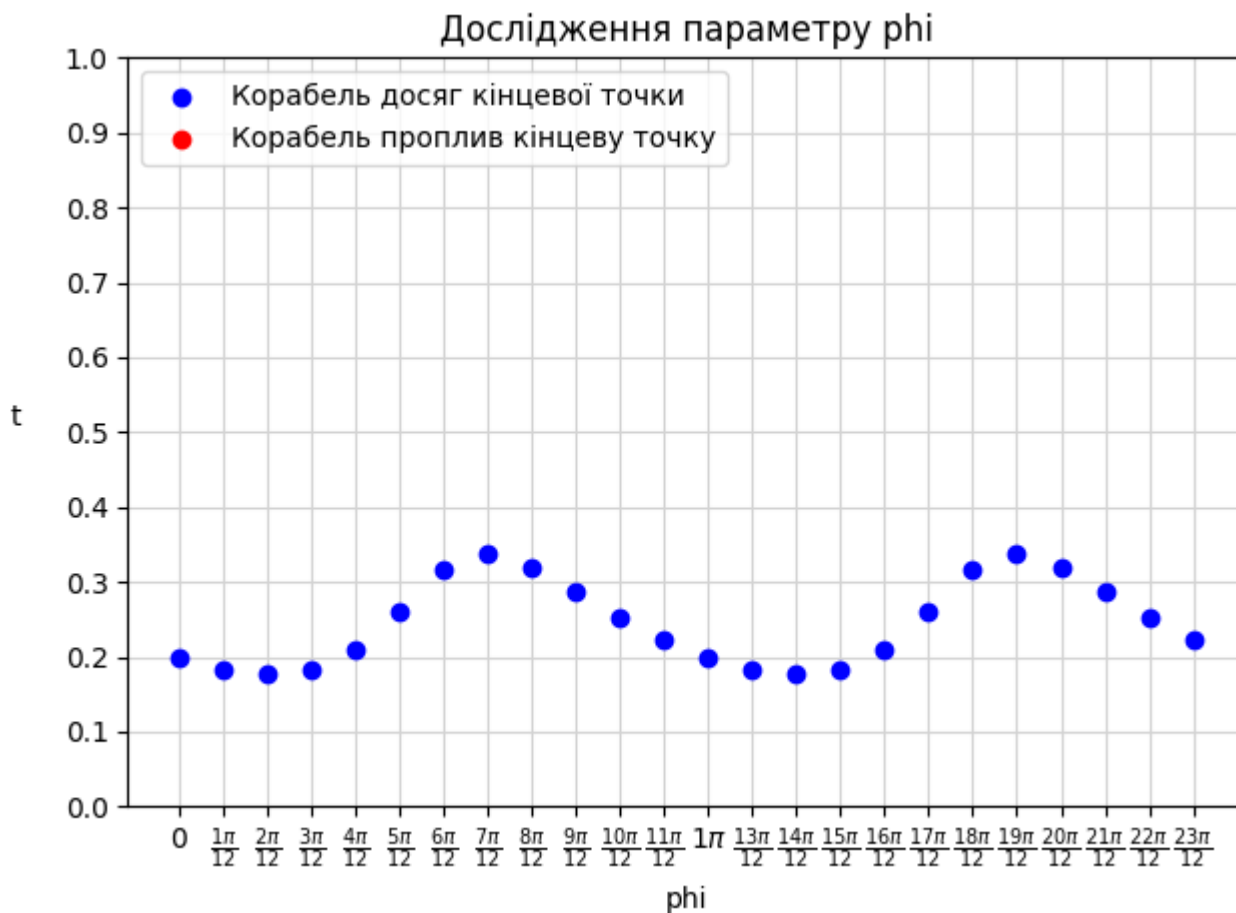


Рис. 5 – Залежність часу досягнення кінцевої точки від кута φ

Тут використовувались такі значення інших параметрів:

$$s_0 = \sqrt{15}, v = 75, l = 15, f(x_2) = x_2, N = 5000$$

$$\varphi = [0, 2\pi] \text{ з кроком } \frac{\pi}{12}.$$

З дослідження можна зробити висновок, що коли кут близький до таких значень:

$$\varphi = \frac{7\pi}{12} \text{ або } \varphi = \frac{19\pi}{12}, \text{ то човну треба більше часу для досягнення цілі. Коли } \varphi = \frac{2\pi}{12}$$

$$\text{або } \varphi = \frac{14\pi}{12} \text{ човен навпаки досягає цілі швидше.}$$

