

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
Университет ИТМО

Дисциплина: Моделирование

Учебно-исследовательская работа 2
«Исследование Систем Массового
Обслуживания на Марковских Моделях»

Вариант 37/73

Выполнили:

Чжоу Хунсян

Группа: Р34131

Преподаватель:

Тропченко Андрей Александрович

2024 г.

Санкт-Петербург

Оглавление

1. Цель работы	3
2. Постановка задачи и исходные данные:.....	4
Параметры структурной и функциональной организации исследуемых систем:	4
Параметры загрузки:.....	4
3. Описание исследуемой системы:	5
4. Выполнение.....	7
Состояния Марковского процесса	7
Граф переходов Марковского процесса (СИСТЕМА 1)	7
Матрица интенсивностей переходов (СИСТЕМА 1).....	8
Граф переходов Марковского процесса (СИСТЕМА 2)	9
Матрица интенсивностей переходов (СИСТЕМА_2).....	9
Стационарные вероятности состояний (СИСТЕМА 1 и СИСТЕМА 2)	10
Характеристики СИСТЕМЫ 1 и СИСТЕМЫ 2	10
5. Вывод	14

1. Цель работы

Изучение метода марковских случайных процессов и его применение для исследования простейших моделей – систем массового обслуживания (СМО) с однородным потоком заявок.

2. Постановка задачи и исходные данные:

Параметры структурной и функциональной организации исследуемых систем:

СИСТЕМА_1		СИСТЕМА_2		Критерий эффект.
П	ЕН	П	ЕН	
2	4/2 -> 4/1	3	0/2/0	(в)

Параметры загрузки:

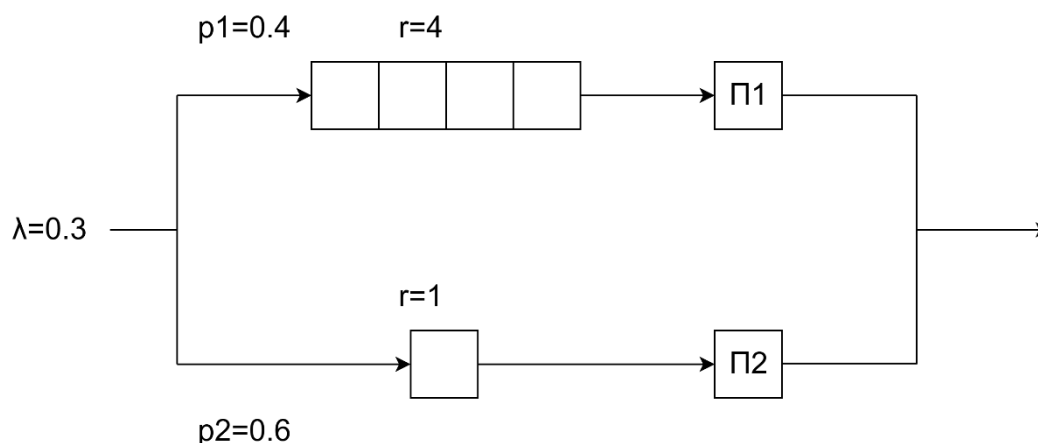
Интенс. потока	Ср.длит. обл.	Вероятность занятия прибора		
λ , 1/с	b, с	П1	П2	П3
0.3	20	0.4	0.55	0.05

Поскольку у нас будет более 20 состояний в процессе с данными ЕН=4/2 для системы 1, Мы здесь уменьшаем его га 4/1

3. Описание исследуемой системы:

Система 1:

