ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Σημειώσεις μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα

Ιωάννης Τουλόπουλος

February 15, 2026

Contents

0.1 Πρόλογος

Οι σημειώσει αυτές γράφτηκαν για τις ανάγκες διδασκαλίας του μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα και βασίζονται στην μετάφραση των βιβλίων
"Linear Algebra, A Modern Introduction, Third Edition, David Poole, Trent University.
και στο
" Applied Linear Algebra and Matrix Methods", Timothy G. Feeman Department of Mathematics and Statistics Villanova University Villanova, PA, USA.

Δεν αποτελούν αντικείμενο οικονομικής εκμετάλλευσης. Γράφτηκαν με κάποια βιασύνη και σίγουρα θα υπάρχουν λάθη. Παρακαλώ τους αναγνώστες οταν βρίσκουν λάθη να τα σημειώνουν ώστε να διορθωθούν κάποια στιγμή.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή, Το Καρτεσιανό Επίπεδο και αναπαράσταση διανυσμάτων

Το καρτεσιανό επίπεδο είναι ένα σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης σημείων στο επίπεδο με τη βοήθεια αριθμών. Αποτελείται από δύο κάθετους αριθμητικούς άξονες:

- τον **οριζόντιο άξονα** x (άξονας των τετμημένων),
- τον **κατακόρυφο άξονα** y (άξονας των τεταγμένων).

Οι άξονες τέμνονται στο σημείο $O(0,0)$, το οποίο ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.

1.0.1 Σημεία και Συντεταγμένες

Κάθε σημείο του καρτεσιανού επιπέδου προσδιορίζεται από ένα **διατεταγμένο ζεύγος** πραγματικών αριθμών (x, y), όπου:

- η τετμημένη x δείχνει τη θέση του σημείου ως προς τον άξονα x,
- η τεταγμένη y δείχνει τη θέση του σημείου ως προς τον άξονα y.

Έστω τώρα ένα σημείο M του καρτεσιανού επιπέδου. Από το M φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τους άξονες, οι οποίες τους τέμνουν στα σημεία M_1 και M_2 (Σχ. 1.0.8). Αν x, y είναι οι αριθμοί που αντιστοιχούν στα σημεία M_1, M_2 των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, τότε:

- το x λέγεται **τετμημένη** του σημείου M,
- το y λέγεται **τεταγμένη** του σημείου M.

Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου M λέγονται **συντεταγμένες** του M.

Με τον πιο πάνω τρόπο, σε κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί ακριβώς ένα ζεύγος (x, y) συντεταγμένων. Αλλά και αντίστροφα, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο M του επιπέδου που έχει τετμημένη x και τεταγμένη y.

Το σημείο αυτό ορίζεται ως εξής: Πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ παίρνουμε σημεία M_1 και M_2 με τετμημένη x και τεταγμένη y αντίστοιχα. Στη συνέχεια, από τα σημεία αυτά φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τους άξονες. Το σημείο τομής τους είναι το ζητούμενο σημείο M.

Το σημείο M που έχει τετμημένη x και τεταγμένη y συμβολίζεται με $M(x, y)$ ή απλά με (x, y).

Παράδειγμα 1.0.1.

Το σημείο $A(3, 2)$ βρίσκεται 3 μονάδες δεξιά από την αρχή των αξόνων και 2 μονάδες πάνω από αυτήν.

```
y
↑
|2        • A(3,2)
|
|
|
+--------3-----------→ x
O(0,0)
```

Επεξήγηση σχήματος:

- Το σημείο $O(0, 0)$ είναι η αρχή των αξόνων.
- Η οριζόντια μετακίνηση προς τα δεξιά δίνει την τετμημένη $x = 3$.
- Η κατακόρυφη μετακίνηση προς τα πάνω δίνει την τεταγμένη $y = 2$.
- Το σημείο $A(3, 2)$ καθορίζεται από τις δύο αυτές μετακινήσεις.

Τεταρτημόρια Οι άξονες χωρίζουν το καρτεσιανό επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια:

1. Πρώτο τεταρτημόριο: $x > 0$, $y > 0$,
2. Δεύτερο τεταρτημόριο: $x < 0$, $y > 0$,
3. Τρίτο τεταρτημόριο: $x < 0$, $y < 0$,
4. Τέταρτο τεταρτημόριο: $x > 0$, $y < 0$.

Τα σημεία που βρίσκονται πάνω στους άξονες δεν ανήκουν σε κανένα τεταρτημόριο.

Παρατηρήσεις

- Η σειρά των αριθμών στο ζεύγος (x, y) είναι σημαντική.
- Η μονάδα μέτρησης είναι ίδια και στους δύο άξονες.
- Το καρτεσιανό επίπεδο αποτελεί τη βάση για τη μελέτη γραφικών παραστάσεων και γεωμετρικών σχημάτων.

1.0.2 Η Γεωμετρία και η Άλγεβρα των Διανυσμάτων

Αρχίζουμε εξετάζοντας το καρτεσιανό επίπεδο με τους γνωστούς άξονες x και y. Ένα **διάνυσμα** είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα που αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση από ένα σημείο A σε ένα άλλο σημείο B (βλ. Σχήμα ??).

Το διάνυσμα από το A στο B συμβολίζεται με $\vec{AB}$. Το σημείο A ονομάζεται **αρχικό σημείο** (ή **ουρά**) του διανύσματος, ενώ το σημείο B ονομάζεται **τελικό σημείο** (ή **κεφαλή**).

Συχνά, ένα διάνυσμα συμβολίζεται απλώς με ένα έντονο, πεζό γράμμα, όπως $\vec{v}$.

Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου αντιστοιχεί στο σύνολο όλων των διανυσμάτων που έχουν την ουρά τους στην αρχή των αξόνων O. Σε κάθε σημείο A αντιστοιχεί το διάνυσμα $\vec{a} = \vec{OA}$, και σε κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ με ουρά στο O αντιστοιχεί η κεφαλή του στο σημείο A. (Διανύσματα αυτής της μορφής ονομάζονται μερικές φορές **διανύσματα θέσης**.)

Είναι φυσικό να αναπαριστούμε τέτοια διανύσματα με τη βοήθεια συντεταγμένων. Για παράδειγμα, στο Σχήμα του Παραδείγματος 1.0.1 το σημείο $A = (3, 2)$ και γράφουμε το διάνυσμα

$$\vec{a} = \vec{OA} = [3, 2]$$

χρησιμοποιώντας αγκύλες.

Ομοίως, τα άλλα διανύσματα στο Σχήμα 1.2 είναι:

$$\vec{b} = [-1, 3] \quad \text{και} \quad \vec{c} = [2, -1]$$

Οι επιμέρους συντεταγμένες (το 3 και το 2 στην περίπτωση του $\vec{a}$) ονομάζονται **συνιστώσες** του διανύσματος. Ένα διάνυσμα λέγεται μερικές φορές ότι είναι ένα **διατεταγμένο ζεύγος** πραγματικών αριθμών.

Η σειρά είναι σημαντική, διότι, για παράδειγμα,

$$[3, 2] \neq [2, 3].$$

Γενικά, δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συνιστώσες τους είναι ίσες. Έτσι, αν

$$[x, y] = [1, 5],$$

τότε συνεπάγεται ότι

$$x = 1 \quad \text{και} \quad y = 5.$$

Συχνά είναι βολικό να χρησιμοποιούμε **διανύσματα στήλης** αντί (ή επιπλέον) των διανυσμάτων γραμμής.

Μια άλλη αναπαράσταση του διανύσματος $[3,2]$ είναι:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(Το σημαντικό σημείο είναι ότι τα δύο αυτά σύμβολα παριστάνουν το ίδιο διάνυσμα.)

Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε ότι τα **διανύσματα στήλης** είναι κάπως καταλληλότερα από υπολογιστική άποψη· προς το παρόν, όμως, προσπαθήστε να εξοικειωθείτε και με τις δύο αναπαραστάσεις.

Παρατήρηση 1.0.1 *Στον Διανυσματικό Λογισμό, (π.χ., στο μάθημα Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ), τα διανύσματα συμβολίζονται συνήθως με τις συντεταγμένες τους ως* $\vec{a} = [x_1, y_1]$. *Στην Γραμμική Άλγεβρα τα διανύσματα συμβολίζονται συνήθως με τις συντεταγμένες τους ως "διανύσματα στήλη",* $a = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Ίσως σας έρθει η σκέψη ότι δεν μπορούμε στην πραγματικότητα να σχεδιάσουμε το διάνυσμα $[0,0] = \vec{OO}$, δηλαδή ένα διάνυσμα που ξεκινά και καταλήγει στην αρχή των αξόνων. Παρ' όλα αυτά, πρόκειται για ένα απολύτως έγκυρο διάνυσμα, το οποίο έχει και ειδική ονομασία: ονομάζεται **μηδενικό διάνυσμα**. Το μηδενικό διάνυσμα συμβολίζεται με $\vec{0}$.