Дослідження параметру N:

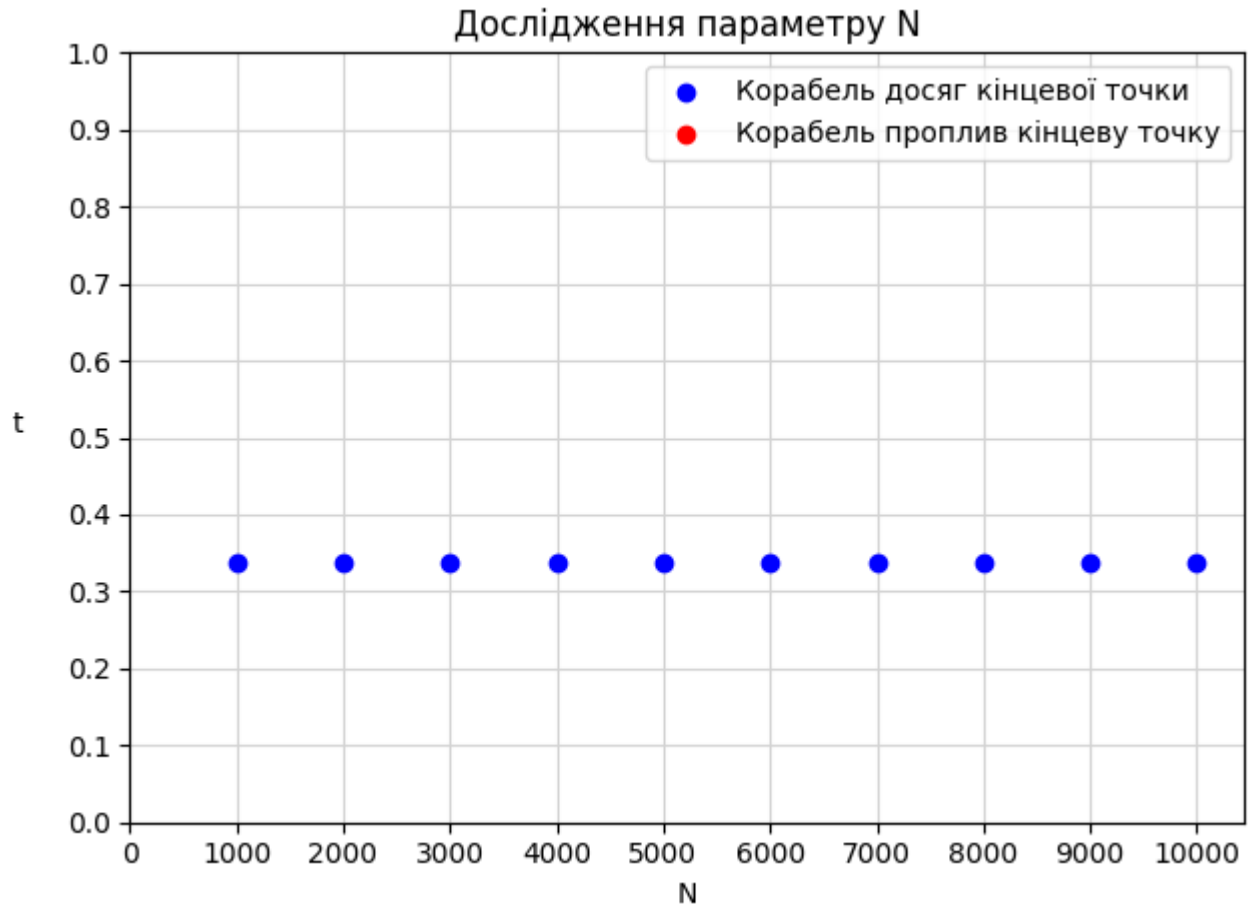


Рис. 6 – Залежність часу досягнення кінцевої точки від параметра N

Тут використовувались такі значення інших параметрів:

$$s_0 = \sqrt{15}, v = 75, l = 15, \varphi = \frac{15\pi}{25}, f(x_2) = x_2$$

$$N = [1000, 10000] \text{ з кроком } 1000.$$

З графіку видно, що човен допливає до кінцевої точки з приблизно однаковим часом не зважаючи на зміну даного параметру. Тому припустимо, що зміна цього параметру не впливає значною мірою на час руху човна до цілі.

