Stabilitatea sistemelor LTI cu reacţie negativă. Criteriul Nyquist practic

24 Octombrie 2022

1 Aspecte teoretice vizate

În această lucrare se prezintă criteriul Nyquist simplificat, utilizat cel mai adesea în practică, pentru studiul stabilităţii interne a sistemelor în buclă închisă, alături de modul acestora de aplicare utilizând diagrama Nyquist a sistemului în buclă deschisă.

2 Sisteme LTI cu reacţie negativă

$$H_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s) \cdot H_r(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_{des}(s)}, \tag{1}$$

unde:

- $H_d(s)$: este funcţia de transfer pe calea directă;
- $H_r(s)$: este funcţia de transfer pe calea de reacţie;
- $H_{des}(s) = H_d(s)H_r(s)$: este funcţia de transfer în buclă deschisă;
- $H_0(s)$: este funcţia de transfer în buclă închisă.

De obicei, în practică, se formulează modelul procesului astfel încât termenul de la reacţie să devină unitar, caz în care sistemul se numeşte cu reacţie negativă **unitară** sau **rigidă**, precum în figura 1.

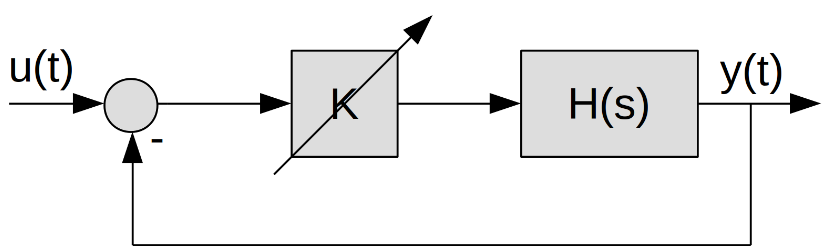

Figure 1: Sistem de reglare cu reacţie negativă **unitară**.

Stabilitatea sistemului în buclă închisă este dată de polii lui $H_0(s)$, adică rădăcinile polinomului caracteristic:

$$1 + H_{des}(s) = 0. \tag{2}$$

Pe baza principiului argumentului (teorema lui Cauchy) din analiza complexă se deduce unul dintre cele mai importante şi utile rezultate din teoria sistemelor de control.

3 Criteriul Nyquist practic (simplificat)

În practică, majoritatea proceselor nu prezintă poli instabili sau mai mult de doi poli pe axa imaginară (în general integratoare). Un factor suplimentar care ne conduce la criteriul Nyquist practic (simplificat) este necesitatea de a avea un criteriu care, pe lângă afirmaţia calitativă ca un sistem este stabil sau instabil, să prezinte o metrică asupra gradului de apropiere a sistemului de instabilitate.

Astfel, precondiţia de aplicare a criteriului simplificat:

$$N_+ = 0 \;\text{ şi }\; N_0 \in \{0, 1, 2\}\,.$$

Teorema 1 (Criteriul Nyquist simplificat)**.**

1. Pentru un sistem LTI descris printr-o funcţie de transfer în buclă deschisă $H_{des}(s)$ ***care îndeplineşte precondiţia de mai sus****, se definesc:*

- ***pulsaţia de tăiere****, ω_t : $|H_{des}(j\omega_t)| = 1$;*
- ***pulsaţia la faza de*** *$-\pi$, $\omega_{-\pi}$: $\angle H_{des}(j\omega_{-\pi}) = -\pi$;*
- ***marginea de fază****, γ_k, definită ca distanţa dintre faza de $-\pi$ şi faza locului de transfer la pulsaţia ω_t:*
$$\gamma_k = \angle H_{des}(j\omega_t) - (-\pi) = \pi + \angle H_{des}(j\omega_t); \tag{3}$$
- ***marginea de câştig****, m_k, definită ca fiind modulul locului de transfer la pulsaţia $\omega_{-\pi}$:*
$$m_k = |H_{des}(j\omega_{-\pi})|. \tag{4}$$

