Proje Ana Alanı : Matematik

Proje Tematik Alanı : Algoritma/Mantıksal Tasarım

Proje Adı (Başlığı) : Üçgensel Sayıların Modüler Aritmetik ile İncelenmesi

Proje Özeti: Bu projede üçgensel sayılar dizisinden modüler aritmetik yardımıyla farklı sayı dizileri oluşturarak bu dizilerin ortak özelliklerini ve her bir dizi için o diziye özgü bulunan döngüleri, döngü toplamlarını, döngüdeki merkez sayılarının kendi aralarında ilişkilerini, tablolar yardımıyla bu ilişkilerin nasıl değiştiğini inceliyoruz.

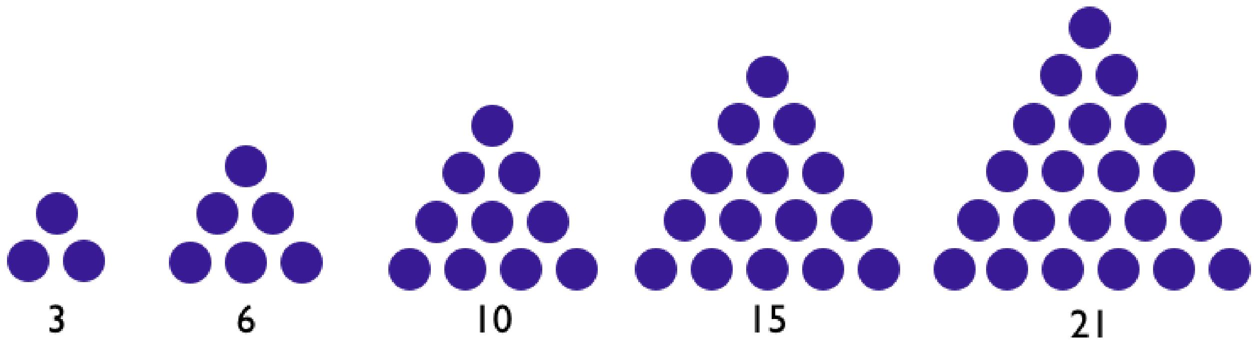
Üçgensel sayılar dizisini modüler aritmetik yardımıyla incelediğimizde ortaya çıkan dizilerin her birinin sonsuz bir döngüye girip belli aralıklarla kendini tekrar eden sayı dizilerinden oluştuğunu görüyoruz. Bu dizi elemanlarının oluşturduğu döngüler ve döngüde olan sayıların toplamının bir önceki döngü toplamıyla oranlarını doğal sayıların ilk 750 sayısı için hem beraber hem de çift ve tek olarak ayrı ayrı , döngü toplamlarının o döngünün mod sayısına oranlarını çift, tek, üçün katı ve asal olarak ayrı ayrı, döngüyü iki simetrik bölüme ayıran merkez sayıların kendi aralarında bulunan ilişkisini ve mod sayısı ile arasındaki ilişkiyi çift ve tek olarak ayrı ayrı inceliyoruz.

İncelemeler sırasında merkez sayıların oluşturduğu grafik ile kimya ile ilgili bir başka grafiğin birbirlerine benzediğini görüyoruz.

Anahtar Kelimeler: Üçgensel sayılar dizisi, modüler aritmetik, döngü, merkez sayı

Proje Amacı: Projemizde üçgensel sayılar dizisinden modüler aritmetik yöntemini kullanarak elde ettiğimiz yeni dizilerle ilgili incelemeler yapıyoruz ve bu dizilerin örgüsünü çözerek yeni sonuçlara ulaşmaya çalışıyoruz. Bununla birlikte dizilerde bulunan bazı benzerlikleri belirleyip bunlara isim veriyor ve bir denklem kurmaya çalışıyoruz.

Giriş: İlk olarak üçgensel sayıların ne olduğundan bahsedelim. Üçgensel sayılar noktalardan oluşan içi dolu bir üçgen oluşturabileceğiniz nokta sayılarıdır (Tablo1.1). Diğer bir deyişle de 1'den başlayarak n sayısına kadar olan tam sayıları toplarsanız çıkan sayı bir üçgensel sayıdır.



(Tablo1.1)

Birkaç üçgensel sayı örneği vermek istersek; 15 bir üçgensel sayıdır (1+2+3+4+5=15). Bu sayılardan bir dizi oluşturursak da çıkan dizi 1,3,6,10,15,21,28,36,45… şeklinde giden bir dizi ortaya çıkar. Bu diziye üçgensel sayılar dizisi denir. n pozitif bir doğal sayı olmak üzere n. sıradaki üçgensel sayının formülü $\frac{n(n+1)}{2}$ 'dir.

Şimdi de modüler aritmetikten bahsedelim. Modüler aritmetik bir sayının başka bir sayıya bölümünde kalan sayının o sayıya denk olması durumudur. Biz bu projemiz de sayıların modüler aritmetikte denk olduğu en küçük doğal sayıyı kullanacağız. Örneklendirmek gerekirse $26\ (mod\ 7) \equiv 5$ çünkü 26/7 işleminde kalan sayı 5'tir.

Tanımlar:

- Üçgensel Sayı: 1'den n'ye kadar olan n doğal sayının toplamı şeklinde yazılabilen sayılara üçgensel sayılar denir. Bu sayılarla oluşturulmuş örüntüye ise üçgensel sayı dizisi denir.
- Modüler Aritmetik: a ve b tamsayıları verilen bir m pozitif tamsayısına bölündüklerinde, aynı kalanı veriyorlarsa a, b'ye denk sayılır ve $a \equiv b \ (mod\ m)$ şeklinde gösterilir.
- Döngü: Üçgensel sayılar dizisinin elemanlarının (mod m)'de denk oldukları en küçük doğal sayılardan oluşturulmuş dizinin m=2k+1 ise ilk m, m=2k ise ilk 2m sayının oluşturduğu sayı kümesidir.
- Döngü Toplamı: Üçgensel sayılar dizisinin elemanlarının (mod m)'de denk oldukları en küçük doğal sayılardan oluşturulmuş dizinin m=2k+1 ise ilk m, m=2k ise ilk 2m sayının oluşturduğu sayı kümesinin elemanları toplamıdır.
- Merkez Nokta: Döngüyü iki simetrik bölüme ayıran noktadır.
- Merkez Sayı: $m = 2k + 1$ olmak üzere Mod (m) için döngünün ($\frac{m-1}{2}$)'nci, $m = 2k$ olmak üzere Mod (m) için döngünün $(m - 1)$'nci ve m'nci elemanıdır.