Для більш наявного представлення було побудовано траєкторії руху човна до кінцевої точки для різних наборів вихідних даних:

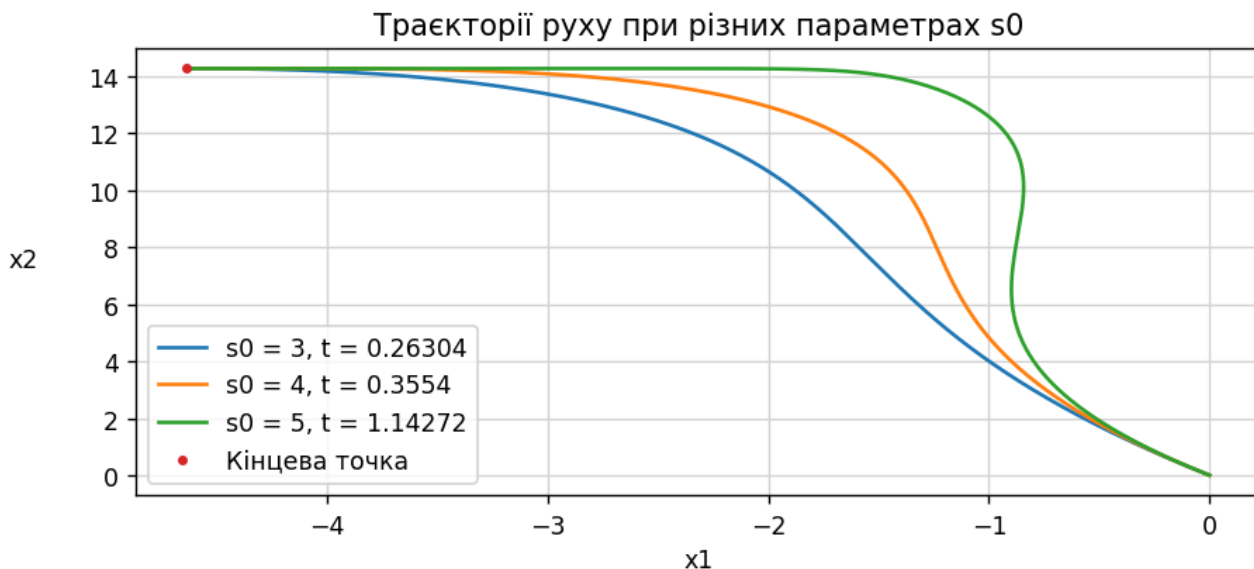


Рис. 7 – траєкторії руху корабля при різних параметрах s_0

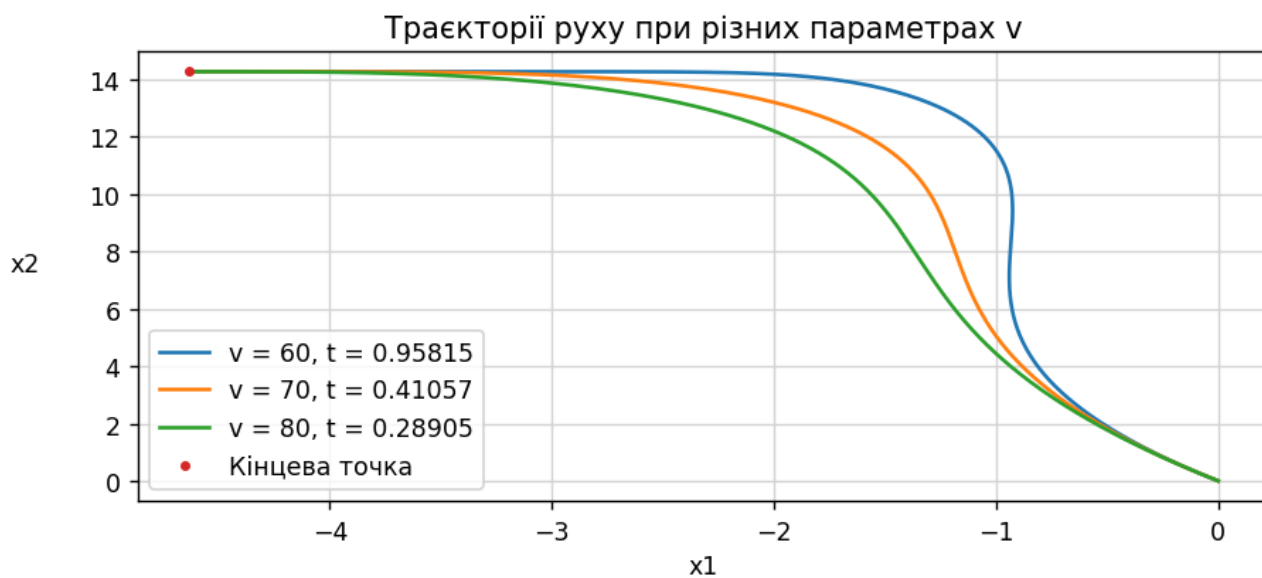


Рис. 8 – траєкторії руху корабля при різних параметрах v

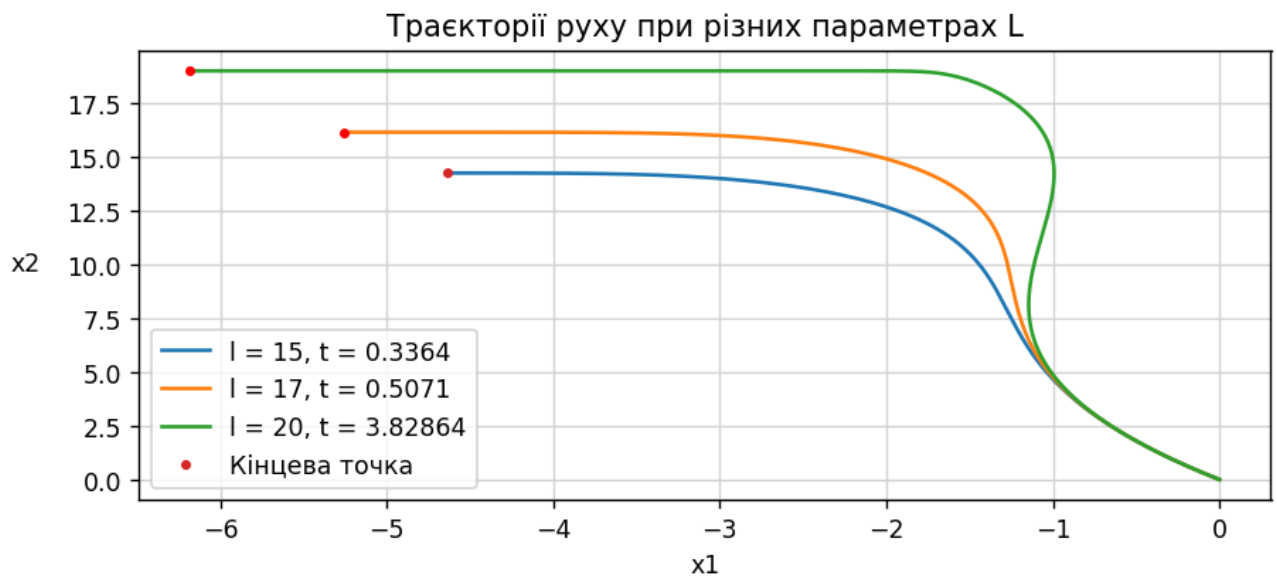


Рис. 9 – траєкторії руху корабля при різних параметрах l

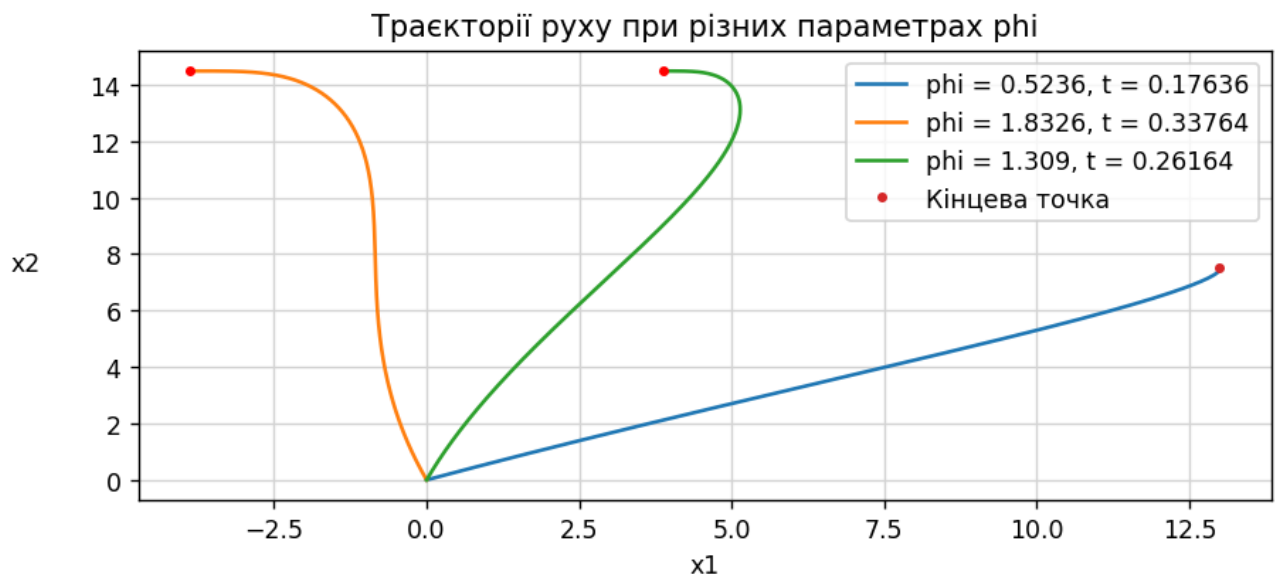


Рис. 10 – траєкторії руху корабля при різних параметрах кута φ

Висновок

У процесі виконанні лабораторної роботи було вивчено принципи побудови траєкторії руху корабля за умови наявності течії та розглянуто вплив різних параметрів на час плавання та вигляд траєкторії:

- Якщо швидкість течії лінійно залежить від координати x_2 , то можна сказати, що підвищення параметру s_0 скорочує час плавання, оскільки течія сприяє руху човна до кінцевої точки. Проте, надмірно високі значення s_0 можуть призвести до того, що корабель пропливе мимо точки.
- Збільшення параметру v дозволяє човну швидше добиратися до кінцевої точки, але при малих значеннях човен зносить течією.
- Збільшення параметру l віддаляє кінцеву точку і збільшує тривалість руху.
- Зміна параметру φ впливає на те під яким кутом до течії буде рухатись човен. Коли кут близький до таких значень: $\varphi = \frac{7\pi}{12}$ або $\varphi = \frac{19\pi}{12}$, то човну треба більше часу для досягнення цілі. Коли $\varphi = \frac{2\pi}{12}$ або $\varphi = \frac{14\pi}{12}$ човен навпаки досягає цілі швидше.
- Зміна параметру N не впливає на те, чи допливе корабель до кінцевої точки та майже не впливає час руху.

Додаток А – Код програми

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

VARIANT:int = 15
s0 = np.sqrt(VARIANT)
v = np.sqrt(VARIANT)
v = 75
l = VARIANT
phi = VARIANT*np.pi/25
N = 5000

def sx(s, x2):
    return s * x2

def test_s0():
    s0 = np.arange(0.5, 10, 0.5)
    v = 75
    l = VARIANT
    phi = VARIANT*np.pi/25
    N = 5000
    res = []
    for s in s0:
        res.append(calculate(s, v, l, phi, N)[0])
    col = []
    labels = ['Корабель досяг кінцевої точки', 'Корабель проплив кінцеву точку']
    for item in res:
        if item == 0:
            col.append('red')

        else:
            col.append('blue')

    for i in range(len(s0)):
        plt.scatter(s0[i], res[i], c=col[i])
    plt.title('Дослідження параметру s0')
    plt.grid(c='lightgrey')
    plt.xlabel("s0")
    plt.gca().yaxis.set_label_coords(-0.1,0.5)
    plt.gca().set_ylabel("t", rotation=0)
```