2. Se trasează diagrama Nyquist (locul de transfer) pentru $H_{des}(j\omega)$. Se pune în evidenţă punctul $-1+0j$.

3. Se verifică dacă este satisfăcută ***condiţia de stabilitate asimptotică a sistemului în buclă închisă****, care poate fi formulată în mai multe moduri echivalente:*

- *condiţia utilizând marginile de fază şi de câştig:*
$$\gamma_k > 0 \;\text{ şi }\; m_k < 1.$$
- *condiţia utilizând pulsaţiile de tăiere, respectiv la faza de $-\pi$:*
$$\omega_t < \omega_{-\pi}.$$
- *Punctul critic $-1+0j$ trebuie să rămână în stânga locului de transfer când ω parcurge domeniul $(0, \infty)$.*

4 Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist

Să se traseze diagrama Nyquist şi să se studieze stabilitatea în buclă închisă pentru următoarele funcţii de transfer în buclă deschisă:

a) $H_{des}(s) = 5\frac{-s+2}{s(s+2)^2}$;

b) $H_{des}(s) = \frac{-s+2}{s(s+2)^2}$.

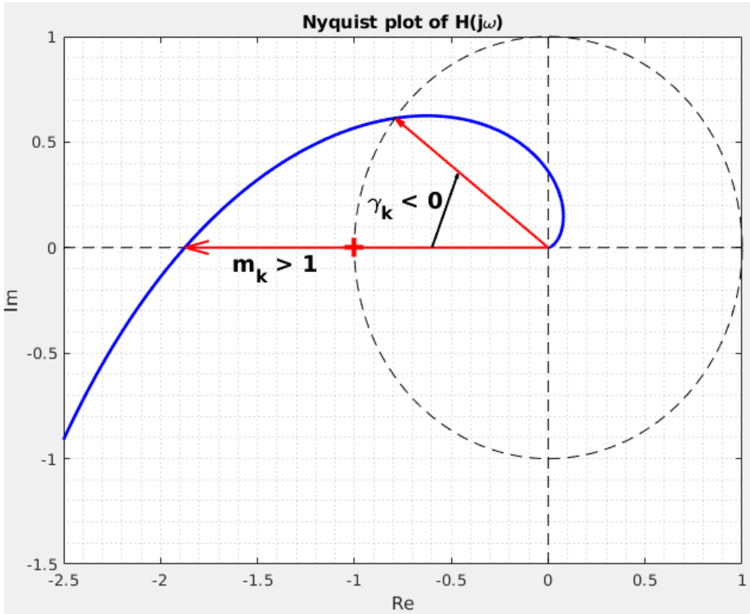

Figure 2: Marginile de câştig şi fază pentru sistemul 5.a)

Rezolvare 5.a): Din analiza structurii sistemului:

$$H_{des}(s) = 5\frac{-s+2}{s(s+2)^2}, \tag{5}$$

rezultă:

- $\hat{s}_1 = 0 \Rightarrow N_0 = 1$;
- $\hat{s}_{2,3} = -2 \Rightarrow N_- = 2$;
- $N_+ = 0$, deoarece nu există poli cu partea reală pozitivă.

Din $N_0 = 1$ şi $N_+ = 0$ rezultă că se poate aplica şi criteriul Nyquist simplificat.

Prin aplicarea criteriului Nyquist practic, ilustrat în figura 2, rezultă următoarele valori prin calcule sau prin citire din MATLAB:

$$\omega_t = 1.84, \quad \omega_{-\pi} = 1.15, \quad \gamma_k = -37.8°, \quad m_k = 1.875. \tag{6}$$

În concluzie, sistemul în buclă închisă **nu** este intern asimptotic stabil.

Rezolvare 5.b): Din analiza structurii sistemului:

$$H_{des}(s) = \frac{-s+2}{s(s+2)^2}, \tag{7}$$

care este identic celui de la punctul a) cu excepţia factorului de proporţionalitate, rezultă:

- $\hat{s}_1 = 0 \Rightarrow N_0 = 1$;
- $\hat{s}_{2,3} = -2 \Rightarrow N_- = 2$;
- $N_+ = 0$, deoarece nu există poli cu partea reală pozitivă.