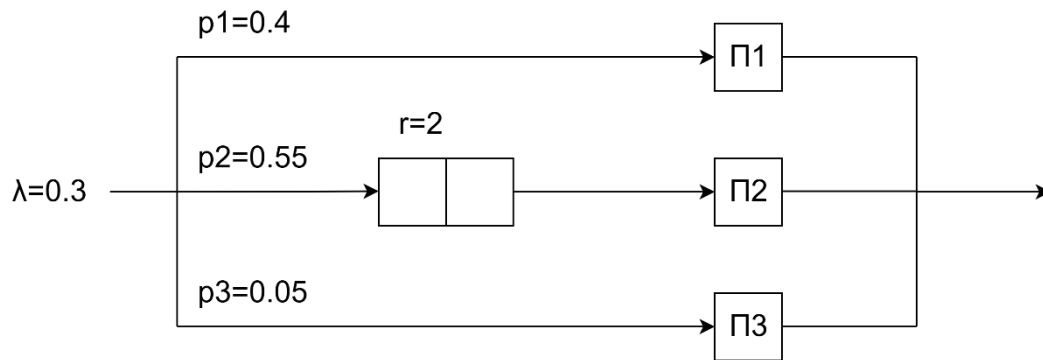
- Система содержит 2 обслуживающих прибора
- Поток поступающих в систему заявок однородный
- Длительность обслуживания заявок в приборе – величина случайная
- Перед первым прибором есть 4 место для заявок, ожидающих обслуживания и образующих очередь. Перед вторым прибором - 2 места.
- Поступающие в систему заявки образуют простейший поток с интенсивностью λ .
- Длительность обслуживания заявок в приборе распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью $\mu = 1/b$, где b – средняя длительность обслуживания.
- Дисциплина буферизации – с потерями: заявка, поступившая в систему и заставшая накопитель заполненным, теряется.
- Дисциплина обслуживания – в порядке поступления по правилу «первым пришел – первым обслужен» (FIFO).
- Заявка, поступившая в систему, с заданной вероятностью занятия прибора направляется к соответствующему прибору и ставится в очередь, либо теряется, если накопитель заполнен или отсутствует



Система 2:

- Система содержит 3 обслуживающих прибора
- Поток поступающих в систему заявок однородный
- Длительность обслуживания заявок в приборе – величина случайная

- Перед вторым прибором есть 2 место для заявок, ожидающих обслуживания и образующих очередь. Перед первым и третьим приборами мест для ожидающих заявок нет.
- Поступающие в систему заявки образуют простейший поток с интенсивностью λ .
- Длительность обслуживания заявок в приборе распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью $\mu = 1/b$, где b – средняя длительность обслуживания.
- Дисциплина буферизации – с потерями: заявка, поступившая в систему и заставшая накопитель заполненным, теряется.
- Дисциплина обслуживания – в порядке поступления по правилу «первым пришел – первым обслужен» (FIFO).
- Заявка, поступившая в систему, с заданной вероятностью занятия прибора направляется к соответствующему прибору и ставится в очередь, либо теряется, если накопитель заполнен или отсутствует



4. Выполнение

Состояния Марковского процесса

Принятые обозначения П1/П2/П3/Е1/Е2:

- П1 - описывает, обрабатывает заявку (1) или нет (0) первый прибор.
- П2 - описывает, обрабатывает заявку (1) или нет (0) второй прибор.
- П3 - описывает, обрабатывает заявку (1) или нет (0) третий прибор.
- Е1 - описывает, емкость накопителя первого прибора.
- Е2 - описывает, емкость накопителя второго прибора.