```

plt.legend(labels, loc='best')
ax = plt.gca()
ax.set_axisbelow(True)
leg = ax.get_legend()
leg.legend_handles[1].set_color('red')
plt.xticks(np.arange(0.5, 10, 0.5))
# plt.yticks(np.arange(0, 1, 0.1))
plt.tight_layout()
plt.show()

def test_v():
    s0 = np.sqrt(VARIANT)
    v = np.arange(5, 105, 5)
    l = VARIANT
    phi = VARIANT*np.pi/25
    N = 5000
    res = []
    for v0 in v:
        res.append(calculate(s0, v0, l, phi, N)[0])
    col = []
    labels = ['Корабель досяг кінцевої точки', 'Корабель проплив кінцеву точку']
    for item in res:
        if item == 0:
            col.append('red')

        else:
            col.append('blue')

    for i in range(len(v)):
        plt.scatter(v[i], res[i], c=col[i])
    plt.title('Дослідження параметру v')
    plt.grid(c='lightgrey')
    plt.xlabel("v")
    plt.gca().yaxis.set_label_coords(-0.1,0.5)
    plt.gca().set_ylabel("t", rotation=0)
    plt.legend(labels, loc='best')
    ax = plt.gca()
    ax.set_axisbelow(True)
    leg = ax.get_legend()
    leg.legend_handles[0].set_color('blue')
    plt.xticks(np.arange(0, 105, 5))
    # plt.yticks(np.arange(0, 2, 0.5))
    plt.tight_layout()
    plt.show()

```

```

def test_l():
    s0 = np.sqrt(VARIANT)
    v = 75
    l = np.arange(1, 26, 1)
    phi = VARIANT*np.pi/25
    N = 5000
    res = []
    for l0 in l:
        res.append(calculate(s0, v, l0, phi, N)[0])
    col = []
    labels = ['Корабель досяг кінцевої точки', 'Корабель проплив кінцеву точку']
    for item in res:
        if item == 0:
            col.append('red')

        else:
            col.append('blue')

    for i in range(len(l)):
        plt.scatter(l[i], res[i], c=col[i])
    plt.title('Дослідження параметру L')
    plt.grid(c='lightgrey')
    plt.xlabel("L")
    plt.gca().set_ylabel("t", rotation=0)
    plt.legend(labels, loc='best')
    ax = plt.gca()
    ax.set_axisbelow(True)
    leg = ax.get_legend()
    leg.legend_handles[1].set_color('red')
    plt.xticks(np.arange(0, 26, 1))
    # plt.yticks(np.arange(0, 14.1, 1))
    plt.show()

def test_phi():
    s0 = np.sqrt(VARIANT)
    v = 75
    l = VARIANT
    phi = np.arange(0, 2*np.pi, np.pi/12)
    N = 5000
    res = []
    for phi0 in phi:
        res.append(calculate(s0, v, l, phi0, N)[0])
    col = []
    labels = ['Корабель досяг кінцевої точки', 'Корабель проплив кінцеву точку']
    for item in res:
        if item == 0:

```



```

        col.append('red')

    else:
        col.append('blue')

    for i in range(len(phi)):
        plt.scatter(phi[i], res[i], c=col[i])
    plt.title('Дослідження параметру phi')
    plt.grid(c='lightgrey')
    plt.xlabel("phi")
    plt.gca().yaxis.set_label_coords(-0.1,0.5)
    plt.gca().set_ylabel("t", rotation=0)
    plt.legend(labels, loc='upper left')
    ax = plt.gca()
    ax.set_axisbelow(True)
    leg = ax.get_legend()
    leg.legend_handles[1].set_color('red')
    ticks = np.arange(0, 2*np.pi, np.pi/12)
    labels =
[r"$0$",
    r"$\frac{1\pi}{12}$", r"$\frac{2\pi}{12}$", r"$\frac{3\pi}{12}$",
    r"$\frac{4\pi}{12}$", r"$\frac{5\pi}{12}$", r"$\frac{6\pi}{12}$",
r"$\frac{7\pi}{12}$",
    r"$\frac{8\pi}{12}$", r"$\frac{9\pi}{12}$", r"$\frac{10\pi}{12}$",
r"$\frac{11\pi}{12}$",
    r"$1\pi$", r"$\frac{13\pi}{12}$", r"$\frac{14\pi}{12}$",
r"$\frac{15\pi}{12}$",
    r"$\frac{16\pi}{12}$", r"$\frac{17\pi}{12}$", r"$\frac{18\pi}{12}$",
r"$\frac{19\pi}{12}$",
    r"$\frac{20\pi}{12}$", r"$\frac{21\pi}{12}$", r"$\frac{22\pi}{12}$",
r"$\frac{23\pi}{12}$", ]
    ax.set_xticks(ticks)
    ax.set_xticklabels(labels)
    # plt.xticks(np.arange(0, 2*np.pi, np.pi/6))
    plt.yticks(np.arange(0, 1.1, 0.1))
    plt.tight_layout()
    plt.show()

def test_n():
    s0 = np.sqrt(VARIANT)
    v = 75
    l = VARIANT
    phi = VARIANT*np.pi/25
    N = np.arange(1000, 11000, 1000)
    res = []
    for n0 in N:

```