Hipotezler:

- Her mod için bir döngü mevcuttur ve bu döngüler 1 ile başlayıp 1,0,0 diye biterler.
- Birler basamağı 2,4,7,9 olan üçgensel sayı yoktur.
- m tek sayı olmak üzere Mod (m) için döngüdeki eleman sayısı çift sıfır dahil (m), m çift sayı ise çift sıfır dahil (2m)'dir.
- m çift sayı olmak üzere mod (m) için döngünün merkez noktasının arasında kaldığı elemanlar (m-1)'inci ile (m)'i ncidir ki bu iki sayı da ($\frac{m}{2}$)'dir.
- m tek sayı olmak üzere Mod (m) için döngünün merkez noktasındaki eleman ($\frac{m-1}{2}$)'nci elemandır.
- Tek sayılarda merkez sayıyı bulmak için kullanmamız gereken formül: $\frac{m^2-1}{8} \ (mod\ m)$ 'dir.
- 3 ve 3'ün katlarının döngü toplamlarının o sayıya oranları her zaman devirli bir sayıdır ve devreden sayı virgülden sonra 3 veya 6'dır.
- Asal sayılarda döngü toplam oranımızın o asal sayıya oranının limit değeri $\frac{1}{2}$ dir.
- Döngü toplamlarından oluşan sayı dizisi (.., x, 2x, x, 2x, x,..) dizisine yakınsar.
- Periyodik cetvelde A grubu elementlerinin birinci iyonlaşma enerjileri grafiği, merkez sayılar grafiği arasında ilişki vardır.

Yöntem:

İlk 15 üçgensel sayı aşağıda verildiği gibidir

(1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91,105,120)

Mod 2 için (1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0)

Böldüğümüz sayıyı büyütmeye başlayalım.

Mod 3 için (1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0)

Verdiğimiz iki sayıda da aynı sayıların tekrar ettiğini görüyoruz. Büyütmeye devam edelim.

Mod 4 için (1,3,2,2,3,1,0,0,1,3,2,2,3,1,0)

Şimdilik (Mod 4)'de ki duruma bakarsak önceki Modlarda olduğu gibi belli aralıklarda (…,0, 0,..) şeklinde bir tekrar olduğunu görebiliriz. Aynı zamanda (..,0, 0,..) sayılarına gelmeden önceki sayılar ile (..,0, 0,..) sayılarından sonraki sayıların aynı sayılar olduğunu görebiliriz. Bu döngünün sonsuza kadar gittiği de anlaşılabilir.

Şimdi bölen sayımızı 5,6,7 olduğu durumları hızlıca bakalım

$$\{1,3,1,0,0,1,3,1,0,0,1,3,1,0,0\}$$

$$\{1,3,0,4,3,3,4,0,3,1,0,0,1,3,0\}$$

$$\{1,3,6,3,1,0,0,1,3,6,3,1,0,0,1\}$$

Görülebildiği üzere (..,0, 0,..) bölümleri arasındaki sayılarda (yani kısaca döngü sayıları) döngünün tam ortasından ikiye böldüğümüzde sol ve sağ taraftaki sayıların birbirlerine simetrik olacak şekilde dizildiğini görebilirsiniz. Tek sayılarda döngünün tam ortası bir sayıya denk gelirken, çift sayılarda tam orta nokta iki adet aynı sayının ortasına gelmektedir.

Şimdiden sonra döngüler sonsuza kadar aynı şekilde tekrar ettiği için her mod sayısı için döngüyü belirtmemiz bize yetecektir.

Mod 8 için döngü (1,3,6,2,7,5,4,4,5,7,2,6,3,1,0,0)

Mod 9 için döngü (1,3,6,1,6,3,1,0,0)

Mod 10 için döngü (1,3,6,0,5,1,8,6,5,5,6,8,1,5,0,6,3,1,0,0)'dır. Bu sonuçtan görebiliriz ki birler basamağı (2,4,7,9) olan üçgensel sayı yoktur.

Şimdi bazı durumlardan bahsedelim.

m tek sayı ise

Mod (m) için döngüdeki eleman sayısı çift sıfır dahil (m)'dir. Çünkü;

m ve (m-1). elemanın 0 olması döngünün son elamanın m. sırada olduğunu gösterir. (Üçgensel sayılarda m'inci elemanı bulmanın formülünde n yerine m ve (m-1) vererek 0'a denkleştiriyoruz.)

$$\frac{m(m+1)}{2} \equiv \frac{(m-1)m}{2} \equiv 0\ Mod(m)$$

m tek bir sayı olduğu için m+1 çift bir sayıdır (m+1) /2 doğal bir sayıya denktir.

$$m\frac{(m+1)}{2} \equiv m\frac{(m-1)}{2} \equiv 0\ Mod(m)$$

$$0 * \frac{(m+1)}{2} \equiv 0 * \frac{(m-1)}{2} \equiv 0\ Mod(m)$$

$$0 \equiv 0 \equiv 0\ Mod(m)$$

Mod (m) için döngünün merkez noktasındaki eleman ($\frac{m-1}{2}$)'nci elemandır.

m çift sayı ise

Mod (m) için döngüdeki eleman sayısı çift sıfır dahil (2m)'dir. Çünkü;

m ve (m-1)'in 0 olması (m)'in döngünün son elamanı olduğunu gösterir.

$$\frac{2m(2m+1)}{2} \equiv \frac{(2m-1)2m}{2} \equiv 0\ Mod(m)$$

m çift bir sayı ise 2m çift bir sayıdır ve (2m+1) tek bir sayıdır.

$$m(2m+1) \equiv (2m-1)m \equiv 0\ Mod(m)$$

$$0 * (2m+1) \equiv (2m-1) * 0 \equiv 0\ Mod(m)$$

$$0 \equiv 0 \equiv 0\ Mod(m)$$

Tek sayılar ile ilgili işlem yaparken (m+1) sayısı 2 ile sadeleşebilirken çift sayılarda (m+1) sayısı 2 ile sadeleşmemektedir. Çift sayıların eleman sayılarını hesaplarken 2m kullanıldığı için sadeleşmeyi m sayısının kat sayısını kullanarak yapıyoruz.

Mod (m) için döngünün merkez noktasının arasında kaldığı elemanlar (m-1)'nci ile (m)'nci elemanlardır ki bu iki sayı da $(\frac{m}{2})$'dir.

Az önce gördüğümüz gibi her Mod için bir döngü mevcuttur ve bu döngüler 1 ile başlayıp 1,0,0 diye biterler.

Peki bu döngülerdeki sayıları toplarsak acaba nasıl sonuçlar çıkar?

Mod 2 için döngümüz (1,1,0,0) idi. Topladığımız vakit Mod 2 için döngü sayılarının toplamının 2 olduğunu görüyoruz.

Mod 3 için döngümüz (1,0,0) idi. Toplamı 1'dir.

Mod 4 için döngümüz (1,3,2,2,3,1,0,0) idi. Toplam 12. (İlk 8 (çift bir sayı olduğu için 2*4) üçgensel sayının (mod 4)'de denk olduğu en küçük doğal sayıları bulup topluyoruz ve mod 4 için döngü toplamını bulmuş oluyoruz.)

Mod 5 için toplam 5. (İlk 5 (çift bir sayı olduğu için 1*5) üçgensel sayının (mod 5)'de denk olduğu en küçük doğal sayıları bulup topluyoruz ve mod 5 için döngü toplamını bulmuş oluyoruz.)

Mod 6 için toplam 22'dir.

Bunları 1. Sıraya 0 koyarak sıralarsak ortaya çıkan dizi şu şekildedir.

$$(0,2,1,12,5,22,14,56,21,70,44,116,52,154,65 \dots)$$

Acaba döngü sayılarının toplamları ile Mod sayımız arasında bir bağlantı var mıdır?