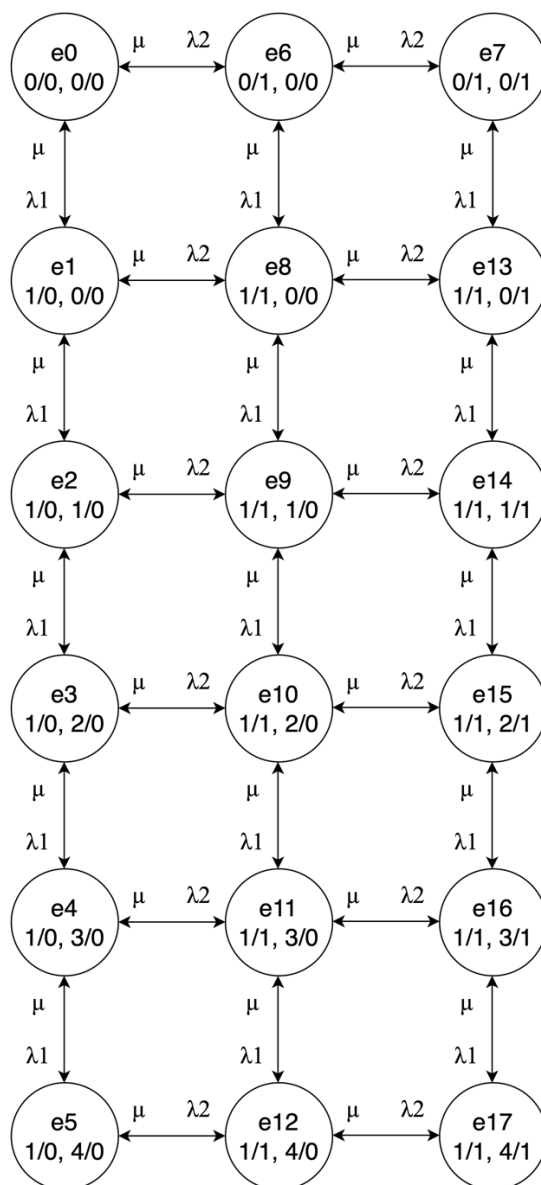
Номер состояния	СИСТЕМА_1	СИСТЕМА_2
	П1/П2, Е1/Е2	П1/П2/П3, Е2
Е0	0/0, 0/0	0/0/0, 0
Е1	1/0, 0/0	0/0/1, 0
Е2	1/0, 1/0	0/1/0, 0
Е3	1/0, 2/0	0/1/0, 1
Е4	1/0, 3/0	0/1/0, 2
Е5	1/0, 4/0	0/1/1, 0
Е6	0/1, 0/0	0/1/1, 1
Е7	0/1, 0/1	0/1/1, 2
Е8	1/1, 0/0	1/0/0, 0
Е9	1/1, 1/0	1/0/1, 0
Е10	1/1, 2/0	1/1/0, 0
Е11	1/1, 3/0	1/1/0, 1
Е12	1/1, 4/0	1/1/0, 2
Е13	1/1, 0/1	1/1/1, 0
Е14	1/1, 1/1	1/1/1, 1
Е15	1/1, 2/1	1/1/1, 2
Е16	1/1, 3/1	
Е17	1/1, 4/1	

Граф переходов Марковского процесса (СИСТЕМА 1)

$$\lambda_1 = \lambda \cdot p_1 = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

$$\lambda_2 = \lambda \cdot p_2 = 0.3 \times 0.6 = 0.18$$

$$\mu = 1/b = 1/20 = 0.05$$



Матрица интенсивностей переходов (СИСТЕМА 1)

C1	E0	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17
E0	-0.30	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
E1	0.05	-0.35	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
E2	0.00	0.05	-0.35	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
E3	0.00	0.00	0.05	-0.35	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
E4	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.35	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
E5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.23	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
E6	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.35	0.18	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
E7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00
E8	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	-0.28	0.12	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00
E9	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.40	0.12	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	0.00	0.00
E10	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.40	0.12	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	0.00
E11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.40	0.12	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00
E12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.28	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00
E13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.22	0.12	0.00	0.00	0.00
E14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.22	0.12	0.00	0.00
E15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.22	0.12	0.00
E16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.22	0.12
E17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.10