Το σύνολο όλων των διανυσμάτων με δύο συνιστώσες συμβολίζεται με $\mathbb{R}^2$ (όπου $\mathbb{R}$ δηλώνει το σύνολο των πραγματικών αριθμών, από τους οποίους προέρχονται οι συνιστώσες των διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^2$). Έτσι, τα διανύσματα $[-1,\ 3.5]$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ανήκουν όλα στο $\mathbb{R}^2$.

Ανακαλώντας, ας προσπαθήσουμε να συνδέσουμε όλες αυτές τις ιδέες με διανύσματα των οποίων η ουρά δεν βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Η ετυμολογική προέλευση της λέξης *διάνυσμα* από το ρήμα ≪φέρω≫ (to carry) μας δίνει μια χρήσιμη ένδειξη.

1.0.3 Εύρεση συντεταγμένων διανύσματος οταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των άκρων του.

.

Έστω $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία, τέτοια ώστε $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, δες Σχήμα 1.1. Τότε έχουμε:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \tag{1}$$

Επειδή όμως είναι

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

η σχέση (1) γράφεται

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\boxed{x = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad y = y_2 - y_1}$$

Δηλαδή

τετμημένη του $\overrightarrow{AB}$ = τετμημένη του B - τετμημένη του A

τεταγμένη του $\overrightarrow{AB}$ = τεταγμένη του B - τεταγμένη του A

Για παράδειγμα, αν $A(1,2)$ και $B(2,-1)$, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει τετμημένη

$$x = 2 - 1 = 1$$

και τεταγμένη

$$y = -1 - 2 = -3,$$

δες Σχήμα 1.1.

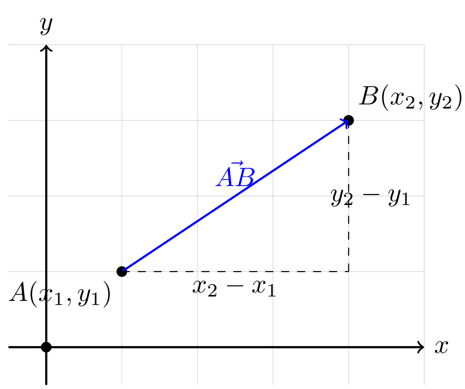


Figure 1.1: Εύρεση συντεταγμένων διανύσματος με χρήση πλέγματος

1.0.4 Γεωμετρική Ερμηνεία και σχέσεις διανυσμάτων

Βάση του ορισμού και των παραπάνω το διάνυσμα $\vec{a} = [3,2]$ στο Σχήμα 1.2Β μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων O, μετακινούμαστε 3 μονάδες προς τα δεξιά και έπειτα 2 μονάδες προς τα πάνω, καταλήγοντας στο σημείο A. Η ίδια μετατόπιση συμβαίνει στο σημείο P του Στο Σχήμα 1.2Γ η ίδια μετατόπιση συμβαίνει στο σημείο P και προκύπτει το διάνυσμα $\vec{OP}$.

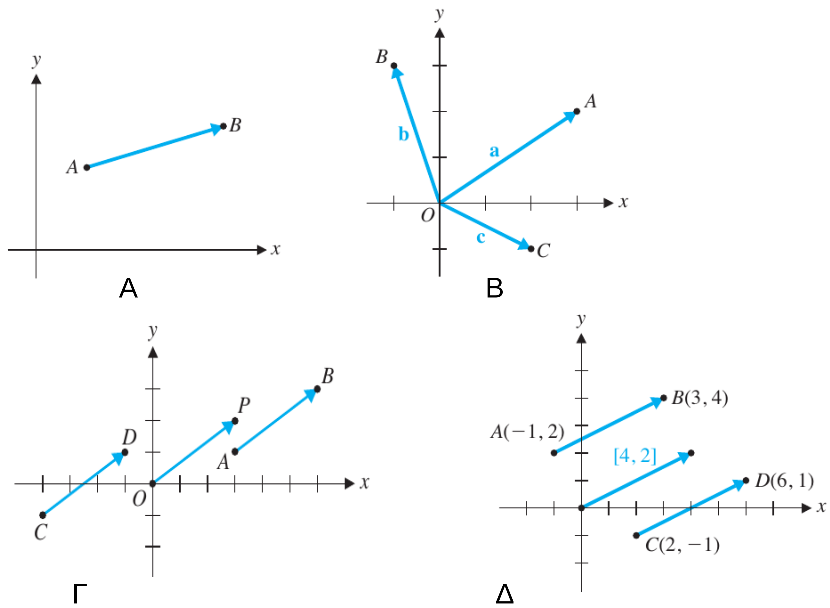


Figure 1.2: Γεωμετρική ερμηνεία ολοκληρώματος. (A) το διάνυσμα και τα δυο άκρα του, (B) Διανύσματα με αρχή την αρχή των αξόνων και διαφορετικές διευθύνσεις, (Γ) Ίσα διανύσματα έπειτα απο παράλληλη μετατόπιση, και (Δ) Ίσα διανύσματα έπειτα απο παράλληλη μετατόπιση

Ορίζουμε δύο διανύσματα ως **ίσα** αν έχουν το ίδιο μήκος και την ίδια κατεύθυνση. Έτσι, στο Σχήμα 1.2Γ ισχύει

$$\vec{AB} = \vec{CD}.$$

Παρόλο που έχουν διαφορετικά αρχικά και τελικά σημεία, παριστάνουν την ίδια μετατόπιση. Γεωμετρικά, δύο διανύσματα είναι ίσα αν το ένα μπορεί να προκύψει από το άλλο με παράλληλη μετατόπιση (ολίσθηση), έτσι ώστε τα δύο διανύσματα να συμπέσουν. Το Σχήμα 1.2Γ δείχνει δύο ισοδύναμες μετατοπίσεις του $\vec{AB}$, οι οποίες παριστάνονται από τα διανύσματα $\vec{OP}$ και $\vec{CD}$.
Σε όρους συνιστωσών, στο Σχήμα 1.2Γ έχουμε

$$A = (3, 1) \quad \text{και} \quad B = (6, 3).$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $[3, 2]$, το οποίο καταγράφει τη μετατόπιση, είναι απλώς η διαφορά των αντίστοιχων συνιστωσών:

$$\vec{AB} = [3, 2] = [6 - 3,\ 3 - 1].$$

Ομοίως,

$$\vec{CD} = [-1 - (-4),\ 1 - (-1)] = [3, 2],$$

και συνεπώς

$$\vec{AB} = \vec{CD},$$

όπως αναμενόταν. Συγκρίνετε τα παραπάνω με την ανάλυση στην προηγούμενη παράγραφο 1.0.3.

Ένα διάνυσμα όπως το $\vec{OP}$, του οποίου η ουρά βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, λέγεται ότι βρίσκεται σε **κανονική (ή τυπική) θέση**.

Η προηγούμενη συζήτηση δείχνει ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να σχεδιαστεί ως διάνυσμα σε κανονική θέση. Αντίστροφα, ένα διάνυσμα σε κανονική θέση μπορεί να επανασχεδιαστεί (με μεταφορά) έτσι ώστε η αρχή του να βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου.

Παράδειγμα 1.0.2.

Έστω $A = (-1,\, 2)$ και $B = (3,\, 4)$. Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{AB}$ και να σχεδιαστεί:

1. σε κανονική (τυπική) θέση,
2. με την αρχή του στο σημείο $C = (2,\, -1)$.

Λύση

Υπολογίζουμε

$$\vec{AB} = [3 - (-1),\, 4 - 2] = [4,\, 2].$$

Αν το διάνυσμα $\vec{AB}$ μεταφερθεί έτσι ώστε να ταυτιστεί με το $\vec{CD}$, όπου $C = (2,\, -1)$, τότε το τελικό σημείο D πρέπει να είναι

$$D = (2 + 4,\, -1 + 2) = (6,\, 1).$$

(Βλ. Σχήμα 1.2Γ.)

1.0.5 Νέα Διανύσματα από Παλαιά, έννοια της πρόσθεσης διανυσμάτων

Η πράξη της **πρόσθεσης διανυσμάτων** αποτελεί τη βασική πράξη στα διανύσματα. Αν ακολουθήσουμε το διάνυσμα $\vec{u}$ με το διάνυσμα $\vec{v}$, μπορούμε να οπτικοποιήσουμε τη συνολική μετατόπιση ως ένα τρίτο διάνυσμα, το οποίο συμβολίζεται με $\vec{u} + \vec{v}$. Στο Σχήμα 1.3Α έχουμε $\vec{u} = [1, 2]$ και $\vec{v} = [2, 2]$, οπότε το συνολικό αποτέλεσμα της διαδοχικής εφαρμογής των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι

$$[1 + 2,\ 2 + 2] = [3, 4],$$

που δίνει το διάνυσμα $\vec{u} + \vec{v}$.