Bunun için ((döngü toplamı) / (Mod sayısı)) şeklinde bir orantı kurabiliriz.

Sonuçları göstermeden önce birkaç örnek verelim.

Mod 2 için toplam 2'idi. 2/2 işleminden oran 1 çıkıyor.

Mod 3 için toplam 1'idi. 1/3 işleminden oran 0.333 çıkıyor.

Şimdi Mod 2'den başlayarak ilk 15'e kadar olan sayılar için oranları hesaplayalım.

$$(1), (0.333), (3), (1), (3.666), (2), (7), (2.333), (7), (4), (9.666), (11), (4.333)$$

Eğer sadece 3'ün katlarındaki oranı sıralarsak;

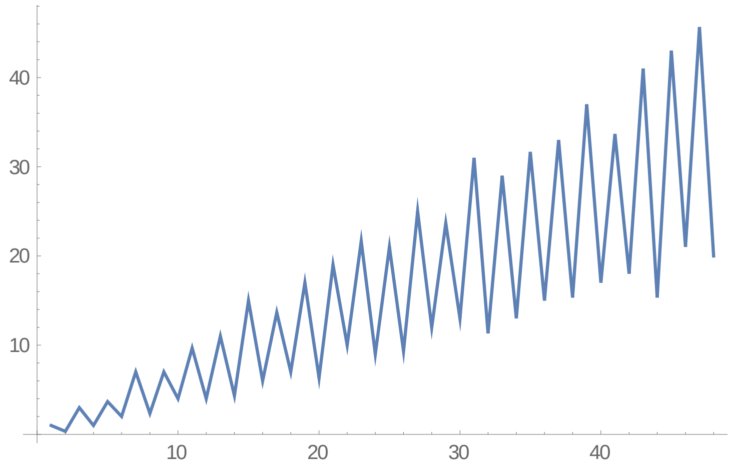
(0.333, 3.666, 2.333, 9.666, 4.333, 13.666, 6.333, 21.666, 9.333, 23.666, 11.333, 31.666, 15.333, 33.666, 15.333)

Şeklinde bir dizi ortaya çıkıyor. 3'ün katlarından çift sayı olanların virgülden sonra devreden sayısı 6'dır. Tek sayı olanların ise virgülden sonra devreden sayısı 3'tür.

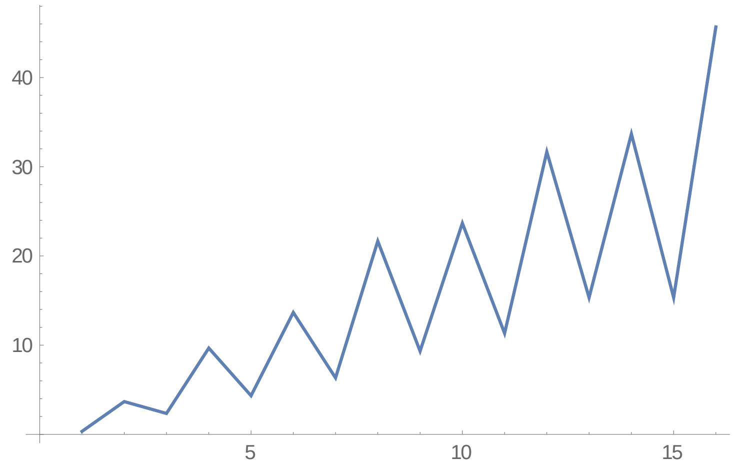
Buradan fark edilebileceği üzere 3 ve 3'ün katlarındaki oran her zaman devirli bir sayıdır ve bu devir 3 veya 6'dır.

Sadece tek sayılardaki oranı sıralarsak (üst tarafta bulunan üçün katı olan çift sayılar bu listede bulunmamaktadır.);

(0.333, 1, 2, 2.333, 4, 4, 4.333, 6, 7, 6.333, 10, 9, 9.333, 12, 13, 11.333, 13, 15, 15.333, 17, 18, 15.333, 21)



Tablo 1

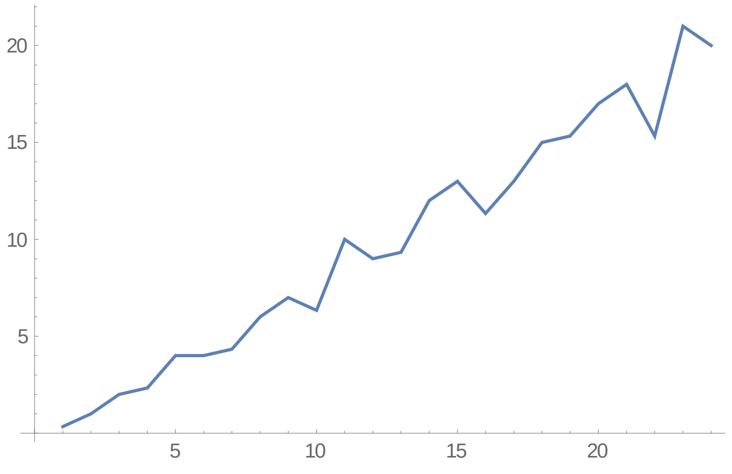


Tablo 2

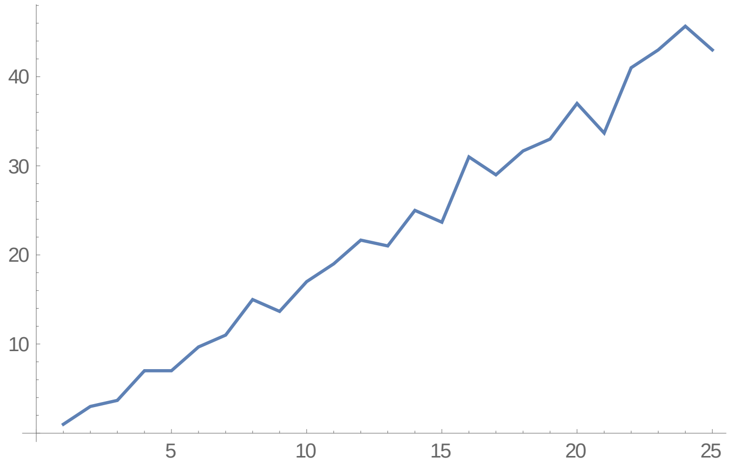
Tablo 1'de sayıların döngü toplamlarının o sayıya oranlarının ve Tablo 2'de sadece üçün katları için aynı işlemlerinin grafiklerini görüyorsunuz.

Tablo 1 ve 2'de üst hizada çift sayıların alt tarafta ise tek sayıların oranları sıralanmış durumda bu grafiklerden ve oluşturduğumuz dizilerden de anlayabileceğimiz gibi bir çift sayının döngü toplamının o sayıya oranının, o çift sayının bir önceki ve bir sonraki tek sayı olan sayının döngü toplamının o tek olan sayıya oranlarından daha fazladır.

Tablo 3 ve 4'te tek ve sadece çift sayılardaki oranların grafiklerini tablo 3'te tek tablo 4'te çift olmak üzere ayrı ayrı görebilirsiniz.