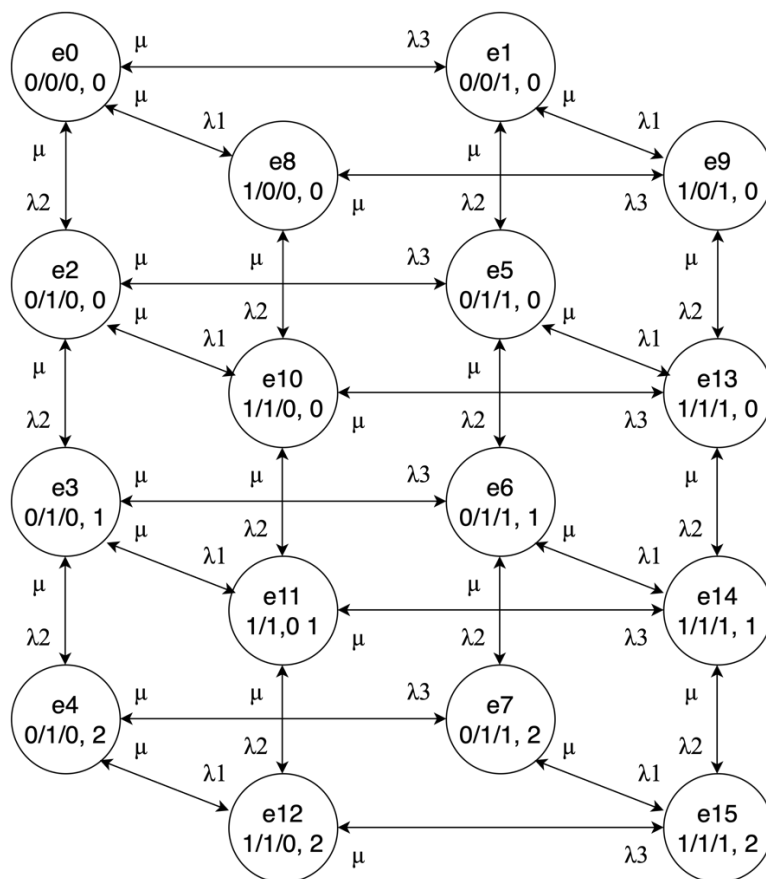
Граф переходов Марковского процесса (СИСТЕМА 2)

$$\lambda_1 = \lambda \cdot p_1 = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

$$\lambda_2 = \lambda \cdot p_2 = 0.3 \times 0.55 = 0.165$$

$$\lambda_3 = \lambda \cdot p_3 = 0.3 \times 0.05 = 0.015$$

$$\mu = 1/b = 1/20 = 0.05$$



Матрица интенсивностей переходов (СИСТЕМА_2)

	E0	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
E0	-0.300	0.015	0.165	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.120	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
E1	0.050	-0.335	0.000	0.000	0.000	0.165	0.000	0.000	0.000	0.120	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
E2	0.050	0.000	-0.350	0.165	0.000	0.015	0.000	0.000	0.000	0.000	0.120	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
E3	0.000	0.000	0.050	-0.350	0.165	0.000	0.015	0.000	0.000	0.000	0.000	0.120	0.000	0.000	0.000	0.000
E4	0.000	0.000	0.000	0.050	-0.185	0.000	0.000	0.015	0.000	0.000	0.000	0.000	0.120	0.000	0.000	0.000
E5	0.000	0.050	0.050	0.000	0.000	-0.385	0.165	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.120	0.000	0.000
E6	0.000	0.000	0.000	0.050	0.000	0.050	-0.385	0.165	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.120	0.000
E7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	0.000	0.050	-0.220	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.120
E8	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.230	0.015	0.165	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
E9	0.000	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	-0.265	0.000	0.000	0.165	0.000	0.000	0.000
E10	0.000	0.000	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	0.000	-0.280	0.165	0.000	0.015	0.000	0.000
E11	0.000	0.000	0.000	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	-0.280	0.165	0.000	0.000	0.015	0.000
E12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	-0.115	0.000	0.000	0.000	0.015
E13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	0.000	-0.265	0.165	0.000	0.000
E14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	0.000	-0.265	0.165	0.000
E15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.050	0.000	0.000	-0.100

Стационарные вероятности состояний (СИСТЕМА 1 и СИСТЕМА 2)

Номер состояния	СИСТЕМА_1		СИСТЕМА_2	
	П1/П2, Е1/Е2	Вероятность	П1/П2/П3, Е2	Вероятность
Е0	0/0, 0/0	0.0004	0/0/0, 0	0.0039
Е1	1/0, 0/0	0.0010	0/0/1, 0	0.0007
Е2	1/0, 1/0	0.0024	0/1/0, 0	0.0135
Е3	1/0, 2/0	0.0058	0/1/0, 1	0.0470
Е4	1/0, 3/0	0.0139	0/1/0, 2	0.1619
Е5	1/0, 4/0	0.0334	0/1/1, 0	0.0028
Е6	0/1, 0/0	0.0015	0/1/1, 1	0.0117
Е7	0/1, 0/1	0.0054	0/1/1, 2	0.0527
Е8	1/1, 0/0	0.0036	1/0/0, 0	0.0091
Е9	1/1, 1/0	0.0087	1/0/1, 0	0.0008
Е10	1/1, 2/0	0.0209	1/1/0, 0	0.0316
Е11	1/1, 3/0	0.0501	1/1/0, 1	0.1111
Е12	1/1, 4/0	0.1202	1/1/0, 2	0.3912
Е13	1/1, 0/1	0.0130	1/1/1, 0	0.0036
Е14	1/1, 1/1	0.0313	1/1/1, 1	0.0138
Е15	1/1, 2/1	0.0751	1/1/1, 2	0.1447
Е16	1/1, 3/1	0.1803		
Е17	1/1, 4/1	0.4328		