Γενικά, αν $\vec{u} = [u_1, u_2]$ και $\vec{v} = [v_1, v_2]$, τότε το άθροισμά τους $\vec{u} + \vec{v}$ είναι το διάνυσμα

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1,\ u_2 + v_2],$$

δες Σχήμα 1.3Α.

Είναι χρήσιμο να οπτικοποιούμε το άθροισμα $\vec{u}+\vec{v}$ γεωμετρικά. Ο παρακάτω κανόνας αποτελεί τη γεωμετρική διατύπωση της προηγούμενης συζήτησης.

Κανόνας τέλους - αρχής διανύσματος. Δοθέντων διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ στο $\mathbb{R}^2$, μεταφέρουμε το διάνυσμα $\vec{v}$ παράλληλα προς τον εαυτό του έτσι ώστε η αρχή του να συμπέσει με την τέλος του $\vec{u}$. Το άθροισμα $\vec{u}+\vec{v}$ είναι το διάνυσμα που ξεκινά από την αρχή του $\vec{u}$ και καταλήγει στο τέλος του $\vec{v}$. (Βλ. Σχήμα 1.3Γ.)

Με παράλληλη μεταφορά των $\vec{u}$ και $\vec{v}$, σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3Γ. Το παραλληλόγραμμο αυτό ονομάζεται **παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$**. Η κατασκευή αυτή οδηγεί σε μια ισοδύναμη εκδοχή του κανόνα αρχής - τέλους για διανύσματα σε κανονική θέση.

Κανόνας του παραλληλογράμμου. Δοθέντων διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ στο $\mathbb{R}^2$ (σε κανονική θέση), το άθροισμα $\vec{u}+\vec{v}$ είναι το διάνυσμα σε κανονική θέση που βρίσκεται κατά μήκος της διαγωνίου του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$. (Βλ. Σχήμα 1.3Γ και Σχήμα 1.3Δ.)

Παράδειγμα 1.0.3.

Αν $\vec{u}=[3,-1]$ και $\vec{v}=[1,4]$, να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το διάνυσμα $\vec{u}+\vec{v}$.

Λύση Υπολογίζουμε

$$\vec{u}+\vec{v}=[3+1,\ -1+4]=[4,3].$$

Το διάνυσμα αυτό σχεδιάζεται με τον κανόνα κεφαλής–ουράς στο Σχήμα 1.3Β και με τον κανόνα του παραλληλογράμμου στο Σχήμα 1.3Δ.

Η δεύτερη βασική πράξη στα διανύσματα είναι ο **πολλαπλασιασμός με βαθμωτό αριθμό**. Δοθέντος ενός διανύσματος $\vec{v}$ και ενός πραγματικού αριθμού c, το γινόμενο $c\vec{v}$ είναι το διάνυσμα που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε συνιστώσα του $\vec{v}$ με τον αριθμό c.

Για παράδειγμα,

$$3[-2,4]=[-6,12].$$

Γενικά,

$$c\vec{v}=c[v_1,v_2]=[cv_1,\ cv_2].$$

Γεωμετρικά, το διάνυσμα $c\vec{v}$ είναι μια ≪κλιμακωμένη≫ εκδοχή του διανύσματος $\vec{v}$.

Παράδειγμα 1.0.4.

Αν $\vec{v}=[-2,\ 4]$, να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν τα διανύσματα $2\vec{v}$, $\dfrac{1}{2}\vec{v}$ και $-2\vec{v}$.

Λύση

Υπολογίζουμε:

$$2\vec{v}=[2(-2),\ 2\cdot 4]=[-4,\ 8],$$

$$\frac{1}{2}\vec{v} = \left[\frac{1}{2}(-2),\ \frac{1}{2}\cdot 4\right] = [-1,\ 2],$$
$$-2\vec{v} = [-2(-2),\ -2\cdot 4] = [4,\ -8].$$

Τα διανύσματα αυτά φαίνονται στο Σχήμα 1.3Ε.

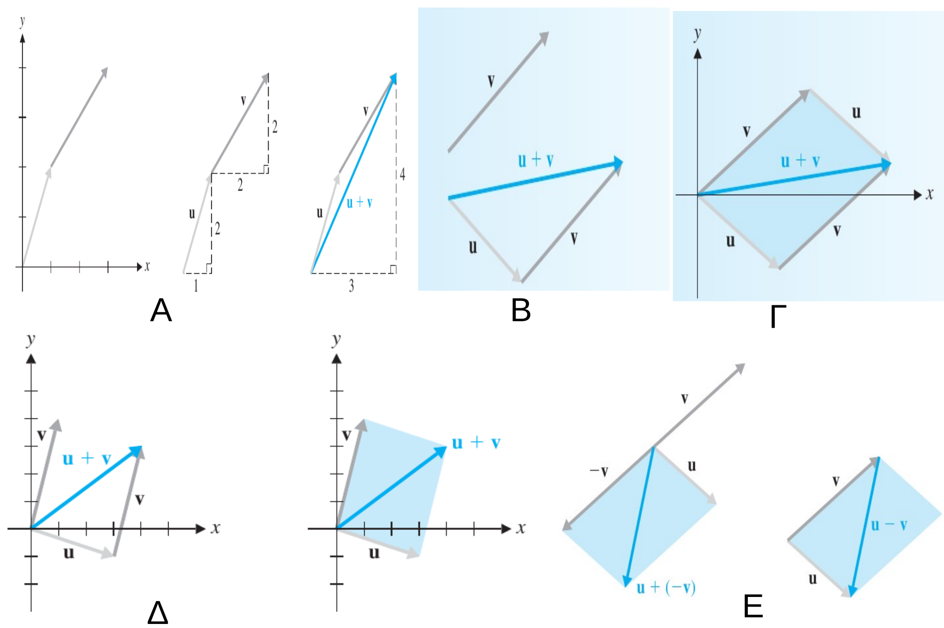


Figure 1.3: (Α) Συνολική μετατόπιση απο την αρχή του $\vec{u}$ sto τέλος του $\vec{v}$, (Β) Η μετατόπιση ως αποτέλεσμα της πράξης $\vec{u}+\vec{v}$, (Γ) Κανόνας τέλους - αρχής διανύσματος και το αποτέλεσμα της πράξης $\vec{u}+\vec{v}$, (Δ) το αποτέλεσμα της πράξης $\vec{u}+\vec{v}$ και ο κανόνας του παραλληλογράμμου, (Ε) πολλαπλασιασμός με βαθμωτό αριθμό, Παράδειγμα 1.0.4

1.0.6 Διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ kai στον στο $\mathbb{R}^n$

Όλα όσα έχουμε κάνει μέχρι τώρα επεκτείνονται εύκολα στις τρεις διαστάσεις. Το σύνολο όλων των διατεταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}^3$. Τα σημεία και τα διανύσματα προσδιορίζονται με τη βοήθεια τριών αμοιβαία κάθετων αξόνων συντεταγμένων, οι οποίοι τέμνονται στην αρχή των αξόνων O.

Ένα σημείο όπως το $A = (5, 8, 3)$ μπορεί να εντοπιστεί ως εξής: αρχικά μετακινούμαστε 5 μονάδες κατά μήκος του άξονα x, έπειτα 8 μονάδες παράλληλα προς τον άξονα y, και τέλος 3 μονάδες παράλληλα προς τον άξονα z. Το αντίστοιχο διάνυσμα $\vec{a} = [5, 8, 3]$ είναι τότε το $\vec{OA}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4αριστερά.

Ένας άλλος τρόπος να οπτικοποιήσουμε το διάνυσμα $\vec{a}$ στο $\mathbb{R}^3$ είναι να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, του οποίου οι έξι έδρες ορίζονται από τα τρία επίπεδα συντεταγμένων (xy-, xz- και yz-επίπεδο) και από τρία επίπεδα που διέρχονται από το σημείο $(5, 8, 3)$ και είναι παράλληλα προς τα επίπεδα συντεταγμένων. Το διάνυσμα $[5, 8, 3]$ αντιστοιχεί τότε στη διαγώνιο που ενώνει την αρχή των αξόνων με την απέναντι κορυφή του παραλληλεπιπέδου (βλ. Σχήμα 1.4).

Οι ≪κατά συνιστώσα≫ ορισμοί της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού με βαθμωτό επεκτείνονται στο $\mathbb{R}^3$ με προφανή τρόπο.

Διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ Στον χώρο $\mathbb{R}^n$, οι *συντεταγμένες* είναι οι συγκεκριμένοι διατεταγμένοι αριθμοί που προσδιορίζουν ένα σταθερό σημείο στον χώρο σε σχέση με ένα επιλεγμένο σύστημα αναφοράς, δηλαδή ένα σημείο αναφοράς (αρχή) και άξονες.
Συντεταγμένες: Μια διατεταγμένη n-άδα $(x_1, \ldots, x_n)$ που καθορίζει μια σταθερή θέση ή σημείο στον χώρο σε σχέση με την αρχή ενός ορισμένου συστήματος συντεταγμένων (όπως το καρτεσιανό σύστημα).

Αντίθετα, τα *διανύσματα* αναπαριστούν μέτρο και διεύθυνση, περιγράφοντας μια σχετική μετατόπιση ή δύναμη, και μπορούν να μετακινηθούν μέσα στον χώρο χωρίς να αλλάζει η τιμή τους.
Τα διανύσματα στον χώρο $\mathbb{R}^n$ αποτελούν ένα από τα θεμελιώδη αντικείμενα της γραμμικής άλγεβρας και λειτουργούν ως το βασικό σημείο εκκίνησης για την κατανόηση των διανυσματικών χώρων. Ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια διατεταγμένη n-άδα πραγματικών αριθμών,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n),$$

όπου κάθε συνιστώσα v_i αντιπροσωπεύει μια ≪κατεύθυνση≫ μέσα στον χώρο.

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ επεκτείνει τη γεωμετρική έννοια των διανυσμάτων πέρα από τους οικείους δισδιάστατους και τρισδιάστατους χώρους, επιτρέποντας την περιγραφή και ανάλυση πιο σύνθετων φαινομένων. Οι βασικές πράξεις, όπως η πρόσθεση διανυσμάτων και ο πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό, ορίζονται με φυσικό τρόπο ανά συνιστώσα και διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στη μελέτη της γραμμικότητας.

Γενικότερα, ορίζουμε το $\mathbb{R}^n$ ως το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών, οι οποίες γράφονται είτε ως διανύσματα γραμμής είτε ως διανύσματα στήλης. Έτσι, ένα διάνυσμα $\vec{v}$ στο $\mathbb{R}^n$ έχει τη μορφή

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Τα επιμέρους στοιχεία του $\vec{v}$ ονομάζονται **συνιστώσες**· το v_i ονομάζεται i-**οστή συνιστώσα**.

Ορισμός 1.0.1 *Για κάθε θετικό ακέραιο N, ο χώρος $\mathbb{R}^N$ είναι το σύνολο*

$$\mathbb{R}^N = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} : \ a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.0.1}$$

Κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^N$ ονομάζεται διάνυσμα. *Οι επιμέρους αριθμοί $a_1, a_2, \ldots$ ονομάζονται* συντεταγμένες *του διανύσματος που ορίζουν.*

Επεκτείνουμε τους ορισμούς της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού με βαθμωτό στο $\mathbb{R}^n$ με προφανή τρόπο: αν $\vec{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ και $\vec{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, τότε η i-οστή συνιστώσα του $\vec{u} + \vec{v}$ είναι $u_i + v_i$ και η i-οστή συνιστώσα του $c\vec{v}$ είναι cv_i.

Επειδή στο $\mathbb{R}^n$ δεν μπορούμε πλέον να σχεδιάζουμε διανύσματα, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να μπορούμε να πραγματοποιούμε υπολογισμούς με αυτά. Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να μη θεωρούμε δεδομένο ότι η αριθμητική των διανυσμάτων θα είναι πάντοτε παρόμοια με την αριθμητική των πραγματικών αριθμών. Συχνά είναι, και οι αλγεβρικοί υπολογισμοί με διανύσματα μοιάζουν με εκείνους που κάνουμε με βαθμωτά μεγέθη. Ωστόσο, σε επόμενες ενότητες θα συναντήσουμε περιπτώσεις όπου η άλγεβρα διανυσμάτων διαφέρει ουσιαστικά από την εμπειρία μας με τους πραγματικούς αριθμούς. Γι' αυτόν τον λόγο είναι σημαντικό να επαληθεύουμε κάθε αλγεβρική ιδιότητα πριν επιχειρήσουμε να τη χρησιμοποιήσουμε.

Μία τέτοια ιδιότητα είναι η **αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης**:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u},$$

για διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Αυτό ισχύει βεβαίως στο $\mathbb{R}^2$. Γεωμετρικά, ο κανόνας τέλους - αρχής δείχνει ότι τόσο το $\vec{u} + \vec{v}$ όσο και το $\vec{v} + \vec{u}$ είναι οι κύριες διαγώνιοι του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$. (Ο κανόνας του παραλληλογράμμου εκφράζει επίσης αυτή τη συμμετρία.)

Σημειώνουμε ότι Ο κανόνας του παραλληλογράμμου αποτελεί απλώς μια απεικόνιση της ιδιότητας $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ και όχι απόδειξη, καθώς δεν καλύπτει όλες τις δυνατές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, πρέπει να συμπεριληφθούν και οι περιπτώσεις όπου $\vec{u} = \vec{v}$, $\vec{u} = -\vec{v}$ και $\vec{u} = \vec{0}$. Για τον λόγο αυτό απαιτείται αλγεβρική απόδειξη. Ωστόσο, είναι εξίσου εύκολο να δοθεί μια απόδειξη που ισχύει στο $\mathbb{R}^n$ όσο και μία που ισχύει στο $\mathbb{R}^2$.

Το παρακάτω θεώρημα συνοψίζει τις αλγεβρικές ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού με βαθμωτό στο $\mathbb{R}^n$. Οι αποδείξεις προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

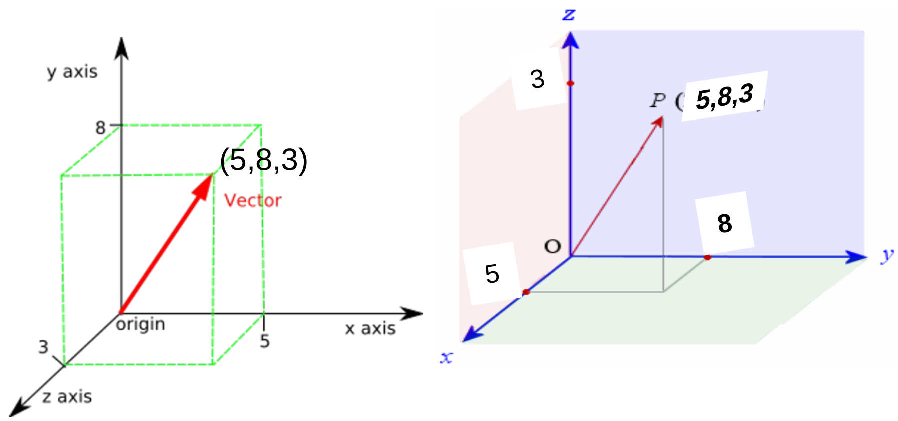


Figure 1.4: Διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$

Παράδειγμα 1.0.5.

Ο χώρος $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχεί στο σύνολο όλων των βελών προέλευσης από την αρχή ενός επιπέδου. Το διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

αναπαριστά ένα βέλος που ξεκινά από την αρχή $(0,0)$ και καταλήγει στο σημείο $(3,1)$. Παρομοίως, ένα διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

αντιστοιχεί σε ένα βέλος στον τρισδιάστατο χώρο $x_1x_2x_3$ που ξεκινά από την αρχή $(0,0,0)$ και τερματίζει στο σημείο (a_1, a_2, a_3). Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 1.4. Για $N > 3$, μπορούμε να φανταστούμε ένα τέτοιο βέλος, ακόμη και αν δεν είναι δυνατόν να το σχεδιάσουμε.

1.0.7 Αλγεβρικές Ιδιότητες Διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$

Έστω $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$ (βαθμωτά). Τότε ισχύουν οι ακόλουθες αλγεβρικές ιδιότητες:

1. Μεταθετικότητα:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

2. Προσεταιριστικότητα:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$

3. Προστιθέμενη ταυτότητα:

$$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$$

4. Προστιθέμενο αντίστροφο:

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$$

5. Πολλαπλασιαστική επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων:

$$c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$$

6. Πολλαπλασιαστική επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση βαθμωτών:

$$(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$$

7. Προσεταιριστικότητα βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

$$c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$$

8. Μοναδιαίος βαθμωτός:

$$1\mathbf{u}=\mathbf{u}$$

Για παράδειγμα, Έστω $\vec{u}=[u_1,u_2,\dots,u_n]$, $\vec{v}=[v_1,v_2,\dots,v_n]$ και $\vec{w}=[w_1,w_2,\dots,w_n]$.