Tablo 3



Tablo 4

Sayıların döngü toplamlarının o sayıya oranları bu şekilde peki acaba

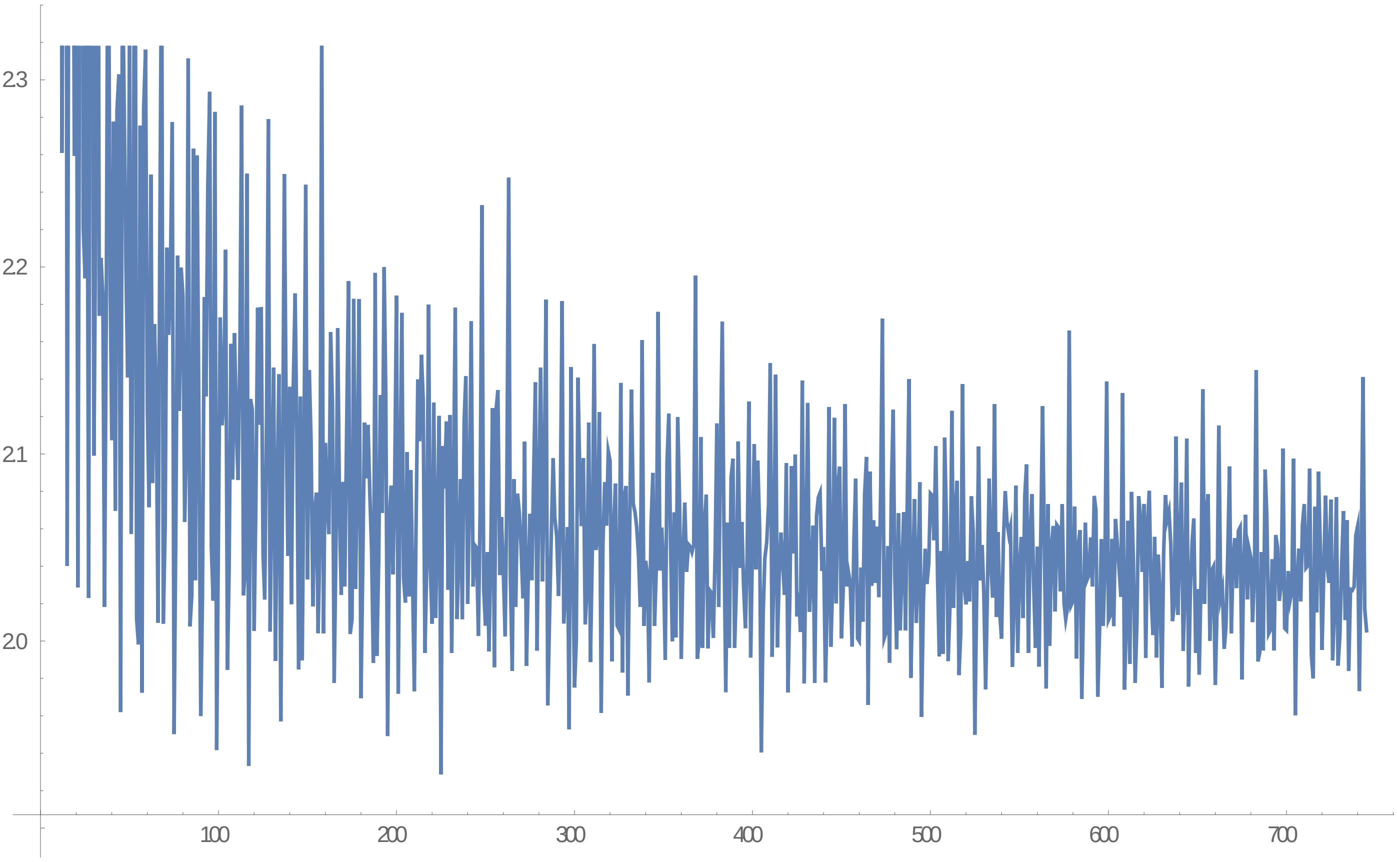
Toplamların bir önceki sayının döngü toplamına oranları nasıl?

Bu oranı 2 şekilde bulabiliriz. Bildiğiniz gibi çift sayıların döngü toplamlarının eleman sayılarının fazla olmasından da kaynaklı olarak o sayıdan bir önceki ve sonraki sayının döngü toplamından daha fazladır.

Örneğin 6'nın döngü toplamı 5 ve 7'nin döngü toplamından daha fazladır. Bu durumda eğer oranımızı çift sayıların döngü toplamının tek sayıların döngü toplamına oranını bulursak

Oranlar şu şekilde ortaya çıkıyor:{(12), (4.4), (4), (3.33), (2.6363), (2.9615), (3.6923), (2.411) ... }

Bu sayılar gittikçe … (2.0802),(2.1708), (2.0291), (2.0512),(2.0498)… gibi sayılara dönüşmeye başlıyor.