Din $N_0 = 1$ şi $N_+ = 0$ rezultă că se poate aplica şi criteriul Nyquist simplificat.

Prin aplicarea criteriului Nyquist practic, reies prin calcule sau prin citire directă din MATLAB, următoarele valori:

$$\omega_t = 0.48, \quad \omega_{-\pi} = 1.15, \quad \gamma_k = +49°, \quad m_k = 0.375. \tag{8}$$

În concluzie, sistemul în buclă închisă **este** intern asimptotic stabil.

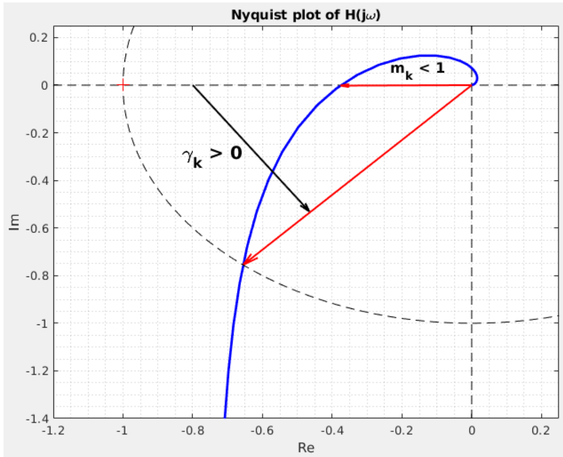

Figure 3: CN simplificat pentru 5.b).

5 Probleme propuse

Să se traseze diagrama Nyquist şi să se studieze stabilitatea în buclă închisă pentru următoarele funcţii de transfer în buclă deschisă pe baza criteriului Nyquist simplificat. Verificați condițiile de aplicabilitate a criteriului simplificat, iar, în caz contrar, folosiți criteriul Nyquist generalizat.

a) $H_{des}(s) = \frac{s+9}{s+5}$;

b) $H_{des}(s) = \frac{s-9}{s+5}$;

c) $H_{des}(s) = \frac{s-9}{s-5}$;

d) $H_{des}(s) = \frac{s+9}{s-5}$;

e) $H_{des}(s) = \frac{-s+9}{s+5}$;

f) $H_{des}(s) = -\frac{s-9}{s-5}$;

g) $H_{des}(s) = -\frac{s+9}{-s+5}$;

h) $H_{des}(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s+9}{s+5} \cdot e^{-0.1s}$;

i) $H_{des}(s) = \frac{5s^2+2s+1}{s(s-1)^2}$;

j) $H_{des}(s) = \frac{s(s+6)}{(s+4)(s-1)}$;

k) $H_{des}(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)}$;

l) $H_{des}(s) = \frac{10}{s^2+0.2s+1}$;

m) $H_{des}(s) = \frac{10(-s+1)}{(s^2+0.2s+1)}$;

o) $H_{des}(s) = \frac{1}{(s+1)^n}, \quad n \in \{1,2,3,4,8\}$;

p) $H_{des}(s) = \frac{1}{s(s+1)^n}, \quad n \in \{1,2,3,4,8\}$;

q) $H_{des}(s)=\frac{1}{(s+1)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)}, \alpha \in \{0.1, 0.2, 1\}$;

r) $H_{des}(s) = \frac{100}{(s+10)^2}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{0.5}{s+0.05}\right)$;

s) $H_{des}(s) = \frac{(s+6)^2}{s(s+1)^2(s+36)}$;

t) $H_{des}(s) = \frac{1-\alpha s}{(s+1)^3}, \quad \alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\}$;

u) $H_{des}(s) = \frac{1-\alpha s}{s(s+1)^3}, \quad \alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\}$.

Observaţie: În MATLAB, stabilitatea sistemului închis pe baza sistemului deschis $H_{des}(s)$ trasat, respectiv marginile de stabilitate, se pot citi din opţiunile `Characteristics` → `Minimum Stability Margins` sau `Characteristics` → `All Stability Margins`.