(α)

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v}&=[u_1,u_2,\dots,u_n]+[v_1,v_2,\dots,v_n]\\&=[u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ \dots,\ u_n+v_n]\\&=[v_1+u_1,\ v_2+u_2,\ \dots,\ v_n+u_n]\\&=[v_1,v_2,\dots,v_n]+[u_1,u_2,\dots,u_n]\\&=\vec{v}+\vec{u}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.0.6.

Έστω ότι τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{x}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$.

(α) Απλοποιήστε την παράσταση

$$3\mathbf{a}+(5\mathbf{b}-2\mathbf{a})+2(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

(β) Αν

$$5\mathbf{x} - \mathbf{a} = 2(\mathbf{a} + 2\mathbf{x}),$$

να βρείτε το $\mathbf{x}$ ως συνάρτηση του $\mathbf{a}$.

Λύση

Θα δώσουμε και τις δύο λύσεις αναλυτικά, με αναφορά σε όλες τις ιδιότητες της λίστας που αναφέραμε. Είναι καλή πρακτική να δικαιολογείτε όλα τα βήματα τις πρώτες φορές που κάνετε τέτοιου είδους υπολογισμούς. Όταν όμως εξοικειωθείτε με τις ιδιότητες των διανυσμάτων, είναι αποδεκτό να παραλείπετε ορισμένα ενδιάμεσα βήματα για εξοικονόμηση χρόνου και χώρου.

(α) Ξεκινάμε εισάγοντας παρενθέσεις:

$$3\mathbf{a} + 15\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$$

$$= (3\mathbf{a} - 2\mathbf{a} - 2\mathbf{a}) + (15\mathbf{b} + 2\mathbf{b})$$

$$= -\mathbf{a} + 7\mathbf{b}.$$

Στην πράξη, είναι αποδεκτό να απλοποιήσουμε τη διαδικασία ως εξής:

$$3\mathbf{a} + (5\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = -\mathbf{a} + 7\mathbf{b}.$$

(β) Αναλυτικά, έχουμε:

$$5\mathbf{x} - \mathbf{a} = 2(\mathbf{a} + 2\mathbf{x})$$

$$5\mathbf{x} - \mathbf{a} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{x}$$

$$5\mathbf{x} - 4\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{x} = 3\mathbf{a}.$$

Και πάλι, συνήθως παραλείπουμε τα περισσότερα από αυτά τα ενδιάμεσα βήματα.

1.0.8 Ορθοκανονικά διανύσματα στους δυο αξονες kai Γραμμικοί συνδυασμοί

Στο καρτεσιανό επίπεδο, ορίζουμε πάνω στους δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O δυο μοναδιαία διανύσματα $\vec{\imath}$ και $\vec{\jmath}$. Τότε λέμε ότι έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων** στο επίπεδο, δες Σχ. 1.0.8.

Έστω τώρα το Oxy σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{a}$ ένα διάνυσμα αυτού. Με αρχή το O παίρνουμε διάνυσμα

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}.$$

Από το A φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες που τους τέμνουν στα σημεία A_1 και A_2 (δες Σχ. 1.0.8). Αν x και y είναι οι αριθμοί που αντιστοιχούν στα σημεία A_1 και A_2 των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, τότε το σημείο A έχει συντεταγμένες (x, y).

Το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ μπορεί τότε να γραφτεί ως άθροισμα δύο διανυσμάτων, ενός παράλληλου προς τον άξονα $x'x$ και ενός παράλληλου προς τον άξονα $y'y$, δηλαδή

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}.$$

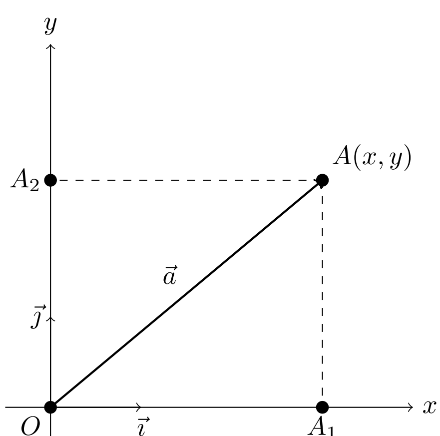
Επειδή $\overrightarrow{OA_1} = x\,\vec{\imath}$ και $\overrightarrow{A_1A} = y\,\vec{\jmath}$, προκύπτει ότι

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}.$$

Άρα, το διάνυσμα $\vec{a}$ γράφεται ως **γραμμικός συνδυασμός** των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{\imath}$ και $\vec{\jmath}$, με συντελεστές τους αριθμούς x και y.

Οι αριθμοί x και y λέγονται **συντεταγμένες** του διανύσματος $\vec{a}$ ως προς το καρτεσιανό σύστημα Oxy, και γράφουμε

$$\vec{a} = (x, y).$$



Ένα διάνυσμα που είναι άθροισμα βαθμωτών πολλαπλασίων άλλων διανυσμάτων λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** αυτών των διανυσμάτων. Ακολουθεί ο τυπικός ορισμός.

Ορισμός 1.0.2 *Ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ αν υπάρχουν βαθμωτοί αριθμοί $c_1, c_2, \ldots, c_k$ τέτοιοι ώστε*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k.$$

*Οι βαθμωτοί αριθμοί $c_1, c_2, \ldots, c_k$ λέγονται **συντελεστές** του γραμμικού συνδυασμού.*

Εφαρμογή 1.0.1 *Το διάνυσμα*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

αφού

$$3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση 1.0.2 *Το πρόβλημα του να προσδιορίσουμε αν ένα δεδομένο διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός άλλων διανυσμάτων θα το μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 2.*

Στο $\mathbb{R}^2$*, είναι δυνατό να απεικονίσουμε γραμμικούς συνδυασμούς δύο (μη παράλληλων) διανυσμάτων με αρκετά βολικό τρόπο. Παρακάτω δίνουμε ενα παράδειγμα.*
Έστω

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα $\mathbf{u}$ *και* $\mathbf{v}$ *για να ορίσουμε ένα νέο σύστημα αξόνων (με τον ίδιο τρόπο που τα*

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ορίζουν τους τυπικούς άξονες συντεταγμένων).

1.1 Το Εσωτερικό Γινόμενο. Μήκος και Γωνία διανυσμάτων

Είναι αρκετά εύκολο να επαναδιατυπώσουμε τις γνωστές γεωμετρικές έννοιες του μήκους, της απόστασης και της γωνίας με όρους διανυσμάτων. Κάνοντάς το αυτό, θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις σημαντικές και ισχυρές ιδέες σε πλαίσια πιο γενικά από το $\mathbb{R}^2$ και το $\mathbb{R}^3$. Στα επόμενα κεφάλαια, αυτά τα απλά γεωμετρικά εργαλεία θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση μιας μεγάλης ποικιλίας προβλημάτων που προκύπτουν από εφαρμογές — ακόμη και όταν δεν υπάρχει καμία εμφανής γεωμετρία!

1.1.1 Το Εσωτερικό Γινόμενο

Οι διανυσματικές εκδοχές του μήκους, της απόστασης και της γωνίας μπορούν όλες να περιγραφούν με τη βοήθεια της έννοιας του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων.

Ορισμός 1.1.1 *Αν*

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

τότε το ***εσωτερικό γινόμενο*** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *των* $\mathbf{u}$ *και* $\mathbf{v}$ *ορίζεται ως*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Με λόγια, το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ είναι το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συνιστωσών των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε δύο πράγματα σχετικά με αυτό το ≪γινόμενο≫ που μόλις ορίσαμε. Πρώτον, τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό συνιστωσών. Δεύτερον, το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ είναι ένας αριθμός και όχι ένα διάνυσμα. (Για τον λόγο αυτό, το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ονομάζεται μερικές φορές *βαθμωτό γινόμενο* των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.) Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$ αποτελεί μια ειδική και σημαντική περίπτωση της γενικότερης έννοιας του *εσωτερικού χώρου*, την οποία θα μελετήσουμε σε επόμενο Κεφάλαιο.

Παράδειγμα 1.1.1.

Να υπολογιστεί το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ όταν

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Λύση

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 = -3 + 10 - 6 = 1.$$

Παρατηρούμε ότι αν υπολογίζαμε το $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ στο παραπάνω παράδειγμα, θα βρίσκαμε

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (-3) \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 1.$$

Το γεγονός ότι γενικά ισχύει $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ είναι προφανές, αφού τα γινόμενα των αντίστοιχων συνιστωσών αντιμετατίθενται. Αυτή η ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας είναι μία από τις βασικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, οι οποίες συνοψίζονται στο Θεώρημα 1.1.1.