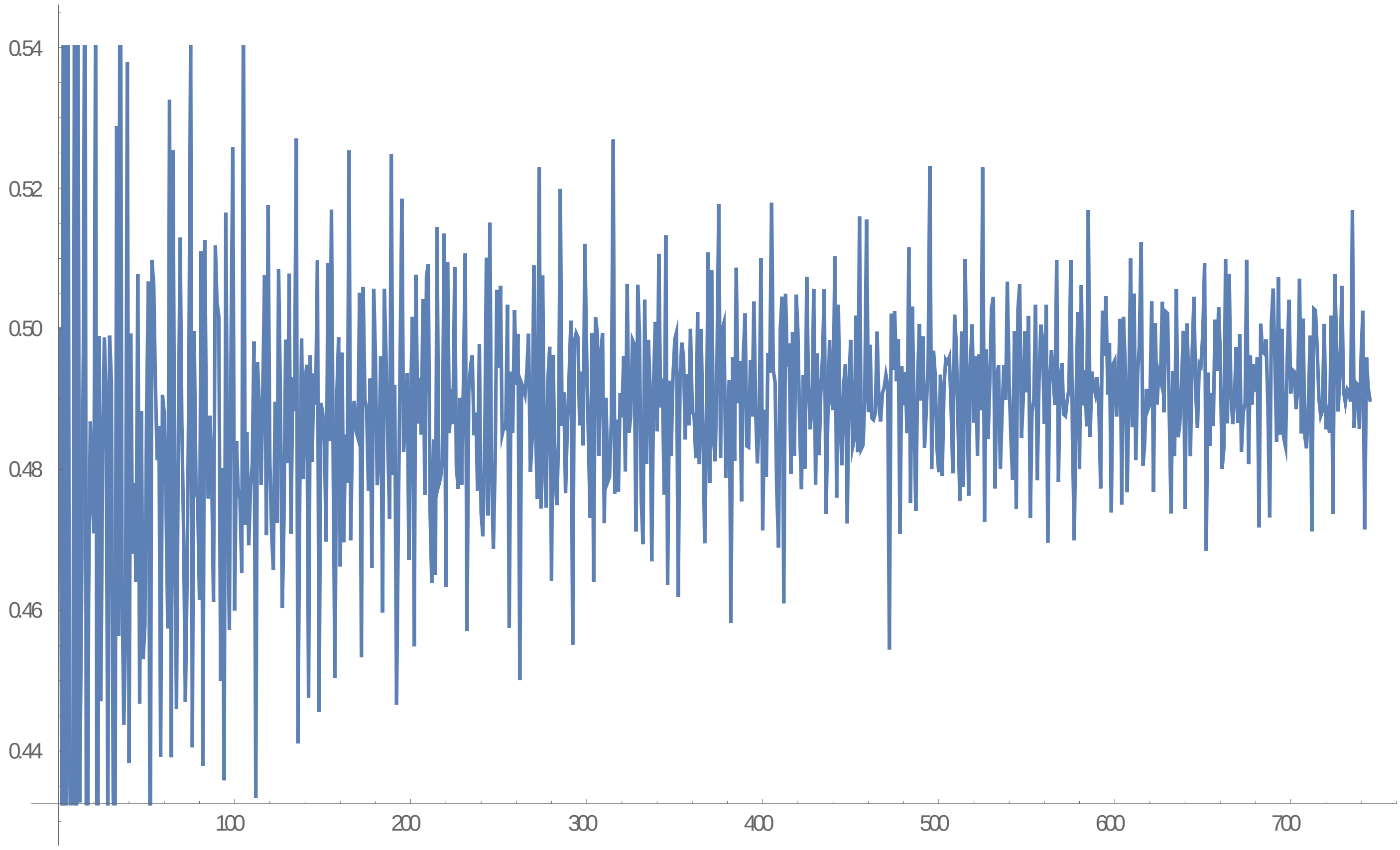


Tablo 5

Tablo 5'te ilk 750 sayı için oran grafiği göreceksiniz;

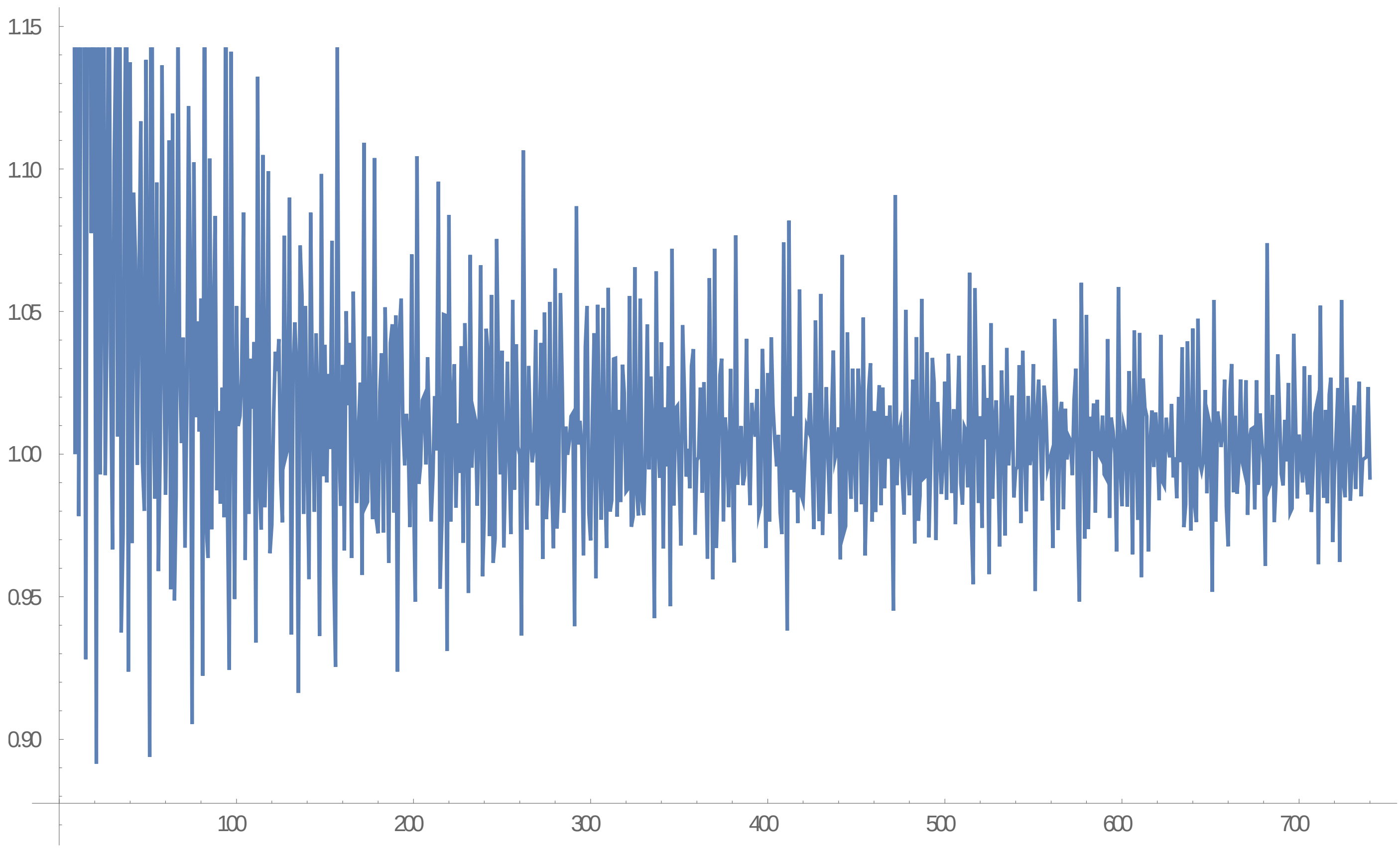
Eğer oranımızı tek sayıların döngü toplamlarının bir önceki çift sayının döngü toplamına oranı şeklinde bulursak o zaman çıkan sonuç şu şekilde: (0,5), (0.41666),(0.6363),(0.375), (0.62857)

Tablo 6'da ilk 750 sayı için olan oran grafiğini göreceksiniz:



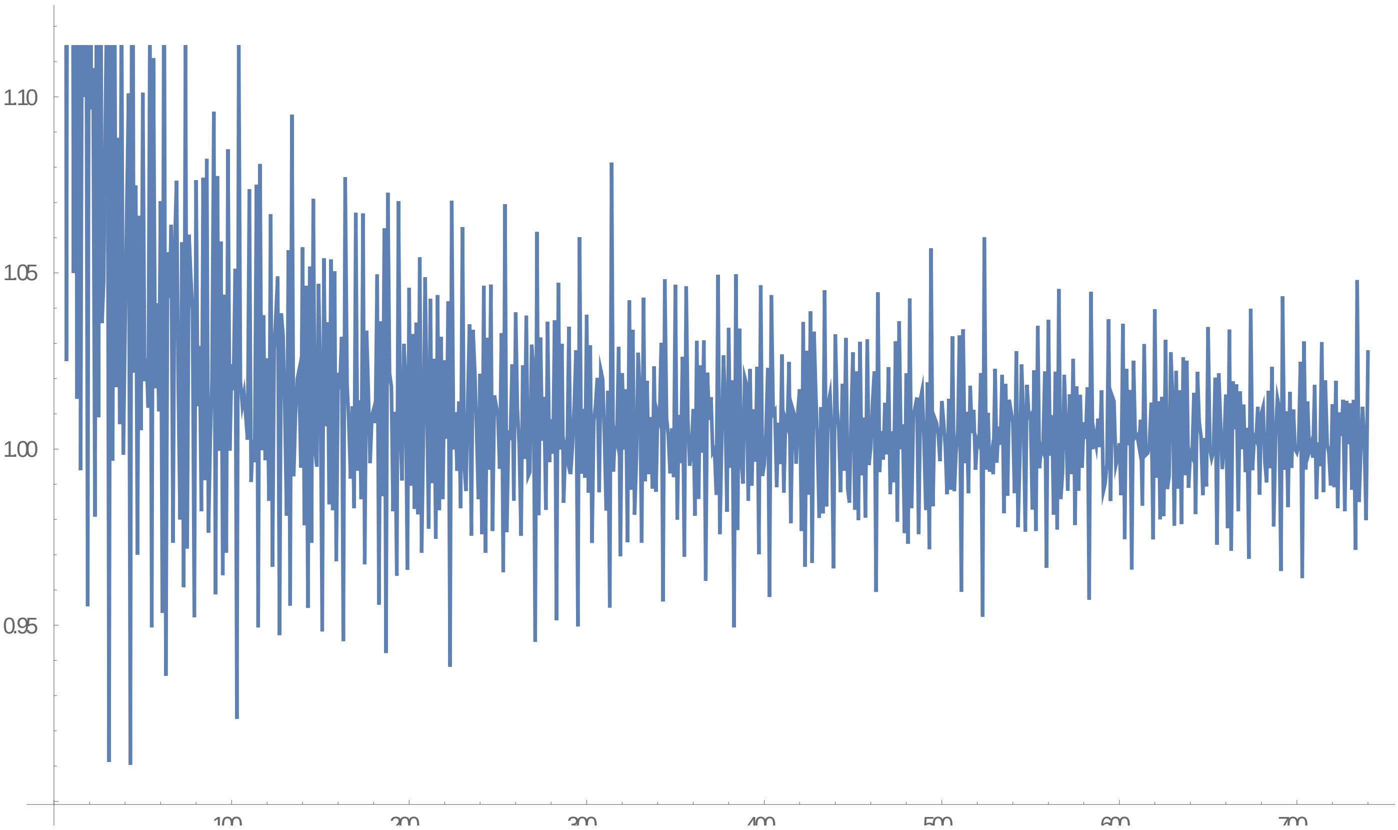
Tablo 6

Tablo 7'de ise tek sayının döngü toplamının bir önceki tek sayının döngü toplamına oranının grafiğini görebilirsiniz.



Tablo 7

Tablo 8'de ise çift sayının döngü toplamının bir önceki çift sayının döngü toplamına oranının grafiğini görebilirsiniz.



Tablo 8

Çift bir sayının döngü toplamının bir önceki sayının döngü toplamına oranının 2'ye

Tek bir sayının döngü toplamının bir önceki sayının döngü toplamının oranının 0.5'e

Çift sayının döngü toplamının bir önceki çift sayının döngü toplamına oranının 1'e

Tek bir sayının döngü toplamının bir önceki tek sayının döngü toplamına oranının 1'e

Yakınsadığını görebilirsiniz.

Bu sonuçlar doğrultusunda düşünebiliriz ki eğer döngü toplamları dizisini sonsuza götürürsek dizimiz

(.., x, 2x, x, 2x, x,..) şeklini alacaktır.

m çift sayı olmak üzere Mod (m) için döngünün merkez noktasının arasında kaldığı elemanlar (m-1)'nci ile (m)'ncidir ki bu iki sayı da ($\frac{m}{2}$)'dir, demiştik.

Peki tek sayılarda merkezde bulunan sayı hakkında ne denebilir?

Tek sayılarda merkez sayı nasıl bulunur bunu hesaplamadan önce hatırlamamız gerekenlere bakalım.

n'inci üçgensel sayının hangi sayı olduğunu bulmak için kullanılan denklem: $\frac{n(n+1)}{2}$

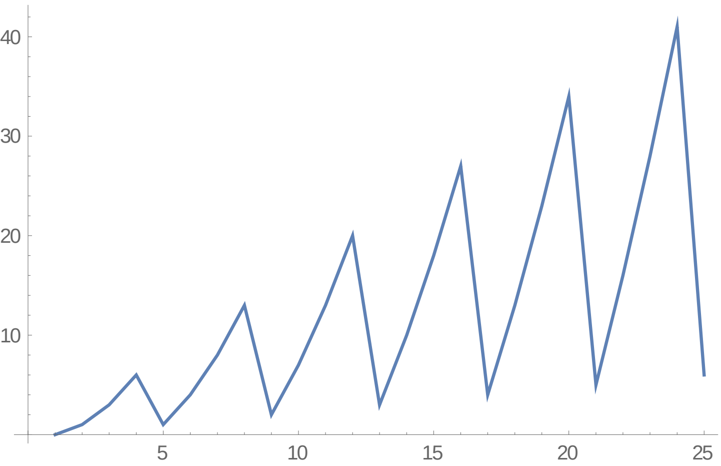
Tek sayılarda merkez sayının sıra numarası m o sayı olmak üzere: $\frac{m-1}{2}$

Biz n= $\frac{m-1}{2}$ der isek çıkan formül bizim tek sayılarda merkez sayıyı bulmak için kullanmamız gereken formül olacaktır.

$$\frac{(\frac{m-1}{2})(\frac{m-1}{2}+1)}{2} = \frac{\frac{(m-1)(m+1)}{4}}{2} = \frac{m^2-1}{8}$$

Buna göre tek sayılarda merkez sayıyı bulmak için kullanmamız gereken formül: $\frac{m^2-1}{8}\ (mod\ m)$ 'dir.

Örnek olarak mod 11 için $\frac{121-1}{8} = \frac{120}{8} = 15$'dir ve $15\ \equiv 4\ (mod\ 11)$'dir demekki mod 11 döngüsünün merkez sayısı 4'tür.



Tablo 9

Mod (3) den başlayarak tek sayılarda bulunan merkez sayılar aşağıdakiler gibidir.

(1,3,6,1,4,8,13,2,7,13,20,3,10,18,27,4,13,23,34,5,16,28)

Bu dizinin grafiği Tablo 9'da verilmiştir.