Характеристики СИСТЕМЫ 1 и СИСТЕМЫ 2

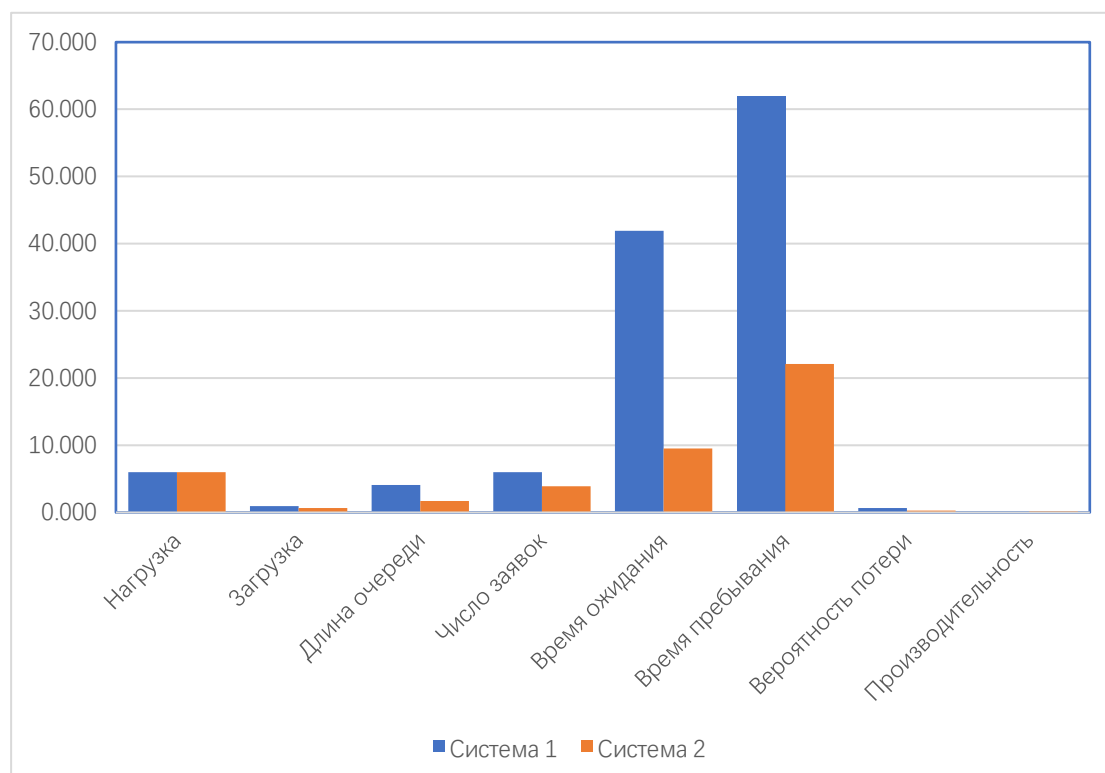
Хар-ка	Прибор	Расчетная формула	СИСТ.1	СИСТ.2
Нагрузка	П1	λ_1/μ	2.400	2.400
	П2	λ_2/μ	3.600	3.300
	П3	λ_3/μ		0.300
	Сумм.	λ/μ	6.000	6.000
Загрузка	П1	$\sum_{i=1}^K p_i \cdot f(1)$	0.993	0.706
	П2	$\sum_{i=1}^K p_i \cdot f(2)$	0.943	0.986
	П3	$\sum_{i=1}^K p_i \cdot f(3)$		0.231