Θεώρημα 1.1.1 *Έστω ότι* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *και* $\mathbf{w}$ *είναι διανύσματα στο* $\mathbb{R}^n$ *και έστω* c *ένας βαθμωτός αριθμός. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ *(Αντιμεταθετικότητα)*
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ *(Διανεμητικότητα)*
3. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ *και* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ *αν και μόνο αν* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Απόδειξη Θα αποδείξουμε τις περιπτώσεις (a) και (c) και αφήνουμε την απόδειξη των υπολοίπων ιδιοτήτων ως ασκήσεις.

(a) Αντιμεταθετικότητα: Εφαρμόζοντας τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου στα $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ και $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, έχουμε

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n u_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},$$

όπου η μεσαία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών αριθμών είναι αντιμεταθετικός.

(c) Πολλαπλασιασμός με βαθμωτό: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και του εσωτερικού γινομένου, έχουμε

$$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = cu_1 v_1 + cu_2 v_2 + \cdots + cu_n v_n = c(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$

Σχόλια:

- Η ιδιότητα (b) μπορεί να διαβαστεί και από δεξιά προς τα αριστερά, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα κοινό διάνυσμα $\mathbf{u}$ από άθροισμα εσωτερικών γινομένων. Αυτή η ιδιότητα έχει και μια ≪δεξιόχειρη≫ αναλογία:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}.$$

- Η ιδιότητα (c) μπορεί να επεκταθεί ώστε να έχουμε

$$\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

  Αυτή η επέκταση λέει ουσιαστικά ότι σε έναν βαθμωτό πολλαπλασιασμό του εσωτερικού γινομένου, ο βαθμωτός μπορεί πρώτα να συνδυαστεί με οποιοδήποτε διάνυσμα είναι πιο βολικό.

- Το δεύτερο μέρος της (d) χρησιμοποιεί τη λογική συνδετική φράση ≪αν και μόνο αν≫, η οποία υποδηλώνει διπλή συνεπαγωγή:

$$\text{αν } \mathbf{u} = 0, \text{ τότε } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{και} \quad \text{αν } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ τότε } \mathbf{u} = 0.$$

□

Το Θεώρημα 1.1.1 δείχνει ότι η άλγεβρα των διανυσμάτων μοιάζει με την άλγεβρα των αριθμών. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι μπορούμε μερικές φορές να βρούμε διανυσματικά ανάλογα γνωστών ταυτοτήτων.

Εφαρμογή 1.1.1 *(Απόδειξη ταυτότητας για το εσωτερικό γινόμενο)*

Δεδομένο: *Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *ισχύει*

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Λύση:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

(Σημείωση: Σε κάθε βήμα χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες του Θεωρήματος 1.1.1)

1.1.2 Μήκος διανύσματος

Για να δούμε πώς παίζει ρόλο το εσωτερικό γινόμενο στον υπολογισμό του μήκους, θυμηθείτε πώς υπολογίζονται τα μήκη στο επίπεδο. Αρκεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Στο $\mathbb{R}^2$, το μήκος του διανύσματος

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων στο σημείο (a, b), η οποία, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, δίνεται από

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $a^2 + b^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.1.2 *Το* ***μήκος*** *(ή νόρμα) ενός διανύσματος* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *είναι ο μη αρνητικός βαθμωτός αριθμός* $\|\mathbf{v}\|$ *οριζόμενος από*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Με άλλα λόγια, το μήκος ενός διανύσματος είναι η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συνιστωσών του. Σημειώστε ότι η τετραγωνική ρίζα του $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ είναι πάντα ορισμένη, αφού από το Θεώρημα

1.1.1(d) έχουμε $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$. Επίσης, ο ορισμός μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v},$$

το οποίο θα είναι χρήσιμο για την απόδειξη περαιτέρω ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου και του μήκους διανυσμάτων.

Παράδειγμα 1.1.2.

Υπολογίστε το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v} = (2, 3, 4)$:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

Ιδιότητες μήκους διανυσμάτων Έστω $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ και c βαθμωτός αριθμός. Τότε ισχύουν:

1. $\|\mathbf{v}\| = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. $\|c\mathbf{v}\| = |c| \, \|\mathbf{v}\|$.

Απόδειξη Η ιδιότητα (a) ακολουθεί άμεσα από το Θεώρημα 1.1.1(d). Για να δείξουμε την (b):

$$\|c\mathbf{v}\|^2 = (c\mathbf{v}) \cdot (c\mathbf{v}) = c^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = c^2\|\mathbf{v}\|^2$$

χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1.1(c). Λαμβάνοντας τετραγωνική ρίζα, και αφού $|c| \geq 0$ για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό c, παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$\|c\mathbf{v}\| = |c| \, \|\mathbf{v}\|.$$

□

Μονάδα Διανύσματος (Unit Vector) Ένα διάνυσμα μήκους 1 ονομάζεται **μονάδα διανύσματος** (unit vector). Στο $\mathbb{R}^2$, το σύνολο όλων των μονάδων διανυσμάτων μπορεί να ταυτιστεί με τον **μονάδα κύκλο**, τον κύκλο ακτίνας 1 με κέντρο την αρχή των αξόνων (βλ. Σχήμα 1.5A).

Δοθέντος ενός μη μηδενικού διανύσματος $\mathbf{v}$, μπορούμε πάντα να βρούμε ένα διάνυσμα μονάδας στην ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{v}$, διαιρώντας το $\mathbf{v}$ με το μήκος του (ή ισοδύναμα, πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}$), βλ. Σχήμα 1.5B).

Μπορούμε να το δείξουμε αλγεβρικά χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (b) του Θεωρήματος 1.1.1:

$$\text{Αν } \mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}, \text{ τότε } \|\mathbf{u}\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1,$$

και το $\mathbf{u}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{v}$, αφού $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}$ είναι θετικός βαθμωτός. Η διαδικασία εύρεσης ενός διανύσματος μονάδας στην ίδια κατεύθυνση ονομάζεται **κανονικοποίηση του διανύσματος** (normalizing a vector) — βλ. Σχήμα 1.5Β).

Παράδειγμα 1.1.3.

Στο $\mathbb{R}^2$, θεωρούμε τα διανύσματα

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Τα $\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{e}_2$ είναι διανύσματα μονάδας, αφού το άθροισμα των τετραγώνων των συνιστωσών τους είναι 1 σε κάθε περίπτωση, Σχήμα 1.5Γ).

Παρομοίως, στο $\mathbb{R}^3$, μπορούμε να κατασκευάσουμε διανύσματα μονάδας

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

δες Σχήμα 1.5Γ.
Παρατηρήστε ότι αυτά τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για να ορίσουν τους θετικούς άξονες στο $\mathbb{R}^2$ και στο $\mathbb{R}^3$.

Γενικά, στο $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε τα διανύσματα μονάδας $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, όπου το $\mathbf{e}_i$ έχει 1 στη i-οστή συνιστώσα και μηδενικά στις υπόλοιπες. Αυτά τα διανύσματα εμφανίζονται συχνά στη γραμμική άλγεβρα και ονομάζονται **τυπικά διανύσματα μονάδας** (standard unit vectors).

Παράδειγμα 1.1.4.

Κανονικοποιήστε το διάνυσμα

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Λύση:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Το $\mathbf{u}$ είναι το διάνυσμα μονάδας στην ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{v}$.

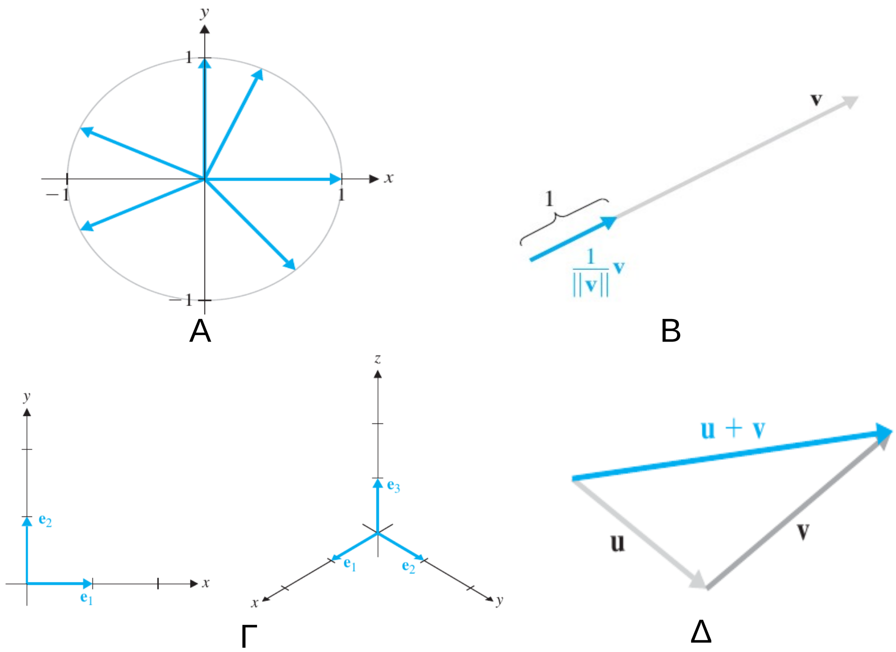


Figure 1.5: (A) Μοναδιαία διανύσματα πάνω στον μοναδιαίο (μέτρο ακτίνας ισο με 1), (B) μετατροπή διανύσματος στην διεύθυνση του $\mathbf{v}$, (Γ) τα μοναδιαία διανύσματα με αρχή την αρχή o των αξόνων, (Δ) πρόσθεση διανυσμάτων.