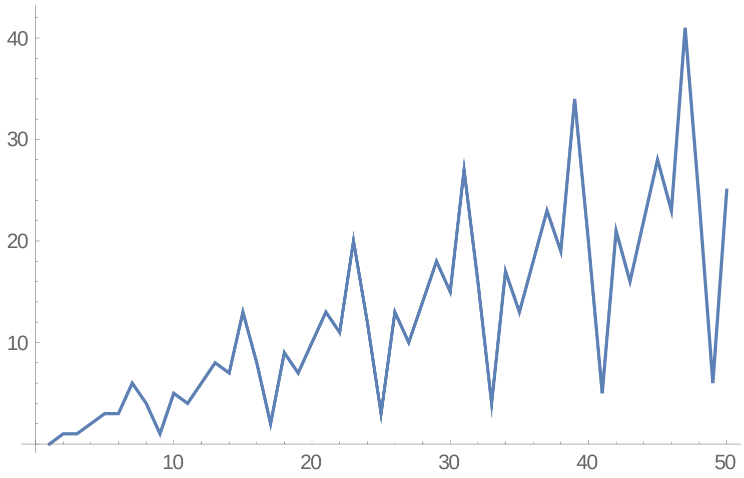
Şimdi bu diziye ve grafiğe çift sayıları ekleyelim. İlk 50'ye kadar olan sayılar için dizi aşağıdaki gibidir:

(0,1,1,2,3,3,6,4,1,5,4,6,8,7,13,8,2,9,7,10,13,11,20,12,3,13,10,14,18,15,

27,16,4,17,13,18,23,19,34,20,5,21,16,22,28,23,41,24,6,25)

Çıkan dizi 50'ye kadar olan tüm sayıların döngü merkez sayılarının sıralanışıdır. Baştaki 0 ise Mod 1'i temsil etmektedir.

Eğer grafik haline getirirsek çıkan sonuç Tablo 10'dadır.



Tablo 10

Tablo 10'da yer alan grafik A grubu elementlerinin birinci iyonlaşma enerjilerini sıraladığımız tablo ile oldukça benzerlik göstermektedir.

Döngü toplamlarının mod p 'ye oranı (p asal sayı)

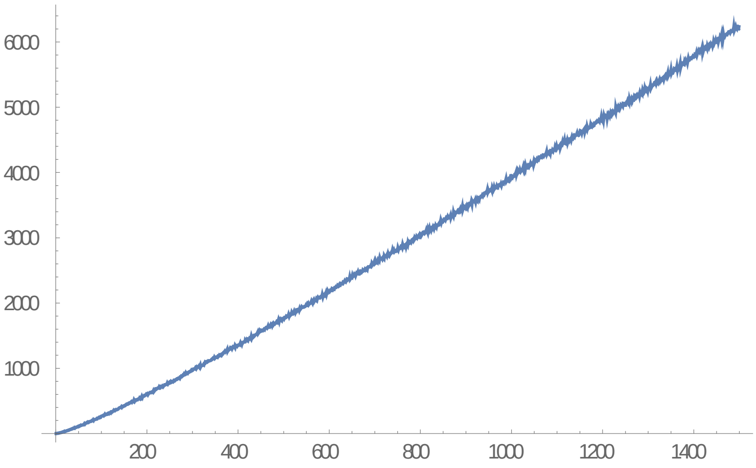
Döngü toplamları ile mod sayımız arasında bir bağlantı var mı diye bakarken 3'ün katlarında çıkan oranın her zaman devirli olduğunu ve bu devrin 3 veya 6 olduğunu görmüştük. Peki sadece asal sayıların döngü toplamlarını ve bu toplamların o asal sayıya oranlara bakarsak nasıl olur?

Örnek vererek başlayalım. Mod 5 döngü toplamı 5 dir.

Döngü toplamının mod sayımıza oranı (5/5=1) 1 'dir.

Mod 7 döngü toplamı 14'tür. Oran 2'dir.

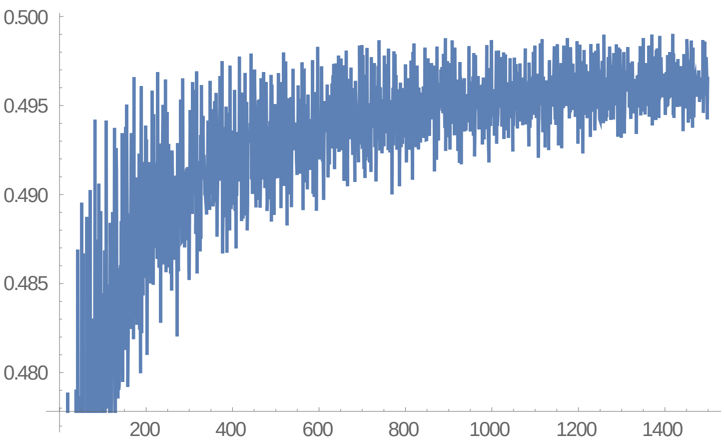
Tablo 11'de ilk 1500 asal için x ekseninin asal sayıyı y ekseninin ise oranı temsil ettiği grafiği göreceksiniz.



Tablo 11

Oranın asal sayımız arttıkça arttığını görüyoruz. Tablo 12'de oranın asal sayıya oranının (Aslında döngü toplamının asal sayının karesine oranının) grafiğini göreceksiniz.

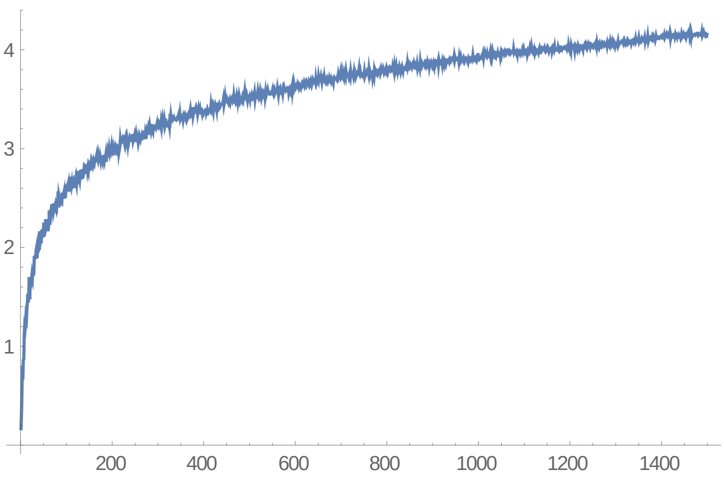
Örnek vermek gerekirse mod 7 için oranımız 2 idi. O zaman oranın asal sayıya oranı 2/7'dir.



