Nokta Çarpımı

Tolga Karaca

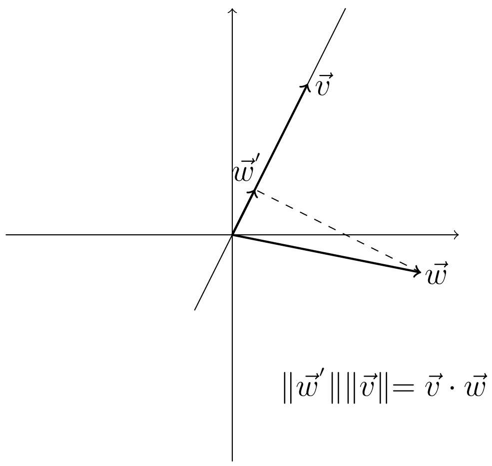
26 Haziran 2020

1 1

İki vektörü çarpmak için birkaç yöntem vardır. Bunlardan biri **nokta çarpımı**dır ve şöyle tanımlanır: herhangi iki vektör $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$ ve $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix}$ için,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k$$

olur. Bunun ne anlama geldiğine bakalım.



Yukarıda $\vec{w} - \vec{w}' \perp \vec{v}$ olur. Şimdi $\|\vec{w}'\|\|\vec{v}\| = \vec{v} \cdot \vec{w}$ eşitliğini kanıtlayalım. Bunu birçok farklı şekilde kanıtlayabiliriz. Ama bu yazıda kanıtlamak için başka bir vektör çarpım yöntemini kullanacağız. Bu yöntemin adı **çapraz çarpım**dır ve ($\mathbf{\vec{n}}$, normal vektör ve θ iki vektör arası açı olmak üzere) şöyle tanımlanır:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\sin(\theta)\mathbf{\vec{n}}.$$

Bu tanımdan **i**, **j** ve **k** üç boyutlu baz vektörler olmak üzere

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k},$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i},$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k},$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j},$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

eşitliklerine ulaşırız. Buradan iki boyut için

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) \times (w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j}) \\ &= v_1 w_1(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + v_1 w_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \\ & v_2 w_1(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + v_2 1 w_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \\ &= v_1 w_2 \mathbf{k} - v_2 w_1 \mathbf{k} \end{aligned}$$

diyebiliriz. **k** iki boyutlu olmamasına rağmen

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = v_1 w_2 - v_2 w_1$$

diyebiliriz ve bu da

$$\|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \sin(\theta) = v_1 w_2 - v_2 w_1$$

anlamına gelir. Şekile göre $\|\vec{w}\| \sin(\theta)$ uzunluğu $\|\vec{w} - \vec{w}'\|$ uzunluğuna eşittir yani

$$\|\vec{w} - \vec{w}'\| = \frac{v_1 w_2 - v_2 w_1}{\|\vec{v}\|}$$

olur. Pisagor teoreminden dolayı da

$$\begin{aligned} \|\vec{w}'\| &= \sqrt{\|\vec{w}\|^2 - \frac{(v_1 w_2 - v_2 w_1)^2}{\|\vec{v}\|^2}} \\ &\implies \|\vec{v}\|\|\vec{w}'\| = \sqrt{\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 w_1^2 + v_2^2 w_1^2 + v_1^2 w_2^2 + v_2^2 w_2^2 - v_1^2 w_2^2 + 2 v_1 v_2 w_1 w_2 - v_2^2 w_1^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 w_1^2 + v_2^2 w_2^2 + 2 v_1 v_1 w_1 w_2} \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2 = \vec{v} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

olur yani nokta çarpımının 2 boyutlu uzay için geometrik karşılığı doğrudur. Bu şekilde diğer boyutlar için de doğru olduğu görülebilir.