```

        res.append(calculate(s0, v, l, phi, n0)[0])
col = []
labels = ['Корабель досяг кінцевої точки', 'Корабель проплив кінцеву точку']
for item in res:
    if item == 0:
        col.append('red')

    else:
        col.append('blue')

for i in range(len(N)):
    plt.scatter(N[i], res[i], c=col[i])
plt.title('Дослідження параметру N')
plt.grid(c='lightgrey')
plt.xlabel("N")
plt.gca().yaxis.set_label_coords(-0.1,0.5)
plt.gca().set_ylabel("t", rotation=0)
plt.legend(labels, loc='best')
ax = plt.gca()
ax.set_axisbelow(True)
leg = ax.get_legend()
leg.legend_handles[1].set_color('red')
plt.xticks(np.arange(0, 11000, 1000))
plt.yticks(np.arange(0, 1.1, 0.1))
plt.tight_layout()
plt.show()

def create_plots():
    plt.subplot(2, 2, 1)
    s0 = [3, 4, 5]
    v = 75
    l = VARIANT
    phi = VARIANT * np.pi / 25
    N = 5000
    res = []
    time = []
    for s in s0:
        temp = calculate(s, v, l, phi, N)
        res.append([temp[1], temp[2]])
        time.append(temp[0])
    for i in range(len(s0)):
        plt.plot(res[i][0], res[i][1], label='s0 = {}, t = {}'.format(s0[i],
round(time[i], 5)))
    plt.plot(res[0][0][-1], res[0][1][-1], '.', label='Кінцева точка')
    plt.title('Траєкторії руху при різних параметрах s0')
    plt.grid(c='lightgrey')

```

```

plt.xlabel("x1")
plt.gca().yaxis.set_label_coords(-0.1,0.5)
plt.gca().set_ylabel("x2", rotation=0)
plt.legend(loc='best')
ax = plt.gca()
ax.set_axisbelow(True)
# plt.xticks(np.arange(0.5, 6, 0.5))
# plt.yticks(np.arange(0, 5, 1))

plt.subplot(2, 2, 2)
s0 = np.sqrt(VARIANT)
v = [60, 70, 80]
l = VARIANT
phi = VARIANT * np.pi / 25
N = 5000
res = []
time = []
for v0 in v:
    temp = calculate(s0, v0, l, phi, N)
    res.append([temp[1], temp[2]])
    time.append(temp[0])
for i in range(len(v)):
    plt.plot(res[i][0], res[i][1], label='v = {}'.format(v[i],
round(time[i], 5)))
plt.plot(res[0][0][-1], res[0][1][-1], '.', label='Кінцева точка')
plt.title('Траєкторії руху при різних параметрах v')
plt.grid(c='lightgrey')
plt.xlabel("x1")
plt.gca().yaxis.set_label_coords(-0.1,0.5)
plt.gca().set_ylabel("x2", rotation=0)
plt.legend(loc='best')
ax.set_axisbelow(True)
# print(res[0][0])
# plt.xticks(np.arange(0, 6, 0.5))
# plt.yticks(np.arange(0, 4, 0.5))

plt.subplot(2, 2, 3)
s0 = np.sqrt(VARIANT)
v = 75
l = [15, 17, 20]
phi = VARIANT * np.pi / 25
N = 5000
res = []
time = []
for l0 in l:
    temp = calculate(s0, v, l0, phi, N)
    res.append([temp[1], temp[2]])

```