Tablo 12

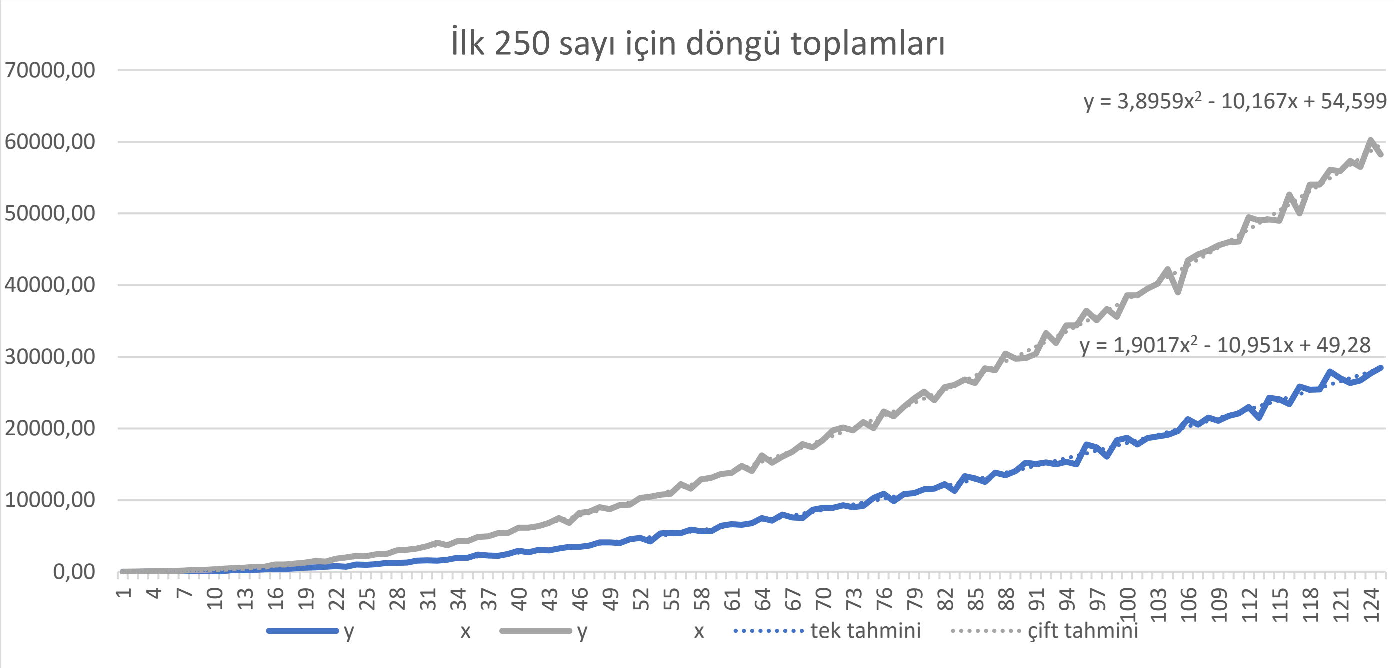
Bu grafikten anlıyoruz ki asal sayılarda oranımızın sayımıza oranı ½ ye yaklaşmaktadır.

Eğer grafiğimizi çizerken oranımızı asal sayımıza bölmek yerine o asal sayının kaçıncı asal sayı olduğuna bölersek ortaya çıkan grafik Tablo 13'teki gibidir.



Tablo 13

Döngü toplamları grafiğinde polinomsal eğilim çizgileri



Tablo 14

İlk 125 tek ve ilk 125 çift sayı yani ilk 250 doğal sayı için üst tarafta çift sayıların (Çift sayıların döngü toplamlarının tek sayıların döngü toplamlarından fazla olması dolayısıyla) alt tarafta tek sayıların döngü toplamlarının grafiği ve bu grafiklerin polinomsal eğilim çizgileri Tablo 14'te gözükmektedir.

İlk 125 çift sayı için döngü toplamlarının polinomsal eğilim çizgisinin formülü $y = 3{,}8959x^2 - 10{,}167x + 54{,}599$ iken

İlk 125 tek sayı için döngü toplamlarının polinomsal eğilim çizgisinin formülü $y = 1{,}9017x^2 - 10{,}951x + 49{,}28$ 'dır.

İki denklem birbirlerine x^2 'lerinin kat sayısı dışında oldukça benziyorlar ki çift sayılar için olan formüldeki baş kat sayının tek sayılar için olan formüldeki baş kat sayının neredeyse iki katına yakın bir sayı olduğu gözüküyor.

İŞ-ZAMAN ÇİZELGESİ:

İşin Tanımı\Aylar	Kasım	Aralık	Ocak
Literatür Taraması	X		
Verilerin Toplanması ve Analizi		X	X
Proje Raporu		X	X

Bulgular:

Her mod için bir döngü mevcuttur ve bu döngüler 1 ile başlayıp 1,0,0 diye biterler.

m tek sayı ise

Mod (m) için döngüdeki eleman sayısı çift sıfır dahil (m)'dir.

Mod (m) için döngünün merkez noktasındaki eleman $(\frac{m-1}{2})$'nci elemandır ki bu sayı $\frac{m^2-1}{8}$'dir.

m çift sayı ise

Mod (m) için döngüdeki eleman sayısı çift sıfır dahil (2m)'dir.

Mod (m) için döngünün merkez noktasının arasında kaldığı elemanlar (m-1)'nci ile (m)'ncidir ki bu iki sayı da $(\frac{m}{2})$'dir.

Bir çift sayının döngü toplamının o sayıya oranı, o çift sayının bir önceki ve bir sonraki tek sayı olan sayının döngü toplamının o tek olan sayıya oranlarından daha fazladır. (Yani m bir çift sayı olmak üzere ilk 2m kadar üçgensel sayının (mod m)'de denk olduğu en küçük doğal sayıların toplamları bir önceki (m-1) tek sayısının ilk (m-1)'e kadar üçgensel sayının (mod(m-1))'de denk olduğu en küçük doğal sayıların döngü toplamlarının iki katından ve (m+1)' tek sayısının ilk (m+1)'e kadar olan üçgensel sayının (mod(m+1))'de denk olduğu en küçük doğal sayıların döngü toplamından büyüktür.)

3 ve 3'ün katlarının döngü toplamlarının o sayıya oranları her zaman devirli bir sayıdır ve bu devir 3 veya 6'dır.

Asal sayılarda döngü toplam oranımızın sayımıza oranı ½ 'ye yaklaşmaktadır.

Çift bir sayının döngü toplamının bir önceki sayının döngü toplamına oranını 2'ye, tek bir sayının döngü toplamının bir önceki sayının döngü toplamının oranını 0.5'e, çift sayının döngü toplamının bir önceki çift sayının döngü toplamına oranını 1'e, tek bir sayının döngü toplamının bir önceki tek sayının döngü toplamına oranını 1'e yakınsar. Bu sonuçlar doğrultusunda döngü toplamları dizimiz (.., x, 2x, x, 2x, x,..) dizisine yakınsar.

Sonuç ve tartışma:

Bir döngü toplamını bulmak için m bir çift sayı ise ilk 2m kadar üçgensel sayının (mod m)'de denk oldukları en küçük doğal sayıları toplamamız, m bir tek sayı ise ilk m kadar üçgensel sayının (mod m)'de denk oldukları en küçük doğal sayıları toplamamız gerekmektedir; bu yüzden döngü toplamlarını bulan bir bilgisayar programı oluşturmak çok kolay iken sade bir denklem veya bir formül bulmak çok zordur. Bu durumdan dolayı döngü toplamları ile ilgili yapılan soruşturmalarda ve incelemelerde de denklemler bulmak ve bu denklemler bulunmadığından kesin sonuçlar elde etmek çok zordur.

Merkez sayılar grafiğimiz kimyadaki periyodik cetvel A grubu elementlerinin birinci iyonlaşma enerjileri grafiği ile oldukça benzerlik göstermektedir. Merkez sayılar grafiğinde bulunan değerler arasındaki bazı oranlar ile iyonlaşma enerjileri arasındaki bazı oranlar birbirlerine yakınlardır.

Döngü toplamları dizisi $(0,2,1,12,5,22,14,56,21\ldots)$, A332749 dizi numarası ile OEIS(The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences)'e kaydedilmiştir.

Kaynaklar:

Wolfram Mathematica