1.1.3 Σχέση μήκους, εσωτερικού γινομένου και πρόσθεσης διανυσμάτων

Η ιδιότητα (b) του Θεωρήματος 1.1.1 περιγράφει τη συμπεριφορά του μήκους σε σχέση με τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Φυσική ερώτηση είναι αν το μήκος και η πρόσθεση διανυσμάτων είναι συμβατά.

Θα ήταν βολικό να είχαμε την ταυτότητα

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|,$$

όμως για σχεδόν οποιαδήποτε ζεύγη διανυσμάτων $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ αυτό δεν ισχύει. Ωστόσο, αν αντικαταστήσουμε το ίσον με το σύμβολο $\leq$, τότε προκύπτει η σωστή ανισότητα, γνωστή ως **Ανισότητα Τριγώνου (Triangle Inequality)**. Η απόδειξη αυτής της σημαντικής ανισότητας βασίζεται σε μια άλλη κρίσιμη ανισότητα, την **Ανισότητα Cauchy–Schwarz**, την οποία θα αποδείξουμε και θα συζητήσουμε λεπτομερέστερα σε επόμενο Κεφάλαιο.

Ανισότητα Cauchy–Schwarz Για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|.$$

Απόδειξη ανισότητας Cauchy–Schwarz για $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

Για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ισχύει:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|,$$

όπου

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2, \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Απόδειξη Ξεκινάμε από τον τύπο του εσωτερικού γινομένου στο $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Θεωρούμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό t η συνάρτηση

$$f(t) = \|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 \geq 0,$$

είναι μη αρνητική, αφού είναι τετράγωνο μήκους.

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 \\
&= (u_1 - tv_1)^2 + (u_2 - tv_2)^2 \\
&= u_1^2 - 2tu_1v_1 + t^2v_1^2 + u_2^2 - 2tu_2v_2 + t^2v_2^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2) - 2t(u_1v_1 + u_2v_2) + t^2(v_1^2 + v_2^2) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 - 2t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + t^2\|\mathbf{v}\|^2.
\end{aligned}$$

Η $f(t)$ είναι τετράγωνη ως προς t:

$$f(t) = \|\mathbf{v}\|^2 t^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})t + \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Για να είναι ένα τετράγωνο πολυώνυμο μη αρνητικό για όλα τα t, η διακρίνουσα πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός:

$$\Delta = [-2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})]^2 - 4\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{u}\|^2 \leq 0.$$

Απλοποιούμε:

$$4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - 4\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2.$$

Τέλος, παίρνοντας τετραγωνική ρίζα, προκύπτει η ανισότητα:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|.$$

$\square$

Στο $\mathbb{R}^2$ ή στο $\mathbb{R}^3$, όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρία, είναι εμφανές από ένα διάγραμμα όπως το Σχήμα 1.6 ότι

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \text{για όλα τα διανύσματα } \mathbf{u}, \mathbf{v}.$$

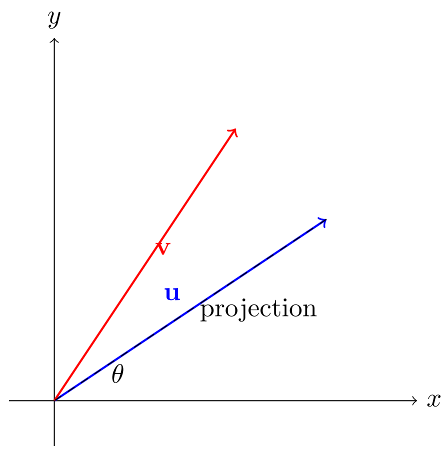


Figure 1.6: Γεωμετρική ερμηνεία της Ανισότητας Cauchy–Schwarz: $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$

Τριγωνική Ανισότητα Για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Απόδειξη Εφόσον και οι δύο πλευρές της ανισότητας είναι μη αρνητικές, αρκεί να δείξουμε ότι το τετράγωνο της αριστερής πλευράς είναι μικρότερο ή ίσο από το τετράγωνο της δεξιάς. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\
&= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{(Cauchy–Schwarz)} \\
&= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2,
\end{aligned}$$

όπως απαιτείται. □

Απόσταση Η απόσταση μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι άμεσο ανάλογο της απόστασης μεταξύ δύο σημείων στον πραγματικό άξονα ή στο καρτεσιανό επίπεδο.

Στη γραμμή των αριθμών, η απόσταση μεταξύ των αριθμών a και b δίνεται από

$$|a-b|.$$

Αυτός ο τύπος γενικεύεται στη διάσταση δύο για τα σημεία (a_1, a_2) και (b_1, b_2):

$$d = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}.$$

Σε όρους διανυσμάτων, αν

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

τότε η απόσταση είναι απλώς το μήκος του διανύσματος $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.7.

Ορισμός 1.1.3 *Η **απόσταση** $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ μεταξύ διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Παράδειγμα 1.1.5.

Βρείτε την απόσταση μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Λύση: Υπολογίζουμε

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

οπότε η απόσταση είναι

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Παράλληλα διανύσματα

Ορισμός 1.1.4 (Αλγεβρικός ορισμός) *Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγονται **παράλληλα** (ή συγγραμμικά), αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε*

$$\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}. \tag{1.1.1}$$

*Ειδικότερα, Αν $\lambda > 0$, τα διανύσματα είναι **ομόρροπα** και Αν $\lambda < 0$, τα διανύσματα είναι **αντίρροπα**.*

Γεωμετρική διατύπωση Δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι παράλληλα αν και μόνο αν οι φορείς τους είναι παράλληλες ευθείες ή συμπίπτουν. Ισοδύναμα, έχουν γωνία

$$\theta = 0 \quad \text{ή} \quad \theta = \pi. \tag{1.1.2}$$

Παρατήρηση 1.1.1 *Γενικότερα μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω γενικεύσεις της τριγωνικής ανισότητας*

- *Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, δηλαδή δεν είναι παράλληλα, τότε έχουμε*

$$\big| \|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\| \big| < \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| < \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|.$$

- *Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, τότε προφανώς ισχύει*

$$\big|\|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\|\big| < \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|.$$

- *Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, τότε προφανώς ισχύει*

$$\big|\|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\|\big| = \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| < \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|.$$

Τέλος, αν ένα από τα διανύσματα είναι το μηδενικό, τότε προφανώς ισχύει:

$$\big|\|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\|\big| = \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|.$$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει:

$$\boxed{\big|\|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\|\big| \leq \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| \leq \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|}$$

Γωνίες μεταξύ διανυσμάτων .

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων. Στο $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$, η γωνία μεταξύ των μη μηδενικών διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι η γωνία θ που ικανοποιεί $0 \leq \theta \leq 180°$.

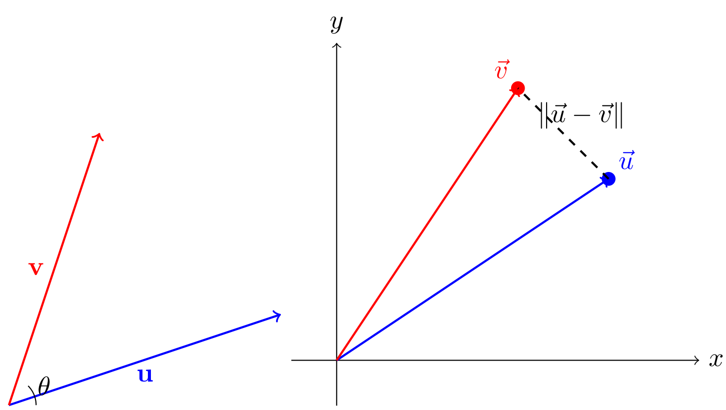


Figure 1.7: Αριστερά, Γωνία μεταξύ διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, Δεξιά, Η απόσταση μεταξύ δυο διανυσμάτων

Χρησιμοποιώντας τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο με πλευρές $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{u} - \mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta.$$

Απλοποιώντας παίρνουμε τον γνωστό τύπο:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta.$$

Ορισμός 1.1.5 *Για μη μηδενικά διανύσματα* $\mathbf{u}$ *και* $\mathbf{v}$ *στο* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Παράδειγμα 1.1.6.

Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{u} = [2, 1, -2]$ και $\mathbf{v} = [1, 1, 1]$.

Λύση:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 1 = 1, \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Άρα:

$$\cos\theta = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \approx 1.377 \text{ rad} \approx 78.9^\circ.$$

1.1.4 Ορθογώνια Διανύσματα και προβολές Διανυσμάτων

Δύο διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ στο $\mathbb{R}^n$ λέγονται **ορθογώνια** αν:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

Παράδειγμα, στο $\mathbb{R}^3$, τα διανύσματα $\mathbf{u} = [1, 1, -2]$ και $\mathbf{v} = [3, 1, 2]$ είναι ορθογώνια, καθώς $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3 + 1 - 4 = 0$.

Θεώρημα 1.1.2 (Πυθαγόρειο Θεώρημα για Διανύσματα) *Για όλα τα διανύσματα* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *στο* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

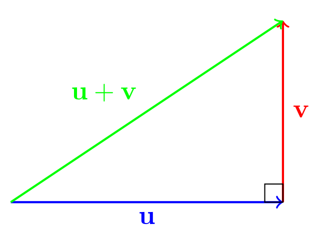


Figure 1.8: Πυθαγόρειο Θεώρημα για ορθογώνια διανύσματα.

Προβολές

Τώρα εξετάζουμε το πρόβλημα της εύρεσης της απόστασης από ένα σημείο σε μια ευθεία στο πλαίσιο των διανυσμάτων. Όπως θα δούμε, αυτή η τεχνική οδηγεί σε μια σημαντική έννοια: την **προβολή ενός διανύσματος πάνω σε ένα άλλο**.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.36, το πρόβλημα της εύρεσης της απόστασης από ένα σημείο B σε μια ευθεία ℓ (στο $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$) μειώνεται στο πρόβλημα εύρεσης του μήκους του κάθετου τμήματος PB, ή ισοδύναμα, του διανύσματος $\mathbf{PB}$. Αν επιλέξουμε ένα σημείο A πάνω στην ευθεία, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο APB, τα άλλα δύο διανύσματα είναι η κάθετη πλευρά $\mathbf{AP}$ και η υποτείνουσα $\mathbf{AB}$. Η $\mathbf{AP}$ ονομάζεται **προβολή του $\mathbf{AB}$ πάνω στην ευθεία ℓ**.

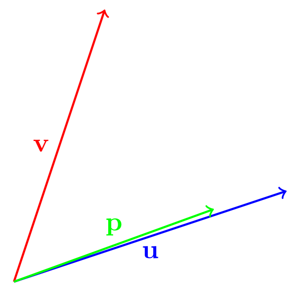


Figure 1.9: Η προβολή $\mathbf{v}$ πάνω στο $\mathbf{u}$.

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Έστω $\mathbf{p}$ το διάνυσμα που προκύπτει από την καθέτου από την κεφαλή του $\mathbf{v}$ προς την κατεύθυνση του $\mathbf{u}$, και έστω θ η γωνία μεταξύ $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Τότε, σαφώς:

$$\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|\,\hat{\mathbf{u}}, \quad \text{όπου } \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \text{ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του } \mathbf{u}.$$

Η στοιχειώδης τριγωνομετρία δίνει:

$$\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{v}\|\cos\theta, \quad \text{και γνωρίζουμε ότι } \cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

Συνεπώς:

$$\mathbf{p} = \|\mathbf{v}\|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u}.$$

Ορισμός 1.1.6 *Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$, τότε η **προβολή του $\mathbf{v}$ πάνω στο $\mathbf{u}$** ορίζεται ως*

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u}.$$

Παρατηρήσεις:

- Ο όρος "προβολή" προέρχεται από την ιδέα προβολής μιας εικόνας σε έναν τοίχο, όπως με έναν προτζέκτορα.

- Η $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ είναι πάντα ένας πολλαπλασιασμός του $\mathbf{u}$ με ένα πραγματικό αριθμό (όχι του $\mathbf{v}$).
- Αν $\mathbf{v} = 0$, τότε $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = 0$.
- Αν η γωνία μεταξύ $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι αμβλεία, τότε η προβολή θα έχει φορά αντίθετη προς $\mathbf{u}$ (αρνητικός πολλαπλασιαστής).

Παράδειγμα 1.1.7.

Βρείτε την προβολή του $\mathbf{v}$ πάνω στο $\mathbf{u}$ στις εξής περιπτώσεις:

1. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Λύση: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 1$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 2^2 + 1^2 = 5$,

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}.$$

2. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \mathbf{e}_3$ Λύση: $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} = 1$, $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$,

$$\text{proj}_{\mathbf{e}_3}(\mathbf{v}) = 1 \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Λύση: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 + 1 + 4 = 7$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 + 1 + 4 = 6$,

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{7}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ 7/6 \\ 7/3 \end{bmatrix}.$$

1.2 Εξίσωση Ευθείας, Γραμμική Εξίσωση Δύο Μεταβλητών

Κάθε εξίσωση της μορφής:

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

όπου $A, B \in \mathbb{R}$ και δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν, παριστάνει ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

Μορφή Κλίσης–Τομής Αν $B \neq 0$, λύνοντας ως προς y:

$$y = ax + \beta$$

όπου:

$$a = -\frac{A}{B}, \quad \beta = -\frac{\Gamma}{B}$$

Ερμηνεία:

- a : συντελεστής διεύθυνσης (κλίση)
- β : σημείο τομής με τον άξονα y

Συντελεστής Διεύθυνσης

Για δύο σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ τα οποία ανήκουν σε μια ευθεία ε υπολογίζουμε :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2 \tag{1.2.1}$$

Ισχύει επίσης:

$$a = \tan\theta$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό ημιάξονα x.

Παρατηρήσεις

Τιμή a	Μορφή Ευθείας
$a > 0$	Αύξουσα
$a < 0$	Φθίνουσα
$a = 0$	Οριζόντια ($y = c$)
Μη ορισμένη	Κατακόρυφη ($x = c$)

Μορφή Σημείου - Κλίσης Η ευθεία που διέρχεται από σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει κλίση a δίνεται από:

$$y - y_0 = a(x - x_0) \tag{1.2.2}$$

Παράδειγμα 1.2.1.

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το $A(2,3)$ και έχει κλίση 4.
Λύση.
Σύμφωνα με τον τύπο (1.2.2), έχουμε

$$y - 3 = 4(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 4x - 8 \Rightarrow y = 4x - 5$$

Παράδειγμα 1.2.2.

Εξίσωση Ευθείας από Δύο Σημεία

Δίνονται τα σημεία της ευθείας ε $A(1,2)$ και $B(3,6)$. Ν βρείτε την εξίσωσή της.
Λύση.

Έχουμε για τον συντελεστή

$$a = \frac{6-2}{3-1} = 2 \tag{1.2.3}$$

οπότε

$$y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x \tag{1.2.4}$$

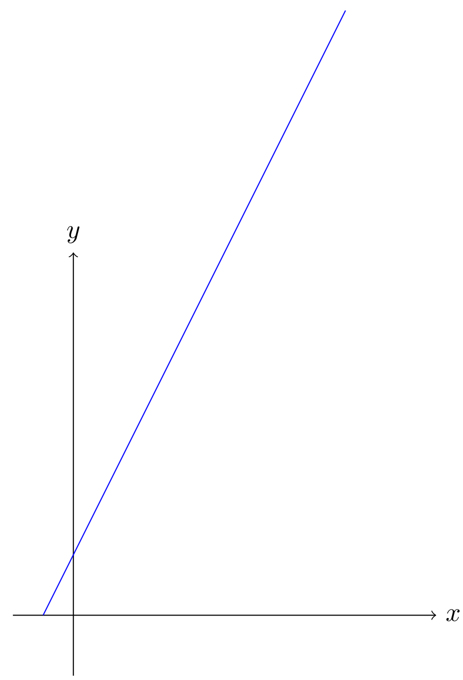
Παράλληλες και Κάθετες Ευθείες

Παράλληλες: τότε ισχύει

$$a_1 = a_2$$

Κάθετες:τότε ισχύει

$$a_1 a_2 = -1$$



Η παραπάνω γραφική παράσταση αντιστοιχεί στην ευθεία $y = 2x + 1$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(3, 4)$.
2. Να βρεθεί η ευθεία που είναι παράλληλη στην $y = -2x + 5$ και περνά από το $A(1, -3)$.
3. Να βρεθεί η ευθεία που είναι κάθετη στην $2x - y + 4 = 0$ και περνά από το $A(2, 1)$.