```

        time.append(temp[0])
    for i in range(len(l)):
        plt.plot(res[i][0], res[i][1], label='l = {}'.format(l[i],
round(time[i], 5)))
    plt.plot(res[0][0][-1], res[0][1][-1], '.', label='Кінцева точка')
    plt.plot(res[1][0][-1], res[1][1][-1], '.', c='r')
    plt.plot(res[2][0][-1], res[2][1][-1], '.', c='r')
    plt.title('Траєкторії руху при різних параметрах L')
    plt.grid(c='lightgrey')
    plt.xlabel("x1")
    plt.gca().yaxis.set_label_coords(-0.1,0.5)
    plt.gca().set_ylabel("x2", rotation=0)
    plt.legend(loc='best')
    ax.set_axisbelow(True)
    # plt.xticks(np.arange(0, 8, 0.5))
    # plt.yticks(np.arange(0, 5, 0.5))

plt.subplot(2, 2, 4)
s0 = np.sqrt(VARIANT)
v = 75
l = VARIANT
phi = [np.pi/6, 7*np.pi/12, 5*np.pi/12]
rphi = [round(phi[i], 5) for i in range(len(phi))]
N = 5000
res = []
time = []
for phi0 in phi:
    temp = calculate(s0, v, l, phi0, N)
    res.append([temp[1], temp[2]])
    time.append(temp[0])
for i in range(len(phi)):
    plt.plot(res[i][0], res[i][1], label='phi = {}'.format(rphi[i],
round(time[i], 5)))
    plt.plot(res[0][0][-1], res[0][1][-1], '.', label='Кінцева точка')
    plt.plot(res[1][0][-1], res[1][1][-1], '.', c='r')
    plt.plot(res[2][0][-1], res[2][1][-1], '.', c='r')
    plt.title('Траєкторії руху при різних параметрах phi')
    plt.grid(c='lightgrey')
    plt.xlabel("x1")
    plt.gca().yaxis.set_label_coords(-0.1,0.5)
    plt.gca().set_ylabel("x2", rotation=0)
    plt.legend(loc='best')
    ax.set_axisbelow(True)
    # plt.xticks(np.arange(0, 2 * np.pi, np.pi / 6))
    # plt.yticks(np.arange(0, 5, 1))
    plt.tight_layout()
    plt.show()

```

```

def calculate(s0, v, l, phi, N):
    x1_dest = np.array([l * np.cos(phi), l * np.sin(phi)])
    tau = l / (N * v)
    epsilon = 0.001
    x1 = [0]
    x2 = [0]
    k = 0
    critical = np.sqrt((x1[0] - x1_dest[0]) ** 2 + (x2[0] - x1_dest[1]) ** 2)
    while np.sqrt((x1[k] - x1_dest[0]) ** 2 + (x2[k] - x1_dest[1]) ** 2) > epsilon:
        lambd = np.sqrt((x1_dest[0] - x1[k] - sx(s0, x2[k]) * tau) ** 2 +
(x1_dest[1] - x2[k]) ** 2) * v * tau
        u1 = v * tau * (x1_dest[0] - x1[k] - sx(s0, x2[k]) * tau) / lambd
        u2 = v * tau * (x1_dest[1] - x2[k]) / lambd
        x1_temp = x1[k] + (sx(s0, x2[k]) + v * u1) * tau
        x2_temp = x2[k] + v * u2 * tau
        if np.sqrt((x1_temp - x1_dest[0]) ** 2 + (x2_temp - x1_dest[1]) ** 2) >
critical:
            # print("Корабель проплив кінцеву точку")
            return [0, 0, 0]
        x1.append(x1_temp)
        x2.append(x2_temp)
        k += 1
    # plot_graph(x1, x2, x1_fin, tau, k, s0, v, l, phi, N)
    return tau * k, x1, x2

def plot_graph(x1, x2, x1_fin, tau, k, s0, v, l, phi, N):
    plt.plot(x1, x2, label='Траєкторія руху корабля')
    plt.plot(x1_fin[0], x1_fin[1], '.', label='Кінцева точка')
    plt.title('Навігаційна задача швидкодії\nt={}, s0={}, v={}, \nl={}, phi={},
N={}'
            .format(round(tau * k, 5), s0, v, l, round(phi, 5), N))
    plt.grid(c='lightgrey')
    plt.xlabel("x1")
    plt.gca().yaxis.set_label_coords(-0.1,0.5)
    plt.gca().set_ylabel("x2", rotation=0)
    plt.legend(loc='best')
    plt.tight_layout()
    plt.show()

if __name__ == "__main__":
    # calculate(s0, v, l, phi, N)
    # test_s0()
    # test_v()

```

```
# test_l()
# test_phi()
# test_n()
create_plots()
```