	Сумм.	$\left(\sum_{i=1}^K \rho_i\right)/N$	0.968	0.641
Длина очереди	П1	$\sum_{i=0}^L i \left(\sum_{k=0}^K p_k \cdot g(1, i)\right)$	3.325	0.000
	П2	$\sum_{i=0}^L i \left(\sum_{k=0}^K p_k \cdot g(2, i)\right)$	0.738	1.685
	П3	$\sum_{i=0}^L i \left(\sum_{k=0}^K p_k \cdot g(3, i)\right)$		0.000
	Сумм.	$\sum_{i=1}^N l_i$	4.062	1.685
Число заявок	П1	$\sum_{i=0}^{L+1} i \left(\sum_{k=0}^K p_k \cdot h(1, i)\right)$	4.317	0.986
	П2	$\sum_{i=0}^{L+1} i \left(\sum_{k=0}^K p_k \cdot h(2, i)\right)$	1.681	2.670
	П3	$\sum_{i=0}^{L+1} i \left(\sum_{k=0}^K p_k \cdot h(3, i)\right)$		0.231
	Сумм.	$\sum_{i=1}^N m_i$	5.998	3.887
Время пребывания	П1	$m1/\lambda'_1$	86.980	8.213
	П2	$m2/\lambda'_2$	35.627	64.862
	П3	$m3/\lambda'_3$		15.387
	Сумм.	$\left(\sum_{i=1}^N u_i\right)/N$	61.954	22.062
Время ожидания	П1	$l1/\lambda'_1$	66.983	0.000
	П2	$l2/\lambda'_2$	15.641	40.921
	П3	$l3/\lambda'_3$		0.000
	Сумм.	$\left(\sum_{i=1}^N w_i\right)/N$	41.963	9.562
Вероятность потери	П1	$\sum_{i=0}^N p_k \cdot g(1, R)$	0.586	0.000

	П2	$\sum_{i=0}^N p_k \cdot g(2, R)$	0.738	0.751
	П3	$\sum_{i=0}^N p_k \cdot g(3, R)$		0.000
	Сумм.	$\left(\sum_{i=1}^N \pi_i\right) / N$	0.662	0.250
	П1	$\lambda \cdot p_1 \cdot (1 - \pi_1)$	0.050	0.120
Производительность	П2	$\lambda \cdot p_2 \cdot (1 - \pi_2)$	0.047	0.041
	П3	$\lambda \cdot p_3 \cdot (1 - \pi_3)$		0.015
	Сумм.	$\sum_{i=1}^N \lambda'_i$	0.097	0.176

R - емкость накопителя

Сравнительный анализ характеристик систем



Сравним полученные характеристики обеих систем:

- Системы имеют одинаковую нагрузку, что ожидаемо при одинаковых параметрах нагрузки, заданных по варианту.
- Система 1 имеет большее значение загрузки, чем система 2.

- Система 1 имеет большее значение длины очереди, чем система 2.
- Система 1 имеет большее число заявок в системе, чем система 2.
- Система 1 имеет большее время ожидания, чем система 2. Это говорит о том, что система 1 значительно быстрее обрабатывает заявки. (1.07% разница)
- Система 1 имеет большее время пребывания заявки в системе, чем система 2. (0.98% разница)
- Система 1 имеет большую вероятность потери заявки, чем система 2. Так как данный параметр является критерием эффективности, стоит выбрать первую систему. (0.46% разница)
- Система 1 имеет меньшую производительность, чем система 2. (0.81% разница)

По сравнению с критериями эффективности из варианта, мы увидим, что Система 1 имеет больше максимальной загрузки, поэтому мы выбираем систему 1.

5. Вывод

В начале выполнения УИР были проанализированы состояния марковских процессов для систем 1 и 2. На их основе были построены графы переходов марковских процессов, а впоследствии и матрицы интенсивностей переходов. С помощью программы MARK были получены значения стационарных вероятностей, используя полученные матрицы интенсивностей переходов. Получив значения стационарных вероятностей, можно было приступить к этапу расчета характеристик для систем 1 и 2. Полученные характеристики для систем 1 и 2 были сопоставлены. В результате выяснилось, что система 1 имеет наименьшую вероятность потери заявки. Именно поэтому ей было отдано предпочтение при выборе наилучшей реализации из данных двух.